

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CARLOS FERNANDO DA SILVA

**A DINÂMICA DE UM ACOPLAMENTO BIDIRECIONAL DE DOIS SISTEMAS DE
LORENZ**

JOINVILLE

2023

CARLOS FERNANDO DA SILVA

**A DINÂMICA DE UM ACOPLAMENTO BIDIRECIONAL DE DOIS SISTEMAS DE
LORENZ**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina – Udesc.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Cesar Rech

JOINVILLE

2023

FICHA CATALOGRÁFICA

Silva, Carlos Fernando
A DINÂMICA DE UM ACOPLAMENTO BIDIRECIONAL
DE DOIS SISTEMAS DE LORENZ / Carlos Fernando Silva. --
2023.
48 p.

Orientador: Paulo Cesar Rech
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa
de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2023.

1. Sistemas de Lorenz. 2. Acoplamento. 3. Plano de
parâmetro. 4. Sequência de adição de período. I. Rech, Paulo
Cesar. II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro
de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em
Física. III. Título.

CARLOS FERNANDO DA SILVA

**A DINÂMICA DE UM ACOPLAMENTO BIDIRECIONAL DE DOIS SISTEMAS DE
LORENZ**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina – Udesc.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Cesar Rech

BANCA EXAMINADORA

Dr. Paulo Cesar Rech
Centro de Ciências Tecnológicas – CCT
UDESC

Membros:

Dr. Holokx Abreu Albuquerque
UDESC

Dr. João Carlos Xavier
UFSC

Joinville, 26 de janeiro de 2023.

Aos professores da Universidade do
Estado de Santa Catarina, pela dedicação
de sempre!

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador por aceitar conduzir o meu trabalho de pesquisa. A todos os meus professores do curso da Universidade do Estado de Santa Catarina – Udesc pela excelência da qualidade técnica de cada um.

Sou grato à minha família pelo apoio que sempre me deram durante toda esta jornada.

Deixo um agradecimento especial ao meu orientador pelo incentivo e pela dedicação do seu tempo ao meu projeto de pesquisa.

“Quanto maior nosso conhecimento, mais evidente fica nossa ignorância”. (John F. Kennedy)

RESUMO

Investigamos o comportamento dinâmico de um sistema dinâmico autônomo a tempo contínuo em seis dimensões, através do acoplamento de dois sistemas de Lorenz, por meio de dois novos parâmetros de acoplamento, assimetria e intensidade, presentes nas funções de acoplamento. Os espectros dos expoentes de Lyapunov permitiram analisar o plano dos parâmetros de acoplamento em dois casos distintos. O primeiro, considerando o acoplamento de dois sistemas idênticos de Lorenz em regime caótico, e o segundo, considerando o acoplamento de um sistema de Lorenz em regime caótico e outro em regime periódico. Diagramas de fase, de bifurcação, e atratores permitiram a caracterização da dinâmica dos sistemas acoplados. No caso caótico-caótico, o acoplamento resultou na supressão do caos com a presença de regiões quase-periódicas e atratores do tipo ponto fixo, como também regiões de hipercaoticidade. Já no caso periódico-caótico, foram identificadas a ocorrência de espirais descontínuas e ilhas de periodicidade com a presença de infinitas cascatas de adição de períodos acumuladas e orientadas em um horizonte no plano de parâmetros. Também foram observadas regiões de soluções estáveis e hipercaóticas, porém contrário ao primeiro caso, não foram observadas regiões quase-periódicas.

Palavras-chave: Sistema de Lorenz; Acoplamento; Plano de parâmetro; Caos; Sequência de adição de período.

ABSTRACT

We investigated the dynamic behavior of an autonomous continuous-time dynamical system in six dimensions, through the coupling of two Lorenz systems, by means of two new coupling parameters, asymmetry and intensity, present in the coupling functions. The spectra of the Lyapunov exponents as a tool allowed the analysis of the plane of the coupling parameters in two different cases. The first, considering the coupling of two identical Lorenz systems in a chaotic regime, and the second, considering the coupling of a Lorenz system in a chaotic regime and another in a periodic regime. Phase, bifurcation, and attractor diagrams allowed the characterization of the dynamics of coupled systems. In the chaotic-chaotic case, the coupling resulted in the suppression of chaos with the presence of quasi-periodic regions and fixed-point attractors, as well as regions of hyperchaoticity. In the periodic-chaotic case, the occurrence of discontinuous spirals and islands of periodicity with the presence of infinite period-adding cascades accumulated and oriented on a horizon in the plane of parameters were identified. Regions of stable and hyperchaotic solutions were also observed, but contrary to the first case, quasi-periodic regions were not.

Keywords: Lorenz system; Coupling; Parameter plane; Chaos; Period-adding sequence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Espaço de fase correspondente a trajetória de um ponto conforme sua evolução temporal [9].	16
Figura 2.2 – (a) Atrator de ponto fixo na origem. (b) atrator ciclo-limite representado pela linha tracejada [8].	17
Figura 2.3 – Superfície toroidal e a representação de duas frequências independentes [9].	18
Figura 2.4 – Atrator do Sistema de Lorenz em regime caótico.....	18
 Figura 3.1 – Diagrama de bifurcação dos máximos da variável z , em função de r , sendo $\sigma = 10$ e $b = 8/3$, para o sistema de Lorenz.....	23
Figura 3.2 – Atratores do sistema de Lorenz. (a) Atrator periódico para $r = 250$. (b) Atrator caótico para $r = 75$	24
 Figura 4.1 – Plano de parâmetros (c, a) para dois sistemas de Lorenz acoplados em regime caótico em função do primeiro (a), segundo (b), terceiro (c) e quarto (d) maior expoente de Lyapunov.....	28
Figura 4.2 – Diagrama de bifurcação para pontos na linha $a = 0,2$	29
Figura 4.3 – Representação dos quatro maiores expoentes de Lyapunov em $a = 0,2$ para o plano de parâmetros (c, a) obtido na Fig. 4.1.....	30
Figura 4.4 – As dezesseis possíveis soluções para os espectros dos expoentes de Lyapunov relacionados a um sistema dinâmico de seis variáveis contínuas no tempo[34].....	30
Figura 4.5 – Diagrama de bifurcação para pontos na linha $a = 0,4$	31
Figura 4.6 - Representação dos quatro maiores expoentes de Lyapunov em $a = 0,4$ para o plano de parâmetros (c, a) obtido na Fig. 4.1.....	32
Figura 4.7 - Representação dos quatro maiores expoentes de Lyapunov em $a = 0.4$ para o plano de parâmetros (c, a) obtido na Fig. 4.1.....	33
Figura 4.8 – Diagrama de bifurcação para pontos na linha $a = 0.7$. A região ausente de densidade de pontos em $-0,3 < c < 0,3$ indica que o atrator do sistema é do tipo ponto fixo para determinados valores.....	33

Figura 4.9 – Séries temporais e projeções bidimensionais dos atratores dos sistemas acoplados em regime caótico. A coluna em vermelho identifica o atrator quase-periódico para $c, a = (-0,32, 0,4)$. A coluna azul o atrator caótico em $c, a = (0,5, 0,4)$ e a preta o atrator hipercaótico em $c, a = (0, 0,2)$..	34
Figura 4.10 – Plano de parâmetros (c, a) para dois sistemas acoplados um em regime periódico $r_1 = 250$, e outro em regime caótico $r_2 = 28$	36
Figura 4.11 - Diagrama de bifurcação para pontos máximos locais da variável x_1 (a) e os quatro maiores expoentes de Lyapunov (b) para linha $a = 3$	36
Figura 4.12 - Ampliação da região na caixa A da Fig. 4.10.....	37
Figura 4.13 – Diagrama de Bifurcação para a linha que corta o plano de parâmetros (c, a) em $a = 2.0$, para os períodos 4 e 7.....	38
Figura 4.14 – Diagrama de Bifurcação para as sequências de adição de período (a) 6 e 8, (b) 9, (c) 10, (d) 11 e 14, (e) 12, (f) 13, (g) 15 e (h) 18.....	39
Figura 4.15 - Ampliação da região na caixa B da Fig. 4.10.....	40
Figura 4.16 – Diagrama de bifurcação dos períodos (a) 9, (b) 17 e (c) 21 da região representada na Fig. 4.15.	41

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1	SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES E NÃO-LINEARES	14
2.2	ESPAÇO DE FASE	16
2.3	ATRATORES.....	17
2.4	EXPOENTES DE LYAPUNOV	19
2.5	BIFURCAÇÃO	20
2.6	PLANO DE PARÂMETROS	20
3	SISTEMAS DE LORENZ	22
3.1	ACOPLAMENTO BIDIRECIONAL DE SISTEMAS DE LORENZ	25
4	RESULTADOS.....	27
4.1	ACOPLAMENTO DE DOIS SISTEMAS DE LORENZ EM REGIME CAÓTICO	27
4.2	ACOPLAMENTO DE SISTEMAS DE LORENZ EM REGIME CAÓTICO E PERIÓDICO	35
5	CONCLUSÃO	42
	REFERÊNCIAS.....	44

1 INTRODUÇÃO

O conjunto não-linear de equações diferenciais ordinárias (EDO) dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - \sigma x \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz ,\end{aligned}\tag{1.1}$$

foi primeiramente desenvolvido por Barry Saltzman e Edward Lorenz [1-2], nos anos de 1962 e 1963, respectivamente, como um modelo matemático para o estudo da convecção térmica entre duas placas paralelas a diferentes temperaturas colocadas perpendicularmente em relação à força gravitacional [3]. O objetivo dos estudos era proporcionar certa previsibilidade climática associando o modelo aos rolos atmosféricos convectivos, dada a movimentação do ar devido as desigualdades térmicas impostas em sua maioria pelo aquecimento solar [4].

A integração numérica deste conjunto de EDO, possível a partir da década de 50 com o invento de rápidos computadores, permitiu que Lorenz observasse algo entre os limites da aleatoriedade e periodicidade, e que veio a resultar na área da ciência não-linear hoje conhecida como *caos*.

O sistema de Lorenz, apresenta variáveis de estado x , y e dependentes do tempo, parâmetros σ , r e b pode apresentar soluções de equilíbrio representando rolos de convecção estáveis, ou então, de acordo com variações nos valores de parâmetros, soluções de instabilidade com a destruição dos rolos e dinâmica caótica, no qual o sistema apresenta extrema sensibilidade às condições iniciais.

Observe que o termo “caos” está intimamente ligado com algo ainda mais importante que é a *dinâmica*. A dinâmica é uma ferramenta que permite a análise destes comportamentos de maneira geral, apresentando mediante a formalização matemática de um processo determinístico, sistemas que descrevam um fenômeno científico. Isso possibilita que estados passados e futuros de muitos sistemas dinâmicos possam ser previstos até certo ponto se conhecermos o estado presente e as leis que governam sua evolução.

Neste trabalho, serão analisados dois sistemas dinâmicos de Lorenz unidos de forma bidirecional (1.2) através de parâmetros de acoplamento a e c [5-6], considerando variações nos valores do parâmetro r , analisados por meio do diagrama de bifurcação, que coloquem estes sistemas em regimes caóticos ou periódicos.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \sigma_1 y_1 - \sigma_1 x_1 + \frac{a}{2}(1+c)(x_2 - x_1) \\
 \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1 + \frac{a}{2}(1+c)(y_2 - y_1) \\
 \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - b_1 z_1 + \frac{a}{2}(1+c)(z_2 - z_1) \\
 \dot{x}_2 &= \sigma_2 y_2 - \sigma_2 x_2 + \frac{a}{2}(1-c)(x_1 - x_2) \\
 \dot{y}_2 &= r_2 x_2 - y_2 - x_2 z_2 + \frac{a}{2}(1-c)(y_1 - y_2) \\
 \dot{z}_2 &= x_2 y_2 - b_2 z_2 + \frac{a}{2}(1-c)(z_1 - z_2)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

No primeiro caso estudado, consideramos os sistemas acoplados ambos em regime caótico, mediante escolha adequada do parâmetro r . Resolvendo esse sistema de equações numericamente via cálculo computacional e analisando os espectros do expoente de Lyapunov, através do método proposto por Wolf *et al* [7], pode-se identificar o comportamento dinâmico do sistema.

No segundo caso, foram considerados os sistemas acoplados, com uma nova escolha de valores do parâmetro r , que coloque um sistema em regime caótico e outro em regime periódico. O método de análise utilizado foi o mesmo do primeiro caso.

Na seção a seguir, capítulo 2, serão apresentados conceitos que permitam ao leitor a compreensão sobre sistemas dinâmicos e suas características. No capítulo 3, serão abordadas características do sistema de Lorenz e questões de acoplamento, apresentando no capítulo 4 os resultados obtidos e 5 as conclusões finais sobre o tema discutido.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta uma revisão de conceitos sobre sistemas dinâmicos em tempo contínuo, provendo conhecimento necessário para a compreensão dos resultados obtidos neste trabalho.

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES E NÃO-LINEARES

Sistemas dinâmicos podem ser descritos como um conjunto de elementos sujeitos a uma evolução temporal, que caracterizam o estado de um sistema. Para tal, é necessário definir exatamente quais elementos evoluem, e quais as regras que determinam como esta evolução ocorrerá no tempo. Esse conceito nos remete a um modelo matemático determinístico capaz de prescrever a evolução temporal do estado desse sistema [8].

Estes podem ser descritos de duas formas, através de equações diferenciais e mapas iterados. Quando a dinâmica do sistema é dada por equações diferenciais a evolução do sistema é descrita em tempo contínuo. Quando se utiliza mapas iterados é observada uma dinâmica onde o tempo é discreto. Os mapas também podem ser úteis, tanto para fornecer exemplos simples de caos, como sendo ferramentas para analisar as soluções periódicas ou caóticas de equações diferenciais [9].

Assim, um sistema dinâmico pode ser representado por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDO)

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x(t)) \quad (2.1)$$

Dizemos que estas equações são *autônomas* por não dependerem explicitamente do tempo. Caso o sistema seja do tipo

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t),$$

temos um sistema *não-autônomo*. O sistema pode ser reduzido a equações autônomas simplesmente chamando t como uma nova variável e substituindo

nas equações. A representação destas mesmas equações em tempo discreto é da forma

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

onde $t = n\Delta t$, e são chamadas comumente de mapas discretos [10].

O sistema pode ser estendido para o caso de n dimensões que no exemplo de tempo contínuo nos fornece um conjunto de n equações do tipo

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t))\end{aligned}$$

que escritas na forma vetorial, nos fornecem

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}(t))$$

onde $\vec{x}$ representa um vetor n -dimensional.

É importante notar que as funções f_n podem ser do tipo linear ou não-linear. Se f_n for composta por variáveis de primeira potência e parâmetros, somados através de uma combinação algébrica teremos o caso linear

$$ax + by + cz + \dots = cte. \quad (2.2)$$

No contrário, se f_n incluir expressões diferentes da representada em (2.2), a equação é dita como não-linear. Note que um sistema de n equações e n variáveis é chamado de *não-linear* se apresentar uma ou mais equações não-lineares.

2.2 ESPAÇO DE FASE

Em um espaço n -dimensional, composto por variáveis $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dependentes do tempo, temos que um dado ponto $P(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ nesse espaço representa um estado do sistema naquele instante. Se considerarmos um espaço com dois graus de liberdade, $n = 2$, as variáveis x_1 e x_2 , caracterizam o que chamamos *espaço de fase* e sua evolução temporal descreve uma *trajetória* ou *órbita* no espaço, como representado na figura abaixo [9].

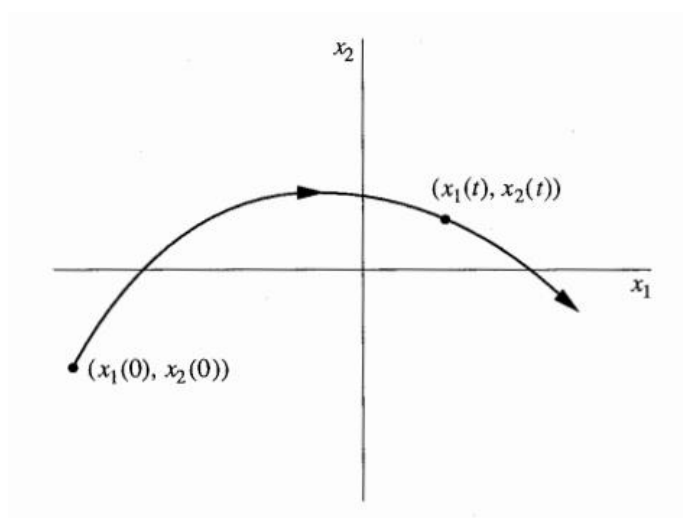


Figura 2.1 – Espaço de fase correspondente a trajetória de um ponto conforme sua evolução temporal [9].

Podemos analisar a trajetória no espaço de fase em termos do volume de pontos representativos descritos, que conforme evoluem, nos fornecem duas classes de sistemas. Se o conjunto de pontos retrata um campo de velocidades incompressível, o volume do espaço de fase é *conservado* e o sistema dinâmico é dito *conservativo*. Se esse volume se contrai no espaço de fase, temos o que chamamos de sistema *dissipativo* [11].

O conjunto de pontos em trajetórias assintóticas no espaço de fase de sistemas dissipativos, compõem uma dimensão final D menor que a dimensão d original do sistema, ou seja, $D < d$ [11]. Essa característica de convergência de órbitas próximas após um tempo suficientemente longo no espaço de estados é definida como *atrator*.

2.3 ATRATORES

Atratores estão presentes em sistemas dissipativos onde ocorre a contração do elemento de volume no espaço de fase, característica não observada em sistemas conservativos [12]. Um exemplo é o oscilador harmônico amortecido, onde podemos verificar que na Fig. 2.2(a), para qualquer condição inicial dada, a trajetória tende a aproximar-se da origem, onde o movimento do oscilador cessa, e tende ao *ponto fixo*, denominado atrator do sistema.

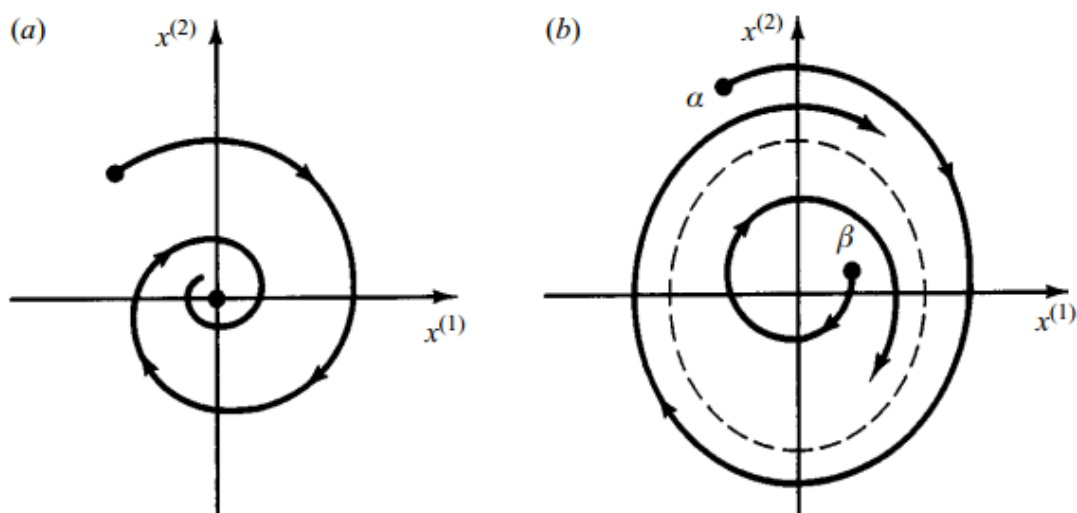


Figura 2.2 – (a) Atrator de ponto fixo na origem. (b) atrator ciclo-limite representado pela linha tracejada [8].

No sistema (b) representado na Fig. 2.2 (b), correspondente a um oscilador de Van der Pool, todas as soluções se aproximam assintoticamente da linha tracejada, que representa uma órbita periódica estável, chamada *ciclo limite*. Nesse cenário, a condição inicial α , leva a uma órbita que se aproxima do ciclo limite. Já a condição β , dentro da linha tracejada, orbita da mesma forma, se afastando da origem, no sentido de também se aproximar do atrator [8]. Nestes exemplos as soluções matemáticas das condições α e β nunca alcançam o atrator, mas somente se aproximam assintoticamente deste, com órbitas tão próximas a ponto de se tornarem indistinguíveis [13].

Outros exemplos de atratores são os quase-periódicos e os caóticos. Atratores quase-periódicos dentro do conceito de osciladores harmônicos podem ser explicados como dois osciladores não acoplados de frequências f_1 e f_2 , sendo suas posições expressas em termos de coordenadas angulares θ_1 e θ_2 , desenhando uma superfície toroidal no espaço de fase. A periodicidade do movimento é determinada pela razão f_1/f_2 , em termos de um resultado racional, apresentando comportamento periódico e órbitas fechadas, ou irracional, com comportamento quase-periódico e órbitas que nunca se interseccionam [5].

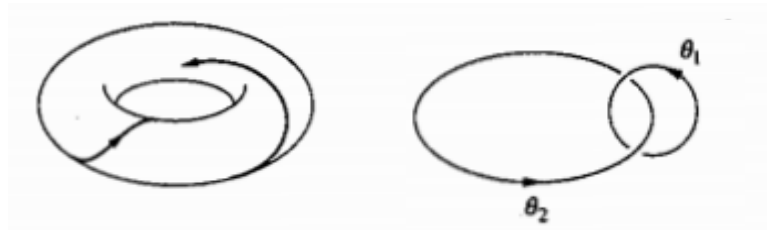


Figura 2.3 – Superfície toroidal e a representação de duas frequências independentes [9].

Já atratores caóticos são definidos como estruturas aperiódicas em que suas trajetórias através da evolução temporal não resultam em pontos fixos, periódicos ou quase-periódicos e apresentam alta sensibilidade às condições iniciais, divergindo exponencialmente no espaço de fases, a exemplo do atrator de Lorenz da Fig. 2.4 [9]. Essas características implicam na prática que a predição de estados futuros do sistema a tempos suficientemente longos é perdida e pequenas incertezas são rapidamente amplificadas.

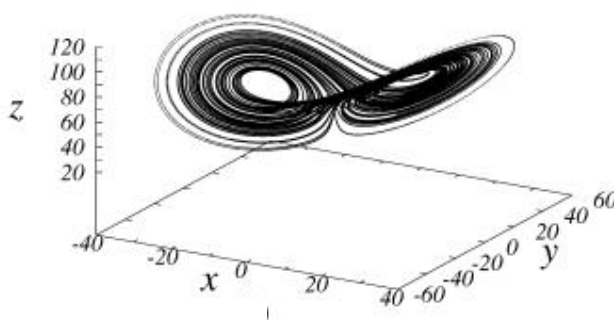


Figura 2.4 – Atrator do Sistema de Lorenz em regime caótico

2.4 EXPOENTES DE LYAPUNOV

Em um sistema dinâmico, a sensibilidade às condições iniciais pode ser quantificada através dos expoentes de Lyapunov. Se considerarmos duas trajetórias com condições inicialmente próximas, em uma bacia de atração onde o atrator é caótico, as trajetórias divergem para intervalos suficientemente grandes ($t \rightarrow \infty$), na média, há uma taxa exponencial, caracterizada pelo maior expoente de Lyapunov [14].

O conceito pode ser generalizado para espectros dos expoentes de Lyapunov, λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), considerando uma esfera infinitesimal n -dimensional de condições iniciais, da qual n represente o número de equações e variáveis de estado que descrevam o sistema. Conforme o tempo passa, a esfera evolui para um elipsoide em que o eixo principal expanda ou contraia em uma dada direção no espaço de fases a uma taxa determinada pelos expoentes de Lyapunov [7].

O crescimento exponencial de pequenas interferências no sistema dinâmico leva ao caos e os expoentes de Lyapunov garantem a análise dessa incerteza conforme se distanciam em trajetórias distintas [10].

A presença de expoentes positivos fornece o bastante para caracterizar caos e representar a instabilidade local em uma direção. Wolf et al. [7] explica os espectros de Lyapunov, associando os comprimentos dos n eixos principais do elipsoide com os respectivos expoentes e os ordenando do maior para o menor $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Tomando $p_i(t)$ como o eixo principal desse elipsoide n -dimensional, e $p_i(0)$ o raio inicial, com $i = 1, 2, \dots, n$, teremos os expoentes de Lyapunov dados por [10]

$$\lambda_i = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{p_i(t)}{p_i(0)} \right).$$

O maior expoente de Lyapunov λ_1 representa uma natureza de mais rápida expansão e o menor λ_n , de mais rápida contração nas direções correspondentes. Expoentes de Lyapunov positivos representam uma expansão e negativos uma contração [7].

Percebe-se que na presença de um atrator, a dinâmica do sistema é dissipativa e a taxa de contração geral do sistema deve ser superior a taxa de expansão. Sendo assim, as somas de todos os expoentes de Lyapunov através do espectro, mesmo que em sua maioria positivos, é negativa [15].

Dado que a magnitude dos expoentes de Lyapunov fornecem um quantitativo da taxa de contração ou expansão, os sinais dos expoentes também permitem a caracterização do atrator de modo qualitativo [10]:

- a) Para um *ponto fixo* temos os expoentes λ_i negativos.
- b) No atrator *ciclo-limite* $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_i < 0$ para $i > 1$.
- c) Na *superfície toroidal n dimensional* ou atrator *quase-periódico* $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ e $\lambda_i < 0$ para $i > n$.
- d) Em um sistema caótico ao menos um expoente é positivo.
- e) Sistemas ditos hipercaóticos apresentam dois ou mais expoentes positivos.

2.5 BIFURCAÇÃO

Considere um sistema dinâmico da forma como apresentando em (2.1), dependente agora de um parâmetro α ,

$$\dot{x} = f(x, \alpha). \quad (2.3)$$

Ao variarmos α o comportamento do sistema é modificado de tal forma que apresente um novo cenário no espaço de fases, levando a uma sensibilidade e consequente alteração na estabilidade de um atrator. A faixa em que isso ocorre é denominada *valores (críticos) de bifurcação* [16].

Diante dessa hipótese podemos enunciar que o termo *bifurcação*, representa uma mudança qualitativa do atrator de um sistema dinâmico como resultado da variação nos valores de um parâmetro de controle [17]. Isso implica que pontos podem ser criados ou destruídos, ou terem sua estabilidade modificada nos *pontos de bifurcação*, exibindo uma dependência paramétrica nas soluções do sistema.

2.6 PLANO DE PARÂMETROS

Os parâmetros definidos nas equações diferenciais que compõem um sistema dinâmico formam um subconjunto do espaço de fases, e implicam em um *espaço de parâmetros* capaz de fornecer informações acerca do comportamento do sistema.

A seção transversal desse espaço de parâmetros n -dimensional é interpretada como o *plano de parâmetros*. Para um sistema de três parâmetros (r, σ, b) como no sistema de Lorenz (1.1), o plano de parâmetros $\sigma \times b$ a exemplo, é obtido fixando r e variando os valores para σ e b no domínio de interesse [18].

Neste trabalho, o comportamento dinâmico para cada ponto no plano de parâmetros foi relacionado com o respectivo maior expoente de Lyapunov. Essa técnica entrega um cenário tridimensional do sistema em que o expoente de Lyapunov, de acordo com sua magnitude e sinal caracteriza pontos de periodicidade, quase-periodicidade e caos.

3 SISTEMAS DE LORENZ

O sistema de Lorenz apresentado na seção 1 (eq. 1.1), com variáveis $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ e parâmetros de controle σ , r e b , é um modelo altamente idealizado de um fluído em movimento.

Edward Lorenz descobriu que este sistema determinístico, mediante integração numérica em um computador, apresenta uma dinâmica bastante complicada. Variações nos valores de parâmetros resultam em oscilações irregulares, que nunca se repetem, mas com trajetórias que permanecem concentradas em uma região do espaço de fase.

A dinâmica do sistema é governada pelos valores dos parâmetros de controle e são discutidos por Dullin [3], onde $r = \frac{\Delta T}{\Delta T_c} = \frac{Ra}{Ra_c}$ representa a diferença de temperatura normalizada entre a placa inferior mais quente e a superior mais fria. O termo ΔT_c se refere a diferença de temperatura no início da convecção. Ra corresponde ao número de Rayleigh, sendo $Ra = g\alpha_p L^3 \Delta T / \nu \kappa$ a diferença de temperatura adimensional. Aqui g é a aceleração gravitacional, α_p o coeficiente térmico de expansão isobárica, L a distância entre as placas, ν a viscosidade cinemática e κ a difusividade termal. O segundo parâmetro é o número de Prandtl dado por $\sigma = \nu / \kappa$. O último parâmetro b refere-se à intensidade de acoplamento [3].

Lorenz encontrou que em $\sigma = 10$ e $b = 8/3$ o sistema apresenta um comportamento caótico para valores de r que excedam o valor crítico $r_c \approx 24,74$, denominado *valor de bifurcação de Hopf* [19].

Podemos identificar o regime caótico do sistema ao olharmos o diagrama de bifurcação composto pelos máximos locais da variável z , denotada por z_m , em relação ao parâmetro r , como o exemplo na Fig. 3.1. Nesta figura são apresentados os valores de z_m relacionados ao sistema de eq. (1.1) quando fixados $\sigma = 10$ e $b = 8/3$, mantendo um passo fixo de integração de 10^{-3} para a variação do parâmetro em $30 \leq r \leq 300$. Para cada valor de r na faixa indicada estão plotados mil pontos da variável z_m correspondente.

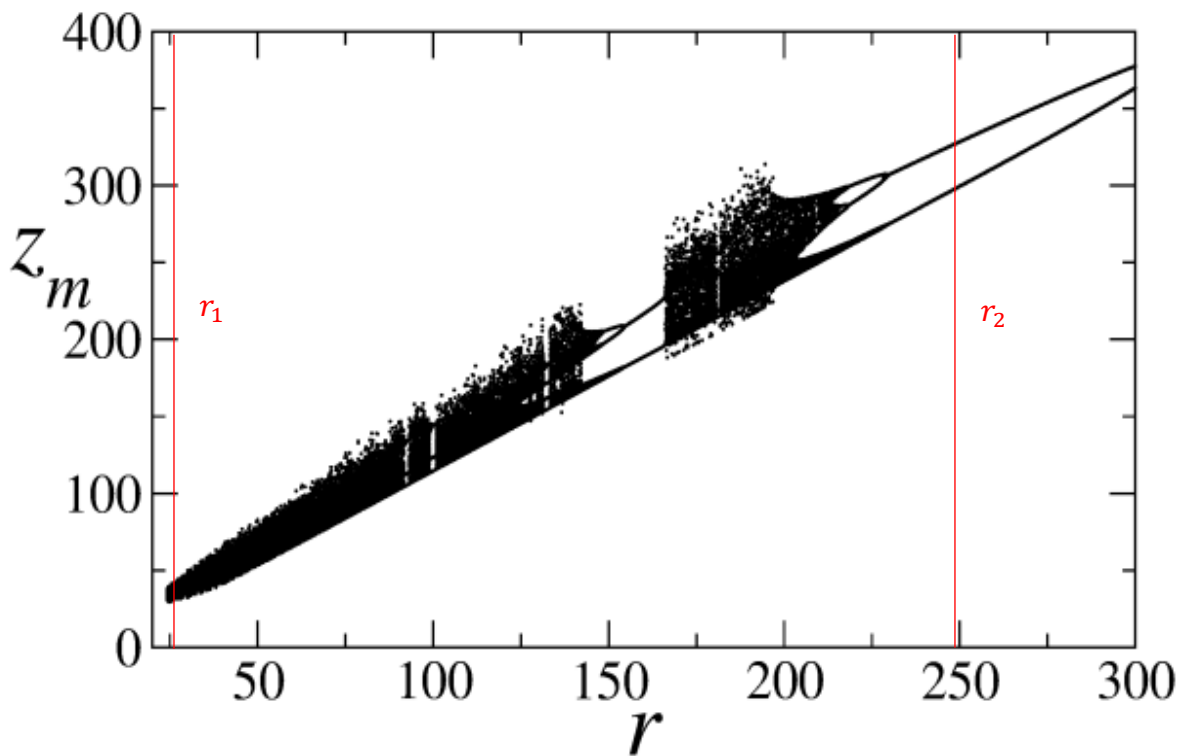


Figura 3.1 – Diagrama de bifurcação dos máximos da variável z , em função de r , sendo $\sigma = 10$ e $b = 8/3$, para o sistema de Lorenz.

Com base no diagrama, podemos facilmente visualizar regiões em que o sistema apresenta soluções instáveis, representadas densamente pelos pontilhados pretos, e regiões da qual o comportamento é estável, identificadas pela linha sólida. Isso permite a escolha de valores do parâmetro r que caracterizem regimes caóticos e periódicos, respectivamente. Nota-se que as regiões caóticas apresentam janelas em que o sistema assume um regime periódico em alguns instantes e são separadas notadamente por uma região periódica, como por exemplo para $147 < r < 167$. Para valores aproximados iniciando em $r = 207$, podemos notar também outra região periódica do sistema.

A figura 3.2 (a) mostra, no espaço (x, y, z) , a solução do sistema de Lorenz com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 250$, onde temos uma região periódica em uma das janelas mencionadas anteriormente. A trajetória no espaço de fase ilustra o atrator periódico do sistema. Já para o valor de $r = 75$, ponto em que o sistema apresenta atrator em regime caótico, na Fig. 3.2 (b), a trajetória no espaço tridimensional não se intersecciona e nunca se repete, não importa o quanto

continuamos com o cálculo de integração numérica. Nesse caso, a trajetória permanece oscilando de uma “asa” para outra do atrator, em cada lado, nunca apresentando comportamento estacionário ou periódico.

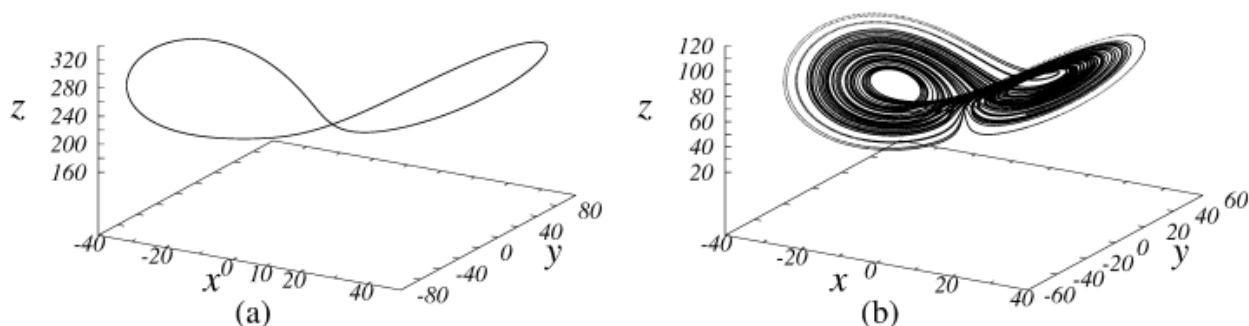


Figura 3.2 – Atratores do sistema de Lorenz. (a) Atrator periódico para $r = 250$.
(b) Atrator caótico para $r = 75$.

A forma do atrator para o sistema de Lorenz, caracterizada pelo típico formato de “asas de borboleta”, não é alterada devido a escolha das condições iniciais e tampouco devido a alterações nas rotinas de integração. Porém, as trajetórias exibidas na Fig. 3.2 (b), são sensíveis às condições iniciais e qualquer mudança na rotina de integração afeta a exata quantidade de voltas que o sistema descreve no espaço de fase, tornando impossível a predição de como o sistema se desenvolve além de um curto intervalo de tempo.

Utilizaremos neste trabalho os pontos localizados na Fig. 3.1, com valor de $r_1 = 26$, onde o sistema se encontra em regime caótico, e o valor de $r_2 = 250$, da qual está em regime periódico, para analisar o comportamento de dois sistemas de Lorenz quando estes são acoplados através de novos parâmetros que discutiremos a seguir.

Quando conectados os dois sistemas, teremos características do atrator no espaço de fase, diferentes daquelas apresentadas na Fig. 3.2 (b), o que nos permite construir uma nova análise da dinâmica temporal dos sistemas, identificando regiões periódicas, quase-periódicas, caóticas e hipercaóticas.

3.1 ACOPLAMENTO BIDIRECIONAL DE SISTEMAS DE LORENZ

O controle de dinâmicas caóticas de sistemas não-lineares complexos é um dos mais importantes tópicos na área de ciência não-linear aplicada. Esse conceito foi primeiramente introduzido por Ott *et al.* [20] e atraiu grande atenção nas últimas décadas [21].

Tais sistemas raramente são encontrados isoladamente na natureza, e interações entre estes acontecem por meios dos mais diversos tipos de *acoplamentos*. O mecanismo de como esta interação acontece é governada pelas funções de acoplamento que conectam os sistemas, onde variações nos valores de parâmetros permitem a supressão e controle de comportamentos caóticos dos sistemas acoplados.

O acoplamento que pode ser unidirecional ou bidirecional é um elemento importante para determinar o comportamento do sistema a longo prazo. No caso bidirecional, a interação entre os sistemas é mútua e os sistemas acoplados passam a influenciar um na dinâmica do outro. Já no caso unidirecional, o sistema tido como principal não sofre influências, mas altera a dinâmica dos demais.

Os mais diferentes tipos de acoplamentos bidirecionais de sistemas de Lorenz são amplamente reportados na literatura. Na grande maioria dos casos, tais sistemas são usados para estudos envolvendo os mais variados tipos de sincronização caótica [22-28], ocorrências de intermitência ou estados chimera [27, 29-30], ocorrências de bifurcações do tipo *blowout* [31-32] e na produção de atratores hipercaóticos de *quatro asas* [33], exemplificando alguns dos comportamentos dinâmicos resultantes do acoplamento bidirecional de sistemas de Lorenz.

Neste trabalho discutiremos algumas propriedades fundamentais do acoplamento bidirecional de dois sistemas de Lorenz [5-6]. Para tal, os sistemas enunciados em eq. (1.2) foram acoplados através das suas variáveis de estado correspondentes, x_1, y_1, z_1 e x_2, y_2, z_2 , sendo dado por

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \sigma_1 y_1 - \sigma_1 x_1 + \frac{a}{2}(1+c)(x_2 - x_1) \\
\dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1 + \frac{a}{2}(1+c)(y_2 - y_1) \\
\dot{z}_1 &= x_1 y_1 - b_1 z_1 + \frac{a}{2}(1+c)(z_2 - z_1) \\
\dot{x}_2 &= \sigma_2 y_2 - \sigma_2 x_2 + \frac{a}{2}(1-c)(x_1 - x_2) \\
\dot{y}_2 &= r_2 x_2 - y_2 - x_2 z_2 + \frac{a}{2}(1-c)(y_1 - y_2) \\
\dot{z}_2 &= x_2 y_2 - b_2 z_2 + \frac{a}{2}(1-c)(z_1 - z_2)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

onde σ_1, r_1, b_1 e σ_2, r_2, b_2 representam os parâmetros de controle relacionados aos sistemas 1 e 2 e a assimetria e intensidade de acoplamento definidas pelos parâmetros a e c , respectivamente. Para $c = 0$, podemos notar que o acoplamento é perfeitamente simétrico, dependente unicamente do parâmetro de intensidade a . Para $c = -1$, temos que o acoplamento é unidirecional com as variáveis de estado x_1, y_1, z_1 influenciando a dinâmica das variáveis x_2, y_2, z_2 . Já para $c = +1$, o acoplamento é também unidirecional, agora com as variáveis x_2, y_2, z_2 , influenciando as variáveis x_1, y_1, z_1 . Para a faixa de valores $-1 \leq c \leq +1$, o acoplamento é bidirecional e ambos os sistemas se influenciam de maneira recíproca.

De acordo com as propriedades do acoplamento enunciadas, consideramos o estudo do parâmetro de assimetria c variando entre os valores unidirecionais -1 e $+1$, com uma variação adequada do parâmetro de intensidade a , para obtenção de pontos (c, a) no plano de parâmetros. Estes pontos foram associados ao respectivo espectro dos expoentes de Lyapunov, através do método proposto por Wolf *et al* [7], permitindo identificar o comportamento dinâmico do sistema.

Na seção a seguir serão discutidos os resultados para o acoplamento destes sistemas, quando escolhido o parâmetro r para regiões em que se observam dinâmicas caóticas e periódicas, considerando as variações dos novos parâmetros de acoplamento a e c nas faixas de valores mencionadas no texto anteriormente.

4 RESULTADOS

Os resultados foram obtidos através da análise do plano de parâmetros (c, a) , gerado pelo cálculo de integração numérica de dois sistemas de Lorenz (eq. 1.2), fixados $\sigma = 10$ e $b = 8/3$ em ambos e escolhendo r para identificar regiões onde estes sistemas acoplados apresentem soluções caóticas e periódicas.

O método utilizado na integração consiste no algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem para um dado conjunto arbitrário de condições iniciais das variáveis $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, sendo as adotadas aqui respectivamente $(x_{0_1}, y_{0_1}, z_{0_1}, x_{0_2}, y_{0_2}, z_{0_2}) = (0, 1, 0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 7, 0, 9)$, com um passo fixo de tempo na ordem de 10^{-3} . As soluções encontradas, conhecidas como séries temporais, são utilizadas para computar os espectros de expoentes de Lyapunov para cada par (c, a) em um plano de parâmetros com uma malha de 800×800 pontos igualmente espaçados. Cada valor do espectro foi obtido via código fonte FORTRAN descrito por Wolf *et al.* [7], com 4×10^6 passos de integração.

Como visto na seção 2.4, o maior expoente de Lyapunov permite caracterizar pontos fixo, regularidade (periodicidade ou quase-periodicidade) e caos, relacionados respectivamente a um expoente negativo, zero e positivo. Para identificar tais condições no plano de parâmetros, utilizamos cores para representar a magnitude dos maiores expoentes de Lyapunov. Regiões na cor preta, da qual o maior expoente de Lyapunov é nulo, estão associadas aos parâmetros cujo atrator gerado no espaço de fase é periódico ou quase-periódico. Para valores positivos do maior expoente de Lyapunov, da qual o atrator descreve uma trajetória caótica no espaço de fases, a escala de cores varia do amarelo para o vermelho. Já para valores negativos, que correspondem a pontos de equilíbrio, a escala de cores varia do branco para o preto.

4.1 ACOPLAMENTO DE DOIS SISTEMAS DE LORENZ EM REGIME CAÓTICO

A Fig. 4.1, mostra uma visão global dos quatro maiores expoentes de Lyapunov para o plano de parâmetros (c, a) de dois sistemas de Lorenz

acoplados (eq. 1.2) em regime caótico, sendo $-1 \leq c \leq 1$ e $0 \leq a \leq 1$, e $\sigma_1 = \sigma_2 = 10$, $b_1 = b_2 = 8/3$ e $r_1 = r_2 = 26$. Podemos observar que para o maior expoente de Lyapunov λ_1 na Fig. 4.1 (a) no acoplamento destes sistemas, há uma supressão do caos na região compreendida entre $-0,5 \leq c \leq 0,5$, mesmo que cada sistema individualmente esteja em regime caótico, apresentando valores do maior expoente de Lyapunov iguais a zero, identificando uma região periódica ou quase-periódica dependendo do valor do segundo maior expoente de Lyapunov.

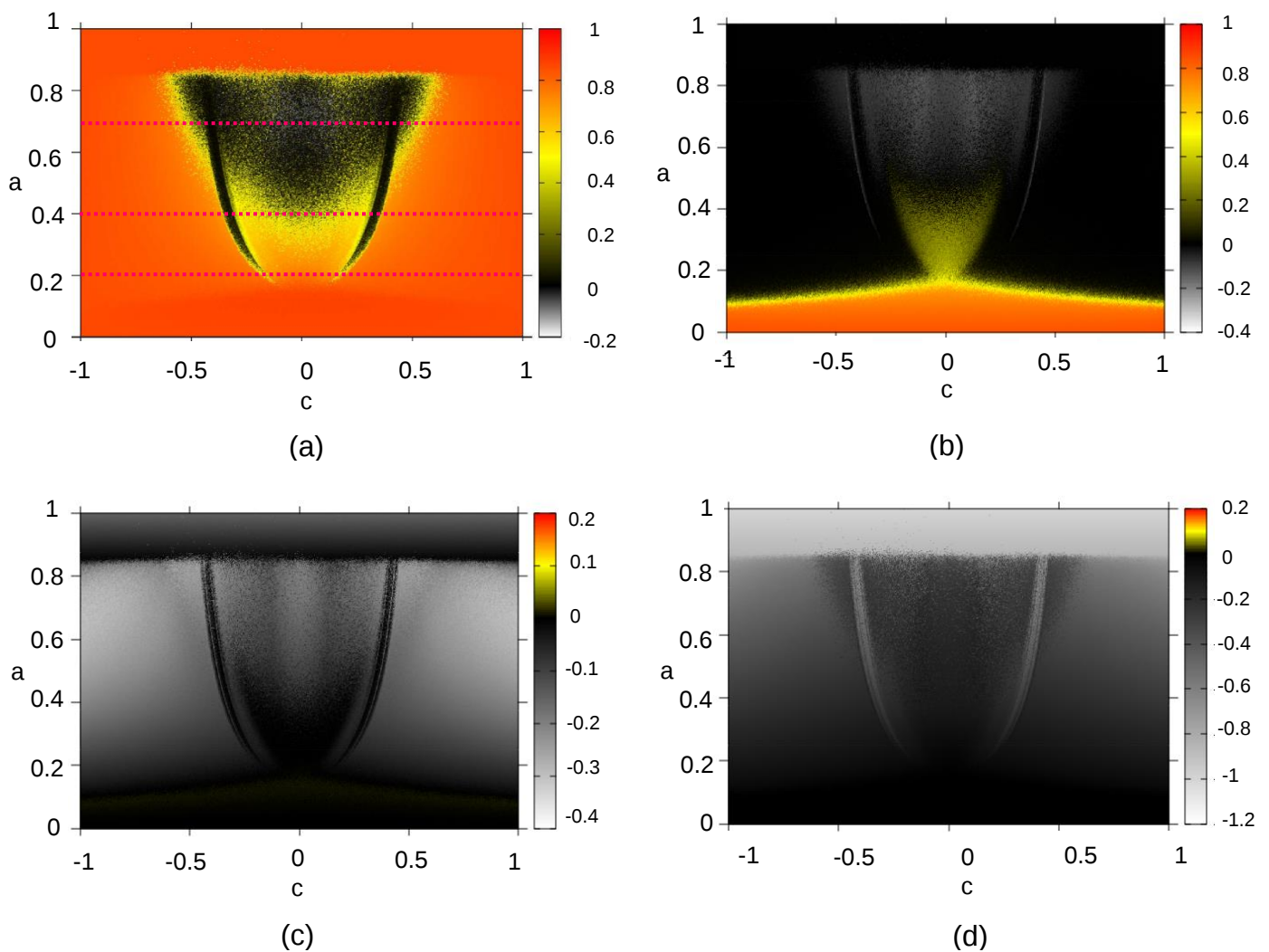


Figura 4.1 – Plano de parâmetros (c, a) para dois sistemas de Lorenz acoplados em regime caótico em função do primeiro (a), segundo (b), terceiro (c) e quarto (d) maior expoente de Lyapunov.

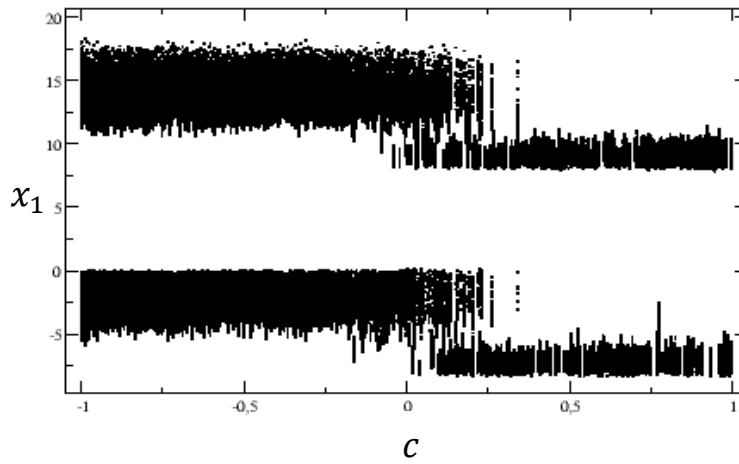


Figura 4.2 – Diagrama de bifurcação para pontos na linha $a = 0,2$.

Nota-se também que variações nos valores do parâmetro de intensidade a , concentram a região de regularidade no centro do plano, assumindo a forma do que podemos chamar de “dentes de vampiro”. Para valores unidirecionais de acoplamento próximos de -1 e $+1$ do parâmetro de assimetria c , a predominância é caótica. Nas regiões onde o segundo maior expoente de Lyapunov é positivo a dinâmica é hipercaótica, como mostra a região na escala de cor laranja da Fig. 4.1 (b). Nas Fig. 4.1 (c) e 4.1 (d) estão representados os planos de parâmetros para o terceiro e quarto maior expoentes respectivamente, podendo perceber que nenhum destes é responsável por caracterizar alguma outra região caótica no plano já que não possuem valores maiores que zero.

Para determinar o comportamento dinâmico do acoplamento em diferentes regiões do plano de parâmetros, analisamos o diagrama de bifurcação, representado pelo máximo local da variável x_1 , obtido através de pontos nas linhas representadas na Fig. 4.1 (a), para valores de $a = 0,2$ e $a = 0,4$, variando o parâmetro de assimetria conforme $-1 \leq c \leq 1$. Nota-se que a linha em $a = 0,2$ atravessa uma região caótica, tocando os “dentes” do desenho, onde ocorrem variações na magnitude dos expoentes de Lyapunov, ressaltada pela alteração na escala de cores do laranja para o amarelo. O diagrama de bifurcação para essa região é mostrado na Fig. 4.2.

Ao tomarmos $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6$ e observando a magnitude dos expoentes de Lyapunov em $a = 0,2$, o comportamento dinâmico naquela região, que apesar de ser visualmente caótico, pode apresentar hipercaos, quando dois dos maiores expoentes de Lyapunov são positivos [19].

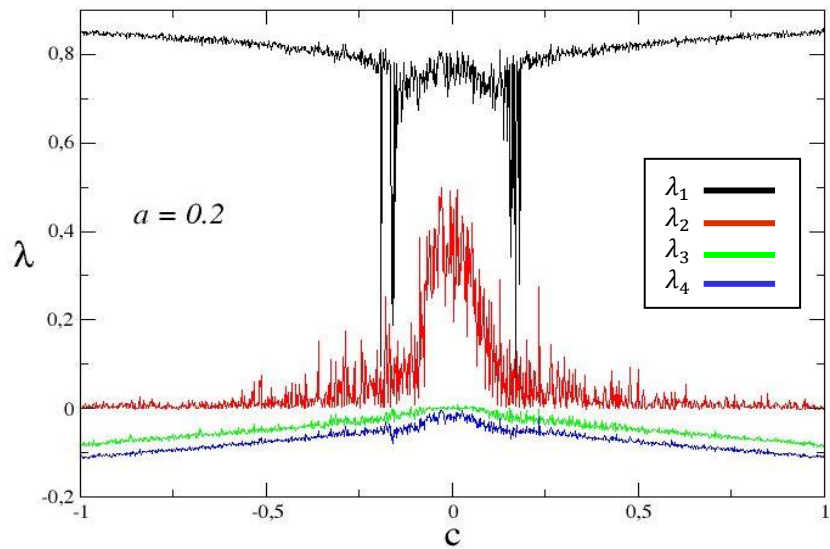


Figura 4.3 – Representação dos quatro maiores expoentes de Lyapunov em $a = 0,2$ para o plano de parâmetros (c, a) obtido na Fig. 4.1.

Na Fig. 4.3, representamos os quatro maiores expoentes de Lyapunov, como função de $-1 \leq c \leq 1$ e $a = 0,2$, com a cor preta, vermelha, verde e azul, identificando o primeiro, segundo, terceiro e quarto maior expoente de Lyapunov. Rech [34] apresenta as possibilidades para um sistema de seis dimensões (Fig. 4.4), relacionando a magnitude dos expoentes de Lyapunov com o comportamento caótico (C), quase-periódico (Q), periódico (P) e estável (E),

	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	Q	Q	Q	Q	P	E
λ_1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0	0	-
λ_2	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-
λ_3	+	+	+	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0	-	-	-
λ_4	+	0	0	0	0	-	0	0	-	-	0	0	-	-	-	-
λ_5	0	0	-	0	-	-	0	-	-	-	0	-	-	-	-	-
λ_6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Figura 4.4 – As dezesseis possíveis soluções para os espectros dos expoentes de Lyapunov relacionados a um sistema dinâmico de seis variáveis contínuas no tempo [34].

o que permite rapidamente identificar que nas direções dos valores unidirecionais do parâmetro de assimetria c na Fig. 4.3, temos regiões caóticas, com λ_1 positivo e λ_2 nulo. Já na região em torno de $c = 0$, os expoentes λ_1 e λ_2 são positivos e o acoplamento é hipercaótico.

Na Fig. 4.5 está representado o diagrama de bifurcação, agora para o parâmetro de intensidade $a = 0,4$. Essa linha, observando a Fig. 4.1 (a), notadamente atravessa os “dentes” do desenho, região da qual a magnitude do maior expoente de Lyapunov λ_1 assume visivelmente um valor igual a zero, podendo o sistema acoplado apresentar um comportamento periódico ou quase-periódico, dependendo da magnitude do segundo maior expoente λ_2 . É esperado que o diagrama de bifurcação nessas regiões apresente alguma característica que elucide este comportamento. Nas caixas de cor magenta na Fig. 4.5 temos identificadas as regiões dos “dentes de vampiro”, onde nas caixas da esquerda da figura notamos o aparecimento de janelas que dizem que naquele ponto o sistema é quase-periódico, ocorrendo uma supressão do regime caótico. Da mesma forma, porém de maneira menos evidente, nas caixas da direita, estão representadas as mesmas regiões quase-periódicas que são esperadas devido a simetria presente no plano de parâmetros (c, a) dos sistemas acoplados.

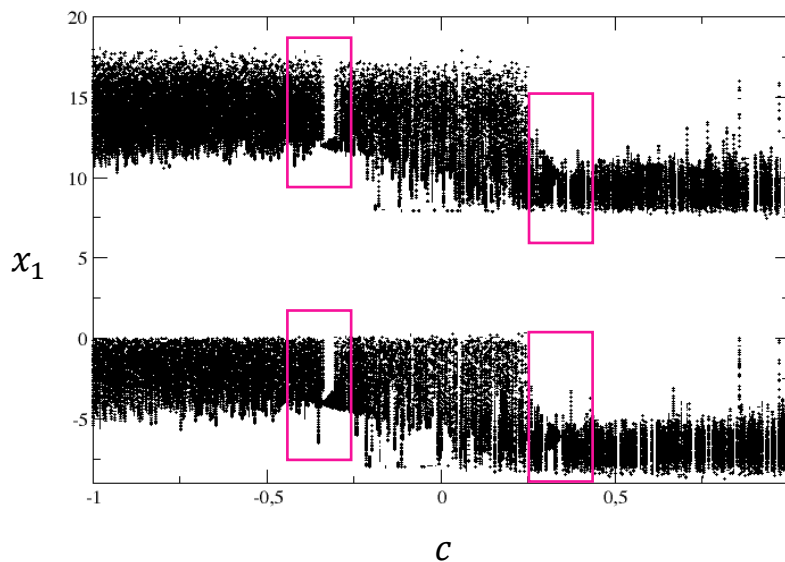


Figura 4.5 – Diagrama de bifurcação para pontos na linha $a = 0,4$.

Comparando novamente os quatro maiores expoentes de Lyapunov para $a = 0,4$, agora representados na Fig. 4.6, podemos obter mais informações a respeito do comportamento dinâmico. Primeiro podemos perceber que nos dentes, como visto no diagrama de bifurcação, a região é realmente quase-periódica, com dois ou três maiores expoentes de Lyapunov iguais a zero, sendo indicado na Fig. 4.6 pelas setas magentas. Já para regiões externas aos dentes em direção aos valores unidirecionais de c , o comportamento é caótico com o maior expoente λ_1 positivo, seguido de λ_2 nulo, e λ_3 e λ_4 negativos. Na região em torno de $c = 0$, os maiores expoentes assumem valores positivos e nulos. Se nos atentarmos para essa região na Fig. 4.1 (a), podemos perceber que a linha $a = 0,4$ atravessa uma mistura de pontos amarelos e pretos, que dificulta a perfeita identificação de regiões hipercaóticas, diferente do que se observa quando olhamos para a linha $a = 0,2$.

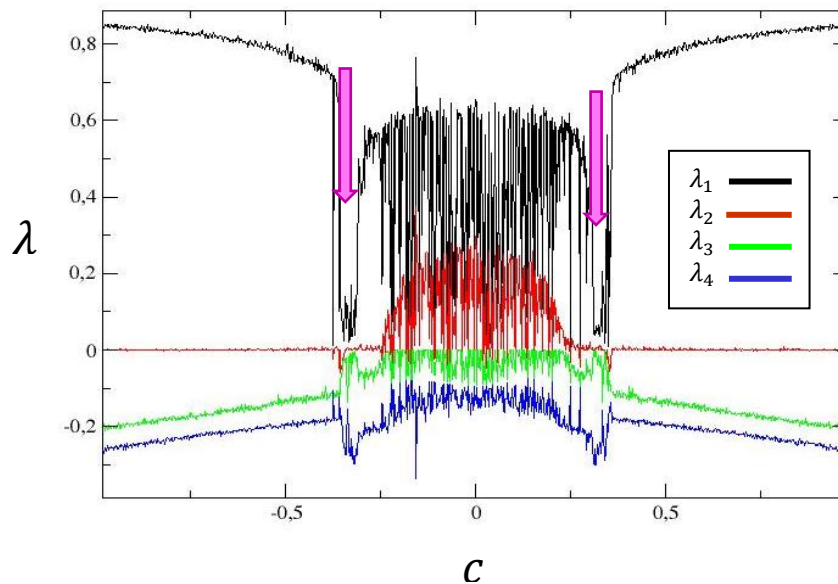


Figura 4.6 - Representação dos quatro maiores expoentes de Lyapunov em $a = 0,4$ para o plano de parâmetros (c, a) obtido na Fig. 4.1.

A Fig. 4.7 mostra agora os quatro maiores expoentes para a linha $a = 0,7$. Essa linha atravessa a região na qual o sistema apresenta um comportamento estável, com o maior expoente de Lyapunov λ_1 negativo, observado pela região na escala de cor branca, concentrada na parte superior entre os dentes da Fig. 4.1 (a). Quando construímos o diagrama de bifurcação para essa linha, os pontos

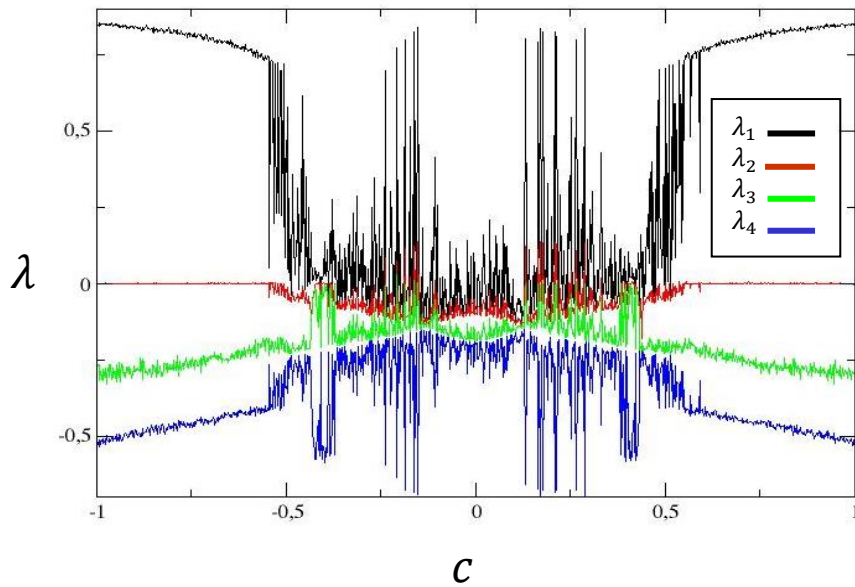


Figura 4.7 - Representação dos quatro maiores expoentes de Lyapunov em $a = 0,4$ para o plano de parâmetros (c, a) obtido na Fig. 4.1.

da trajetória para a variável x_1 resultam em atratores do tipo ponto fixo, que é caracterizada na faixa de valores $-0,3 < c < 0,3$ no gráfico da Fig. 4.8, com a ausência de densidade de pontos. Apesar desse local apresentar valores positivos de λ_1 , observados para valores em torno de $c = 0$, como podemos notar na Fig. 4.7, as trajetórias calculadas são encerradas tão logo λ_1 assumia um valor negativo.

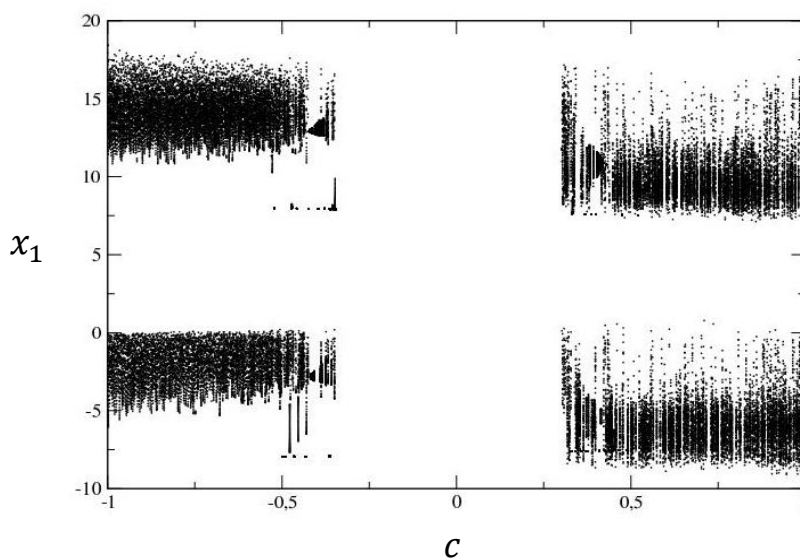


Figura 4.8 – Diagrama de bifurcação para pontos na linha $a = 0,7$. A região ausente de densidade de pontos em $-0,3 < c < 0,3$ indica que o atrator do sistema é do tipo ponto fixo para determinados valores.

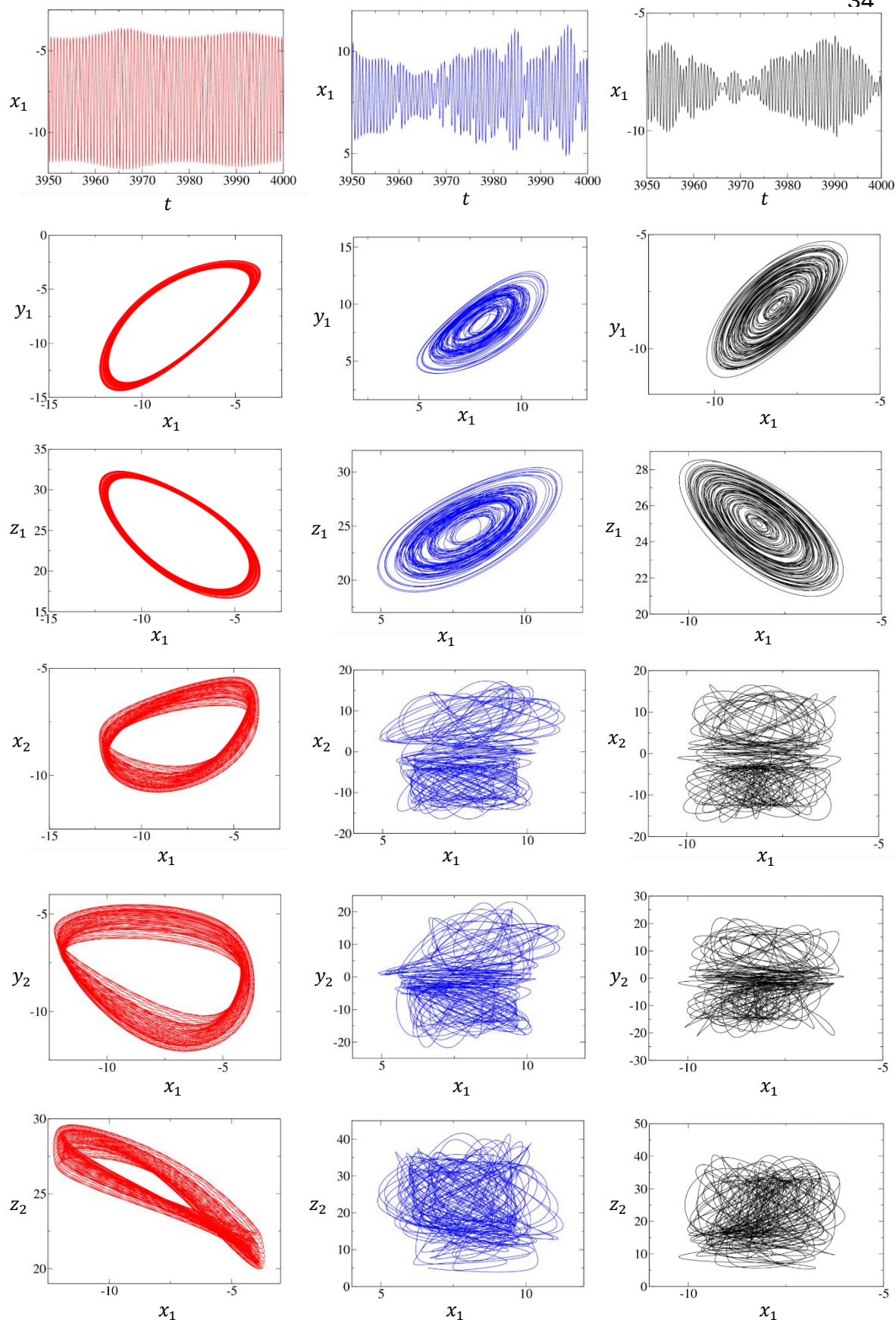


Figura 4.9 – Séries temporais e projeções bidimensionais dos atratores dos sistemas acoplados em regime caótico. A coluna em vermelho identifica o atrator quase-periódico para $(c, a) = (-0,32, 0,4)$. A coluna azul o atrator caótico em $(c, a) = (0,5, 0,4)$ e a preta o atrator hipercaótico em $(c, a) = (0, 0,2)$.

Podemos ainda visualizar outros atratores do sistema ao construir as projeções bidimensionais da variável x_1 , ilustradas na Fig. 4.9, para as regiões quase-periódicas, caóticas e hipercaóticas. A primeira coluna na cor vermelha identifica a região quase-periódica indicada pela seta magenta da esquerda na Fig. 4.6, correspondente ao dente de vampiro, com os valores de parâmetros $(c, a) = (-0,324, 0,4)$. A segunda coluna em azul, representa a região caótica $(c, a) = (0,5, 0,4)$ e a terceira região em preto para $(c, a) = (0, 0,2)$, a região hipercaótica entre os dentes de vampiro. Na primeira linha de cada uma das colunas estão representadas as séries temporais de x_1 , correspondente a cada um desses locais. As variações no tempo para x_1 mostram um comportamento bastante distinto no caso quase-periódico, quando comparados com o caótico e hipercaótico, indicando uma variação mais estável e quase constante, que fica bem evidenciada, quando comparamos as trajetórias descritas pelos atratores no espaço de fase elencadas nas demais linhas da Fig. 4.9 para cada um dos casos.

4.2 ACOPLAMENTO DE SISTEMAS DE LORENZ EM REGIME CAÓTICO E PERIÓDICO

Ao acoplarmos dois sistemas de Lorenz, sendo o primeiro em regime periódico, $r_1 = 250$, e o segundo caótico, $r_2 = 28$, para $\sigma_1 = \sigma_2 = 10$, $b_1 = b_2 = 8/3$, $-1 \leq c \leq 1$ e $0 \leq a \leq 10$, observamos um plano de parâmetros (c, a) com propriedades diferentes das do caso caótico-caótico, sendo apresentados na Fig. 4.10. A forma dos “dentes de vampiro” é perdida, dando lugar a uma nova figura com estruturas caóticas, periódicas e de equilíbrio.

A região caótica, representada pela escala de cores do amarelo para o laranja, é predominante e divide o plano de parâmetros em duas regiões com comportamentos distintos. A primeira, na parte superior à direita do gráfico destacada pela cor branca, e a segunda, na parte inferior e mais à esquerda caracterizada pela cor preta. A primeira região podemos seguramente dizer que se trata de uma região de equilíbrio já que o maior expoente de Lyapunov é negativo. Já a segunda região, para termos certeza quanto o comportamento do sistema, devemos olhar para os demais expoentes de Lyapunov, na Fig. 4.11,

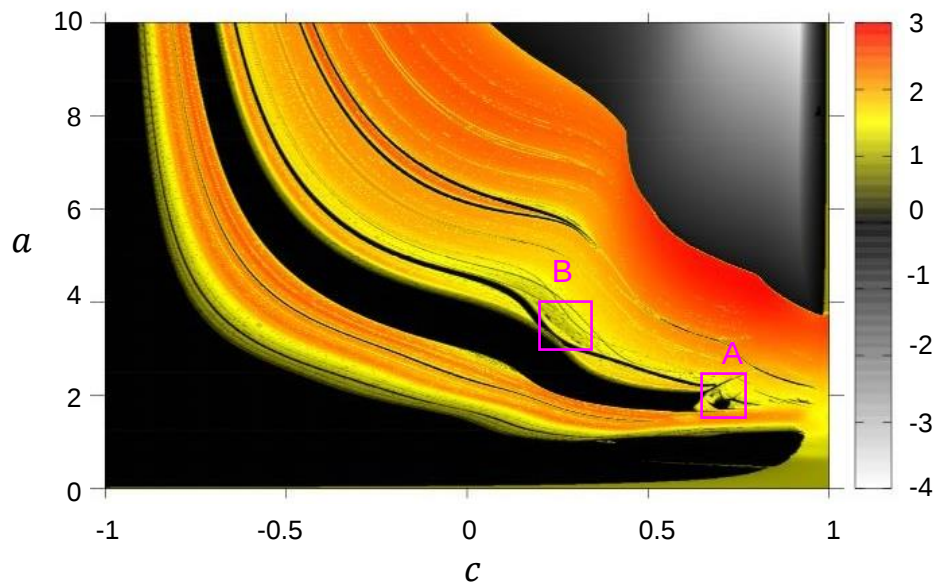


Figura 4.10 – Plano de parâmetros (c, a) para dois sistemas acoplados um em regime periódico $r_1 = 250$, e outro em regime caótico $r_2 = 28$.

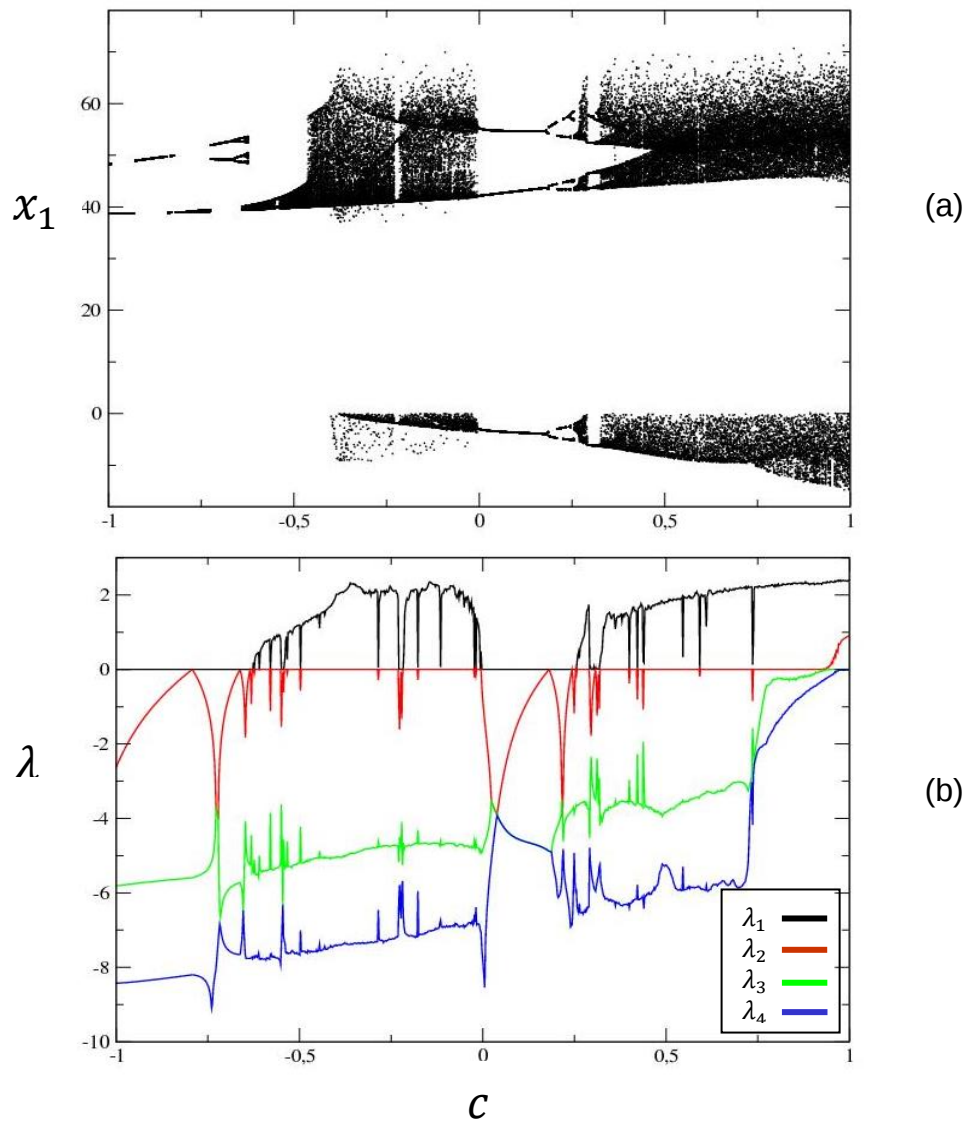


Figura 4.11 - Diagrama de bifurcação para pontos máximos locais da variável x_1 (a) e os quatro maiores expoentes de Lyapunov (b) para linha $a = 3$.

onde estão os 4 maiores expoentes, referentes a linha $a = 3$ que corta a Fig. 4.10 e o respectivo diagrama de bifurcação para máximos locais da variável x_1 . Vale ressaltar a concordância entre as figuras (a) e (b) quanto ao comportamento caótico e periódico nas regiões em que o maior expoente λ_1 é positivo ou nulo.

Podemos notar que não há dois ou mais expoentes de Lyapunov iguais a zero, que caracterizem um comportamento quase-periódico ao longo dessa linha, assim temos uma grande região periódica com expoentes λ_1 nulo, λ_2 , λ_3 e λ_4 negativos. Nota-se também quando construímos este gráfico, que na extremidade do valor unidirecional de $c = 1$, temos λ_1 e λ_2 positivos, identificando uma pequena região hipercaótica no gráfico. Na região caótica também encontramos uma mistura de estruturas periódicas, que ficam mais evidenciadas quando ampliamos regiões como as envoltas pelas caixas magenta na Fig. 4.10. Na janela de ampliação a direita (A), correspondente à faixa de valores $0,66 \leq c \leq 0,74$ e $1,6 \leq a \leq 2,2$, e representada na Fig. 4.12, observamos algumas estruturas, características de uma sequência de adição de períodos, que se distribuem ao longo de direções específicas no plano de parâmetros.

A esquerda dessa figura, podemos notar 4 delas bem distintas, indicadas pela sequência $\dots < 4 < 7 < 10 < 13 < \dots$, com uma taxa de adição de período

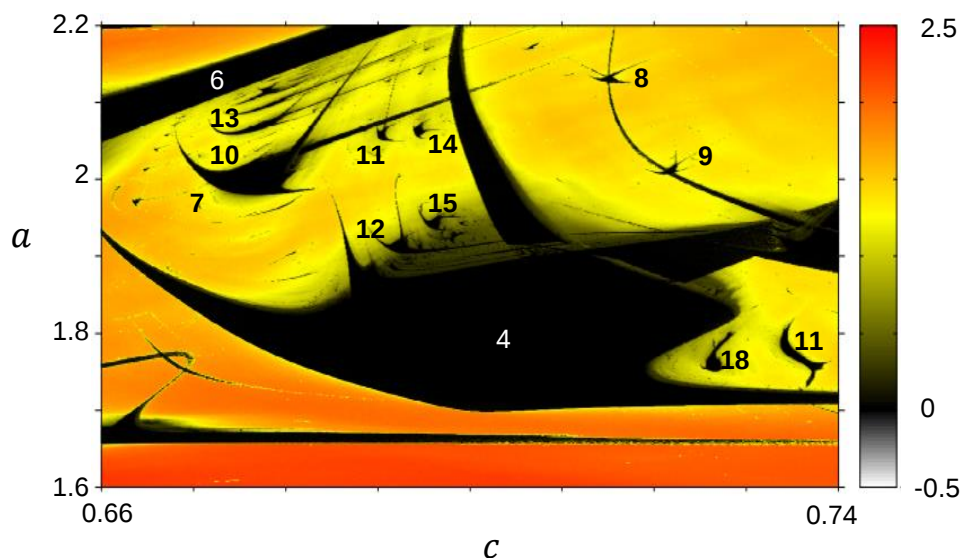


Figura 4.12 - Ampliação da região na caixa A da Fig. 4.10.

igual 3, sendo estas cascatas de adição de períodos acumuladas nas proximidades da região de período 6 no topo a esquerda da figura. Estes limites de acumulação de períodos se revelam abundantemente em circuitos eletrônicos, osciladores atmosféricos e químicos e vários outros sistemas [35]. O diagrama de bifurcação na Fig. 4.13 corresponde a linha $a = 2,0$ que atravessa duas destas estruturas e permite identificar os respectivos períodos 4 e 7.

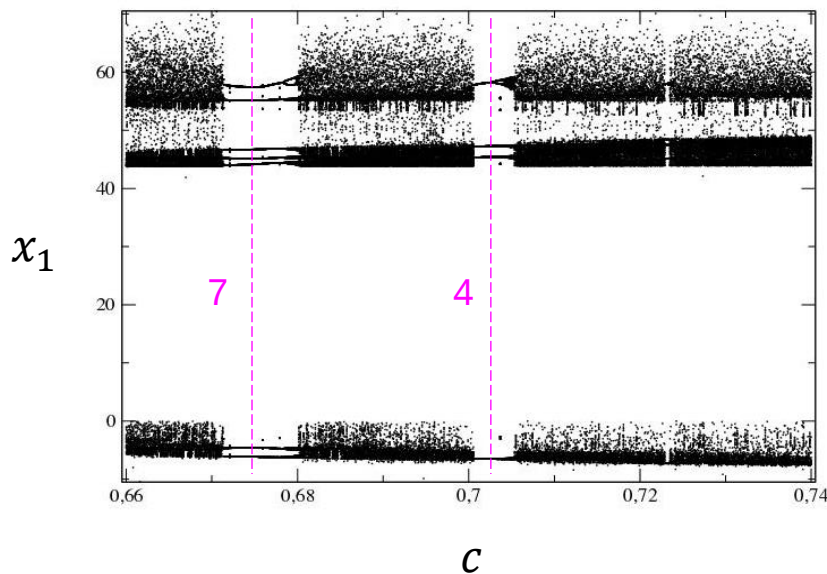


Figura 4.13 – Diagrama de Bifurcação para a linha que corta o plano de parâmetros (c, a) em $a = 2,0$, para os períodos 4 e 7.

Da mesma forma podemos analisar as demais estruturas presentes na Fig. 4.12 construindo os respectivos diagramas de bifurcação com linhas que atravessam estas estruturas. A Fig. 4.14 identifica as sequências de adição de período 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 e 18 na Fig. 4.12 através dos respectivos diagramas de bifurcação.

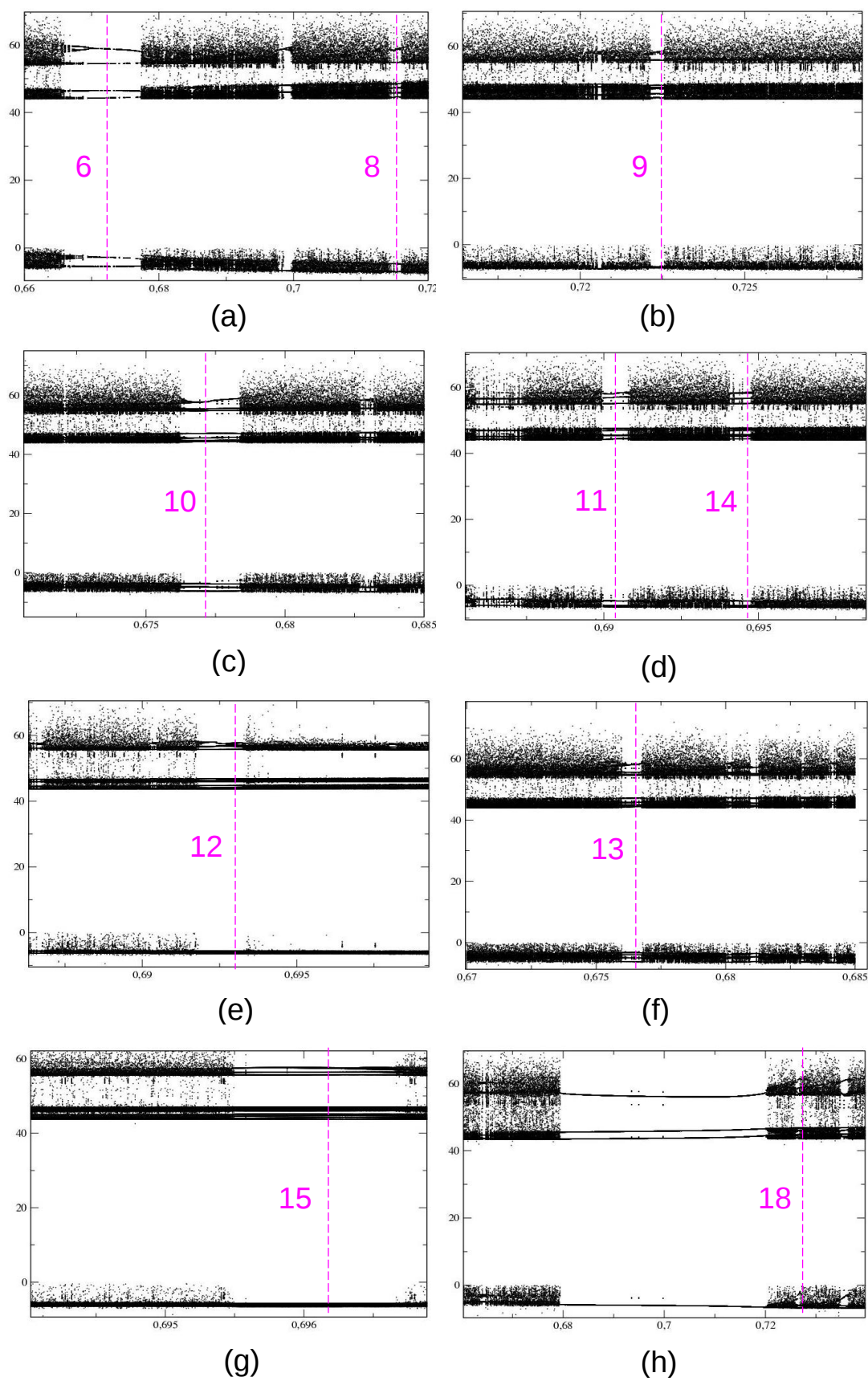


Figura 4.14 – Diagrama de Bifurcação para as sequências de adição de período (a) 6 e 8, (b) 9, (c) 10, (d) 11 e 14, (e) 12, (f) 13, (g) 15 e (h) 18.

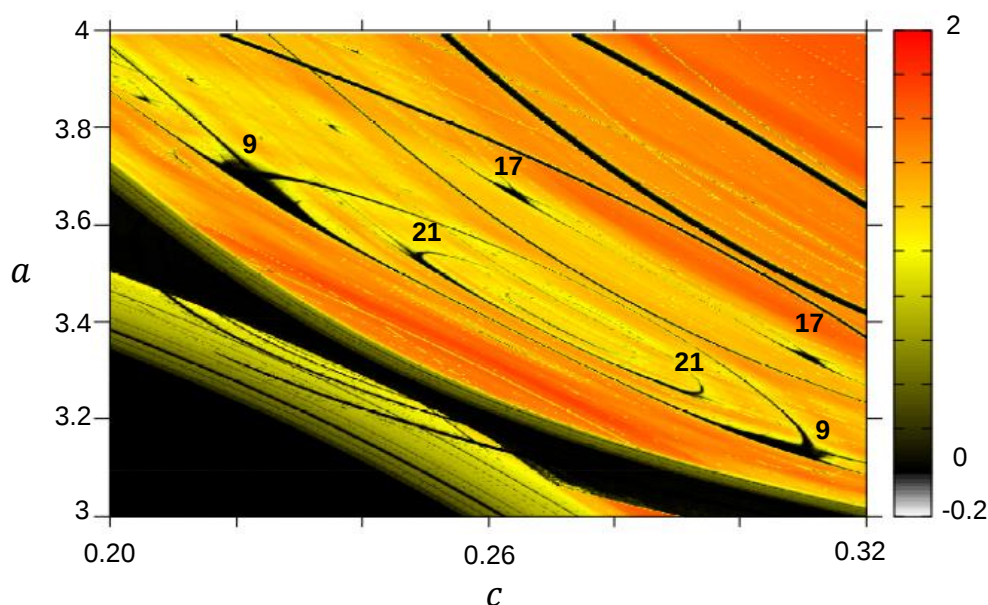


Figura 4.15 - Ampliação da região na caixa B da Fig. 4.10.

Na janela de ampliação a esquerda (B) na Fig. 4.10, agora representada na Fig. 4.15 para a faixa de valores $0,20 \leq c \leq 0,32$ e $3,0 \leq a \leq 4,0$, podemos notar novamente a presença de estruturas periódicas estáveis em meio ao caos. Estas estruturas se revelam como uma cascata de anéis concêntricos, sendo o mais externo deles o de período 9, como mostrado no diagrama de bifurcação da Fig. 4.16 (a). Seguido deste, temos o anel de período 21, Fig. 4.16 (c), indicando que estas estruturas se repetem indefinidamente conforme ampliamos o espaço de parâmetros. Na Fig. 4.15, ainda podemos observar outras estruturas concêntricas sendo a mais externa de período igual a 17, Fig. 4.16 (b). Muitas outras se revelarão presentes caso aumentarmos a escala de ampliação.

Regiões como esta, com estruturas de oscilações periódicas, foram primeiramente reportadas por Sack *et al* [36] em circuitos eletrônicos não lineares e foram nomeadas de espirais descontínuas, sendo também observadas em lasers semicondutores ótico injetados [37]. Estas espirais estão distribuídas de maneira organizada e conferem uma dinâmica ordenada no espaço de parâmetros.

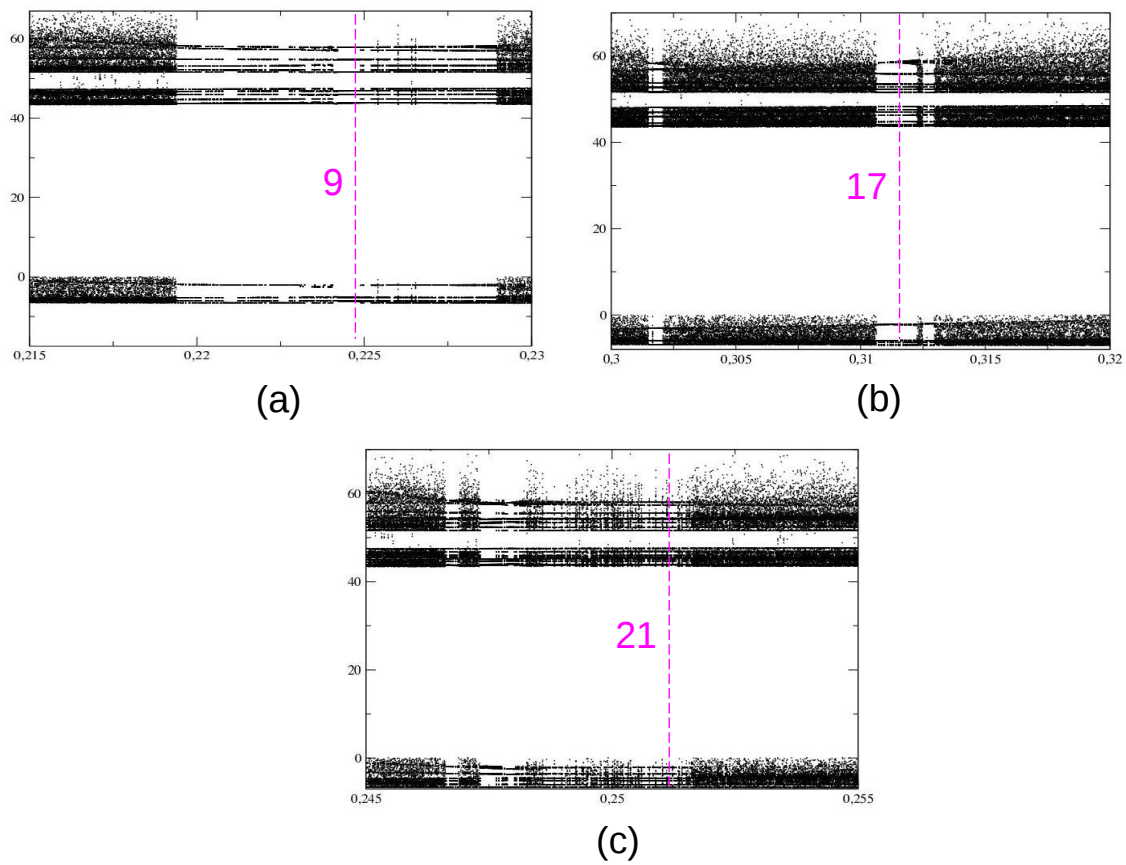


Figura 4.16 – Diagrama de bifurcação dos períodos (a) 9, (b) 17 e (c) 21 da região representada na Fig. 4.15.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, utilizando métodos numéricos, estudamos o comportamento de um sistema dinâmico em seis dimensões, obtido através do acoplamento de dois sistemas de Lorenz. Os sistemas submetidos a uma função bidirecional de acoplamento, com a introdução de dois novos parâmetros, apresentaram dinâmicas distintas das observadas quando abordados individualmente. Para o estudo, foram realizadas simulações numéricas para obtenção de planos de parâmetros, utilizando os espectros dos expoentes de Lyapunov como medida do comportamento dinâmico dos sistemas acoplados. Essa abordagem permitiu a caracterização dos sistemas quando observados os diagramas de bifurcação e atratores para determinadas regiões de interesse do espaço de fases.

Para valores específicos do parâmetro de controle r já conhecidos na literatura, regimes caóticos, quase periódicos, periódicos e estáveis são observados nos sistemas de Lorenz, o que permitiu acoplar os estes em dois casos distintos. O primeiro, considerando os dois sistemas em regime caótico, e o segundo, considerando um sistema em regime caótico e outro em regime periódico. Em ambos os casos foi investigado o comportamento dinâmico considerando o plano de parâmetros dos parâmetros a e c presentes nas funções de acoplamento, referentes respectivamente a intensidade e assimetria de acoplamento.

No primeiro caso, quando construímos o plano de parâmetros (c, a) para os espectros dos expoentes de Lyapunov, podemos notar uma vasta região caótica, com comportamento hipercaótico na parte inferior da Fig.4.11 e ainda uma estrutura central na forma de “dentes de vampiro” caracterizada por um comportamento quase periódico nos “dentes” e periódico em uma pequena região entre estes.

Essas características demonstraram que dois sistemas mesmo que estejam em regimes caóticos, quando acoplados, resultam em regiões supressoras do caos, apresentando comportamento dinâmico que difere de cada sistema individualmente.

No segundo caso, o plano de parâmetros (c, a) resultou em uma região dividida por uma estrutura caótica, com comportamento estável na parte superior

à direita e periódico na parte inferior à esquerda. Também notamos uma pequena região de regime hipercaótico na extremidade direita do plano e diferente do caso caótico-caótico, não observamos regiões quase-periódicas. Na região caótica que divide o plano, foram identificadas cascatas de adição de períodos, quando ampliadas regiões do espaço de parâmetros. Estas estruturas se revelam presentes em vários sistemas não lineares a tempo discreto e contínuo [35] em meio a regiões caóticas, onde a periodicidade é distribuída em uma determinada direção e acumulada em um horizonte no plano de parâmetros. Ainda nesta região caótica, foram encontradas as chamadas espirais descontínuas, formando um conjunto infinito de anéis concêntricos de diferentes períodos.

Nos sistemas acoplados, podemos observar fenômenos característicos de sistemas caóticos e a dependência da intensidade de acoplamento e assimetria de acoplamento nas novas funções, permitiram identificar como o comportamento é modificado através destes parâmetros.

Os estudos apresentados neste trabalho foram publicados no artigo “Chaos suppression, hyperchaos, period-adding, and discontinuous spirals in a bidirectional coupling of Lorenz systems” em *The European Physical Journal B*. **96**, 4 (2023).

REFERÊNCIAS

- [1] SALTZMAN, B. **Finite amplitude free convection as an Initial Value problem - I.** Journal of the Atmospheric Sciences, v. 19, 1962.
- [2] LORENZ, E.N. **Deterministic nonperiodic flow.** Journal of the Atmospheric Sciences, v. 20, 1963.
- [3] DULLIN, H.R.; SCHMIDT, S.; RICHTER, P.H.; GROSSMANN, S.K. **Extended phase diagram of the Lorenz model.** International Journal of Bifurcation and Chaos, v.17, 2007.
- [4] SPARROW, Colin. **The Lorenz equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors.** Springer, 1982.
- [5] BRAGARD, J.; VIDAL, G.; MANCINI, H.; MENDOZA, C.; BOCCALETTI, S. **Chaos suppression through asymmetric coupling.** Chaos 17, 043107, 2007.
- [6] PRANTS, W; RECH, P. C. **The organization of periodicity and hyperchaos in an asymmetric coupling of two chaotic Rössler oscillators.** Physica Scripta. 88, 015001, 2013.
- [7] WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. **Determining Lyapunov exponents from a time series,** Physica D 16, 285–317, 1985.
- [8] OTT, Eadward. **Chaos in dynamical systems.** Second edition. University of Maryland, 2002.
- [9] STROGATZ, Steven. **Nonlinear dynamics and chaos:** with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. Boulder, Westview Press, Perseus Books Group, 2015.
- [10] HARO, A.; LIMAICO, C.; LLOSAS, Y. **Characterization of the atmospheric dynamics in Riobamba city using the chaos theory.** Atmospheric and Climate Sciences, 5, 441-449, 2015.
- [11] CENCINI, M.; CECCONI, F.; VULPIANI, A. **Chaos: From Simple Models to Complex Systems.** Toh Tuck Link, Singapore, World Scientific, vol. 17, 2009.
- [12] FERRARA N.; PRADO C. **Caos: Uma Introdução.** Edgard Blöcher, Ltda, 1995.

- [13] SHAW, Robert. **Strange attractors , chaotic behavior, and information flow**. Physics Department, University of California, Santa Cruz, California 95064, USA. Z. Naturforsch. 36a, 80-112, 1981.
- [14] ECKMANN, J.-P.; RUELLE, D. **Ergodic theory of chaos and strange attractors**. Université de Genève, Switzerland. Reviews of Modern Physics 57, 617, 1985.
- [15] ROSENSTEIN, Michael T.; COLLINS, James J.; LUCA, Carlo J. De. **A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets**. Neuro Muscular Research Center and Department of Biomedical Engineering, Boston University, 44 Cummington Street, Boston, MA 02215, USA. November 20, 1992.
- [16] KUZNETSOV, Yuri A. **Elements of applied bifurcation theory, Second Edition**. November 25, 2010.
- [17] CLACK, Christopher T. M. **Dynamics of the Lorenz equations**. School of Mathematics. 2006.
- [18] RECH, P.C. **How to embed shrimps in parameter planes of the Lorenz system**. Physica Scripta, v. 92(4), 2017.
- [19] ALLIGOOD, K.T.; SAUER, T.D.; YORKE, J.A. **Chaos an introduction to dynamical systems**. Nova York: Springer, 1996.
- [20] OTT, Edward; GREBOGI, Celso; YORKE, James A. **Controlling chaos**. Physical Review Letters, 64, 2837, 1990.
- [21] CHOE, Chol-Ung; HÖHNE, Klaus; BENNER, Hartmut; KIVSHAR, Yuri S. **Chaos suppression in the parametrically driven Lorenz system**. Physical Review Letters, E 72, 036206, 2005.
- [22] Abarbanel, H. D. I.; Rulko, N. F.; Sushchik, M. M. **Generalized synchronization of chaos: the auxiliary system approach**. Physical Review Letters, E 53, 4528–4535, 1996.
- [23] ALVAREZ, J. **Synchronization in the Lorenz system: stability and robustness**. Nonlinear Dynamics, 10, 89–103, 1996.
- [24] BOCCALETTI, S.; KURTHS, J.; OSIPOV, G.; VALLADARES, D.; ZHOU, C. **The synchronization of chaotic systems**. Physics Reports, 366, 1–101, 2002.

- [25] ONTAÑÓN-GARCÍA, L. J.; CANTÓN, I. C.; RAMIREZ, J. P. **Dynamic behavior in a pair of Lorenz systems interacting via positive-negative coupling**. Chaos Solitons Fractals 145, 110808, 2021.
- [26] PAVLOV, A. N.; PAVLOVA, O. N.; KORONOVSKII, A. A.; HRAMOV, A. E. **Effect of measuring noise on scaling characteristics in the dynamics of coupled chaotic systems**. Chaos Solitons Fractals 116, 106–113, 2018.
- [27] POGROMSKY, A.; SANTOBONI, G.; NIJMEIJER, H. **Partial synchronization: from symmetry towards stability**. Physica D, 172, 65–87, 2002.
- [28] RESMI, V.; AMBIKA, G.; AMRITKAR, R. E. **Synchronized states in chaotic systems coupled indirectly through a dynamic environment**. Physical Review Letters E 81, 046216, 2010.
- [29] SHEPELEV, I. A.; STRELKOVA, G. I.; ANISHCHENKO, V. S. **Chimera states and intermittency in an ensemble of nonlocally coupled Lorenz systems**. Chaos. DOI: 10.1063/1.5020009. 2018.
- [30] OMELCHENKO, I.; RIEMENSCHNEIDER, B.; HÖVEL, P.; MAISTRENKO, Y.; SCHÖLL, E. **Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems**. Physical Review Letters E 85, 026212, 2012.
- [31] CAMARGO, S.; VIANA, R. L.; ANTENEODO, C. **Intermingled basins in coupled Lorenz systems**. Physical Review Letters E 85, 036207, 2012.
- [32] KRAWIECKI, A.; MATYJA´SKIEWICZ, S. **Blowout bifurcation and stability of marginal synchronization of chaos**. Physical Review Letters E 64, 036216, 2001.
- [33] GRASSI, G.; SEVERANCE, F. L.; MASHEV, E. D.; BAZUIN, B. J.; Miller, D. A. **Generation of a four-wing chaotic attractor by two weakly-coupled Lorenz systems**. International Journal of Bifurcation and Chaos 18, 2089–2094, 2008.
- [34] RECH, P. C. **On the dynamics of a high-order Lorenz-Stenflo system**. Physica Scripta, 91, 125201, 2016.
- [35] BONATTO, C.; GALLAS, J. A. C. **Accumulation horizons and period adding in optically injected semiconductor lasers**. Physical Review Letters E 75, 055204, 2007.

[36] SACK, A.; FREIRE, J. G.; LINDBERG, E.; PÖSCHEL, T.; GALLAS, J. A. C. **Discontinuous Spirals of stable periodic oscillations**. Scientific Reports, 3, 3350, 2013.

[37] CHÁVEZ, C. A. T.; CURILEF, S. **Discontinuous spirals of stability in an optically injected semiconductor laser**. Chaos 30, 053107, 2020.