

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
MESTRADO EM FÍSICA**

TAÍSA UTIDA BARBOSA

**ESTUDO DO ESCOAMENTO DE FLUIDOS
NUMA GEOMETRIA ANULAR COAXIAL SOB
UM GRADIENTE DE PRESSÃO SUJEITO A
PERTURBAÇÃO DEPENDENTE DO TEMPO**

JOINVILLE

2021

TAÍSA UTIDA BARBOSA

**ESTUDO DO ESCOAMENTO DE FLUIDOS NUMA
GEOMETRIA ANULAR COAXIAL SOB UM GRADIENTE
DE PRESSÃO SUJEITO A PERTURBAÇÃO
DEPENDENTE DO TEMPO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Física - PPGF,
da Universidade do Estado de Santa Catarina
- UDESC, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Rafael Rodrigues Francisco

Coorientador: Marcus Vinicius Canhoto Alves

JOINVILLE

2021

Barbosa, Utida

Estudo do Escoamento em um Espaço Anular Entre
Cilindros Co-Axiais Aplicados na Engenharia de Petróleo
com a Atuação do Kick / Taísa Utida Barbosa - 2021.

73 p.

Orientador: Rafael Rodrigues Francisco

Coorientador: Marcus Vinícius Canhoto Alves

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado
de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2021.

1. Navier-Stokes. 2. Mecânica dos fluidos. 3.
Plástico de Bingham. 4. Perturbação. I. Francisco,
Rafael Rodrigues. II. Alves, Marcus Vinícius Canhoto.
III. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro
de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em
Física. IV. Título.

TAÍSA UTIDA BARBOSA

**ESTUDO DO ESCOAMENTO DE FLUIDOS NUMA GEOMETRIA ANULAR
COAXIAL SOB UM GRADIENTE DE PRESSÃO SUJEITO A PERTURBAÇÃO
DEPENDENTE DO TEMPO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Física - PPGF,
da Universidade do Estado de Santa Catarina
- UDESC, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rafael Francisco Rodrigues
UDESC

Membros:

Prof. Dr. Hololx Abreu Albuquerque
UDESC

Prof. Dr. Alysson Ferreira Morais
USP

Joinville, 10 de fevereiro de 2021.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar saúde, pelas oportunidades concedidas, por cada passo e pessoas que entraram no meu caminho, me fazendo chegar até aqui.

A minha família, que nunca mediram esforços para colaborarem com o meu sucesso. Em especial aos meus pais e a minha irmã, quando se tem uma base sólida e pessoas para te inspirar, não desistir dos seus sonhos se torna mais fácil. Eu realmente não tenho palavras para expressar tamanha a minha gratidão por vocês. Obrigada, eu amo vocês.

A minha sobrinha Heloísa, e meu primo Pedro, vocês me fazem querer ser uma pessoa melhor. Espero que eu possa servir de inspiração e exemplo no futuro de vocês.

Aos meus amigos, que deixam a vida mais leve. Principalmente aos meus companheiros de mestrado, tanto da física, quanto da engenharia mecânica, eu realmente não teria conseguido se não fosse por vocês.

Eu com toda a certeza não teria finalizado se não fosse pelo meu orientador Rafael, que além de professor se tornou um amigo, e não me virou as costas quando tive que me dividir entre o trabalho e a pesquisa.

E também ao meu coorientador, o qual tive a honra de ser aluna e poder de partilhar do seu conhecimento.

Por fim, quero agradecer a Universidade do Estado de Santa Catarina e a todos os professores do departamento de Física. Juntamente com a PROMOP.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

As equações de Navier-Stokes são as principais ferramentas para descrever o movimento de substâncias fluidas. Apesar das suas soluções serem utilizadas em muitas situações práticas, sua compreensão teórica ainda é incompleta. Atualmente, problemas com uma alta complexidade de mecânica dos fluidos são resolvidos apenas numericamente, com o auxílio computacional. Este trabalho busca analisar o escoamento em um espaço anular vertical entre cilindros co-axiais, através da solução analítica das equações de Navier-Stokes. Trazendo como pontos diferenciais o tipo de fluido utilizado, plástico de Bingham, e a inserção de uma perturbação no sistema. Além disso, a demonstração das equações de Navier-Stokes para esse tipo de fluido foram demonstradas para a geometria estudada e recorre-se as soluções da equação de Bessel para descrever o campo de velocidades. A solução numérica foi obtida através do software MATLAB, cumprindo o objetivo de validar o resultado analítico.

Palavras-chave: Navier-Stokes, mecânica dos fluidos, plástico de Bingham, perturbação.

ABSTRACT

The Navier-Stokes equations are the main tools to describe the movement of fluid substances. And although their solutions are used in many practical situations, their theoretical understanding are still incomplete. Currently, problems of fluid mechanics with high complexity are solved only numerically, with the computational help. This work look for analyze the flow in a vertical annular space between coaxial cylinders, through the analytical solution of the Navier-Stokes equations. The main increments in this work are the type of fluid used, Bingham plastic, and the insertion of a disturbance in the system. In addition, the demonstration of the Navier-Stokes equations for this type of fluid have been demonstrated for the geometry studied and the solutions of the Bessel equation are used to describe the velocity field . The numerical solution is obtained through the MATLAB software, validating the results obtained analitically

Keywords: Navier-Stokes, fluid mechanics, Bingham plastic, disturbance.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação de um poço de petróleo, em vermelho encontra-se a geometria do problema (FONTE: GAUZA modificado, 2011) [23]	18
Figura 2 – Classificação de poços de acordo com a sua direção (FONTE: PETROBRAS, 2018) [24]	19
Figura 3 – Classificação dos fluidos (FONTE: COSTA, 2017) [27]	21
Figura 4 – Tipos de fluidos (FONTE: ANDRADE, 2007) [28]	22
Figura 5 – Imagem representativa de um fluido de perfuração (FONTE: ABAS, 2020) [32] .	24
Figura 6 – Projeto de poços de petróleo: geopressões e assentamentos de colunas de revestimento (FONTE: ROCHA, 2009) [34]	25
Figura 7 – Representação de uma janela operacional, pressões admissíveis em função da profundidade (FONTE: GALDINO, 2016) [21]	26
Figura 8 – Representação da geometria do problema	27
Figura 9 – Representação do perfil da tensão, taxa de cisalhamento e velocidade no anular (FONTE: CHATZIMINA modificado, 2006) [35]	37
Figura 10 – Forças que agem sobre o escoamento	43
Figura 11 – Representação da velocidade x raio para um plástico de Bingham	45
Figura 12 – Série de Fourier durante o tempo 10	51
Figura 13 – Série de Fourier durante o tempo de 100	51
Figura 14 – Campo de velocidade durante o tempo 10	52
Figura 15 – Campo de velocidade durante o tempo 100	52
Figura 16 – Acréscimo de velocidade em decorrência da perturbação para o tempo 10 . .	53
Figura 17 – Acréscimo de velocidade em decorrência da perturbação para o tempo 100 .	53
Figura 18 – Velocidade média normalizada para o tempo 10	54
Figura 19 – Velocidade média normalizada para o tempo 100	54
Figura 20 – Perfis de velocidade 2D, para diferentes raios internos	55
Figura 21 – Representação do campo de velocidades no anular para diferentes raios internos	56
Figura 22 – Solução estacionária normalizada para diferentes Bn	57
Figura 23 – Campo de velocidades no anular para diferentes Bn	58
Figura 24 – Relação entre o número de Bingham x a velocidade média do escoamento .	58
Figura 25 – Aproximação da função seno e sua derivada em série de Fourier	59
Figura 26 – Aproximação da função exponencial e sua derivada em série de Fourier . . .	59
Figura 27 – Campo de velocidade durante a perturbação	60
Figura 28 – Acréscimo de velocidade em decorrência da perturbação	60
Figura 29 – Acréscimo de velocidade em decorrência da perturbação desconsiderando os extremos	61
Figura 30 – Acréscimo de velocidade em decorrência da perturbaçãoono tempo 70	61

Figura 31 – Velocidade média normalizada durando a perturbação	62
Figura 32 – Representação do fundo de um poço de petróleo. (FONTE: BARBOSA, 2018) [6]	66
Figura 33 – Gráfico das funções de Bessel de primeira espécie	71
Figura 34 – Gráfico das funções de Bessel de segunda espécie	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Modelos matemáticos dos tipos de fluidos	22
Tabela 2 – Fatores de um escoamento de um plástico de Bingham	56

LISTA DE SÍMBOLOS

σ	sigma - tensor de tensões;
\vec{f}	densidade de forças;
μ	mu - viscosidade dinâmica;
ν	nu - viscosidade cinemática;
$\bar{\tau}$	tau - tensão de cisalhamento;
ρ	rho - densidade do fluido;
\vec{g}	aceleração da gravidade;
$\bar{\tau}$	tensor deviatório;
II_T	segundo invariante tensorial;
ε	epsilon - gradiente simétrico;
κ	kappa - razão entre o raio interno e o raio externo;
λ	lambda - ponto em que a tensão de cisalhamento do escoamento é zero;
δ_{ij}	delta de kronecker.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Revisão Bibliográfica	14
1.1.1	Estudo do Fluido	14
1.1.2	Na Indústria de Petróleo	15
1.2	Estrutura do Trabalho	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
2.1	Formação Litológica	18
2.2	Poço de Petróleo	18
2.3	Fluido	19
2.3.1	Fluido Newtoniano	20
2.3.2	Fluido Não-Newtoniano	20
2.3.2.1	Plástico de Bingham	23
2.3.3	Fluido de Perfuração	23
2.4	Kick	24
2.5	Janela Operacional	25
3	MODELAGEM MATEMÁTICA	27
3.1	Geometria do Problema	27
3.2	Equações Governantes	28
3.2.1	Equação Geral de Navier-Stokes	28
3.2.2	Fluido Newtoniano Incompressível	28
3.2.3	Plástico de Bingham	32
3.2.4	Descrição da Variação da Pressão	45
4	SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS	50
4.1	Fluido Newtoniano Incompressível	50
4.2	Plástico de Bingham	56
5	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	63
5.1	Conclusões	63
	APÊNDICE A – EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PARA FLUIDO NEWTONIANO	64

APÊNDICE B – MODELAGEM DO PROBLEMA PARA INTRODUÇÃO DA PERTURBAÇÃO . . .	66
APÊNDICE C – EQUAÇÕES GERAIS E PROPRIEDADES MATEMÁTICAS	70
REFERÊNCIAS	72

1 INTRODUÇÃO

Desenvolvidas por Claude–Louis Navier [1] em 1827, e George Gabriel Stokes [2] em 1845, as equações de Navier-Stokes são as principais ferramentas ao retratar o movimento de substâncias fluidas. Estas equações são capazes de descrever a propagação de ondas, escoamentos laminares, bem como fenômenos de turbulência.

Matematicamente, trata-se de um sistema não linear com equações de derivadas parciais em campos tensoriais. Já para a física e engenharia, é um sistema de equações que modela o movimento de líquidos e gases utilizando a mecânica de meio contínuos.

Apesar das suas soluções serem utilizadas em muitas situações práticas, sua compreensão teórica ainda é incompleta. Tamanha sua complexidade e importância que a solução destas equações entrou para a lista dos problemas do milênio, proposto por Clay [3].

Algumas soluções exatas de casos particulares das equações já são conhecidas, como por exemplo o fluxo de Poiseuille [4], que se trata de um canal plano com dado diferencial de pressão constante. E o fluxo de Couette [5], entre duas placas paralelas, sendo que uma está em repouso, enquanto a outra está se movendo a uma velocidade constante em seu próprio plano.

Atualmente, problemas com uma complexidade mais avançada de mecânica dos fluidos são resolvidos numericamente com o auxílio computacional. O trabalho desenvolvido busca analisar o escoamento axial de um fluido num tubo anular vertical, através da solução analítica das equações de Navier-Stokes.

Tomando como ponto de partida um trabalho anterior já realizado pela autora, Barbosa (2018) [6], aprofundado por Zanotto (2018) [7] e Nantes (2019) [8]. A pesquisa tem como intuito compreender o movimento de substâncias fluidas, resultando em análises físicas também aplicadas na engenharia.

Dentre as inúmeras utilidades do escoamento em tubulações, a indústria do petróleo foi o campo de aplicação escolhido, um evento em específico de segurança de poço é aqui destacado, o caso de perfurações de poços com a ocorrência do *kick*. Em breves palavras, *kick* é o influxo indesejado de fluido que advém para dentro de um poço de petróleo no momento da perfuração, decorrente de uma diferença entre as pressões interna e externa ao poço durante a perfuração.

A escolha por continuar o estudo deste problema deve-se a grande quantidade de variáveis a explorar ainda em aberto, como mudança na geometria do poço, pressão, fluido, etc. Possibilitando assim diferentes análises de escoamento.

O objetivo específico consiste em desenvolver uma solução analítica mais geral para o estudo do escoamento em cilindros co-axiais do que a obtida em Barbosa e Zanotto, juntamente com uma diversificação do modelo, abrindo a possibilidade de multiplicação dos cenários, como a mudança do fluido para o plástico de Bingham, por exemplo, que se adequa não somente a indústria petroquímica, como também a de tintas e alimentos. Dando enfoque a variáveis físicas, campo de velocidades e campo de pressões.

O objetivo foi alcançado através do cálculo das soluções estacionárias para o fluido

newtoniano e para o plástico de Bingham. Também foi resolvida a equação de Navier-Stokes na geometria do anular para o plástico de Bingham, unindo a solução do Newtoniano encontrada por Barbosa(2018) [6]. Além disso foi incluso o *kick* como um termo que altera a pressão durante um determinado período.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção é apresentada uma síntese de estudos realizados nas últimas décadas que contribuíram marginalmente para a elaboração do presente trabalho. É um resumo histórico, o qual demonstra a evolução da análise do problema, juntamente como a forma que a abordagem assumida pela autora difere da maioria dos trabalhos já existentes, principalmente ao analisar a situação exemplo do texto.

1.1.1 Estudo do Fluido

Para entender sobre as propriedades físicas dos fluidos, é necessário compreender também os fenômenos e leis que os regem. Consequentemente, compreender as tradicionais definições de sólido e líquido, criadas por Robert Hooke (1678) [9] e Isaac Newton (1687) [10], respectivamente, torna-se fundamental para o início dos estudos do comportamento de substâncias com diferentes propriedades reológicas.

Em 1678, Robert Hooke [9] desenvolveu uma teoria sobre a elasticidade intitulada *True Theory of Elasticity*. Ele descreveu o comportamento de deformação elástica e plástica dos materiais em função da tensão perpendicular aplicada a eles, através de um simples ensaio de tração com molas. Propôs que a força de uma mola está em mesma proporção que a tensão a ela aplicada, essa é a premissa básica da teoria clássica da elasticidade.

Já Isaac Newton [10] em seu livro *Principia*, publicado em 1687, apresentou uma hipótese associada ao fluxo de líquidos. A qual relata uma relação linear entre a tensão de cisalhamento e o gradiente de velocidade do fluido, sendo que a constante de proporcionalidade seria a viscosidade do fluido.

Apesar de Newton ter introduzido sua ideia em 1687, foi somente no século XIX que Claude-Louis Navier [1] e George Gabriel Stokes [2], independentemente, desenvolveram uma teoria tensorial para o que é hoje chamado de fluido newtoniano. As equações que caracterizam o movimento dos fluidos, ficaram conhecidas como Equações de Navier-Stokes.

A lei de Hooke para os sólidos e a lei de Newton para os fluidos, satisfizeram os estudiosos de forma geral por aproximadamente 200 anos. Mas, ainda no século XIX, Wilhelm Weber [11], realizando experimentos com fios de seda, constatou que eles não eram perfeitamente elásticos. “Quando uma tensão era aplicada ao fio, havia um aumento instantâneo do comprimento. Posteriormente, no entanto, era observado um aumento adicional do comprimento, gradual, com o tempo. Por outro lado, quando a tensão era removida, ocorria uma redução imediata de comprimento, seguida posteriormente por uma diminuição gradual com o tempo. Isso ocorria

até o fio restabelecer seu comprimento original. Este era um material sólido cujo comportamento não podia ser descrito somente pela lei de Hooke. A forma com que o material se deformava apresentava algumas propriedades que eram típicas de um líquido.” (MOTTA, 2007) [12].

James Clerk Maxwell [13] sugeriu um modelo matemático para um fluido em que assumia a existência simultânea de viscosidade e elasticidade no material, o seu trabalho foi realizado em 1867, e intitulado *On the Dynamical Theory of Gases*. Ele infere que, a resposta de um material a um dado experimento depende da escala de tempo de observação em relação ao tempo natural do material. Por exemplo, a amostra irá parecer viscosa e não elástica se um experimento for relativamente lento, entretanto se ele for relativamente rápido, a amostra irá parecer elástica em vez de viscosa. Em escalas de tempo intermediárias uma resposta ambivalente, viscoelástica, apresentando ambos os tipos de comportamento, será observada.

Finalmente, em 1929, Eugene Bingham [14] introduziu o termo reologia para descrever a ciência que estuda a deformação e o fluxo da matéria. O professor também é responsável por propor a fórmula matemática do plástico de Bingham, nomeado assim em sua homenagem.

De modo geral o estudo da reologia dos materiais vem crescendo desde então, ganhando um grande destaque para as indústrias em geral. O enfoque que se segue será dado no ramo petrolífero.

1.1.2 Na Indústria de Petróleo

Escoamento em anulares com a ocorrência do *kick* tem o seu primeiro modelo matemático registrado no final da década de 60, por Leblanc e Lewis (1968) [15], o modelo apresentava uma geometria uniforme, desconsiderando as perdas de pressão por fricção. Além disso, o gás ocupa um volume único e contínuo, possuindo a mesma velocidade do fluido de perfuração.

Com o passar dos anos vários estudos foram surgindo, aprimorando a situação problema. Hoberock e Stanbery (1981) [16] vincularam a equação de movimento para descrever o comportamento da pressão, com uma seção de área constante, numa linha rígida de transmissão vertical. Aplicaram a teoria do escoamento homogêneo, ajustando as propriedades de uma região de escoamento bifásico com propriedades médias, de tal forma a poder considerar o escoamento monofásico.

No ano seguinte, Santos (1982) [17], apresentou um modelo matemático para circulação de *kick* em águas profundas, considerando perdas de carga por fricção, fração de vazios e escorregamento entre o gás e o fluido de perfuração. Utilizou o modelo de lei de Potência para representar o comportamento do fluido de perfuração. A partir dos resultados, concluiu que a geometria do poço, a fração inicial de gás, os parâmetros reológicos do fluido de perfuração e a profundidade da lâmina d'água possuem grande efeito durante a circulação do *kick*. E que propriedades como a massa específica do gás, o gradiente térmico e o diâmetro mínimo das bolhas de gás causam um efeito pequeno na circulação do mesmo.

O primeiro a implementar modelos de escoamento bifásico foi Nickens (1987) [18]. Baseado nas equações de conservação de massa do gás, da lama e do momento para mistura

gás-lama, o modelo exerce uma correlação empírica que associa a velocidade do gás com a velocidade da mistura adicionado o fator de escorregamento entre as fases. Foi também o primeiro a considerar a compressibilidade do fluido.

Utilizando o método de diferenças finitas na resolução, Avelar (2009) [19], realizou a modelagem matemática baseada em três equações diferenciais de balanço de massa e de quantidade de movimento. O modelo é capaz de simular um *kick* em poços verticais ou horizontais, em poços terrestres ou marítimos, utilizando um fluido de perfuração incompressível, considerando efeitos das perdas de carga por fricção, do deslizamento entre as fases e da expansão do gás.

Galdino (2014) [20] prevê a propagação de pressão ao longo do poço durante um *kick* de gás. O modelo é baseado nas equações de balanço de massa e de quantidade de movimento. Considera-se que o fluido é compressível e tixotrópico. O influxo é modelado através da lei de Darcy e emprega a lei dos gases ideais. Assume-se que o gás permanece estático no fundo do poço, sendo a sua solubilidade no fluido de perfuração desconsiderada.

Dois anos depois, Galdino (2016) [21], ao dar continuidade ao seu trabalho, propõe uma modelagem de como ocorre a transmissão de pressão ao longo do poço durante um influxo de gás. Adotando efeitos ainda poucos explorados na literatura, como a compressibilidade do fluido de perfuração e a variação da compressibilidade devido a presença de gás, a não transmissão total de pressão devido à tensão limite de escoamento e utiliza um método de discretização e solução das equações diferenciais parciais hiperbólicas de balanço que não foi aplicado em nenhum trabalho anterior, o método das características.

Por fim, o modelo que será realizado neste trabalho seguirá a linha desenvolvida por Barbosa (2018) [6], incrementada por Zanotto (2018) [7], a qual discretiza o campo de velocidades e o campo de pressão em cilindros coaxiais verticais, aplicados na indústria de petróleo devido a um *kick*. Os estudos partem das equações de Navier-Stokes, não havendo nada semelhante na área encontrado pelas autoras. Contam com soluções analíticas e numéricas para fluido Newtoniano, e uma comparação de resultados com a teoria presente na literatura. Para o texto em questão, o grande diferencial dos dois modelos anteriores é adotar plástico de Bingham como fluido de trabalho, sendo que as outras considerações tomadas se encontram descritas no capítulo 3. O resultado desse método será validado pela comparação com as informações bibliográficas conhecidas.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este texto está dividido em cinco capítulos. O presente capítulo serve como uma contextualização ao tema, a equação principal utilizada e modelo do cenário aplicado, juntamente com uma revisão bibliográfica, referente a estudos anteriores embasado em pesquisas similares. O capítulo 2, fornece conceitos indispensáveis para a compreensão do vigente trabalho, desenvolvendo algumas definições. No terceiro capítulo será exposta a modelagem matemática,

através da demonstração e desenvolvimento das equações que regem o problema, juntamente com as hipóteses adotadas pelo modelo. A simulação numérica dos resultados e teste da validade do modelo, apresentando uma discussão dos resultados obtidos, ocorrerá no capítulo 4. Por último, no capítulo 5, será exposta uma conclusão do estudo em comunhão com sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 FORMAÇÃO LITOLÓGICA

O termo litologia refere-se ao estudo especializado em rochas e suas camadas, e que examina os processos de litificação, ou às categorizações referentes a esses mesmos processos juntamente aos tempos geológicos em que ocorreram. Litologia está relacionada à rocha que irá formar o solo. As rochas podem ser categorizadas como metamórficas, ígneas, sedimentares ou magmáticas. Sendo assim, formação litológica pode ser definida por um conjunto de rochas individualizadas e delimitadas com base nos seus caracteres litológicos, como composição química, cor, forma estrutural e textura.

2.2 POÇO DE PETRÓLEO

Poço de petróleo é o termo utilizado para qualquer perfuração na superfície terrestre que tem como objetivo extrair hidrocarbonetos.

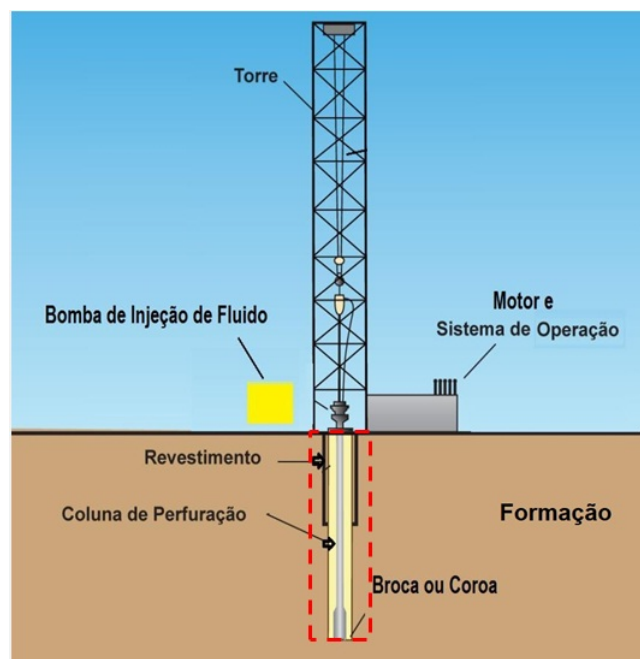


Figura 1 – Representação de um poço de petróleo, em vermelho encontra-se a geometria do problema (FONTE: GAUZA modificado, 2011) [23]

O petróleo se encontra nas denominadas rochas reservatórios, trata-se de uma formação rochosa com características, como permeabilidade e porosidade, adequadas a acumulação de óleo e/ou gás. As principais rochas reservatórios são os arenitos e conglomerados, rochas do tipo sedimentar. O poço nada mais é do que a estrutura que liga esse tipo de rocha à superfície. Sua dimensão geralmente varia entre 5 a 50 polegadas de diâmetro, já a variação da sua profundidade acontece de forma muito mais ampla. Para se ter uma ideia, o primeiro poço

de petróleo perfurado no mundo possuía aproximadamente 23 metros de fundura, localizava-se na Pensilvânia, o responsável por esse feito histórico, em 1859, foi o coronel Edwin L. Drake. Atualmente, segundo Melo (2019) [22], escritora do site "O petróleo", o poço que atingiu a maior profundidade do mundo foi o poço de Tibre, no Golfo do México, alcançando uma marca de 35000 pés. Porém o poço mais profundo não quer dizer ser o mais longo, isso porque um poço de petróleo não precisa ser necessariamente perfurado apenas na direção vertical. Poços os quais possuem um ângulo do furo vertical são chamados de poços direcionais. Utilizando a classificação de poços feita pela Petrobras (2015) [24], segundo sua direção, temos:

- Poço vertical: nesse tipo de perfuração, a sonda e o alvo (ou objetivo) estão na mesma reta vertical;
- Poço direcional: qualquer poço em que a perfuração não é feita na vertical;
- Poço horizontal: é um tipo de perfuração direcional, cuja extensão final do poço forma um ângulo de 90° com a vertical.

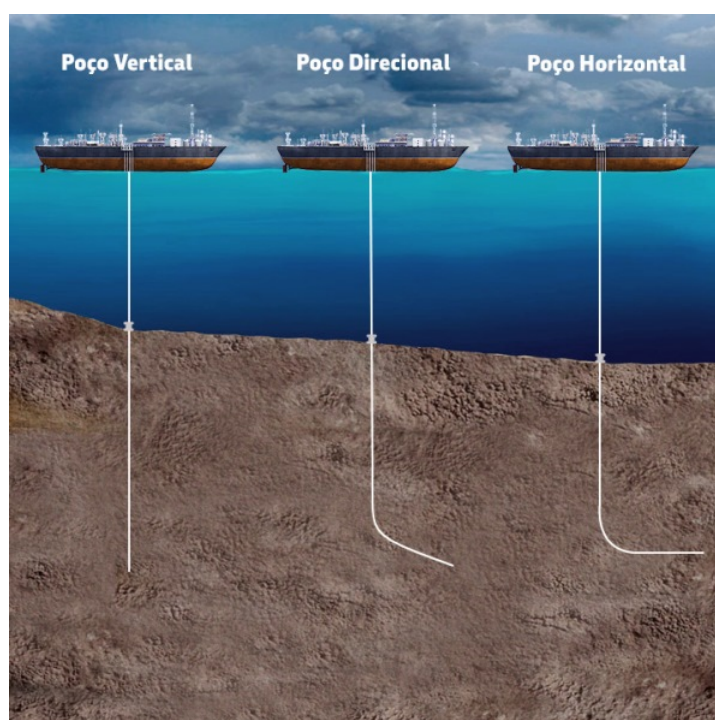


Figura 2 – Classificação de poços de acordo com a sua direção (FONTE: PETROBRAS, 2018) [24]

2.3 FLUIDO

Uma breve definição para fluidos é: uma substância que ao ser submetida a uma tensão de cisalhamento se deforma continuamente. Em outras palavras, aquilo que apresenta a capacidade de fluir ou escoar.

Fluidos podem ser classificados como newtonianos ou não-newtonianos, dependendo da forma que se comportam sob a ação de uma tensão de cisalhamento variável.

2.3.1 Fluido Newtoniano

Um fluido é definido como newtoniano quando segue o modelo proposto por Newton, conhecido como Lei de Newton da viscosidade. O físico sugeriu um modelo de fluido onde sua viscosidade até pode variar com a temperatura e pressão, porém ela permanece constante sob variações das forças de superfície.

A resistência surge da falta de deslizamento de duas partes adjacentes do líquido e é proporcional à velocidade com que estas partes se movem uma em relação às outras, (NEWTON, 1687) [10]. Esta falta de deslizamento é o que chamamos de atrito interno, ou viscosidade. Ou seja, viscosidade é uma medida da resistência ao fluxo e pode ser representada pela seguinte equação:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{du_x}{dy} \quad (2.1)$$

onde:

τ_{xy} : tensão de cisalhamento na direção x;

μ : viscosidade;

$\frac{du_x}{dy}$ = gradiente de velocidade ou taxa de cisalhamento.

Todo fluido, que satisfaça a relação linear existente entre a tensão de cisalhamento na direção "x" e o gradiente de velocidade (taxa de cisalhamento), é considerado um fluido ou material Newtoniano (FERRARIS, 1996) [25]

Como exemplos de fluidos newtonianos, pode-se citar a água, o ar, leite. De fato, esta modalidade de fluido abrange todos os gases e líquidos não poliméricos e homogêneos.

2.3.2 Fluido Não-Newtoniano

Os fluidos não-newtonianos apresentam uma relação não linear entre a tensão cisalhante e a taxa de cisalhamento ou possuem uma tensão crítica para iniciar o escoamento. Podendo ainda, ser dependentes do tempo ou apresentar características viscoelásticas (LEAL 2005) [26].

Ainda, nas palavras do autor, estes fluidos, geralmente, são divididos em três grandes grupos:

1. Fluidos independentes do tempo ou puramente viscosos: pertencem a este grupo, os fluidos que apresentam taxas de deformação num ponto dependente apenas da tensão cisalhante instantânea aplicada nesse mesmo ponto;

2. Fluidos dependentes do tempo: são aqueles que apresentam viscosidade aparente dependente do tempo de aplicação da taxa de cisalhamento. Esses fluidos são classificados em

reopéticos e tixotrópicos. Os tixotrópicos apresentam uma diminuição da viscosidade aparente com o tempo de atuação de uma taxa de cisalhamento constante até alcançar um equilíbrio. Já os fluidos reopéticos têm comportamento oposto. A viscosidade aparente aumenta com o tempo de atuação de uma taxa de cisalhamento constante

3. Fluidos viscoelásticos: são fluidos que apresentam propriedades viscosas e elásticas simultaneamente.

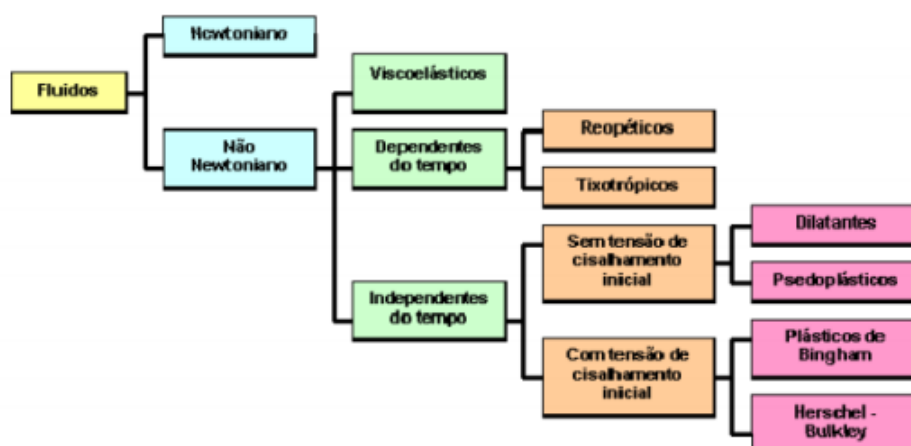


Figura 3 – Classificação dos fluidos (FONTE: COSTA, 2017) [27]

A tabela traz alguns modelos matemáticos presentes na literatura, que representam a relação entre a tensão cisalhante e a taxa de deformação.

Modelo	Equação	Parâmetros
Newtoniano	$\tau_{xy} = \mu \frac{du_x}{dy}$	μ
Bingham	$\tau_{xy} = \pm \tau_0 + \mu_0 \frac{du_x}{dy}$ se $ \tau_{xy} > \tau_0 $ $\frac{du_x}{dy} = 0$ se $ \tau_{xy} < \tau_0 $	μ_0 e τ_0
Power Law	$\tau_{xy} = K \left \frac{du_x}{dy} \right ^{n-1} \frac{du_x}{dy}$	k e n
Herschel-Bulkley	$\tau_{xy} = \pm \tau_0 + \mu_0 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^n$ se $ \tau_{xy} > \tau_0 $ $\gamma = 0$ se $ \tau_{xy} < \tau_0 $	μ_0 e τ_0
Maxwell	$\tau_{ij} + t_0 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$	t_{ij}

Tabela 1 – Modelos matemáticos dos tipos de fluidos

Já a sua representação gráfica:

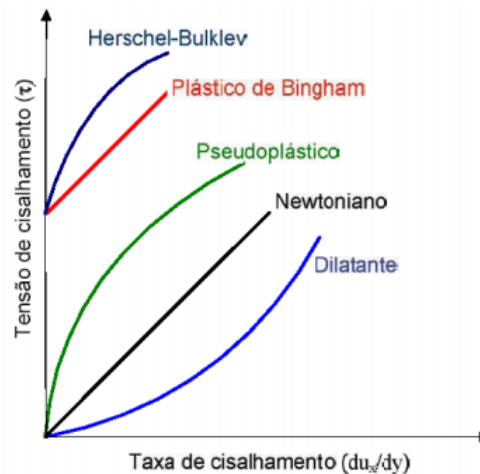


Figura 4 – Tipos de fluidos (FONTE: ANDRADE, 2007) [28]

Este trabalho analisa o plástico de Bingham, devido a sua semelhança com um fluido de perfuração.

2.3.2.1 Plástico de Bingham

Dentre os fluidos não newtonianos, o plástico de Bingham está em meio àqueles que possuem a tensão de escoamento mais simples, inclusive muito similar a de um fluido newtoniano. Em essência, um fluido de Bingham apresenta uma tensão limite, assim que essa tensão é ultrapassada ele passa a ter uma inclinação da curva constante.

$$\tau_{xy} = \pm \tau_0 + \mu_0 \frac{du_x}{dy} \quad \text{se} \quad |\tau_{xy}| > |\tau_0| \quad (2.2a)$$

$$\frac{du_x}{dy} = 0 \quad \text{se} \quad |\tau_{xy}| < |\tau_0| \quad (2.2b)$$

Onde:

τ_0 : tensão de cisalhamento inicial

μ_0 : é uma constante análoga à viscosidade de fluidos newtonianos.

Como exemplos desse tipo de fluido pode ser citado a pasta de dente, a maionese, suspensão de argila e lama de perfuração (ou fluido de perfuração).

2.3.3 Fluido de Perfuração

“Fluido de perfuração é um fluido circulante usado para tornar viável uma operação de perfuração” (API, American Petroleum Institute, 1991) [29]. São misturas complexas de sólidos, líquidos e por vezes até gases. Usualmente constituídas de duas fases: uma dispersante e outra dispersa. São comumente divididos em dois grupos, a base óleo e a base água. Esta classificação é realizada de acordo com a composição da fase contínua do fluido.

Os fluidos à base de água apresentam baixo custo em relação aos fluidos à base de óleo e sintéticos, mas apresentam a desvantagem de causar danos a formações rochosas sensíveis ou simplesmente não serem adequados em função da elevada capacidade de encharcar as formações. (SANTOS, 2012) [30]

De acordo com Zanotto (2018) [7], os fluidos de perfuração constituem na primeira barreira de segurança dos poços, uma vez que exercem pressão hidrostática sobre as formações, de modo a evitar o influxo de fluidos indesejáveis. Dentre suas outras funções encontram-se: resfriar, limpar e lubrificar as brocas, carrear cascalhos, manter sólidos em suspensão durante as paradas de circulação, reduzir atritos na coluna de perfuração e estabilizar a parede do poço.

Um fluido de perfuração quando mal projetado pode gerar problemas como perda de circulação, ineficiência na limpeza do poço, danificação de aparelhagem, influxo indesejado para dentro do poço, dentre outros.

Do ponto de vista físico, os fluidos de perfuração assumem comportamentos de fluidos não newtonianos, ou seja, a relação entre a taxa de cisalhamento e a taxa de deformação não é constante (MACHADO, 2002) [31].



Figura 5 – Imagem representativa de um fluido de perfuração (FONTE: ABAS, 2020) [32]

2.4 KICK

A operação de perfuração de um poço de petróleo ocorre basicamente da seguinte forma: conforme a broca vai atuando, fluidos de perfuração são bombeados em sua direção pela coluna de perfuração e retornando pelo espaço anular até a superfície.

Dentre os objetivos que a injeção desse fluido apresenta, já citados anteriormente, o controle da pressão de formação exerce grande influência sobre o assunto abordado no texto. Pois, se a densidade do fluido de formação for insuficiente, sua pressão hidrostática se torna menor do que a pressão de formação, ocorrendo assim o influxo indesejado dos fluidos da formação para dentro do poço, ou seja, o *kick*. De fato, qualquer fator que diminua a densidade ou o nível do fluido injetado é capaz de ocasionar esse distúrbio, seja o fluido mal projetado inicialmente, invadido por um gás, perda de sua circulação através de falhas na rocha ou redução do nível de fluido devido à retirada da coluna de perfuração.

É de suma importância que, a equipe operante nas plataformas conheça os sinais indicadores desse fenômeno, dado que, quanto maior for o tempo decorrido entre o início do *kick* e o fechamento do poço, mais difícil será o seu controle. Segundo Thomas et al (2001) [33], os principais indícios de um *kick* são:

- Aumento de volume nos tanques de fluido de perfuração;
- Aumento da vazão de retorno;
- Poço em fluxo com as bombas desligadas;
- Diminuição da pressão de bombeio e aumento da velocidade da bomba;
- Corte do fluido de perfuração por gás, óleo ou água;
- Poço aceitando menos fluido de perfuração do que o volume de aço retirado;
- Poço devolvendo mais fluido de perfuração do que o volume de aço descido no seu interior.

Caso o *kick* venha ocorrer, alguns métodos de controle são aplicados, esses são procedimentos operacionais realizados com o objetivo circular o fluido invasor para fora do poço de forma segura, substituindo a lama de perfuração existente por outra lama de densidade adequada, mantendo assim a estabilidade do conjunto poço-formação. Os principais métodos de controle são: método do sondador, método do engenheiro, método simultâneo ou misto e método volumétrico (Zanotto, 2018) [7].

2.5 JANELA OPERACIONAL

A janela operacional determina a variação permitida para a pressão exercida pelo fluido de perfuração dentro do poço, de forma a manter a integridade deste, respeitando as pressões de poros, fratura e colapso (Rocha, 2009) [34].

Pressão de poros é referente aquela causada pelo fluido contido nos espaços porosos das rochas. Já a pressão de fratura é a pressão que leva à falha da rocha por tração. Por último, pressão de colapso pode ser entendida como a que faz com que a parede do poço falhe por cisalhamento.

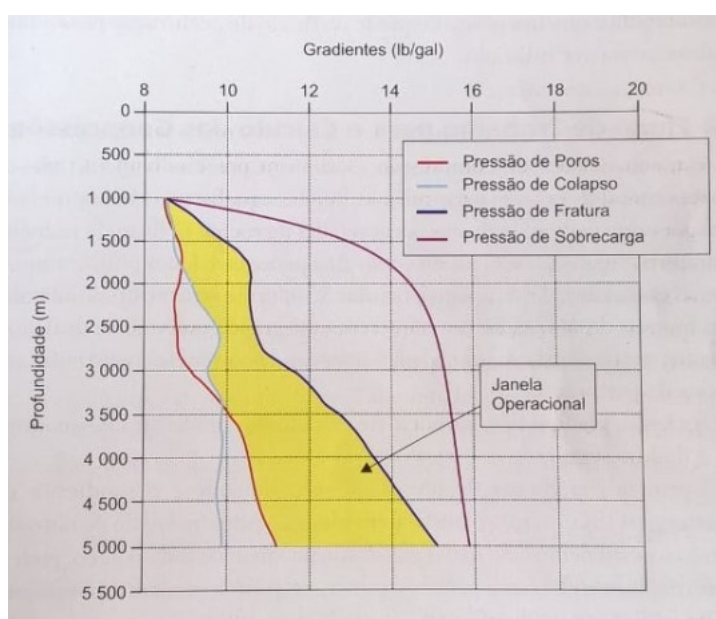


Figura 6 – Projeto de poços de petróleo: geopressões e assentamentos de colunas de revestimento (FONTE: ROCHA, 2009) [34]

Os limites da janela operacional são dados pelo menor valor entre as curvas de pressão de poros e colapso, esse é chamado de limite inferior, enquanto que o limite superior corresponde à pressão de fratura.

O fluido de perfuração quando projetado abaixo do limite inferior, por exemplo, pode acarretar na invasão do fluido da formação para dentro do poço. Já quando o mesmo é produzido acima do limite superior, gera consequências operacionais, como o desmoronamento das paredes

do poço ou perda de fluido de perfuração para a formação, também chamado de perda de circulação.

Por fim, segundo Galdino (2014) [20], o aumento da profundidade na perfuração de poços implica em diversas dificuldades operacionais, como a redução da janela operacional. Quanto maior é a profundidade de perfuração, menor é a faixa de valores de pressões para operação de perfuração, como demonstra a figura a seguir:

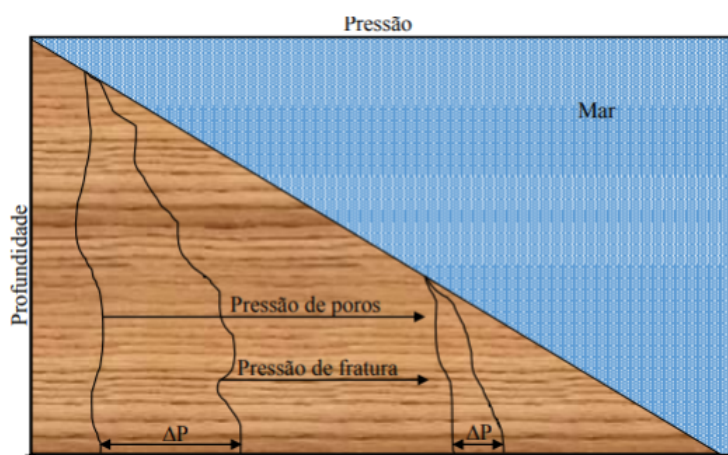


Figura 7 – Representação de uma janela operacional, pressões admissíveis em função da profundidade (FONTE: GALDINO, 2016) [21]

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

3.1 GEOMETRIA DO PROBLEMA

Para modelar o problema, assume-se que a coluna de perfuração está posicionada concentricamente em relação ao espaço anular e que ambos são corpos perfeitamente rígidos, ou seja, não sofrem alterações em suas dimensões devido a variação de pressão e temperatura.

Considera-se que o fluido de perfuração é inserido pela coluna de perfuração e retorna a superfície pelo espaço anular. A figura 6, demonstra a vista frontal (a) e a vista superior (b) da geometria. Para o desenvolvimento do problema, serão adotadas as coordenadas cilíndricas.

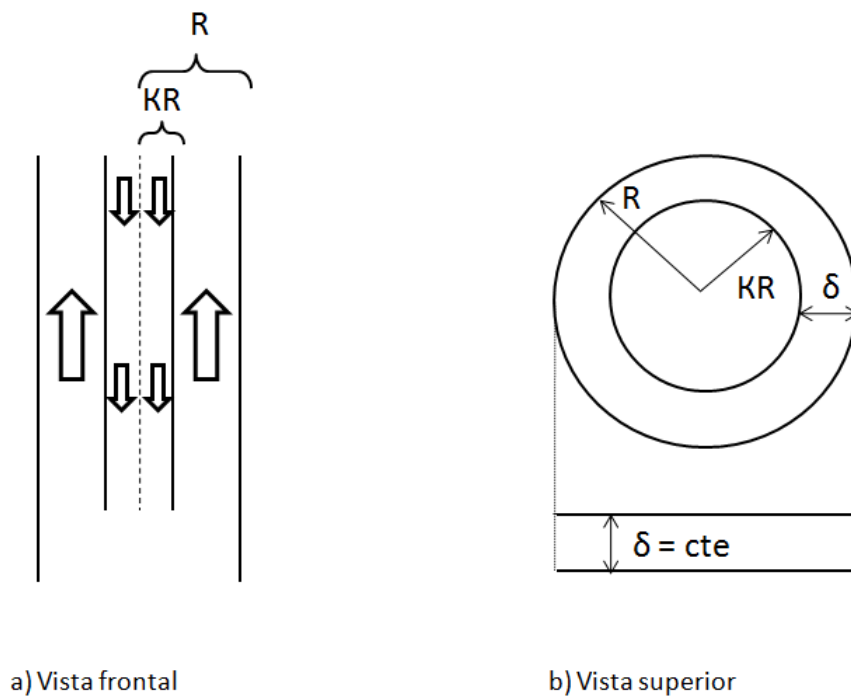


Figura 8 – Representação da geometria do problema

Sendo R é o raio externo, ou raio total do poço. κR o raio interno, também conhecido como raio da coluna de perfuração. E δ é a espessura entre os raios, a qual se mantém constante.

3.2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

3.2.1 Equação Geral de Navier-Stokes

O desenvolvimento deste estudo terá como ponto de partida as equações de Navier-Stokes, que de forma geral pode ser escrita:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla} \cdot \bar{\tau} + \vec{f} \quad (3.1)$$

Onde

p : é a pressão estática. \vec{f} : é a função que representa a densidade de forças externas atuantes no escoamento. $\frac{D\vec{v}}{Dt}$: é a derivada material, e pode ser escrita como:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

$\bar{\tau}$: é o tensor deviatório, e encontra-se na seguinte equação:

$$\sigma = -p\bar{I} + \bar{\tau}$$

σ : tensor de tensões, e é dado por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{pmatrix}$$

3.2.2 Fluido Newtoniano Incompressível

Para o problema, assume-se a simetria cilíndrica, e a velocidade pode ser representada da seguinte forma:

$$v = v_z(r) \quad e \quad v_\theta = v_r = 0$$

A equação de Navier-Stokes para um fluido newtoniano encontra-se demonstrada no apêndice A, e já foi desenvolvida por Barbosa (2018) [6], aqui será demonstrada a solução estacionária para o mesmo problema. Partindo da seguinte expressão:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\mu}{\rho} \vec{\nabla}^2 v_z(r) \quad (3.2)$$

Tomando:

$$\rho g + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dP}{dz} \quad (cte); \quad \frac{dP}{dz} < 0$$

A equação (3.2) pode ser reescrita:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (3.3)$$

Para encontrar a solução estacionária, sabe-se que:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

Assim:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.4)$$

Ou

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} \quad (3.5)$$

Ao trabalhar com a equação acima, obtém-se

$$\frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{r}{\mu} \frac{dP}{dz} \quad (3.7)$$

Integrando:

$$r \frac{dv_z}{dr} = \frac{r^2}{2\mu} \frac{dP}{dz} + C_1 \quad (3.8)$$

Divide-se ambos os lados por r:

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{r}{2\mu} \frac{dP}{dz} + \frac{C_1}{r} \quad (3.9)$$

Integrando novamente:

$$v_z(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (3.10)$$

Aplicando as condições de contorno, para encontrar C_1 e C_2 . Sabe-se que pela condição de não deslizamento, nas paredes do escoamento tem-se:

$$v_z(R) = v_z(\kappa R) = 0 \quad (3.11)$$

Com isso:

$$\frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} + C_1 \ln(R) + C_2 = 0 \quad (3.12a)$$

$$\frac{(\kappa R)^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} + C_1 \ln(\kappa R) + C_2 = 0 \quad (3.12b)$$

Subtraindo as equações (3.12b) da (3.12a):

$$\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} (R^2 - \kappa^2 R^2) + C_1 \ln \frac{R}{\kappa R} = 0 \quad (3.13)$$

Organizando a equação acima:

$$\frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} (1 - \kappa^2) + C_1 \ln \frac{1}{\kappa} = 0 \quad (3.14)$$

Isolando C_1 :

$$C_1 = -\frac{R^2 (1 - \kappa^2)}{4\mu \ln(\kappa)} \frac{dP}{dz} \quad (3.15)$$

Substituindo C_1 na equação (3.12a):

$$\frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} - \frac{R^2 (1 - \kappa^2)}{4\mu \ln(\kappa)} \frac{dP}{dz} \ln(R) + C_2 = 0 \quad (3.16)$$

Isolando C_2 :

$$C_2 = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} \left(1 + (1 - \kappa^2) \frac{\ln R}{\ln \kappa} \right) \quad (3.17)$$

Finalmente, substituindo C_1 e C_2 na equação da velocidade:

$$v_z(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} - \frac{R^2 (1 - \kappa^2)}{4\mu \ln(\kappa)} \frac{dP}{dz} \ln(r) - \frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} \left(1 + (1 - \kappa^2) \frac{\ln R}{\ln \kappa} \right) \quad (3.18)$$

A equação acima pode ser organizada, e reescrita da seguinte forma:

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} \left[-r^2 - \frac{R^2 (1 - \kappa^2) \ln(r)}{\ln(\kappa)} + R^2 \left(1 + (1 - \kappa^2) \frac{\ln R}{\ln \kappa} \right) \right] \quad (3.19)$$

Com isso, é possível encontrar a vazão do problema. Sabe-se que:

$$Q = \int v dA = 2\pi \int_{\kappa R}^R v_z(r) r dr \quad (3.20)$$

Então, é possível escrever:

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{dP}{dz} \int_{\kappa R}^R \left[-r^2 - \frac{R^2 (1 - \kappa^2) \ln(r)}{\ln(\kappa)} + R^2 \left(1 + (1 - \kappa^2) \frac{\ln R}{\ln \kappa} \right) \right] r dr \quad (3.21)$$

Integrando:

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{dP}{dz} \left[-\frac{r^4}{4} - \frac{R^2 (1 - \kappa^2)}{\ln(\kappa)} \left(\frac{r^2 \ln r}{2} - \frac{r^2}{4} \right) + R^2 \left(1 + (1 - \kappa^2) \frac{\ln R}{\ln \kappa} \right) \frac{r^2}{2} \right] \Bigg|_{\kappa R}^R \quad (3.22)$$

Substituindo os limites de integração:

$$Q = -\frac{\pi}{4\mu} \frac{dP}{dz} \left[\left(-\frac{R^4}{2} + \frac{\kappa^4 R^4}{2} \right) - \frac{R^2 (1 - \kappa^2)}{\ln \kappa} \left(R^2 \ln R - \frac{R^2}{2} - (\kappa R)^2 \ln(\kappa R) + \frac{(\kappa R)}{R} \right) + \left(1 + (1 - \kappa^2) \frac{\ln R}{\ln \kappa} \right) (1 - \kappa^2) \right] \quad (3.23)$$

Agora é possível encontrar a velocidade média do escoamento. Pois:

$$V_m = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2 (1 - \kappa^2)} \quad (3.24)$$

Substituindo o valor da vazão, e aplicando a seguinte substituição:

$$1 - \kappa^4 = (1 - \kappa^2) (1 + \kappa^2)$$

Obtém-se:

$$V_m = -\frac{\pi R^4}{4\pi R^2 (1 - \kappa^2) \mu} \frac{dP}{dz} \left[-\frac{1}{2} (1 - \kappa^2) (1 + \kappa^2) - \frac{(1 - \kappa^2)}{\ln \kappa} \left(\ln R - \kappa^2 \ln(\kappa R) - \frac{1}{2} + \frac{\kappa^2}{2} \right) + (1 - \kappa^2) \left(1 + (1 - \kappa^2) \frac{\ln R}{\ln \kappa} \right) \right] \quad (3.25)$$

Reorganizando:

$$V_m = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} \left[-\frac{1}{2} (1 + \kappa^2) - \frac{1}{\ln \kappa} \left(\ln R - \kappa^2 \ln(\kappa R) - \frac{1}{2} + \frac{\kappa^2}{2} \right) + \left(1 + (1 - \kappa^2) \frac{\ln R}{\ln \kappa} \right) \right] \quad (3.26)$$

Pode-se reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$V_m = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} \left[\frac{(1 - \kappa^2)}{2} - \frac{1}{\ln \kappa} \left[\ln(R) (1 - \kappa^2) - \kappa^2 \ln \kappa - \frac{(1 - \kappa^2)}{2} \right] + (1 - \kappa^2) \frac{\ln R}{\ln \kappa} \right] \quad (3.27)$$

Simplificando:

$$V_m = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} \left[\frac{(1 - \kappa^2)}{2} + \frac{\kappa^2 \ln \kappa}{\ln \kappa} + \frac{(1 - \kappa^2)}{2 \ln \kappa} \right] \quad (3.28)$$

Finalmente, tem-se:

$$V_m = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dP}{dz} \left[1 + \kappa^2 + \frac{(1 - \kappa^2)}{\ln \kappa} \right] \quad (3.29)$$

Voltando a equação (3.24), pode-se escrever a vazão em função da velocidade média. Sendo assim:

$$Q = \pi R^2 (1 - \kappa^2) V_m = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dP}{dz} \left[1 - \kappa^4 + \frac{(1 - \kappa^2)^2}{\ln \kappa} \right] \quad (3.30)$$

3.2.3 Plástico de Bingham

Para o conteúdo retratado na dissertação, temos o fluido plástico de Bingham, e a equação de Navier-Stokes para esse tipo fluido, será demonstrada a seguir.

Lambrando que para o problema em questão:

$$v = v_z(r) \quad e \quad v_\theta = v_r = 0 \quad (3.31)$$

Sendo o gradiente de velocidade para qualquer sistema de coordenadas descrito da seguinte forma:

$$(\vec{\nabla} \vec{v})_{ij} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{v_j}{h_i h_j} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} + \delta_{ij} \sum_k \frac{v_k}{h_i h_k} \frac{\partial h_i}{\partial x_k} \quad (3.32)$$

E em coordenadas cilíndricas:

$$h_r = 1; \quad h_\theta = r; \quad h_z = 1$$

Assim, gradiente de velocidade:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \vec{v})_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} - v_r \cdot 0 + \delta_{rr} \sum_k \frac{v_k}{h_k} \cdot 0 = \frac{\partial v_r}{\partial r}; \\ (\vec{\nabla} \vec{v})_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \cdot 0 + \delta_{\theta\theta} \sum_k \frac{v_k}{r h_k} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}; \\ (\vec{\nabla} \vec{v})_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} - v_z \cdot 0 + \delta_{zz} \sum_k \frac{v_k}{h_k} \cdot 0 = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ (\vec{\nabla} \vec{v})_{rz} &= \frac{\partial v_r}{\partial z}; \quad (\vec{\nabla} \vec{v})_{zr} = \frac{\partial v_z}{\partial r}; \quad (\vec{\nabla} \vec{v})_{\theta z} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z}; \\ (\vec{\nabla} \vec{v})_{z\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta}; \quad (\vec{\nabla} \vec{v})_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}; \quad (\vec{\nabla} \vec{v})_{\theta r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \end{aligned}$$

Sabe-se que o gradiente simétrico é escrito da seguinte forma:

$$\vec{\nabla}_s \vec{v} = \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \vec{v}) + (\vec{\nabla} \vec{v})^T \right] \quad (3.34)$$

Dessa maneira:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}_s \vec{v})_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad (\vec{\nabla}_s \vec{v})_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}; \quad (\vec{\nabla}_s \vec{v})_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ (\vec{\nabla}_s \vec{v})_{rz} &= (\vec{\nabla}_s \vec{v})_{zr} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla}_s \vec{v}\right)_{\theta z} &= \left(\vec{\nabla}_s \vec{v}\right)_{z\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right]; \\ \left(\vec{\nabla}_s \vec{v}\right)_{r\theta} &= \left(\vec{\nabla}_s \vec{v}\right)_{\theta r} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] \end{aligned}$$

Para o plástico de Bingham, sabe-se que:

$$\begin{cases} \tau_{ij} = 2\mu' \varepsilon_{ij} + \tau_0 \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{II_E}} & \text{se } \sqrt{II_T} \geq \tau_0 \\ \tau_{ij} = 0 & \text{e } \varepsilon_{ij} = 0 & \text{se } \sqrt{II_T} < \tau_0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Sendo $\varepsilon_{ij} = \left(\vec{\nabla}_s \vec{v}\right)_{ij}$, o gradiente simétrico.

E

$$II_T = \tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2 - \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{11}\tau_{33} - \tau_{22}\tau_{33} \quad (3.37a)$$

$$II_E = \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} \quad (3.37b)$$

Sendo a equação de Navier-Stokes:

$$f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.38)$$

Para $\sqrt{II_T} < \tau_0$

$$f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial 0}{\partial x_j} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.39)$$

Se $\varepsilon_{ij} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0$

Então, a equação (3.39) torna-se:

$$f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \Rightarrow \vec{f} - \vec{\nabla} p = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (3.40)$$

Integrando num volume de controle, obtém-se a 2ª Lei de Newton para massa constante:

$$\vec{F}_{tot} = m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = m \vec{a} \quad (3.41)$$

Agora, calcula-se para $\sqrt{II_T} \geq \tau_0$.

Pode-se escrever:

$$\varepsilon_{rr} = 0; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = 0; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0;$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) = 0; \quad \varepsilon_{\theta r} = \varepsilon_{r\theta} = 0; \quad \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

Sabe-se que:

$$II_E = \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{r\theta}^2 + \varepsilon_{z\theta}^2 - \varepsilon_{rr}\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon_{zz} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \quad (3.43)$$

Logo:

$$\sqrt{II_E} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right| \quad (3.44)$$

E assim, para o problema em questão, pode ser escrito:

$$\sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \varepsilon_{ij} \left(2\mu' + \frac{\tau_0}{\sqrt{II_E}} \right) \right\} \quad (3.45)$$

$$\text{Se } i = \theta \implies \varepsilon_{\theta j} = 0$$

$$\text{Se } i = r \implies \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{r\theta} = 0 \text{ e } \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

Dessa forma:

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \varepsilon_{rj} \left(2\mu' + \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|} \right) \right\} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r} \left(2\mu' + \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|} \right) \right] = 0 \quad (3.46)$$

Visto que $v_z = v_z(r)$.

Finalmente, se $i = z$:

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \varepsilon_{zj} \left(2\mu' + \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|} \right) \right\} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r} \left(2\mu' + \frac{2\tau_0}{\left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|} \right) \right\} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu' \frac{\partial v_z}{\partial r} + \tau_0 \frac{\frac{\partial v_z}{\partial r}}{\left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu' \frac{\partial v_z}{\partial r} + \tau_0 (\pm 1) \right\} = \mu' \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Voltando para equação de Navier-Stokes:

$$f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu' \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_z \right) = \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} \quad (3.48)$$

Como:

$$\vec{v} \cdot \nabla v_z = v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.49)$$

Assim, pode-se escrever:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu' \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \quad (3.50)$$

Nota-se que a equação é muito similar a de um fluido Newtoniano, alterando apenas a viscosidade μ para μ' .

Da equação de Navier-Stokes:

$$f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.51)$$

$$f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \varepsilon_{ij} \left(2\mu' + \frac{\tau_0}{\sqrt{II_E}} \right) \right\} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.52)$$

Para o problema, pode-se escrever:

$$\vec{v} = v_z(r) \hat{z}$$

E

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{dv_z(r)}{dr} = \varepsilon_{zr}$$

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{\theta r} = 0$$

Para o cálculo do $\bar{\tau}$, tem-se que:

$$\tau_{ij} = 2\mu' \varepsilon_{ij} + \tau_0 \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{II_E}} \quad (3.54)$$

E

$$II_E = \frac{1}{2} \left| \frac{dv_z}{dr} \right| \quad (3.55)$$

Logo:

$$\tau_{rz} = \mu' \frac{dv_z(r)}{dr} + \tau_0 \operatorname{sgn} \left(\frac{dv_z(r)}{dr} \right) \quad (3.56)$$

Se x é positivo, $\operatorname{sgn}(x) = 1$, se x é negativo $\operatorname{sgn}(x) = (-1)$

Reescrevendo a equação (3.51):

$$\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \bar{\tau} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (3.57)$$

Assim, as partes da equação acima podem ser descritas da seguinte maneira:

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\tau} = \left[\frac{d\tau_{rz}}{dr} + \frac{1}{r} \tau_{rz} \right] \hat{z} \quad (3.58a)$$

$$\rho \vec{g} = -\rho g \hat{z} \quad (3.58b)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) \quad (3.58c)$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_z = v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.58d)$$

Dessa forma:

$$-\rho g + \frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rz})}{dr} - \frac{dp}{dz} = 0 \quad (3.59)$$

Reorganizando:

$$\frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \frac{dp}{dz} + \rho g = cte \quad (3.60)$$

Trabalhando com a equação (3.60) para encontrar o τ :

$$\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = r \left[\frac{dp}{dz} + \rho g \right] \quad (3.61)$$

Integrando, obtém-se:

$$r\tau_{rz} = \frac{r^2}{2} \left[\frac{dp}{dz} + \rho g \right] + M_1 \quad (3.62)$$

Pode-se escrever:

$$\left[\frac{dp}{dz} + \rho g \right] = \frac{dP}{dz} \quad (3.63)$$

E assim, reagindo a equação(3.62):

$$\tau_{rz}(r) = \frac{r}{2} \frac{dP}{dz} + \frac{M_1}{r} \quad (3.64)$$

Para encontrar M_1 recorre-se a figura 8, feita por Chatzimina (2006) [35], a qual representa o perfil da tensão, sua taxa de cisalhamento e a velocidade no anular. Dela consegue-se tirar as condições de contorno do escoamento.

Sendo que κ é um valor entre 0 e 1, o qual representa a relação entre o raio interno ($r'=\kappa R$) e o raio externo (R) do anular. E λ_+ , λ_- são constantes limitadoras das fronteiras do plástico de Bingham, dividindo a figura em 3 regiões, sendo essas regiões as quais diferenciam quando o comportamento é fluido ou sólido.

Analisando do raio interno para o externo, encontra-se primeiro a região I, a qual tem um comportamento muito parecido com a de um fluido newtoniano, sendo que sua variação de

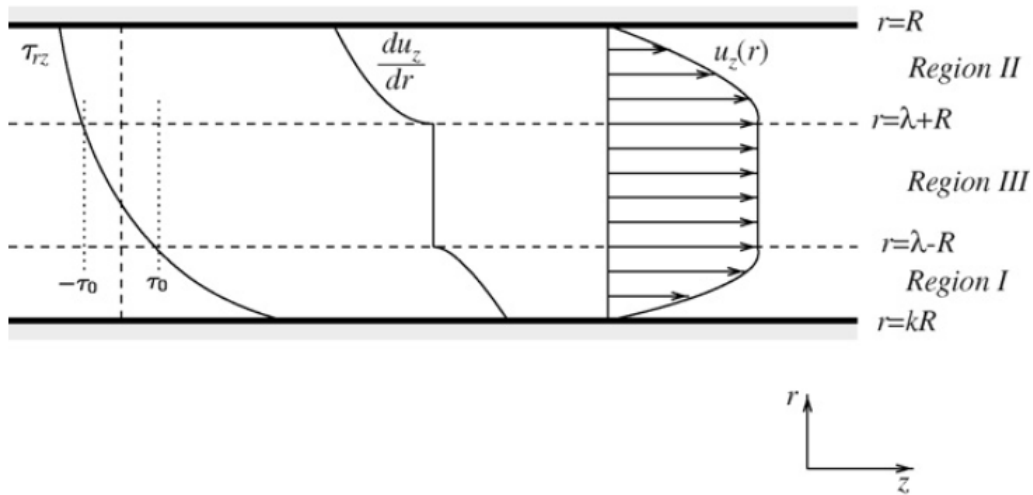


Figura 9 – Representação do perfil da tensão, taxa de cisalhamento e velocidade no anular (FONTE: CHATZIMINA modificado, 2006) [35]

velocidade vem aumentando. Já na região II não há variação de velocidade, ela encontra-se entre as regiões λ_-R e λ_+R , tendo o seu comportamento similar a de um sólido. A região III, também apresenta comportamento parecido com o de um fluido newtoniano, a diferença para a região I é que sua variação de velocidade vai decaindo.

Agora, considerando λ uma constante, sendo o seu valor encontrado entre λ_- e λ_+ , e quando $r = \lambda R$, $\tau_{rz} = 0$. Pode-se escrever:

$$\tau_{rz}(\lambda R) = 0 = \frac{\lambda R}{2} \frac{dP}{dz} + \frac{M_1}{\lambda R} \quad (3.65)$$

Logo, consegue-se escrever M_1 em função de λ :

$$M_1 = -\frac{(\lambda R)^2}{2} \frac{dP}{dz} \quad (3.66)$$

Retomando a equação (3.64):

$$\tau_{rz}(r) = \frac{r}{2} \frac{dP}{dz} - \frac{(\lambda R)^2}{2r} \frac{dP}{dz} = \frac{1}{2} \frac{dP}{dz} \left[r - \frac{(\lambda R)^2}{r} \right] \quad (3.67)$$

Sendo então necessário encontrar o valor da velocidade. Para isso, volta-se a recorrer a figura 8, e analisar as condições de contorno.

De κR até λ_-R , tem-se que $\frac{dv_z(r)}{dr} \geq 0$. O que resulta em:

Da equação (3.56):

$$\tau_{rz} = \mu' \frac{dv_z(r)}{dr} + \tau_0 \quad (3.68)$$

Substituindo τ_{rz} encontrado na equação (3.67):

$$\frac{1}{2} \frac{dP}{dz} \left[r - \frac{(\lambda R)^2}{r} \right] = \mu' \frac{dv_z(r)}{dr} + \tau_0 \quad (3.69)$$

Rearranjando a equação acima:

$$\frac{dv_z(r)}{dr} = \frac{1}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \left[r - \frac{(\lambda R)^2}{r} \right] - \frac{\tau_0}{\mu'} \quad (3.70)$$

Integrando:

$$v_z(r) = \frac{1}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \left[\frac{r^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln r \right] - \frac{\tau_0}{\mu'} r + M_2 \quad (3.71)$$

Substituindo r por κR :

$$v_z(\kappa R) = 0 = \frac{1}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \left[\frac{(\kappa R)^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln(\kappa R) \right] - \frac{\tau_0}{\mu'} \kappa R + M_2 \quad (3.72)$$

Isolando M_2 , obtém-se:

$$M_2 = -\frac{1}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \left[\frac{(\kappa R)^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln(\kappa R) \right] + \frac{\tau_0}{\mu'} \kappa R \quad (3.73)$$

Logo:

$$v_z(r) = \frac{1}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \left[\frac{r^2 - (\kappa R)^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln \left(\frac{r}{\kappa R} \right) \right] - \frac{\tau_0}{\mu'} (r - \kappa R) \quad (3.74)$$

Novamente, ao analisar representação do escoamento de Chatzimina [35], de $\lambda_+ R$ até R , $\frac{dv_z(r)}{dr} < 0$.

E analogamente, da equação (3.56):

$$\tau_{rz} = \mu' \frac{dv_z(r)}{dr} - \tau_0 \quad (3.75)$$

Chegando-se a:

$$v_z(R) = 0 = \frac{1}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \left[\frac{(R)^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln(R) \right] + \frac{\tau_0}{\mu'} R + M_3 \quad (3.76)$$

Com:

$$M_3 = -\frac{1}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \left[\frac{(R)^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln(R) \right] - \frac{\tau_0}{\mu'} R \quad (3.77)$$

Por fim:

$$v_z(r) = \frac{1}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \left[\frac{r^2 - R^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right] + \frac{\tau_0}{\mu'} (r - R) \quad (3.78)$$

Sabe-se que a velocidade nos pontos $\lambda_- R$ e $\lambda_+ R$, são iguais. Logo:

$$v_z(\lambda_- R) = v_z(\lambda_+ R) \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \left[\frac{(\lambda_- R)^2 - (\kappa R)^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln \left(\frac{\lambda_- R}{\kappa R} \right) \right] - \frac{\tau_0}{\mu'} (\lambda_- R - \kappa R) = \\ \frac{1}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \left[\frac{(\lambda_+ R)^2 - R^2}{2} - (\lambda R)^2 \ln \left(\frac{\lambda_+ R}{R} \right) \right] + \frac{\tau_0}{\mu'} (\lambda_+ R - R) \end{aligned} \quad (3.80)$$

Colocando R em evidência:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu'} \frac{dP}{dz} R^2 \left[\frac{(\lambda_-^2 - \kappa^2)}{2} - \lambda^2 \ln \left(\frac{\lambda_-}{\kappa} \right) \right] - \frac{\tau_0}{\mu'} R (\lambda_- - \kappa) \\ = \frac{1}{2\mu'} \frac{dP}{dz} R^2 \left[\frac{\lambda_+^2 - 1}{2} - \lambda^2 \ln(\lambda_+) \right] + \frac{\tau_0}{\mu'} R (\lambda_+ - 1) \end{aligned} \quad (3.81)$$

Como última análise da figura 7, é possível visualizar que:

$$\tau_{rz}(\lambda_- R) = \tau_0 \quad (3.82a)$$

E

$$\tau_{rz}(\lambda_+ R) = -\tau_0 \quad (3.82b)$$

Resultando nas seguitens relações.

Para a igualdade (3.82a):

$$\tau_{rz}(\lambda_- R) = \tau_0 \quad \Rightarrow \quad \tau_0 = \frac{1}{2} \frac{dP}{dz} \left[\lambda_- R - \frac{(\lambda R)^2}{\lambda_- R} \right] \quad (3.83a)$$

Isolando os fatores λ :

$$\lambda_- - \frac{\lambda^2}{\lambda_-} = \frac{2\tau_0}{R \frac{dP}{dz}} \quad (3.83b)$$

Rearranjando:

$$\lambda_-^2 - \lambda^2 = \frac{2\tau_0 \lambda_-}{R \frac{dP}{dz}} \quad (3.83c)$$

Analogamente, para a equação (3.82b), consegue-se encontrar:

$$\lambda_+^2 - \lambda^2 = -\frac{2\tau_0 \lambda_+}{R \frac{dP}{dz}} \quad (3.84)$$

Subtraindo as equações (3.84) da (3.83c):

$$(\lambda_-^2 - \lambda^2) - (\lambda_+^2 - \lambda^2) = \frac{2\tau_0 \lambda_-}{R \frac{dP}{dz}} + \frac{2\tau_0 \lambda_+}{R \frac{dP}{dz}} = \frac{2\tau_0}{R \frac{dP}{dz}} (\lambda_- + \lambda_+) \quad (3.85)$$

Trabalhando com o lado esquerdo da equação acima:

$$(\lambda_-^2 - \lambda^2) - (\lambda_+^2 - \lambda^2) = (\lambda_- - \lambda_+) (\lambda_- + \lambda_+) = \frac{2\tau_0}{R \frac{dP}{dz}} (\lambda_- + \lambda_+) \quad (3.86)$$

Logo:

$$(\lambda_- - \lambda_+) = \frac{2\tau_0}{R \frac{dP}{dz}} \quad (3.87)$$

Agora, ao somar as equações (3.83c) e (3.84):

$$(\lambda_-^2 - \lambda^2) + (\lambda_+^2 - \lambda^2) = \frac{2\tau_0\lambda_-}{R\frac{dP}{dz}} - \frac{2\tau_0\lambda_+}{R\frac{dP}{dz}} = \frac{2\tau_0}{R\frac{dP}{dz}}(\lambda_- - \lambda_+) \quad (3.88)$$

Substituindo o valor encontrado na equação (3.87)

$$(\lambda_-^2 - \lambda^2) + (\lambda_+^2 - \lambda^2) = (\lambda_- - \lambda_+)^2 \quad (3.89)$$

Que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\lambda_-^2 + \lambda_+^2 - 2\lambda^2 = \lambda_-^2 - 2\lambda_- \lambda_+ + \lambda_+^2 \quad (3.90)$$

Finalmente encontra-se as seguintes relações para λ :

$$\lambda^2 = \lambda_- \lambda_+ \quad (3.91a)$$

Ou

$$\lambda = \sqrt{\lambda_- \lambda_+} \quad (3.91b)$$

Reorganizando o valor encontrado na equação (3.87), é possível escrever:

$$\frac{1}{2} \frac{dP}{dz} = \frac{\tau_0}{R(\lambda_- - \lambda_+)} \quad (3.92)$$

E substituindo o valor acima, nas equações de velocidade, tem-se:

De κR até $\lambda_- R$:

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu'} \frac{dP}{dz} R^2 \left[\frac{r^2}{R^2} - \kappa^2 - 2\lambda^2 \ln\left(\frac{r}{\kappa R}\right) - 2(\lambda_- - \lambda_+) \left(\frac{r}{R} - \kappa\right) \right] \quad (3.93a)$$

De $\lambda_- R$ até $\lambda_+ R$:

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu'} \frac{dP}{dz} R^2 \left[\lambda_+^2 - 1 - 2\lambda^2 \ln(\lambda_+) - 2(\lambda_- - \lambda_+) (\lambda_+ - 1) \right] \quad (3.93b)$$

De $\lambda_+ R$ até R :

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu'} \frac{dP}{dz} R^2 \left[\frac{r^2}{R^2} - 1 - 2\lambda^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) - 2(\lambda_- - \lambda_+) \left(\frac{r}{R} - 1\right) \right] \quad (3.93c)$$

Também é possível calcular a vazão do escoamento, pois sabe-se que:

$$Q = \int v dA = 2\pi \int_{\kappa R}^R v_z(r) r dr \quad (3.94)$$

Substituindo os valores de $v_z(r)$ e resolvendo as integrais separadamente:

$$Q = 2\pi \left\{ \int_{\kappa R}^{\lambda_- R} \frac{R^2}{4\mu'} \frac{dP}{dz} \left[\frac{r^2}{R^2} - \kappa^2 - 2\lambda^2 \ln\left(\frac{r}{\kappa R}\right) - 2(\lambda_- - \lambda_+) \left(\frac{r}{R} - \kappa\right) \right] r dr + \right. \\ \left. \int_{\lambda_+ R}^R \frac{R^2}{4\mu'} \frac{dP}{dz} \left[\frac{r^2}{R^2} - 1 - 2\lambda^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) - 2(\lambda_- - \lambda_+) \left(\frac{r}{R} - 1\right) \right] r dr \right. \\ \left. \left[\frac{R^2}{4\mu'} \frac{dP}{dz} (\lambda_+^2 - 1 - 2\lambda^2 \ln(\lambda_+) - 2(\lambda_- - \lambda_+) (\lambda_+ - 1)) \right] \int_{\lambda_- R}^{\lambda_+ R} r dr \right\} \quad (3.95)$$

A partir da integral apresentada no apêndice A, em (A.8), e substituindo λ , pela relação encontrada nas equações (3.91), pode-se escrever o resultado das integrais acima como:

$$Q = \frac{\pi R^2}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \left\{ \left[\frac{r^4}{4R^2} - \frac{\kappa^2 r^2}{2} - 2\lambda_- \lambda_+ \left(\frac{r^2 \ln\left(\frac{r}{\kappa R}\right)}{2} - \frac{r^2}{4} \right) - 2(\lambda_- - \lambda_+) \left(\frac{r^3}{3R} - \frac{\kappa r^2}{2} \right) \right] \right|_{\kappa R}^{\lambda_- R} \right. \\ \left. + \left[\frac{r^4}{4R^2} - \frac{r^2}{2} - 2\lambda_- \lambda_+ \left(\frac{r^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)}{2} - \frac{r^2}{4} \right) + 2(\lambda_- - \lambda_+) \left(\frac{r^3}{3R} - \frac{r^2}{2} \right) \right] \right|_{\lambda_+ R}^R + \right. \\ \left. + \left[\lambda_+^2 - 1 - 2\lambda_- \lambda_+ \ln(\lambda_+) - 2(\lambda_- - \lambda_+) (\lambda_+ - 1) \right] \left(\frac{r^2}{2} \right) \right|_{\lambda_- R}^{\lambda_+ R} \right\}$$

A iteração da expressão anterior resulta em vários termos com logaritmos indicados abaixo, que podem ser simplificados como mostrado a seguir:

$$\frac{\pi R^4}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \left[-\lambda_+ \lambda_-^3 \ln\left(\frac{\lambda_-}{\kappa}\right) + \lambda_+^3 \lambda_- \ln(\lambda_+) - \lambda_+^3 \lambda_- \ln(\lambda_+) + \lambda_+ \lambda_-^3 \ln(\lambda_+) \right] - \\ \frac{\pi R^3}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \lambda_+ \lambda_- \ln\left(\frac{\lambda_-}{\kappa \lambda_+}\right) \quad (3.96)$$

É possível substituir o termo do logaritmo, pois igualando a velocidade do escoamento, $v(\lambda_+ R) = v(\lambda_- R)$, e utilizando a equação (3.92) para substituir o valor de $\frac{dP}{dz}$, obtém-se:

$$\frac{\tau_0}{\mu'} \frac{R}{\lambda_- - \lambda_+} \left[\frac{\lambda_-^2 - \kappa^2}{2} - \lambda_- \lambda_+ \ln\left(\frac{\lambda_-}{\kappa}\right) \right] - \frac{\tau_0}{\mu'} R (\lambda_+ - \kappa) = \\ \frac{\tau_0}{\mu'} \frac{R}{\lambda_- - \lambda_+} \left[\frac{\lambda_-^2 - 1}{2} - \lambda_- \lambda_+ \ln\left(\frac{\lambda_-}{\kappa}\right) \right] - \frac{\tau_0}{\mu'} R (\lambda_+ - 1)$$

$$\frac{\tau_0}{\mu'} \frac{R}{\lambda_- - \lambda_+} \left[\frac{\lambda_-^2 - \kappa^2}{2} - \frac{\lambda_-^2 - 1}{2} - \lambda_+ \lambda_- \left[\ln\left(\frac{\lambda_-}{\kappa}\right) - \ln(\lambda_+) \right] \right] = \lambda_+ - 1 + \lambda_- - \kappa$$

$$\frac{1 - \lambda_+^2 + \lambda_-^2 - \kappa^2}{2} - \lambda_+ \lambda_- \ln\left(\frac{\lambda_-}{\kappa \lambda_+}\right) = (\lambda_+ - 1 \lambda_- - \kappa) (\lambda_- - \lambda_+)$$

$$\lambda_+ \lambda_- \ln \left(\frac{\lambda_-}{\kappa \lambda_+} \right) = \frac{\lambda_+^2 - 2\lambda_+ - \lambda_-^2 + 2\kappa \lambda_- - 2\kappa \lambda_+ - \kappa^2 + 1}{2}$$

Desse modo, após realizar a integração e substituir o termo do logaritmo, a vazão pode ser reescrita:

$$Q = \frac{\pi R^4}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \left\{ \frac{1}{4} [3\lambda_-^4 - 3\lambda_+^4 - 2\lambda_+ \lambda_-^3 + \kappa^4 - 2\kappa^2 \lambda_+ \lambda_- - 4\kappa^3 \lambda_- + 4\kappa^3 \lambda_+ - 1 + 2\lambda_+ \lambda_- - 4\lambda_- + 4\lambda_+ + 2\lambda_+^3 \lambda_-] + \frac{2}{3} [-\lambda_-^4 + \lambda_+ \lambda_-^3 + \lambda_- \kappa^3 - \lambda_+ \kappa^3 + \lambda_- - \lambda_+ - \lambda_- \lambda_+^3 + \lambda_+^4] \right\} \quad (3.98)$$

Rearranjando:

$$Q = \frac{\pi R^4}{2\mu'} \frac{dP}{dz} \left\{ \frac{1}{12} [\lambda_-^4 - \lambda_+^4 + 2\lambda_+ \lambda_-^3 - 2\lambda_+^2 \lambda_- - 4\kappa^3 \lambda_- + 4\kappa^3 \lambda_+ + 3\kappa^4 - 6\kappa^2 \lambda_+ \lambda_- - 3 + 6\lambda_+ \lambda_- - 4\lambda_- + 4\lambda_+] \right\} \quad (3.99)$$

Colocando $\frac{1}{4}$ em evidência, e reorganizando, é possível esquivar a vazão da seguinte maneira:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu'} \frac{dP}{dz} \left\{ \frac{1}{3} [3\kappa^4 - 3 + 6\lambda_+ \lambda_- (1 - \kappa^2) + 4(\lambda_+ - \lambda_-)(1 + \kappa^3) - (\lambda_+^2 - \lambda_-^2)(\lambda_+ - \lambda_-)^2] \right\} \quad (3.100)$$

Provando a relação do último termo, da equação acima:

$$\begin{aligned} -(\lambda_+^2 - \lambda_-^2)(\lambda_+ - \lambda_-)^2 &= -(\lambda_+^2 - \lambda_-^2)(\lambda_+^2 + \lambda_+ \lambda_- + \lambda_-^2) \\ &= -\lambda_+^4 - 2\lambda_+^3 \lambda_- - \lambda_+^2 \lambda_-^2 + \lambda_+^2 \lambda_-^2 + 2\lambda_+ \lambda_-^3 + \lambda_-^4 \\ &= \lambda_-^4 - \lambda_+^4 + 2\lambda_+ \lambda_-^3 - 2\lambda_+^3 \lambda_- \end{aligned} \quad (3.101)$$

Finalmente, pode-se escrever o termo da vazão como:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu'} \frac{dP}{dz} \left[(\kappa^4 - 1) + 2\lambda_+ \lambda_- (1 - \kappa^2) + \frac{4}{3} (\lambda_+ - \lambda_-)(1 + \kappa^3) - \frac{1}{3} (\lambda_+^2 - \lambda_-^2)(\lambda_+ + \lambda_-)^2 \right] \quad (3.102)$$

Com isso é possível encontrar a velocidade média do escoamento. Pois sabe-se que:

$$Q = V_m A \quad \Rightarrow \quad V_m = \frac{Q}{A} \quad (3.103)$$

A área da seção do anular é calculada pela expressão:

$$A = \pi R^2 (1 - \kappa^2) \quad (3.104)$$

Logo, é possível escrever:

$$V_m = \frac{R^2}{8\mu'} \frac{dP}{dz} \frac{1}{(1 - \kappa^2)} \left[(\kappa^4 - 1) + 2\lambda_+ \lambda_- (1 - \kappa^2) + \frac{4}{3} (\lambda_+ - \lambda_-) (1 + \kappa^3) - \frac{1}{3} (\lambda_+^2 - \lambda_-^2) (\lambda_+ + \lambda_-)^2 \right] \quad (3.105)$$

Para a solução estacionária de um fluido de Bingham, pode-se representar as forças atuantes no escoamento, como demonstrado na figura 8:

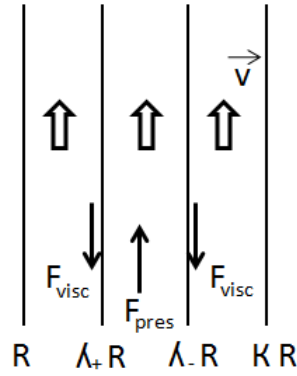


Figura 10 – Forças que agem sobre o escoamento

Assim, é possível escrever que:

$$|\vec{F}_{pres}| = |\vec{F}_{visc}| \quad (3.106)$$

Substituindo as forças de pressão e viscosidade:

$$[P(z) - P(z + dz)]A = \tau_0 2\pi (\lambda_+ R + \lambda_- R) dz \quad (3.107)$$

Trabalhando a equação:

$$-\frac{dP}{dz} dz \pi R^2 (\lambda_+^2 - \lambda_-^2) = 2\pi R \tau_0 dz (\lambda_+ + \lambda_-) \quad (3.108)$$

$$(\lambda_+ + \lambda_-) (\lambda_+ - \lambda_-) = -\frac{2\tau_0}{\left(\frac{dp}{dz}\right) R} (\lambda_+ + \lambda_-) \quad (3.109)$$

Logo:

$$(\lambda_+ - \lambda_-) = -\frac{2\tau_0}{\left(\frac{dp}{dz}\right) R} \quad (3.110)$$

Lembrando da equação (3.81), substituindo o valor de λ , juntamente com o valor encontrado na equação (3.110), é possível chegar em:

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{4\mu'} \frac{dP}{dz} \left[\frac{\lambda_-^2 R^2}{R^2} - \kappa^2 - 2\lambda_+ \lambda_- \left(\frac{\lambda_- R}{\kappa R} \right) - 2(\lambda_- - \lambda_+) \left(\frac{\lambda_+ R}{R} - \kappa \right) \right] \\ = \frac{R^2}{4\mu'} \frac{dP}{dz} \left[\frac{\lambda_+^2 R^2}{R^2} - 1 - 2\lambda_+ \lambda_- \left(\frac{\lambda_+ R}{R} \right) + 2(\lambda_- - \lambda_+) \left(\frac{\lambda_+ R}{R} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.111)$$

Simplificando:

$$\lambda_-^2 - \kappa^2 - 2\lambda_+ \lambda_- \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+ \kappa} \right) - 2(\lambda_- - \lambda_+) (\lambda_- - \kappa) = \lambda_+ - 1 - 2(\lambda_- - \lambda_+) (\lambda_+ - 1) \quad (3.112)$$

Reescrevendo:

$$\lambda_+^2 - \lambda_-^2 + \kappa^2 - 1 + 2(\lambda_- - \lambda_+) (\lambda_+ + \lambda_- - \kappa - 1) + 2\lambda_+ \lambda_- \ln \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+ \kappa} \right) = 0 \quad (3.113)$$

Desenvolvendo a equação acima:

$$\begin{aligned} \lambda_+^2 - \lambda_-^2 + \kappa^2 - 1 + 2(\lambda_+ - \lambda_-) (1 + \kappa) + 2\lambda_-^2 + 2\lambda_+ \lambda_- - 2\lambda_+^2 - 2\lambda_+ \lambda_- \\ + 2\lambda_+ \lambda_- \ln \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+ \kappa} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.114)$$

$$-\lambda_+^2 - \lambda_-^2 + \kappa^2 - 1 + 2(\lambda_+ - \lambda_-) (1 + \kappa) + 2\lambda_+ \lambda_- \ln \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+ \kappa} \right) = 0 \quad (3.115)$$

Fazendo:

$$\alpha = \frac{\lambda_-}{\lambda_+}$$

Assim para:

$$\kappa = 0,5 \quad \Rightarrow \quad 0,5 \leq \alpha \leq 1$$

$$\kappa = 0,9 \quad \Rightarrow \quad 0,9 \leq \alpha \leq 1$$

$$\kappa = 0,1 \quad \Rightarrow \quad 0,1 \leq \alpha \leq 1$$

Para α fixo.

E dividindo a equação (3.115) por λ_+^2 , é possível escrever:

$$\lambda_+^2 \left(2\alpha \ln \left(\frac{\alpha}{\kappa} \right) + \alpha^2 - 1 \right) + 2\lambda_+ (1 - \alpha) (1 + \kappa) + \kappa^2 - 1 = 0 \quad (3.117)$$

Encontrando o valor de λ_+ :

$$\begin{aligned} \lambda_+ = - \frac{2(1 - \alpha)(1 + \kappa)}{2(2\alpha \ln \left(\frac{\alpha}{\kappa} \right) + \alpha^2 - 1)} \\ \pm \frac{\sqrt{4(1 - \alpha)^2 (1 + \kappa)^2 + 4(1 - \kappa^2) (2\alpha \ln \left(\frac{\alpha}{\kappa} \right) + \alpha^2 - 1)}}{2(2\alpha \ln \left(\frac{\alpha}{\kappa} \right) + \alpha^2 - 1)} \end{aligned} \quad (3.118)$$

Rearranjando:

$$\lambda_+ = -\frac{1}{2\alpha \ln\left(\frac{\alpha}{\kappa}\right) + \alpha^2 - 1} \left[(1 - \alpha)(1 + \kappa) \pm \sqrt{(1 - \alpha)^2(1 + \kappa)^2 + 4(1 - \kappa^2) \left(2\alpha \ln\left(\frac{\alpha}{\kappa}\right) + \alpha^2 - 1\right)} \right] \quad (3.119)$$

Lembrando que:

$$\lambda_- = \alpha \lambda_+$$

$$\left(-\frac{dP}{dz}\right) = \frac{2\tau_0}{R(\lambda_+ - \lambda_-)}$$

O número de Bingham (Bn) é uma constante adimensional do sistema, e define o aspecto do escoamento, como representado na figura 10. Quanto maior for Bn maior será a região II se comparado as regiões I e III, ou seja, maior a região que o plástico de Bingham tem o comportamento similar a um sólido e menor a região de comportamento fluido.

De acordo com Poole (2012) [36], o número de Bingham pode ser representado por:

$$Bn = \frac{\tau_0 R}{\mu' V_m} \quad (3.121)$$

Com o valor da velocidade média sendo determinado pelos valores de λ_+ , λ_- e $\frac{dP}{dz}$.

3.2.4 Descrição da Variação da Pressão

Para o plástico de Bingham, o escoamento é dividido em três regiões:

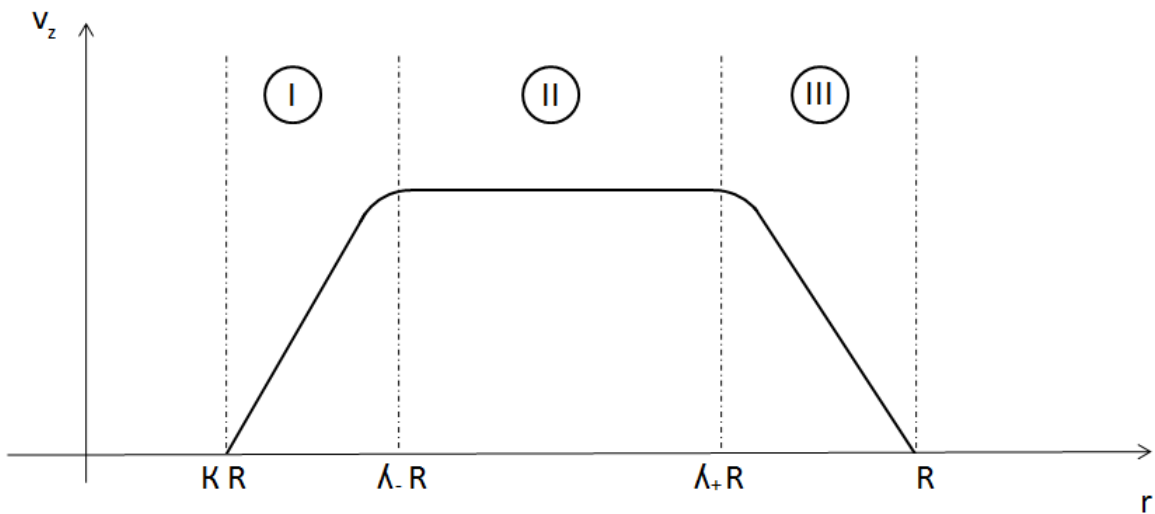


Figura 11 – Representação da velocidade x raio para um plástico de Bingham

Matematicamente:

$$I: \quad \kappa R \leq r \leq \lambda_- R$$

$$II: \quad \lambda_- R \leq r \leq \lambda_+ R$$

$$III: \quad \lambda_+ R \leq r \leq R$$

Para o desenvolvimento das equações, recorre-se novamente ao trabalho de Barbosa (2018) [6], o apêndice B demonstra a modelagem do problema adotada pela autora, para que assim possa se introduzir a pressão do *kick*.

Partindo da equação (B.18) nas regiões I e III, a dinâmica é definida por:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu' \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \quad (3.123)$$

Então:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{dP}{dz} + \mu' \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \quad (3.124)$$

Na região II:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = f_z - \vec{\nabla} p \quad (3.125)$$

Logo:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{dP}{dz} \quad (3.126)$$

Nas regiões I e III, como elas são muito similares as equações de Navier-Stokes para fluido newtoniano, já descrito por Barbosa (2018) [6], e representadas no apêndice B, é possível escrever:

$$v_z(r, t) = \text{Re} \left\{ \exp^{i\omega t} [f_p(r) + C_1 J_0(Nr) + C_2 Y_0(Nr)] \right\} \quad (3.127)$$

Sendo:

$$f_p(r) = -\frac{iA}{\omega}$$

E

$$N = \sqrt{-\frac{i\omega}{\nu'}}$$

ν' : é viscosidade cinemática,

$$\nu' = \frac{\mu'}{\rho}$$

E das propriedades das funções de Bessel, que podem ser encontradas em (Butkov, 1988) [37]

$$\frac{\partial J_0(x)}{\partial x} = -J_1(x)$$

$$\frac{\partial Y_0(x)}{\partial x} = -Y_1(x)$$

Com isso é possível escrever:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = Re \left\{ \exp^{i\omega t} \left[\frac{\partial f_p(r)}{\partial r} - N(C_1 J_1(Nr) + C_2 Y_1(Nr)) \right] \right\} \quad (3.130)$$

Aplicando as condições de contorno.

Para a região I:

$$v_z(\kappa R) = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r}(\lambda_- R) = 0$$

Para a região III:

$$v_z(R) = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r}(\lambda_+ R) = 0$$

Voltando a região I, também é possível escrever que:

$$v_z(\kappa R, t) = 0$$

Para as condições de contorno valerem em qualquer tempo, tanto a parte real, quanto a parte imaginária da expressão entre colchetes deve valer zero. (BARBOSA, 2018) [6]

Logo:

$$f_p(\kappa R) + C_1 J_0(N\kappa R) + C_2 Y_0(N\kappa R) = 0 \quad (3.133)$$

Como:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r}(\lambda_- R) = 0$$

Assim:

$$\frac{\partial f_p}{\partial r}(\lambda_- R) - NC_1 J_1(N\lambda_- R) - NC_2 Y_1(N\lambda_- R) = 0 \quad (3.134)$$

Adptando as equações (1.133) e (1.134):

$$NY_1(N\lambda_- R) [f_p(\kappa R) + C_1 J_0(N\kappa R) + C_2 Y_0(N\kappa R)] = 0 \quad (3.135)$$

E

$$Y_0(N\kappa R) \left[\frac{\partial f_p}{\partial r}(\lambda_- R) - NC_1 J_1(N\lambda_- R) - NC_2 Y_1(N\lambda_- R) \right] = 0 \quad (3.136)$$

Somando as equações acima:

$$\begin{aligned} NY_1(N\lambda_- R) f_p(\kappa R) + Y_0(N\kappa R) \frac{\partial f_p}{\partial r}(\lambda_- R) \\ + NC_1 [J_0(N\kappa R) Y_1(N\lambda_- R) - Y_0(N\kappa R) J_1(N\lambda_- R)] = 0 \end{aligned} \quad (3.137)$$

Isolando C_1 :

$$C_1 = \frac{NY_1(N\lambda_- R) f_p(\kappa R) + Y_0(N\kappa R) \frac{\partial f_p}{\partial r}(\lambda_- R)}{N[Y_0(N\kappa R) J_1(N\lambda_- R) - J_0(N\kappa R) Y_1(N\lambda_- R)]} \quad (3.138)$$

Substituindo C_1 na equação (3.133):

$$f_p(\kappa R) + \frac{NY_1(N\lambda_- R) f_p(\kappa R) + Y_0(N\kappa R) \frac{\partial f_p}{\partial r}(\lambda_- R)}{N[Y_0(N\kappa R) J_1(N\lambda_- R) - J_0(N\kappa R) Y_1(N\lambda_- R)]} J_0(N\kappa R) + C_2 Y_0(N\kappa R) = 0 \quad (3.139)$$

Simplificando e isolando C_2 :

$$C_2 = \frac{N f_p(\kappa R) J_1(N\lambda_- R) + \frac{\partial f_p(\lambda_- R)}{\partial r} J_0(N\kappa R)}{N[J_0(N\kappa R) Y_1(N\lambda_- R)] - Y_0(N\kappa R) J_1(N\lambda_- R)} \quad (3.140)$$

Agora, calcula-se na região III. Lembrando que:

$$v_z(R) = 0$$

Tem-se:

$$f_p(R) + C_1 J_0(NR) + C_2 Y_0(NR) = 0 \quad (3.141)$$

E

$$\frac{\partial v_z(\lambda_+ R)}{\partial r} = 0$$

Gera:

$$\frac{\partial f_p(\lambda_+ R)}{\partial r} - N[C_1 J_1(N\lambda_+ R) + C_2 Y_1(N\lambda_+ R)] = 0 \quad (3.142)$$

De maneira similar a já realizada, adequa-se as equações. Então é possível escrever:

$$NY_1(N\lambda_+ R) [f_p(R) + C_1 J_0(NR) + C_2 Y_0(NR)] = 0 \quad (3.143)$$

E

$$Y_0(NR) \left[\frac{\partial f_p(\lambda_+ R)}{\partial r} - NC_1 J_1(N\lambda_+ R) + NC_2 Y_1(N\lambda_+ R) \right] = 0 \quad (3.144)$$

Somando as duas equações:

$$Nf_p(R)Y_1(N\lambda_+R)NC_1J_0(NR)Y_1(N\lambda_+R) + \frac{\partial f_p(\lambda_+R)}{\partial r}Y_0(NR) - NC_1J_1(N\lambda_+R)Y_0(NR) = 0 \quad (3.145)$$

Tornando-se possível obter C_1 :

$$C_1 = \frac{Nf_p(R)Y_1(N\lambda_+R) + \frac{\partial f_p(\lambda_+R)}{\partial r}Y_0(NR)}{N[Y_0(NR)J_1(N\lambda_+R) - J_0(NR)Y_1(N\lambda_+R)]} \quad (3.146)$$

Substituindo o valor encontrado na equação (1.146):

$$f_p(R) + \frac{Nf_p(R)Y_1(N\lambda_+R) + \frac{\partial f_p(\lambda_+R)}{\partial r}Y_0(NR)}{N[Y_0(NR)J_1(N\lambda_+R) - J_0(NR)Y_1(N\lambda_+R)]}J_0(NR) + C_2Y_0(NR) = 0 \quad (3.147)$$

Finalmente, é possível escrever:

$$C_2 = \frac{Nf_p(R)J_1(N\lambda_+R) + \frac{\partial f_p(\lambda_+R)}{\partial r}J_0(NR)}{N[J_0(NR)Y_1(N\lambda_+R) - Y_0(NR)J_1(N\lambda_+R)]} \quad (3.148)$$

4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS

4.1 FLUIDO NEWTONIANO INCOMPRESSÍVEL

Utilizando-se do recurso de software MATLAB, a linguagem foi escolhida pelo propósito de gerar simulações com tempo de processamento rápido e programação simples, que validassem o desenvolvimento algébrico realizado na seção anterior. Se o objetivo do trabalho fosse buscar uma solução numérica exata para o problema, provavelmente outra linguagem de programação seria mais adequada.

O comportamento do kick, o qual pode ser considerado como uma perturbação no problema, foi modelado para duas situações. A primeira é um falso kick, representada pela função seno, a qual retrata um crescimento de pressão abrupto, e que não se mantém. A segunda é representada pela função exponencial, nela a pressão também cresce de uma forma mais rápida inicialmente, e vai estabilizando ao longo do tempo. Ambas as funções foram modeladas para um período de tempo de 10 e 100, e são descritas como uma série de Fourier para mil termos, a série encontra-se descrita no apêndice C. Vale destacar que a perturbação considerada nas modelagens é equivalente a 10% da solução estacionária, o valor foi fixado tendo em vista que uma variação muito grande poderia causar uma transformação do fluxo laminar para turbulento, impossibilitando assim a previsão do modelo. Vale destacar também, que para o cálculo dos resultados, todas as variáveis foram adimensionalizadas.

Assim, para o tempo 10, possui as seguintes representações.

Função seno:

$$F(t) = 100 \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) \quad (4.1a)$$

Função exponencial:

$$F(t) = 100 \left(1 - \exp^{-\frac{t}{2}}\right) \quad (4.1b)$$

E, para o tempo 100, tem-se.

Função seno:

$$F(t) = 100 \sin\left(\frac{\pi t}{100}\right) \quad (4.2a)$$

Função exponencial:

$$F(t) = 100 \left(1 - \exp^{-\frac{t}{10}}\right) \quad (4.2b)$$

Observa-se que ao final das curvas, representadas pelas figuras 11 e 12, há um intervalo em desconformidade, sendo mais perceptível na representação exponencial. Isso acontece pois a série de Fourier é uma solução aproximada, e após mil termos ela é truncada pelo programa. A decorrência dessa aproximação, é que no tempo zero a velocidade não é nula e próximo ao tempo final a simulação não consegue descrever corretamente o campo de velocidades.

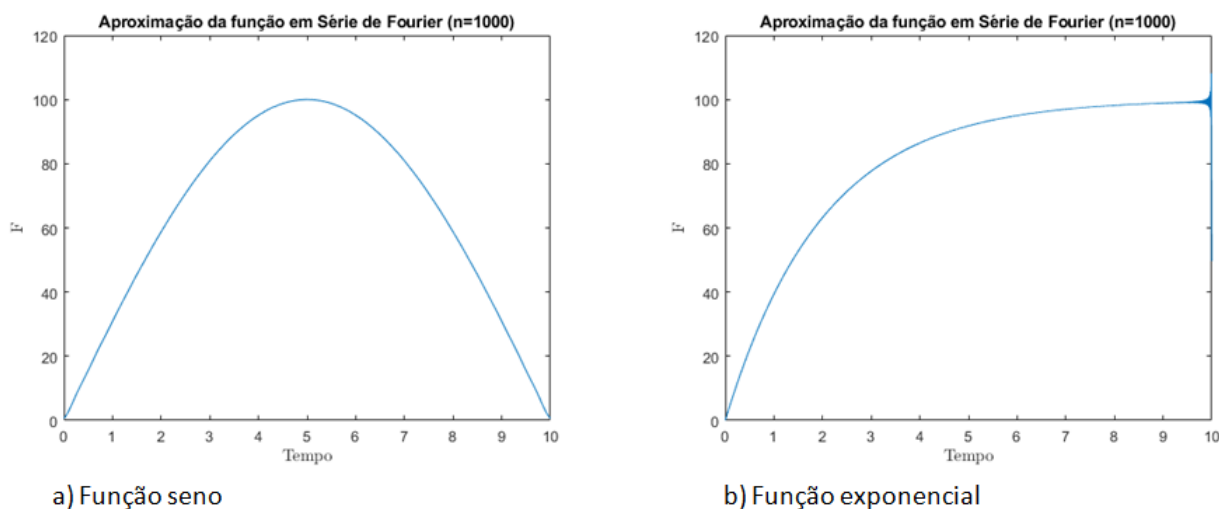


Figura 12 – Série de Fourier durante o tempo 10

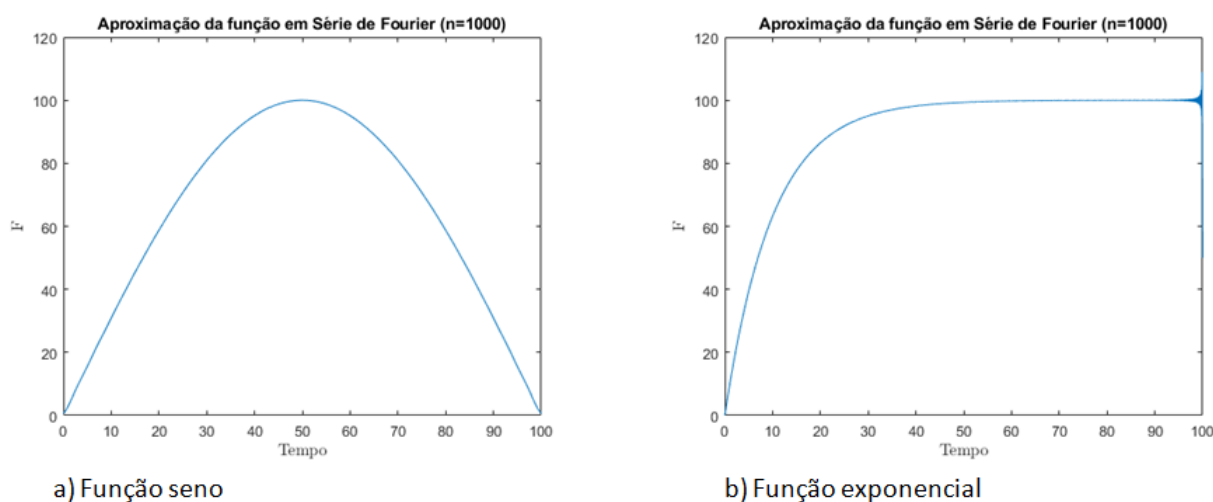


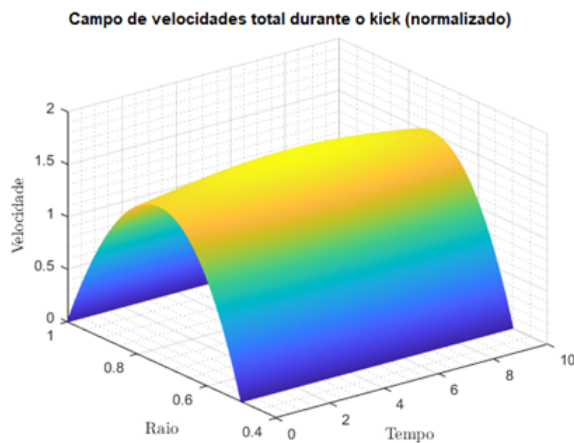
Figura 13 – Série de Fourier durante o tempo de 100

Uma maneira de suavizar essas incormidades gráficas seria aumentando o número de termos utilizados na série de Fourier, o que acarretaria num acréscimo ao tempo computacional gasto. A opção de manter a série para mil termos na simulação, se dá pois esses erros de aproximação e truncamento não interferem em nada a interpretação dos resultados, e devido as limitações do MATLAB para realizar integrações de funções harmônicas com frequência muito alta.

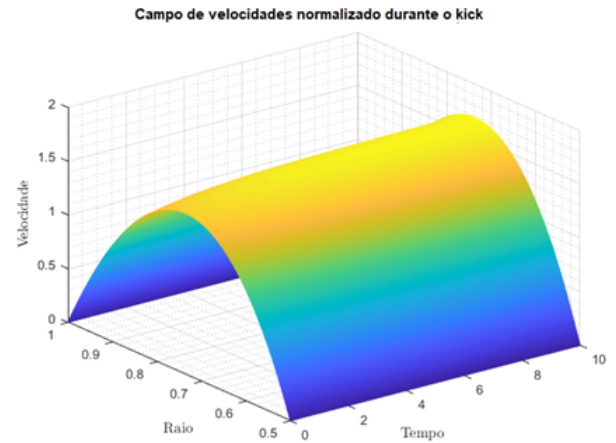
O campo de velocidades apresentado nas figuras 13 e 14, está de acordo com o esperado, pois a velocidade nula encontrada nas parades respeita a condição de não deslizamento, utilizada como condição de contorno no escoamento de um fluido real, e o seu valor máximo é encontrado

próximo ao centro, gerando um formato parabólico do campo em relação ao raio.

Vale ressaltar que para o cálculo, foram considerados valores arbitrários do gradiente de pressão, densidade e viscosidade, portanto o valor absoluto da velocidade é pouco significativo, sendo que ela foi normalizada em função da velocidade média do escoamento permanente. Evidenciando assim, a relação entre o campo de velocidades do escoamento permanente e o acréscimo de velocidades devido ao *kick*.

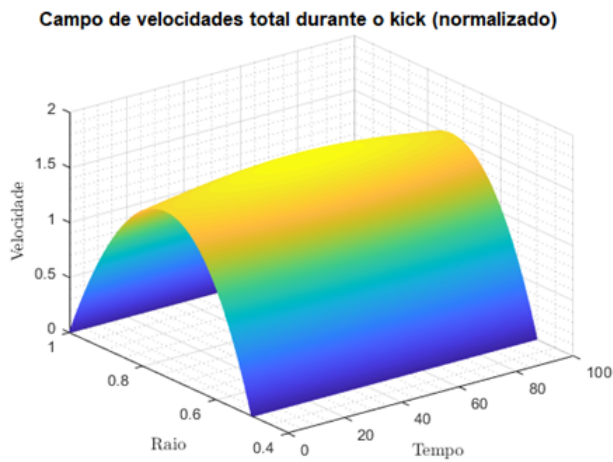


a) Função seno

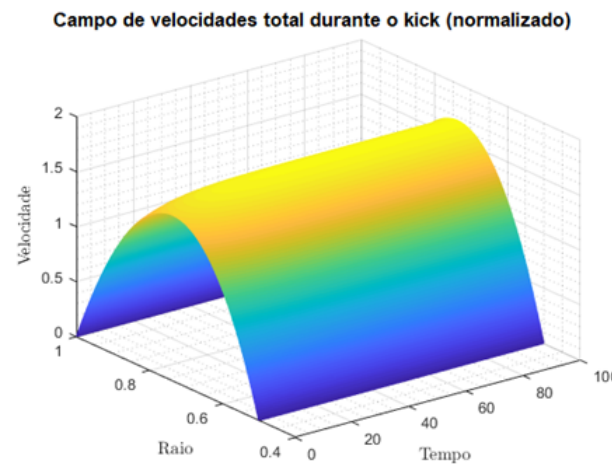


b) Função exponencial

Figura 14 – Campo de velocidade durante o tempo 10



a) Função seno



b) Função exponencial

Figura 15 – Campo de velocidade durante o tempo 100

Como decorrência da perturbação, um acréscimo da velocidade é calculado ao longo do tempo, e está representado nas figuras 15 e 16:

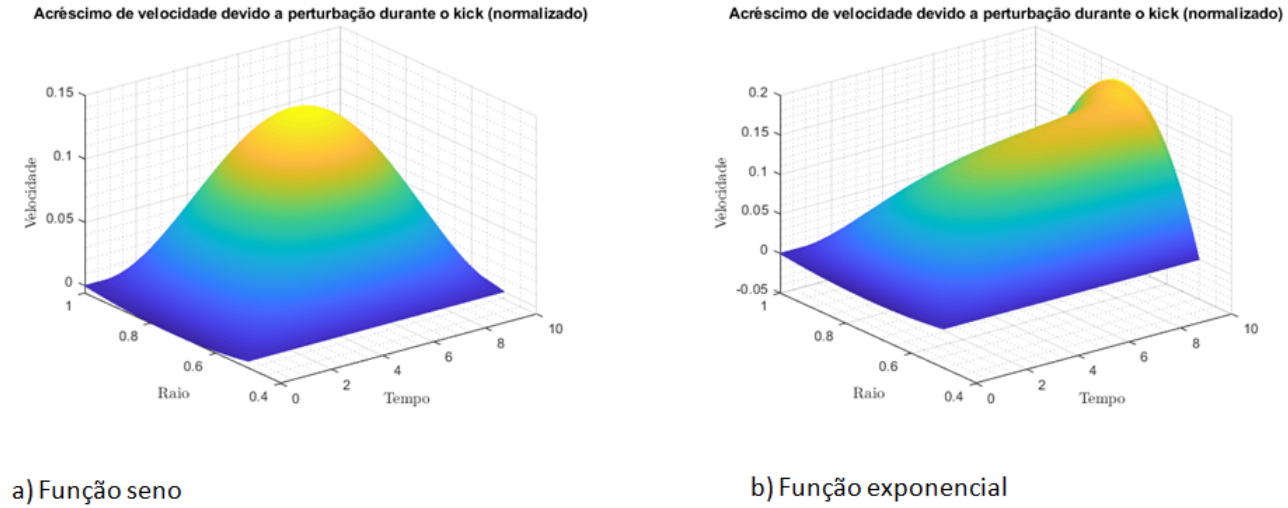


Figura 16 – Acréscimo de velocidade em decorrência da perturbação para o tempo 10

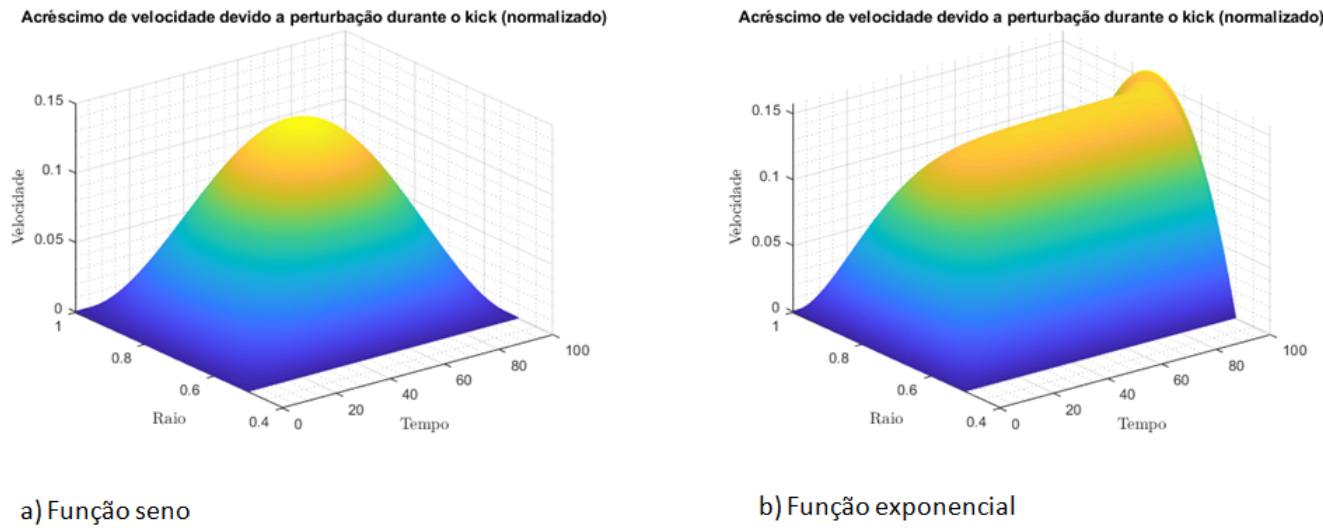
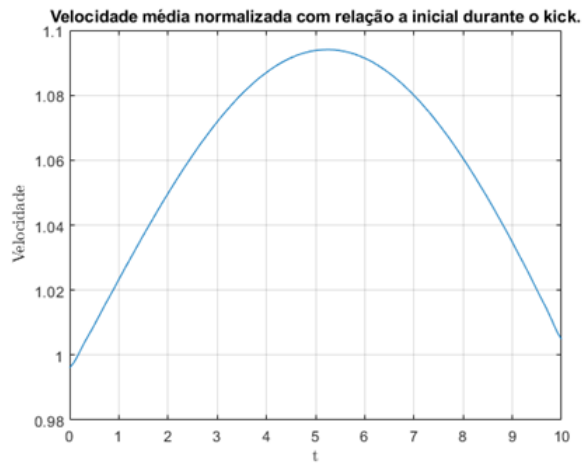
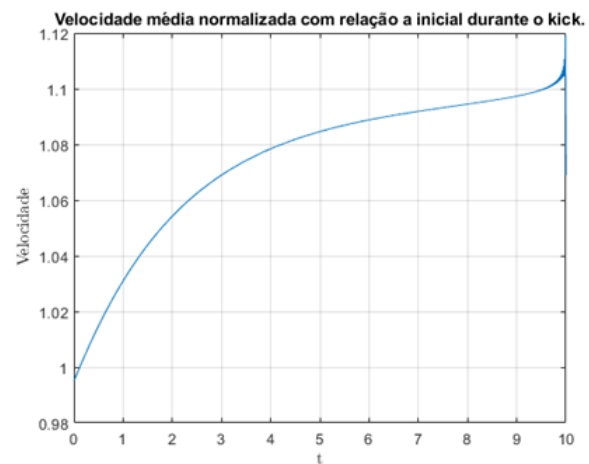


Figura 17 – Acréscimo de velocidade em decorrência da perturbação para o tempo 100

Calcula-se também a velocidade média normalizada com relação a velocidade inicial durante a perturbação, figuras 17 e 18:

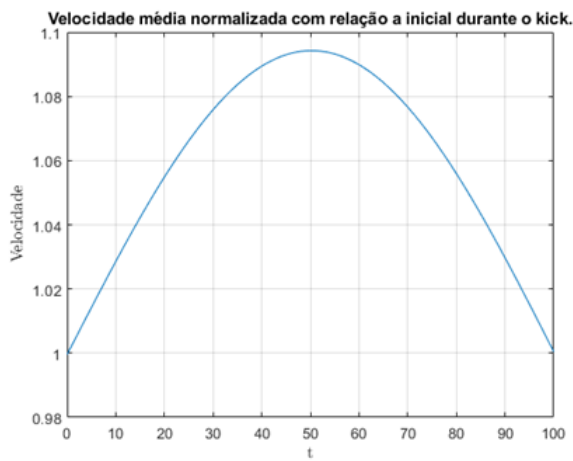


a) Função seno

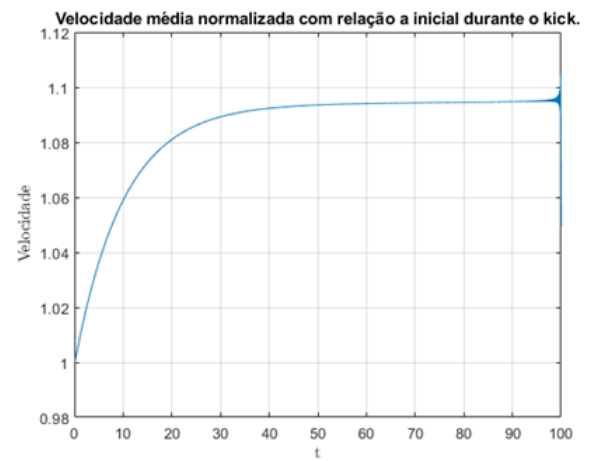


b) Função exponencial

Figura 18 – Velocidade média normalizada para o tempo 10



a) Função seno



b) Função exponencial

Figura 19 – Velocidade média normalizada para o tempo 100

Pelas figuras 17 e 18, nota-se que a velocidade média começa negativa, e isso é muito mais perceptível para o tempo 10, do que para o 100, um das hipóteses de explicação para esse fenômeno é um escoamento turbulento no começo, o qual não foi previsto no modelo, devido a uma variação de pressão muito rápida, e quanto menor o tempo, mais rápido essa variação acontece. Outra explicação é a limitação do programa para calcular funções de Bessel de números complexos multiplicados pelos desvios nos extremos, devido a transformada de Fourier.

É perceptível também que na função exponencial a velocidade média tende para o valor de 1.1, esse valor representa a solução estacionária e 10% de pressão a mais, sendo que para o tempo 10 esse valor se aproxima mais rápido. O final da curva gera uma desconformidade, devido ao fato de que a equação está oscilando, o que gera uma solução incorreta da equação de Navier-Stokes. O gráfico da função exponencial para ambos os tempos demonstra que há um acréscimo de pressão significativo durante um período, e é controlado, o escoamento continua laminar, com uma solução que tende para a solução estacionária com 10% a mais da pressão.

Para a função seno a interpretação é bastante similar, existe um acréscimo, que não chega a atingir o valor de 1.1, devido a inércia do sistema. A velocidade aumenta, atinge o seu máximo e depois começa a diminuir. A diferença na duração de tempos, de 10 e 100, é que quanto maior o tempo, maior é o período para a velocidade estabilizar. Nota-se também que apesar da pressão ser máxima na metade do tempo, o mesmo não acontece para a velocidade, isso acontece porque o escoamento ainda está sendo acelerado pela pressão, é como se devido as forças internas de viscosidade ele demorasse um tempo para dar uma resposta.

Para finalizar a análise do fluido Newtoniano, foi calculado o escoamento variando o valor de κ . E percebe-se que, conforme muda o valor de κ , muda-se também o formato do perfil de velocidades. Para κ maior o perfil se torna mais simétrico, como demonstrado na figura 19:

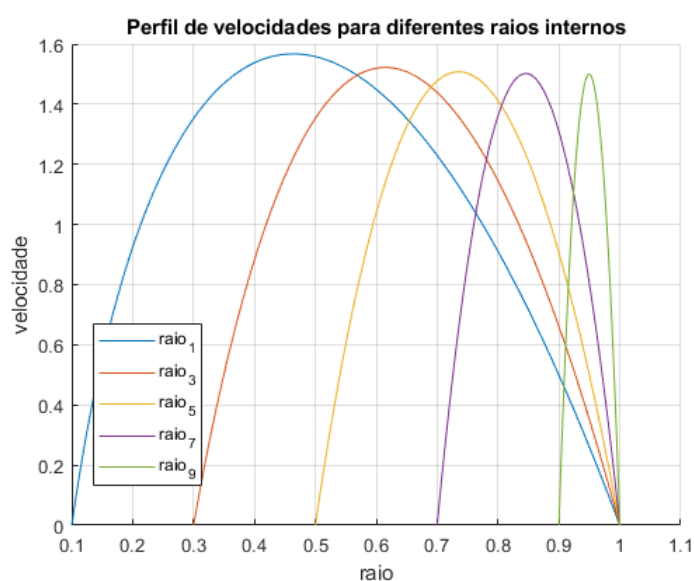


Figura 20 – Perfis de velocidade 2D, para diferentes raios internos

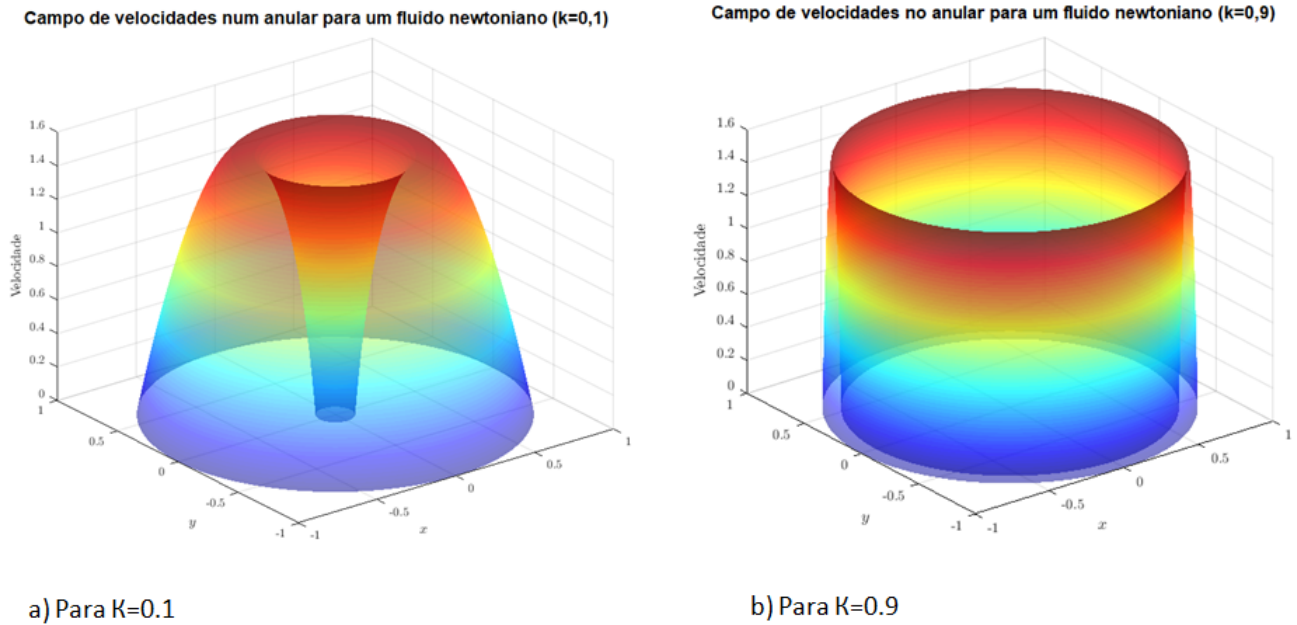


Figura 21 – Representação do campo de velocidades no anular para diferentes raios internos

4.2 PLÁSTICO DE BINGHAM

Os parâmetros de entrada para o cálculo do escoamento de um fluido de Bingham, é demonstrado na tabela a seguir, a qual traz as relações entre o número de Bingham, o fator α e variação da pressão.

Bn	α	$\left \frac{dP}{dz} \right $
1	0,950455	535,877
10	0,769381	104,485
25	0,685871	72,8807
100	0,5973351	53,5385

Tabela 2 – Fatores de um escoamento de um plástico de Bingham

Foi calculado a aparência do escoamento, para os diferentes números de Bingham. Com isso, foi possível observar que o tamanho da região que se comporta como um sólido aumenta, de maneira proporcional ao número de Bingham. E que o perfil de velocidade torna-se plano quando Bn tende ao infinito. Como demonstrado pelas figuras 21 e 22.

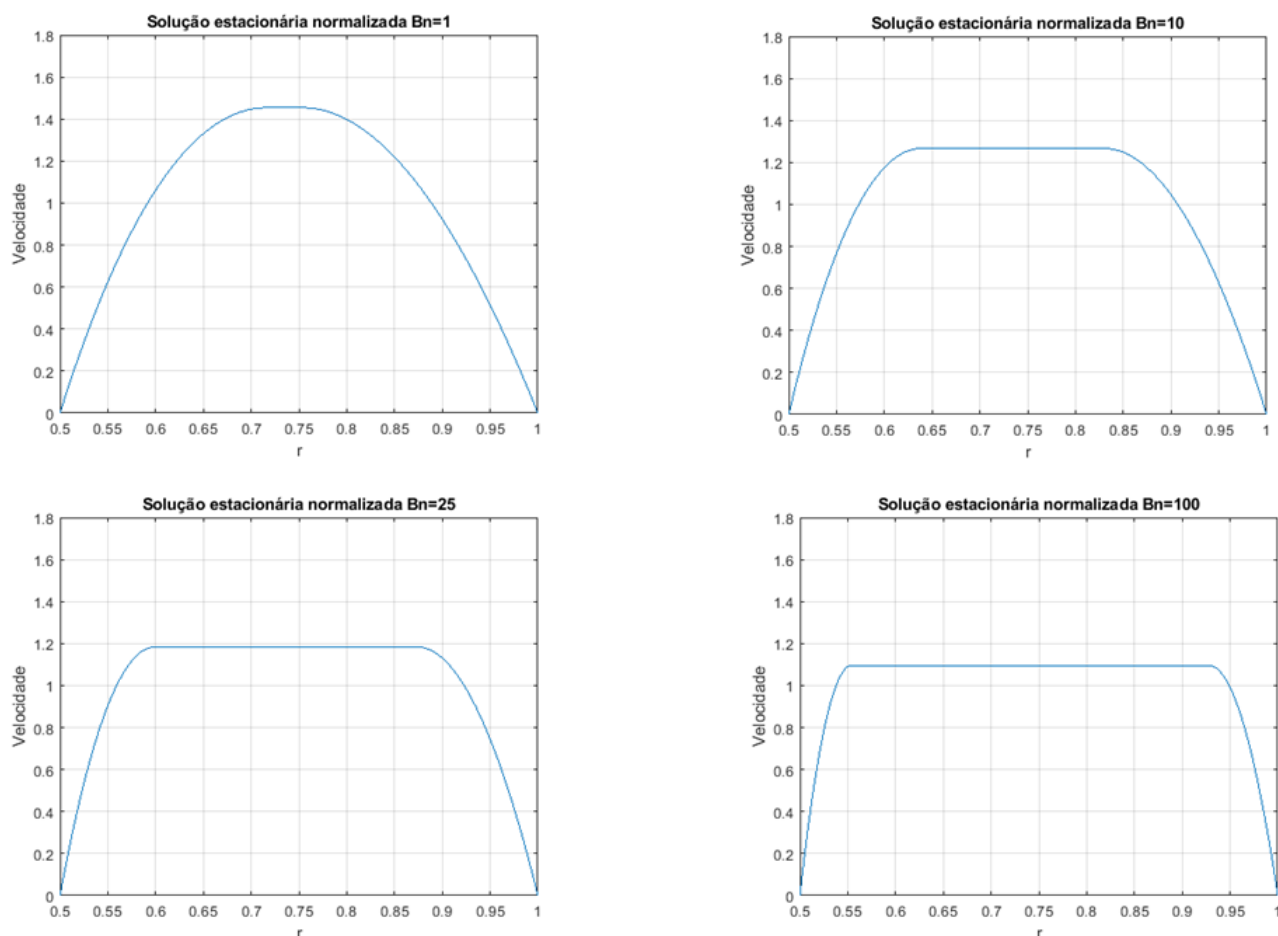


Figura 22 – Solução estacionária normalizada para diferentes Bn

Também calcula-se a relação entre Bn e a velocidade média do escoamento, figura 23. Sabe-se que quanto maior é essa velocidade, menor é a constante de Bingham. Ou seja, quanto mais rápido for o escoamento, menor é a sua região que se comporta como um sólido.

Para os próximos cálculos foi escolhido um valor de $\kappa = 0.5$ e $Bn = 25$, tendo em vista que para números de Bingham muito pequenos, a velocidade do escoamento seria muito alta, e o escoamento provavelmente deixaria de ser laminar, tornando-se turbulento. Já para números de Bingham muito grandes, o comportamento sólido seria dominante.

A perturbação é inserida no sistema de forma similar a realizada para um fluido Newtoniano. São duas situações diferentes representadas, nas figuras 24 e 25, por uma função seno e outra exponencial, através de séries de Fourier. Todo o cálculo realizado para esse fenômeno, é demonstrado na seção 3.2.4.

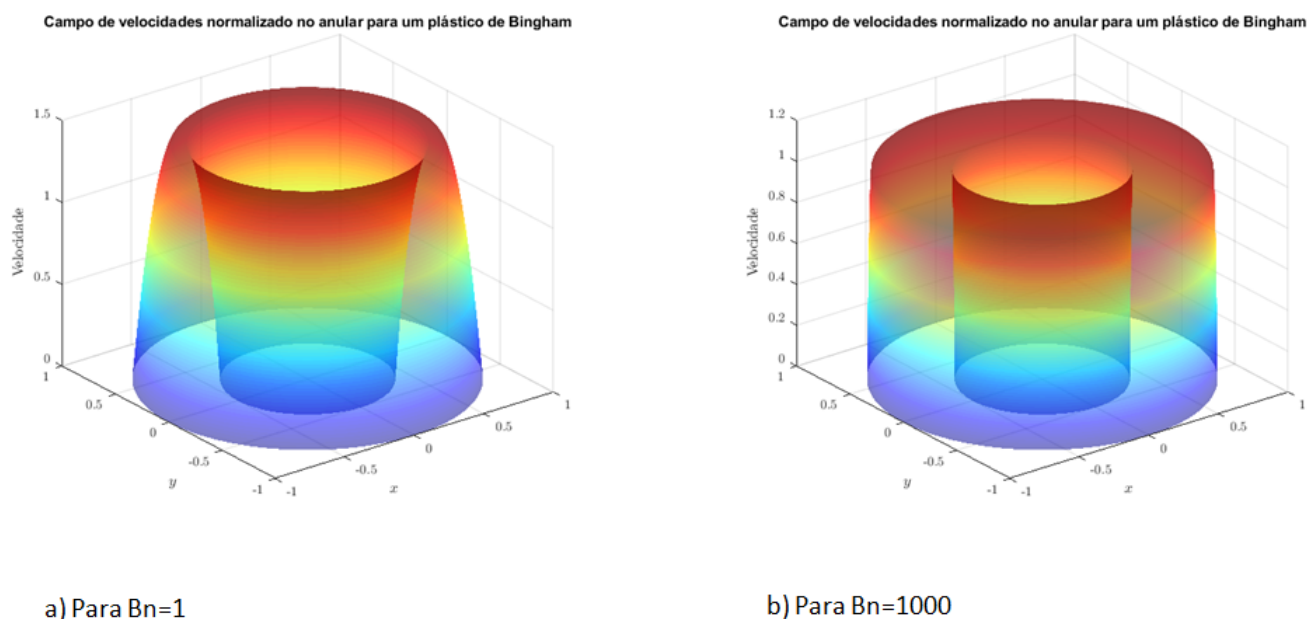


Figura 23 – Campo de velocidades no anular para diferentes Bn

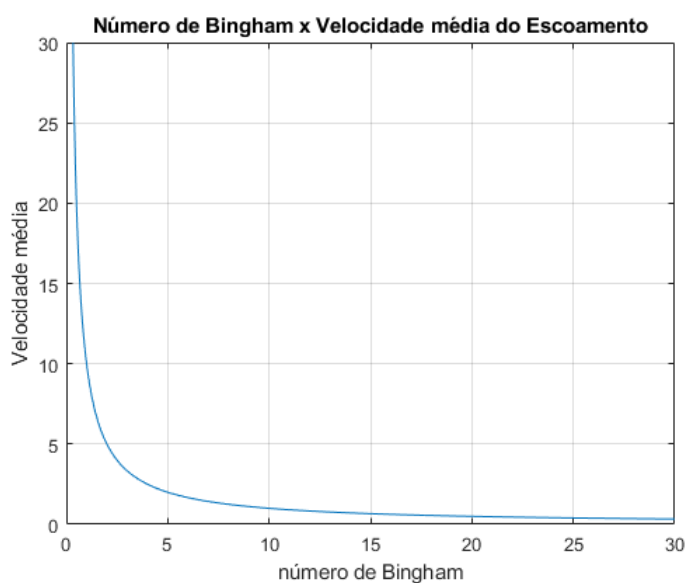
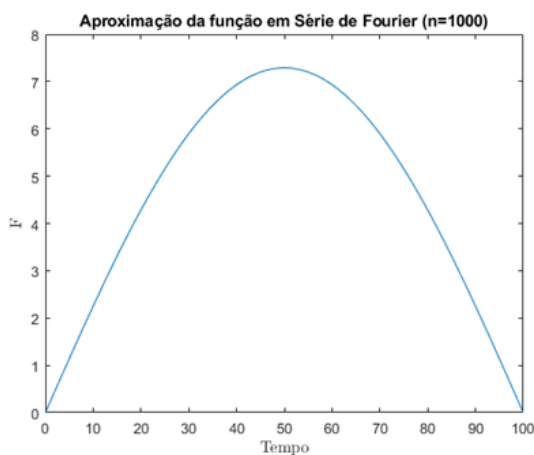


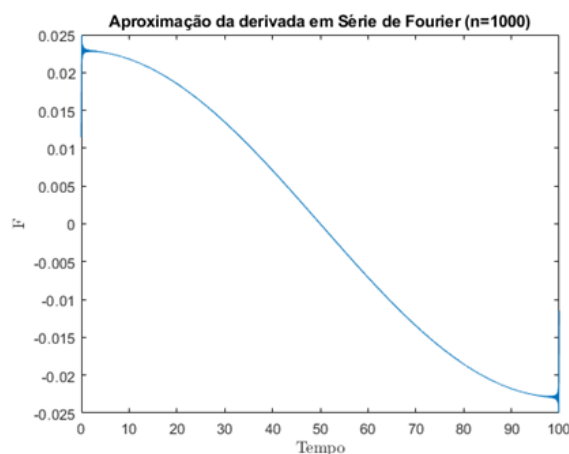
Figura 24 – Relação entre o número de Bingham x a velocidade média do escoamento

O erro associado aos extremos das figuras 24 e 25, é muito maior do que para um fluido newtoniano, pois se está trabalhando com a função de Bessel e a sua derivada, sua representação gráfica encontra-se no apêndice C, sendo muito provável que a série de Fourier apresente maiores inconformidades para a derivada.

Assim, calcula-se o campo de velocidades durante a perturbação, figura 26, e o acréscimo de velocidade em decorrência da mesma de duas maneiras, considerando os extremos, figura 27, e desconsiderando os extremos, figura 28.

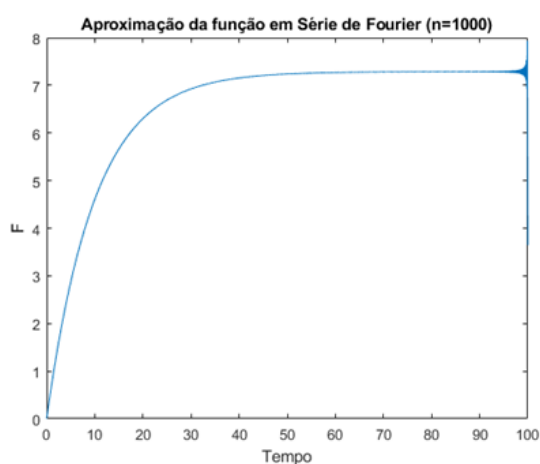


a) Função seno

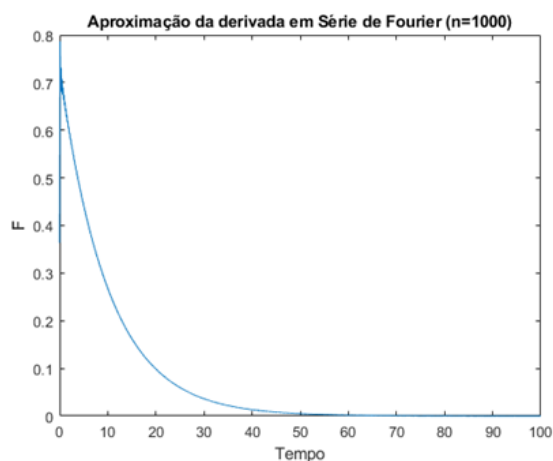


b) Derivada da função seno

Figura 25 – Aproximação da função seno e sua derivada em série de Fourier



a) Função exponencial



b) Derivada da função exponencial

Figura 26 – Aproximação da função exponencial e sua derivada em série de Fourier

O campo de velocidades para o plástico de Bingham também está de acordo com o esperado, com a velocidade nula nas paredes e o seu máximo próximo ao centro do anular, como trazido pela figura 26. Já os acréscimos de velocidade apresentam uma desconformidade muito maior nas extremidades do que para um fluido newtoniano, figuras 27 e 28. Além da hipótese de erros decorrente das funções de Bessel multiplicadas pela aproximação da função pela série de Fourier, vale pontuar outra possibilidade que explica essa incoerência, para a simulação numérica foi considerado que λ_+ e λ_- são fixos, ou seja, não possuem o seu valor alterado com a perturbação, o que não condiz com a realidade. Assim, ao comparar as regiões I e III, apesar dos valores de λ_+ e λ_- serem parecidos, eles não são iguais. Em virtude disso, é utilizado uma

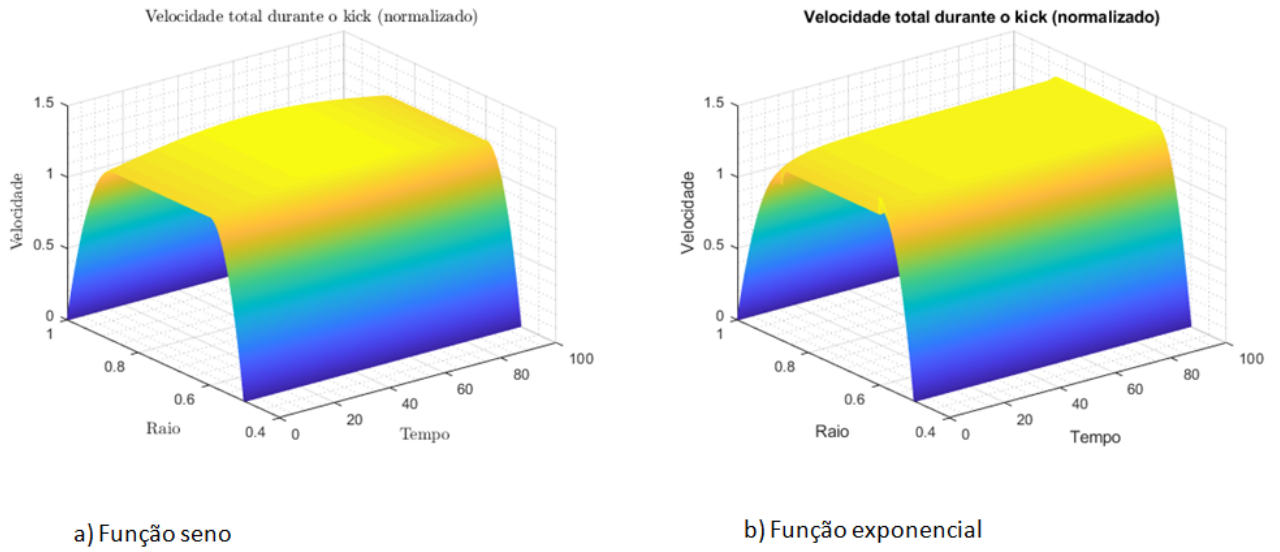


Figura 27 – Campo de velocidade durante a perturbação

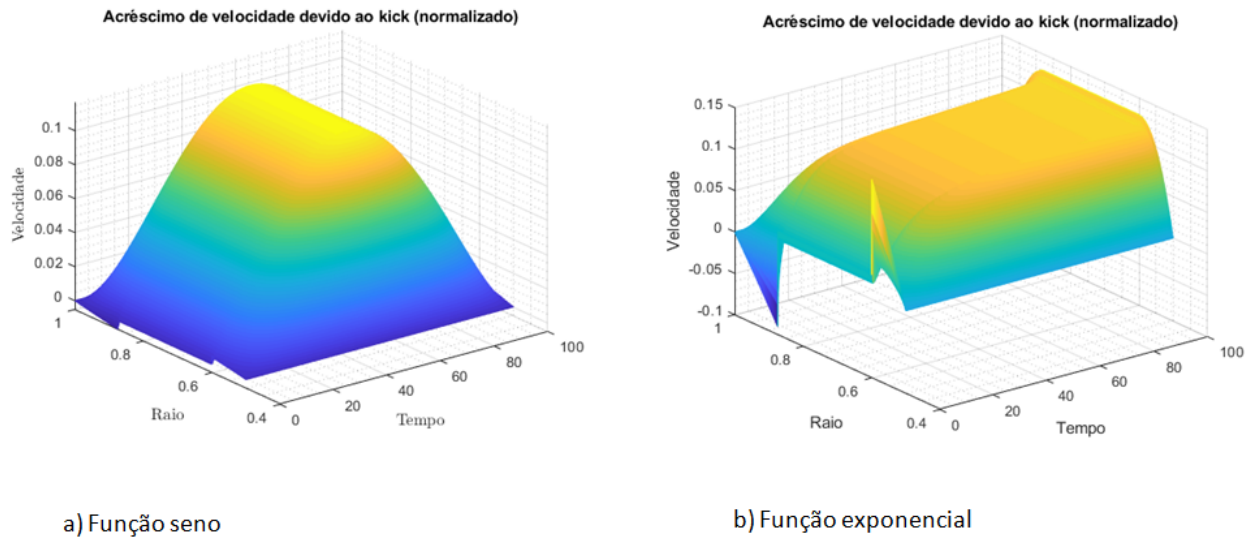


Figura 28 – Acréscimo de velocidade em decorrência da perturbação

média entre esses dois valores para a velocidade. Sendo assim, a solução algébrica continua sendo uma aproximação, para ter uma solução exata teria que considerar que os valores de λ_+ e λ_- variassem com o tempo, ou seja, para cada passo de tempo diferente esses dois fatores teriam que ser recalculados, o que geraria um aumento considerável do tempo de simulação. Como o objetivo do trabalho era o de encontrar uma solução algébrica do problema e não a sua solução numérica, optou-se pelo menor tempo de programação.

A figura 29 é um corte 2D do acréscimo da velocidade, nela essa defasagem entre λ_+ e λ_- torna-se perceptível.

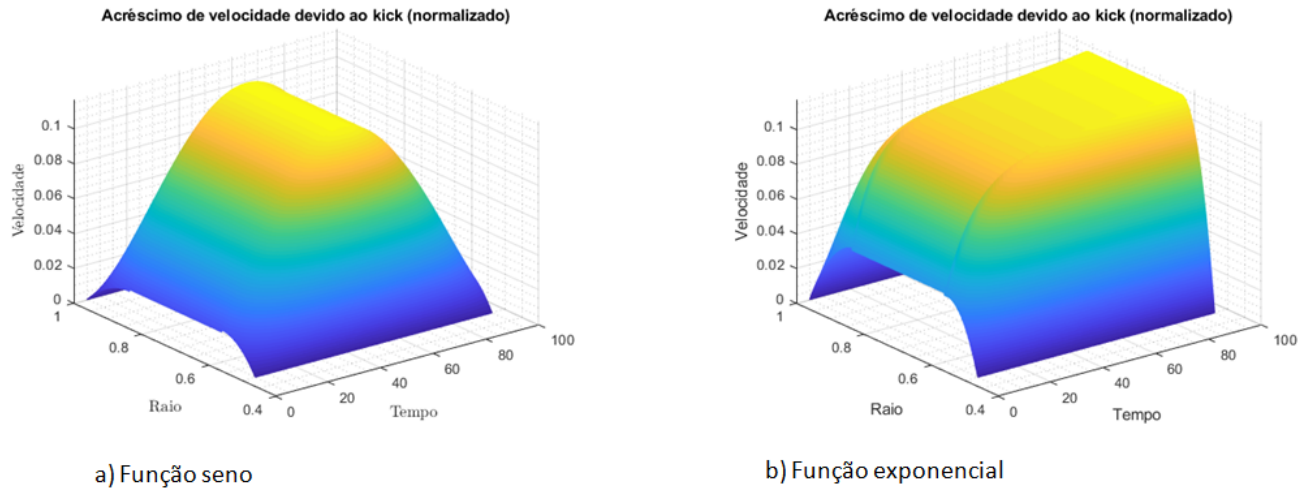


Figura 29 – Acréscimo de velocidade em decorrência da perturbação desconsiderando os extremos

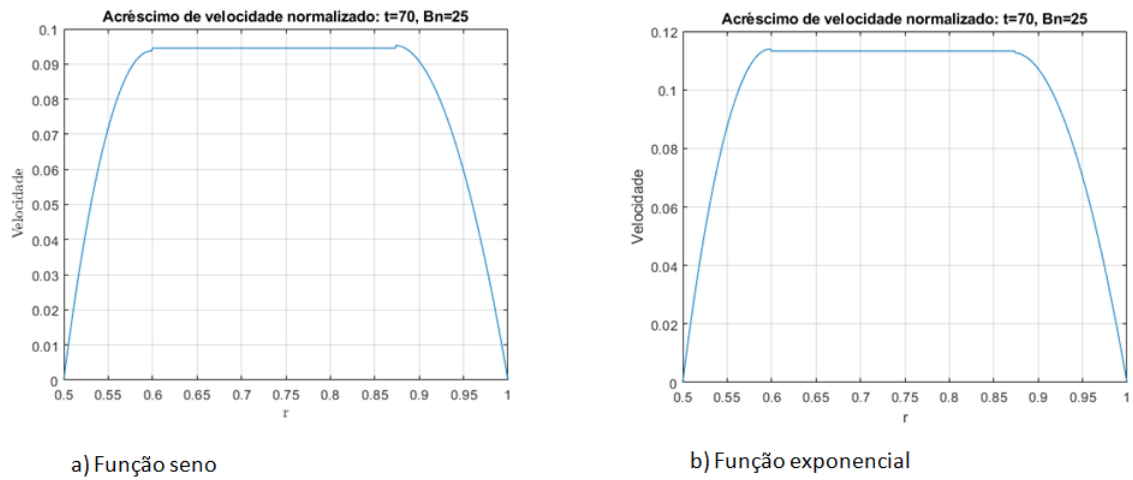
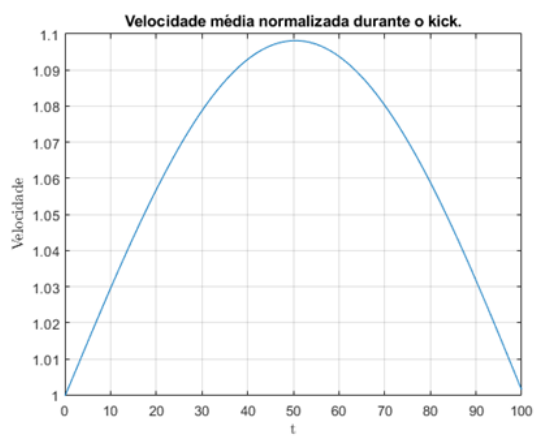
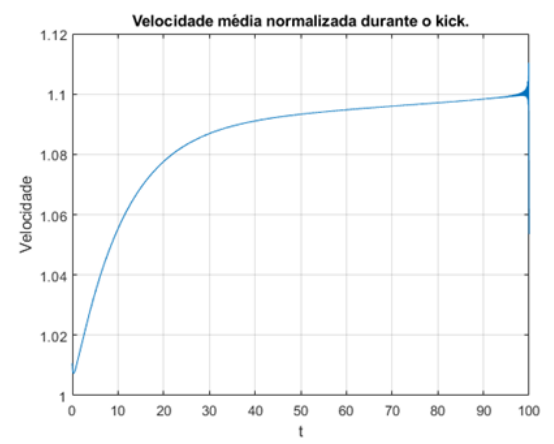


Figura 30 – Acréscimo de velocidade em decorrência da perturbação no tempo 70

Por último, obtém-se a velocidade média normalizada do escoamento na figura 30. A interpretação para o plástico de Bigham é muito semelhante a do fluido newtoniano. Com a função exponencial tendendo para o valor 1.1, o final da curva ultrapassa esse valor devido ao um erro de truncamento da série de Fourier. Já a função seno apresentando um acréscimo até aproximadamente 1.1 e depois o seu decaimento.



a) Função seno



b) Função exponencial

Figura 31 – Velocidade média normalizada durando a perturbação

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

5.1 CONCLUSÕES

O propósito desse trabalho foi desenvolver uma solução analítica mais geral para o estudo do escoamento em cilindros co-axiais do que a obtida por Barbosa (2018) [6] e Zanotto(2018) [7], juntamente com uma diversificação do modelo, abrindo a possibilidade de multiplicação dos cenários, como a mudança do fluido, não apenas newtoniano, mas também para o plástico de Bingham.

Os resultados das simulações realizadas indicam que o método é eficiente para descrever a dinâmica do escoamento nessas condições, validando o mesmo para a aplicação em situações reais.

A solução analítica da equação de Navier-Stokes permite qualificar o escoamento de outro ponto de vista, uma vez que a modelagem de problemas similares geralmente são desenvolvidas numericamente, através de recursos computacionais.

A utilização da série de Fourier se torna um ponto de imperfeição, por se tratar de uma solução não exata, ela acaba retornando erros de truncamento e aproximação, mas que nada interferem na interpretação final dos resultados. Um outro ponto de limitação é a não variação de λ_+ e λ_- com a perturbação, tornando a solução numérica do escoamento para o plástico de Bingham, uma solução aproximada.

Como maneira de aperfeiçoamento do modelo, ficam as sugestões de próximos passos para trabalhos futuros:

- Incorporar a compressibilidade do fluido;
- Tornar o escoamento bifásico;
- Considerar diâmetro;
- Considerar diferentes geometrias.

APÊNDICE A – EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PARA FLUIDO NEWTONIANO

Sendo o gradiente de velocidade para qualquer sistema de coordenadas descrito da seguinte forma:

$$(\vec{\nabla}\vec{v})_{ij} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{v_j}{h_i h_j} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} + \delta_{ij} \sum_k \frac{v_k}{h_i h_k} \frac{\partial h_i}{\partial x_k} \quad (\text{A.1})$$

E em coordenadas cilíndricas:

$$h_r = 1; \quad h_\theta = r; \quad h_z = 1$$

Assim, gradiente de velocidade:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}\vec{v})_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} - v_r \cdot 0 + \delta_{rr} \sum_k \frac{v_k}{h_k} \cdot 0 = \frac{\partial v_r}{\partial r}; \\ (\vec{\nabla}\vec{v})_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \cdot 0 + \delta_{\theta\theta} \sum_k \frac{v_k}{r h_k} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}; \\ (\vec{\nabla}\vec{v})_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} - v_z \cdot 0 + \delta_{zz} \sum_k \frac{v_k}{h_k} \cdot 0 = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ (\vec{\nabla}\vec{v})_{rz} &= \frac{\partial v_r}{\partial z}; \quad (\vec{\nabla}\vec{v})_{zr} = \frac{\partial v_z}{\partial r}; \quad (\vec{\nabla}\vec{v})_{\theta z} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z}; \\ (\vec{\nabla}\vec{v})_{z\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta}; \quad (\vec{\nabla}\vec{v})_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}; \quad (\vec{\nabla}\vec{v})_{\theta r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \end{aligned}$$

Sendo as equações de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \quad (\text{A.3})$$

Para o fluido newtoniano:

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{A.4})$$

Sendo:

$$\varepsilon_{ij} = \left(\vec{\nabla}_s \vec{v} \right)_{ij}$$

Onde o gradiente simétrico é definido como:

$$\vec{\nabla}_s \vec{v} = \frac{1}{2} \left[\left(\vec{\nabla} \vec{v} \right) + \left(\vec{\nabla} \vec{v} \right)^T \right] \quad (\text{A.5})$$

Assim:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}; & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \theta}; & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{rz} &= \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right); \\ \varepsilon_{\theta z} &= \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right); & \varepsilon_{\theta r} &= \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)\end{aligned}$$

Para o problema em questão, tem-se:

$$v = v_z(r, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Logo:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta} = 0$$

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

Substituindo na equação de Navier-Stokes:

$$\left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Pois $v_r = v_\theta = 0$ e na componente z:

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Com isso:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t}$$

Retomando a equação principal:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \quad (\text{A.9})$$

Com:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} = 2\mu \sum_{i,j} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} \hat{e}_i$$

As únicas componentes não nulas de ε_{ij} são $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r}$.

Então:

$$2\mu \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \varepsilon_{rz} \hat{r} = \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial r} \hat{r} = 0$$

$$2\mu \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \varepsilon_{zr} \hat{z} = \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \hat{z}$$

Assim:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \quad (\text{A.11})$$

APÊNDICE B – MODELAGEM DO PROBLEMA PARA INTRODUÇÃO DA PERTURBAÇÃO

Como desenvolvido no trabalho de Barbosa(2018) [6]:

GEOMETRIA DO PROBLEMA

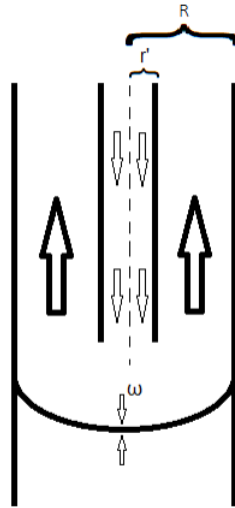


Figura 32 – Representação do fundo de um poço de petróleo. (FONTE: BARBOSA, 2018) [6]

Onde r' é o raio da coluna de perfuração, também chamado de raio interno. R é o raio total do poço, ou raio externo. E ω é a frequência angular da variação de pressão no anular, utilizado para simular tanto um influxo, quanto um afluxo de fluido no poço.

EQUAÇÕES GOVERNANTES

Equação de Navier-Stokes para um fluido térmico ($\mu = cte$) e incompressível

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\vec{v}) \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (\text{B.1})$$

Dividindo por ρ , $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\vec{v}) \right) = \vec{g} - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (\text{B.2})$$

Considerações do problema

1. Despreza-se inicialmente a pressão da gravidade;

2. Modela-se o gradiente de pressão, a fim de se moldar um estágio de equilíbrio hidráulico entre o influxo e o afluxo do fluido de perfuração

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho A \cos(\omega t); \quad (\text{B.3})$$

3. Fluido é aproximado num primeiro momento para incompressível e newtoniano quando em movimento;
4. Pela simetria do problema, $v_r = v_\phi = 0$;
5. Condições de contorno: $v_z(r = r') = v_z(r = R) = 0$.

Nessas condições

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\vec{v}) = v_z \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{B.4})$$

O gradiente e o laplaciano em coordenadas cilíndricas de uma função qualquer valem:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Assim a equação (B.2) se reduz para:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu (\nabla^2 v_z) \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = A \cos(\omega t) + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = A \cos(\omega t) + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (\text{B.7})$$

Equações diferenciais, que contém funções harmônicas, como seno e cosseno, geralmente são mais facilmente resolvidas quando o problema é levado para o plano complexo, pois a derivada destes termos resultam no produto dos próprios termos por uma constante.

Lembrando que

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \quad (\text{B.8})$$

e definindo

$$f(r) = \text{Re}[f(r)] + i \text{Im}[f(r)] \quad (\text{B.9})$$

Pode-se definir no plano complexo:

$$v_z(r, t) = \text{Re}[V_z(r, t)] \quad (\text{B.10a})$$

$$V_z(r, t) = f(r)e^{i\omega t} \quad (\text{B.10b})$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = A \cos(\omega t) = Ae^{i\omega t} \quad (\text{B.10c})$$

Aplicando em (B.7)

$$i\omega f(r)e^{i\omega t} = Ae^{i\omega t} + \nu \left(f(r)'' + \frac{\nu}{r} f(r)' \right) e^{i\omega t} \quad (\text{B.11})$$

$$f(r)'' + \frac{1}{r} f(r)' - \frac{i\omega}{\nu} f(r) = \frac{-A}{\nu} \quad (\text{B.12})$$

Solução Particular

Resolver esta equação diferencial exige primeiro determinar uma solução particular.

Seja

$$f_p(r) = -\frac{iA}{\omega} \quad (\text{B.13a})$$

Obtém-se

$$f_p(r)' = f_p(r)'' = 0 \quad (\text{B.13b})$$

Substituindo em (B.12)

$$-\frac{i\omega}{\nu} \left(-\frac{iA}{\omega} \right) = -\frac{A}{\nu} \quad (\text{B.14})$$

Esta equação mostra que de fato a equação (B.13a) é uma solução particular da equação (B.12).

Solução Homogênea

Resta solucionar a equação homogênea

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{i\omega}{\nu} f(r) = 0 \quad (\text{B.15})$$

Esta é uma equação semelhante a equação de Bessel (A.3), de ordem zero, cuja solução se apresenta da forma:

$$f(r) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x) \quad (\text{B.16})$$

Onde

$$x = \sqrt{-\frac{i\omega}{v}} r \quad (\text{B.17a})$$

$$dx = \sqrt{-\frac{i\omega}{v}} dr \quad (\text{B.17b})$$

$$dr = \sqrt{-\frac{v}{i\omega}} dx \quad (\text{B.17c})$$

Juntando tudo, obtém-se

$$V_z(r, t) = e^{i\omega t} \left\{ -\frac{iA}{\omega} + C_1 J_0 \left[\sqrt{-\frac{i\omega}{v}} r \right] + C_2 Y_0 \left[\sqrt{-\frac{i\omega}{v}} r \right] \right\} \quad (\text{B.18})$$

APÊNDICE C – EQUAÇÕES GERAIS E PROPRIEDADES MATEMÁTICAS

INTEGRAL

$$\int x \ln\left(\frac{x}{a}\right) dx \quad (\text{C.1})$$

Aplicando a seguinte substituição de variável:

$$u = \frac{x}{a}$$

$$dx = a du$$

Retorna:

$$a^2 \int u \ln(u) du = a^2 \left(\frac{u^2 \ln(u)}{2} - \frac{u^2}{4} \right) \quad (\text{C.2})$$

Reajando, e voltando as variáveis iniciais, obtém-se o resultado a integral:

$$\int x \ln\left(\frac{x}{a}\right) dx = \frac{x^2 \ln\left(\frac{x}{a}\right)}{2} - \frac{x^2}{4} \quad (\text{C.3})$$

SÉRIE DE FOURIER

A série de Fourier é dada por:

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)] \quad (\text{C.4})$$

Em que A_n e B_n são descritos como:

$$A_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{t_i}^{t_f} F(t) \cos(n\omega t) dt \quad (\text{C.5a})$$

$$B_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{t_i}^{t_f} F(t) \sin(n\omega t) dt \quad (\text{C.5b})$$

FUNÇÕES DE BESSEL

Representação gráfica das funções de Bessel:

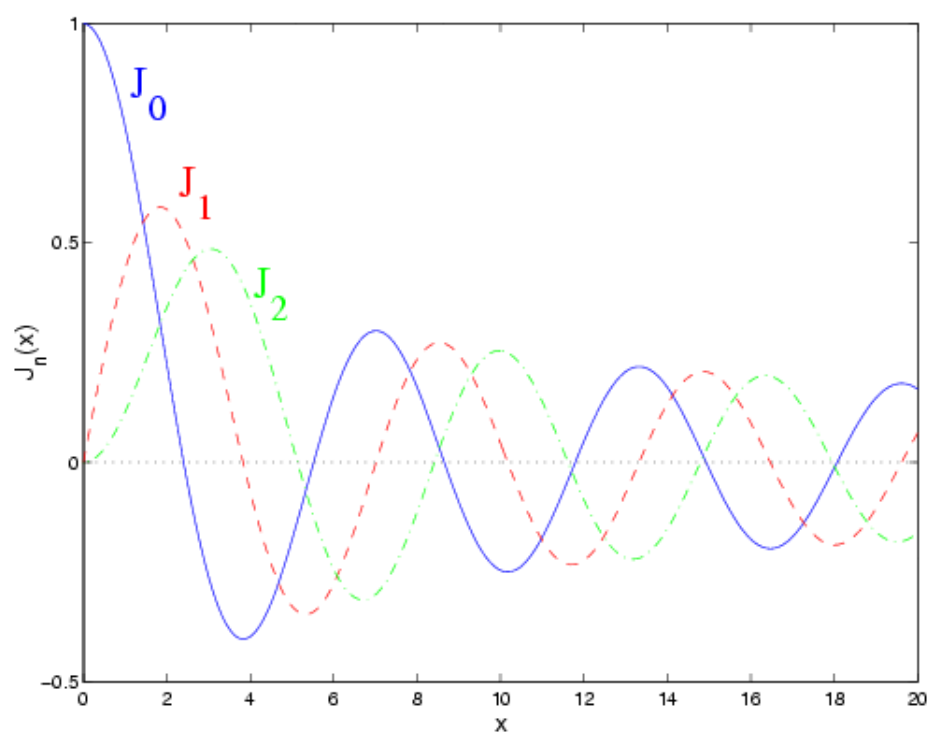


Figura 33 – Gráfico das funções de Bessel de primeira espécie

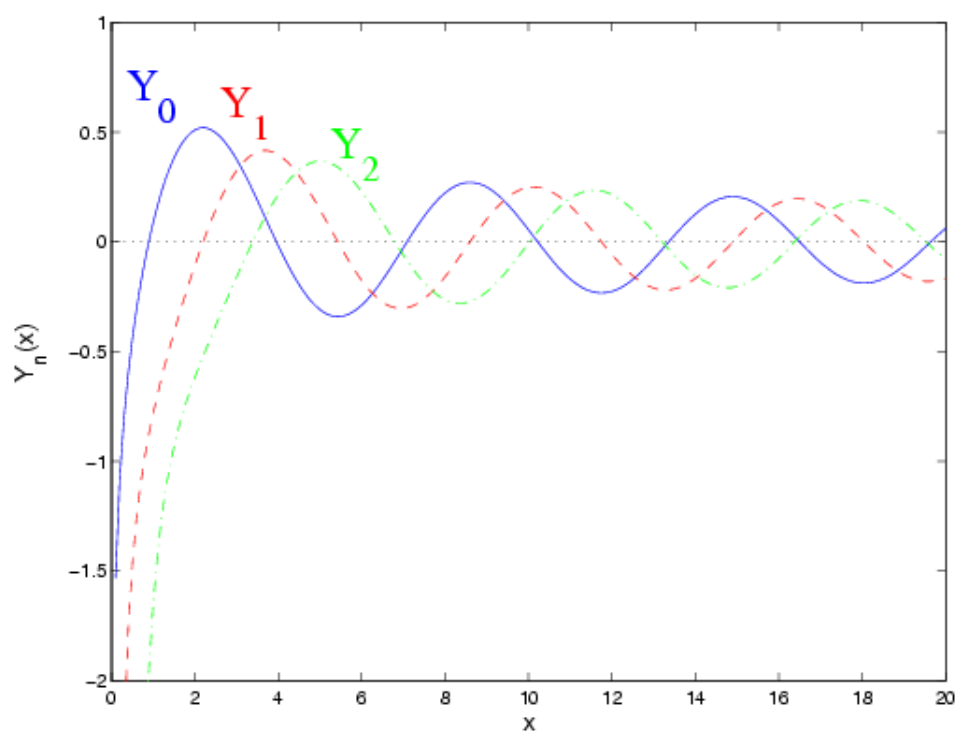


Figura 34 – Gráfico das funções de Bessel de segunda espécie

REFERÊNCIAS

- [1] NAVIER, C. L.: *Mém. Acad. Sci*, vol. 7, pp. 375 - 394, Paris (1827) 13, 14
- [2] STOKES, G. G.: *Trans. Cambridge Phil Soc.*, vol. 8, pp. 287-319, Cambridge (1845) 13, 14
- [3] DEVLIN, Kevin: *Os Problemas do Milênio: Sete grandes enigmas matemáticos do nosso tempo*, Editora Record, São Paulo (2004) 13
- [4] POISEUILLE, J. L. M.: *Sur le mouvement des liquides de nature différente dans les tubes de très petits diamètres*, Annales de Chimie et Physique XX, pp. 76 - 110 (1847) 13
- [5] COUETTE, M.M.A.: *Etudes sur le frottement des liquides*, Annales des Chimie et Physique XXI, pp. 433 - 510 (1890) 13
- [6] BARBOSA, Taísa Utida: *Desenvolvimento de um Novo Método Para o Estudo do Escoamento em um Poço de Petróleo Durante o Kick em Atuante*, Trabalho de conclusão de curso em Engenharia de Petróleo. Universidade do Estado de Santa Catarina, Balneário Camboriú (2018) 8, 13, 14, 16, 28, 46, 47, 63, 66
- [7] ZANOTTO, Mariana Ferreira: *Estimativa do Comportamento da Velocidade e da Pressão do Fluido no Poço Sob a Atuação do Kick a Partir da Equação de Navier-Stokes*, Trabalho de conclusão de curso em Engenharia de Petróleo. Universidade do Estado de Santa Catarina, Balneário Camboriú (2018) 13, 16, 23, 25, 63
- [8] NANTES, Rafael Ribas: *Simulação do Comportamento o Fluido no Poço Sob a Atuação de Diferentes Condições do Kick a Partir da Equação de Navier-Stokes*, Trabalho de conclusão de curso em Engenharia de Petróleo. Universidade do Estado de Santa Catarina, Balneário Camboriú (2019) 13
- [9] HOOKE, Robert: *De Potentia Restitutiva, or of Spring. Explaining the Power of Springing Bodies*, Printed for J. Martyn, Londres (1678) 14
- [10] NEWTON, Isaac: *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Vol. II, Editio tertia auct & emendata, Londres(1687) 14, 20
- [11] Encyclopaedia Britannica: *Wilhelm Eduard Weber*, Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Wilhelm-Eduard-Weber>. Acessado em: 11 de junho de 2020 (1998) 14
- [12] MOTTA, Mariele Katherine Faria: *Maizena com água: fluido não-newtoniano*, Universidade Estadual de Campinas, Campinas (2007) 15

- [13] MAXWELL, J. Clerk: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 157, pp. 49-88 (1867) 15
- [14] BINGHAM, E. C.: *Plasticity*, Journal of Physical Chemistry vol 29(10), pp 1201–1204. (1925) 15
- [15] LEBLANC, J. L.; LEWIS, R. L.: *A Mathematical Model of Gas Kick*, Journal of Petroleum Technology, vol. 20, p. 888-898(1968) 15
- [16] HOBEROCK, L. L.; STANBERY, S. R. : *Pressure Dynamics in Well During Gas Kicks: Part 2 – Component Models and Results*, Journal of Petroleum Technology, vol. 33, p. 1367-1378 (1981) 15
- [17] SANTOS, O. L. A.: *A Mathematical Model of Gas Kick When Drilling in Deep Waters*, Dissertação do Projeto Final do Curso de Mestrado em Engenharia. Golden, Estados Unidos: Colorado School of Mines (1982) 15
- [18] NICKENS, H. V.: *A Dynamic Computer Model of a Kicking Well*, SPE Drilling Engineering, vol. 2, p. 158-173 (1987) 15
- [19] AVELAR, C. S.: *Modelagem do Controle de Poços por Diferenças Finitas*, Dissertação do Projeto Final do Curso de Mestrado em Engenharia UNICAMP, Campinas (2008) 16
- [20] GALDINO, Jonathan Felipe.: *Análise da Propagação de Pressão em Fluidos de Perfuração durante Kick de Gás*, Monografia do Projeto Final de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba (2014) 16, 26
- [21] GALDINO, Jonathan Felipe: *Modelagem da Propagação de Pressão em Fluidos de Perfuração Durante Kick de Gás*, Dissertação do Projeto Final do Curso de Mestrado em Engenharia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba (2016) 7, 16, 26
- [22] MELO, Thailaine: *A Verdade Sobre o Poço de Petróleo Mais Profundo do Mundo*, Disponível em: <https://www.opetroleo.com.br/a-verdade-sobre-o-poco-de-petroleo-mais-profundo-do-mundo/>. Acessado em: 11 de junho de 2020 (2019) 19
- [23] GAUZA, Ana Maria: *Projeto Poço Escola: Videoaula Perfuração e Testemunhagem*, Dissertação de mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Geologia. Instituto de Geociências, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro (2011) 7, 18
- [24] PETROBRAS: *Fatos e Dados*, Disponível em: < <http://www.petrobras.com.br/fatos-e-dados/conheca-os-diferentes-tipos-de-pocos-de-petroleo-e-gas-natural.htm>>. Acesso em: 16 de abril de 2018. (2015) 7, 19
- [25] FERRARIS, C. F.: *Measurement of Rheological Properties of High Performance Concrete: State of the Art Report. NISTIR 5869*, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg (1996) 20

- [26] LEAL, Adelson Belizário: *Estudo do Escoamento de Fluidos Não-newtonianos em Dutos*, Dissertação do Projeto Final do Curso de Mestrado em Engenharia Química na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica (2005) 20
- [27] COSTA, Camila Moreira: *Caracterização Reológica de Fluidos Complexos*, Departamento de Engenharia, PUC-RIO, Rio de Janeiro (2017) 7, 21
- [28] ANDRADE, J. J. O.: *Propriedades Físicas e Mecânicas dos Materiais*, In: Isaia, G.C. (ed.). *Materiais de Construção Civil e Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais*. IBRACON. V. 1, cap. 08, p. 203-237. São Paulo (2007) 7, 22
- [29] API, American Petroleum Institute: *API Recommended Practice 500 (RP 500) (API/RP 500) for Classification of Locations for Electrical Installations at Petroleum Facilities*, Editora American petroleum institute (1991) 23
- [30] SANTOS, Matheus Barreto: *Perfuração de Poços de Petróleo*, Bolsista de Valor: Revista de divulgação do Projeto Universidade Petrobras e IF Fluminense, v. 2, n. 1, p. 121-127(2012) 23
- [31] MACHADO, J. C.: *Fundamentos e Classificação de Fluidos Viscosos*, Reologia e Escoamento de Fluidos - Ênfase na Indústria do Petróleo. Editora Interciência. Rio de Janeiro, p. 1-40. (2002) 23
- [32] ABAS, Associação Brasileira de Águas Subterrâneas: *Fluido de Perfuração: Reboco é "parede"?*, Disponível em: < <https://www.abas.org/abasinforma/158/paginas/05.htm>>. Acesso em: 17 de dezembro de 2020. 7, 24
- [33] THOMAS, J. E., et al: *Fundamentos da Engenharia de Petróleo*, Editora Interciência, Rio de Janeiro (2001) 24
- [34] ROCHA, L. A. S.: *Projeto de poços de petróleo: geopressões e assentamentos de colunas de revestimentos*, 2a Edição. Rio de Janeiro: Interciência: PETROBRAS, (2009) 7, 25
- [35] CHATZIMINA, Maria, et al: *Cessation of annular Poiseuille flows of Bingham plastics*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, pp. 135-142 (2006) 7, 36, 37, 38
- [36] POOLE, R. J., et al: *On Creeping flow of Bingham Plastic Fluid Past a Square Cylinder*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics (2012) 45
- [37] BUTKOV, Eugene: *Física Matemática*, 1ª Edição. Editora: LTC (1998) 47