

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – PPGF

CAROLINE MEURER DE LIZ

**ESTUDO DE SISTEMAS BINÁRIOS DE OBJETOS COMPACTOS: DA ACREÇÃO À
COALESCÊNCIA**

JOINVILLE

2024

CAROLINE MEURER DE LIZ

**ESTUDO DE SISTEMAS BINÁRIOS DE OBJETOS COMPACTOS: DA ACREÇÃO À
COALESCÊNCIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima

JOINVILLE

2024

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Universitária Udesc,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Liz, Caroline Meurer de
Estudos de sistemas binários de objetos compactos: da acreção à
coalescência / Caroline Meurer de Liz. -- 2024.
91 p.

Orientador: Rafael Camargo Rodrigues de Lima
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Física, Joinville, 2024.

1. Estrela de Nêutrons. 2. Acreção. 3. Efeito de maré. 4.
Números de Love. 5. Estrela de quarks. I. Lima, Rafael Camargo
Rodrigues de . II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro
de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física.
III. Título.

CAROLINE MEURER DE LIZ

**ESTUDO DE SISTEMAS BINÁRIOS DE OBJETOS COMPACTOS: DA ACREÇÃO À
COALESCÊNCIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima (Presidente/Orientador)
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membros:

Prof. Dr. Jaziel Goulart Coelho
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Jonas Pedro Pereira
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Alexandre Miers Zabet
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Bruno Duarte da Silva Moreira
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 02 de fevereiro de 2024

Aos meus pais, pelo apoio incondicional em
todos os projetos de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, mãe, pai e irmã, que estiveram ao meu lado, me apoiando em toda minha vida, acompanhando minha trajetória e dando o melhor conselho possível: não desistir.

Ao meu noivo, Pierre A. Gomes, por compartilhar todos os momentos bons e ruins, ouvir minhas angústias e regozijos; e, principalmente, por me apoiar em tudo que me proponho a fazer. Sua presença, como companheiro e colega de profissão, foi fundamental para o bom andamento deste curso.

Um agradecimento aos meus colegas de grupo de pesquisa e curso, pelas discussões e desabafos, em especial à minha querida amiga e ex-companheira de laboratório, Bianca Fusinato, pelas conversas intermináveis sobre futuro e pesquisas. E também ao meu primo e amigo Jessé V. de Liz, pela presença e parceria em toda minha jornada acadêmica.

Agradeço ao meu orientador, Rafael C. R. de Lima, por ter me aceitado como aluna de Iniciação Científica em tempos sombrios de pandemia e me ajudar a chegar até aqui, mantendo sempre uma paciência infinita nas respostas às minhas dúvidas intermináveis.

Por fim, agradeço à Fapesc pelo suporte financeiro durante toda a realização da pesquisa. E também à UDESC e a todos os professores do departamento de física por possibilitar a realização desta pós-graduação.

“Não há estrada real para a ciência e só têm
possibilidade de chegar aos seus cumes
luminosos aqueles que não temem fatigar-se a
escalar as suas veredas escarpadas.”
(KARL MARX)

RESUMO

Estrelas de Nêutrons (ENs) são objetos compactos que surgem após a morte de estrelas com massa entre 10 e 25 M_{\odot} . Dada a natureza extrema, é infligida às EN características singulares, como densidade supranucleares, da ordem de 10^{14} g/cm³, e campos gravitacionais imensos, da ordem de 10^{12} m/s². Nesta dissertação, serão abordados dois casos em que as ENs são detectadas em sistemas binários, um com companheira comum e outro com mais uma EN. Quando em binário com uma estrela ordinária, a EN pode apresentar colunas de acreção de matéria. Para esta análise, foi desenvolvida uma simulação para as colunas, junto com uma seleção estatística em duas etapas, considerando as emissões de raios-X da fonte 1A0535+262 – obtendo, com 1 σ de confiança, $M = 1,53^{+0,52}_{-0,40} M_{\odot}$ e $R = 12,11^{+1,14}_{-0,87}$ km. Já quando a EN forma um sistema binário com outra EN, são esperadas deformações nos corpos devido ao efeito de maré; comprovadas a partir de sinais de ondas gravitacionais. Proporcional à deformação, existem os Números de Love, que são calculados e analisados neste trabalho. Como aplicação dos números de Love, testamos a hipótese de estrelas de nêutrons serem formadas por quarks livres a partir de uma Equação de Estado para a matéria de quarks. Para todos estes cálculos, foi desenvolvido um pacote de programas – logradas massas entre 1 e 2,2 M_{\odot} e raios entre 8,9 e 13,2 km, concordando com dados observacionais.

Palavras-chave: Estrelas de Nêutrons. Acreção. Efeito de Maré. Números de Love. Estrelas de Quarks. Equação de Estado.

ABSTRACT

Neutron Stars (NSs) are compact objects that arise after the death of stars with mass between 10 and 25 M_{\odot} . Given the extreme nature, it's attributed to the NSs unique characteristics, like supranuclear density, around 10^{14} g/cm³, and huge gravitational fields, on the order of 10^{12} m/s². In this thesis, two cases in which the NSs are detected in binary systems will be addressed, one with a common companion and the other with another NSs. When in binary with an ordinary star, the NS may present matter accretion columns. For this analysis, a simulation for the columns was developed, with a statistical selection in two stages, considering the x-ray emissions from the source 1A0535+262 – achieving, with 1 σ confidence, $M = 1.53^{+0.52}_{-0.40} M_{\odot}$ e $R = 12.11^{+1.14}_{-0.87}$ km. In the case of the NS forming a binary system with another NS, deformations on the body are expected due to the tide effect; proven through gravitational waves signals. Proportional to the deformation, there are the Love numbers, calculated and analysed in this work. As application of the Love numbers, we tested the hypothesis of neutrons stars being composed of free quarks with an Equation of State for the quark matter. For all these calculations, a program package was developed – achieving masses between 1 and 2.2 M_{\odot} and radius between 8.9 and 13.2 km, agreeing with observational data.

Keywords: Neutron Stars. Accretion Column. Tidal deformations. Love Numbers. Quark Stars. Equation of State.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Primeiras observações do pulsar CP1919.	19
Figura 2	– Esquema representativo das distribuição dos elementos dentro da estrela ao final dos processos de fusão.	20
Figura 3	– Diagrama das classes e subclasses das populações de EN (Campo magnético da superfície <i>versus</i> Período).	21
Figura 4	– Deformação do espaço-tempo.	23
Figura 5	– Possíveis geometrias para coluna de acreção: (a) funil cheio, (b) funil oco, (c) panquecas e (d) espaguetes.	30
Figura 6	– Ilustração da emissão de raios-X pelas colunas de acreção.	31
Figura 7	– À esquerda: acreção de matéria nos polos magnéticos de uma EN. À direita: formas de emissão de fótons pelas colunas de acreção.	31
Figura 8	– Provável configuração de <i>hot-spots</i> que melhor ajusta o fluxo da fonte SGR J1745-2900. Na figura, a seta azul representa o eixo polar do <i>spot</i> vermelho, a seta vermelha o eixo de rotação e a seta preta a direção do observador; o plano que corta a EN representa o ângulo máximo de visão.	32
Figura 9	– Diagrama de fases para o conjunto dos melhores parâmetros calculados pelo MCMC.	36
Figura 10	– <i>Fan beams</i> para colunas de diferentes alturas h . As linhas azuis correspondem a colunas cilíndricas e as linhas vermelhas tracejadas a colunas cônicas. Foram considerados: $M = 1,4 M_{\odot}$, $R = 12$ km, $i = 90^{\circ}$, $P = 1$ s, $\theta_{10} = 15^{\circ}$, $\theta_1 = 45^{\circ}$, $\phi_1 = 180^{\circ}$ e $T_1 = 0.7$ keV.	37
Figura 11	– Esferoide oblato.	39
Figura 12	– Representação das três etapas de fusão de objetos compactos. <i>Inspiral</i> , quando os objetos apenas espiralam em torno de um centro da massa; <i>merger</i> quando ocorre a fusão dos OCs; e o <i>ringdown</i> , etapa final da coalescência, com o amortecimento do objeto remanescente.	40
Figura 13	– Representação da deformação de maré em um corpo, devido a uma fonte pontual de potencial gravitacional, colocada à distância r . O corpo originalmente esférico é esticado em direção a fonte pontual, passando ao formato oblato.	41
Figura 14	– Número de Love k_2 em função da compacidade C de uma família de estrelas descritas pela EdE Politrópica. Sendo (i) em azul: pontos calculados; (ii) em laranja: pontos disponibilizados por Binnington e Poisson (2009); (iii) em preto: k_2 newtoniano.	49
Figura 15	– Massa em função do Raio para uma família de estrelas de acordo com a EdE Politrópica.	50

Figura 16 – Número de Love k_2 em função da Compacidade de uma família de estrelas regidas pela EdE BSk20. (i) Em azul: curva calculada e (ii) em laranja: curva fornecida por Gittins, Andersson e Pereira (2020).	51
Figura 17 – Massa em função do Raio para uma família de estrelas de acordo com a EdE BSk20. Em azul são os pontos calculados pelo programa e a curva em laranja é o <i>plot</i> dos dados fornecidos por Gittins, Andersson e Pereira (2020). . . .	52
Figura 18 – Raio em função da Pressão Central para uma família de estrelas regidas pela EdE Politrópica.	53
Figura 19 – Raio em função da Pressão Central para uma família de ENs dada a EdE BSk20	53
Figura 20 – Regiões no plano $(B^{1/4}, a_4)$ para $a_2 = 100$ MeV associadas à Estrelas Híbridas e Estrelas de Quarks estáveis. Abaixo da curva denominada <i>2-flavor line</i> , os parâmetros correspondem a estrelas sem núcleos.	54
Figura 21 – Número de Love k_2 em função da compacidade C , considerando uma estrela formada por quarks.	55
Figura 22 – Número de Love k_2 em função da Densidade Central de uma família de EQs.	56
Figura 23 – Compacidade em função da Densidade Central para uma família de EQs. . .	56
Figura 24 – Curva da relação Massa-Raio para uma família de estrelas regidas pela EdE de Quarks.	57
Figura 25 – Massa em função da Densidade Central para uma família de EQs.	58
Figura 26 – Raio em função da Densidade Central para uma família de EQs.	58
Figura 27 – Densidade em função do raio para apenas uma Estrela de Quarks.	59

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AG	Algoritmo Genético
EdE	Equação de Estado
EN	Estrela de Nêutrons
EQ	Estrela de Quarks
HMXB	<i>High-Mass X-ray Binaries</i>
LMXB	<i>Low-Mass X-ray Binaries</i>
MCMC	Monte Carlo Markov Chains
OC	Objetos Compactos
OG	Ondas Gravitacionais
QCD	Cromodinâmica Quântica
RG	Relatividade Geral

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	PARTE I - ESTRELAS DE NÊUTRONS	18
2.1	DESCOBERTA	18
2.2	FORMAÇÃO	19
2.3	TIPOS E CARACTERÍSTICAS	20
3	RELATIVIDADE GERAL	23
3.1	ASPECTOS GERAIS	23
3.1.1	Equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	25
3.2	SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD	26
4	PARTE II - ACREÇÃO DE MATÉRIA	29
4.1	CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA	29
4.2	DADOS DA FONTE	32
4.3	MÉTODOS ESTATÍSTICOS	33
4.3.1	Algoritmo Genético	33
4.3.2	Método Monte Carlo Markov Chains	34
4.4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	35
5	PARTE III – COALESCÊNCIA	39
5.1	EFEITO DE MARÉ CLÁSSICO	41
5.2	EFEITO DE MARÉ EM ESTRELAS DE NÊUTRONS	42
5.3	ESTRELAS DE NÊUTRONS OU DE QUARKS?	43
5.4	ESTRELA DE QUARKS	44
6	MÉTODOS COMPUTACIONAIS	46
6.1	EQUAÇÕES DE ESTADO PARA TESTES	46
6.1.1	Equação de Estado Politrópica	46
6.1.2	Equação de Estado BSk20	47
6.2	ESTRUTURA DO ALGORITMO	48
6.2.1	Resultados dos testes	49
6.3	NÚMERO DE LOVE PARA A ESTRELA DE QUARKS	54
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
	REFERÊNCIAS	63
	APÊNDICE A – MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD	68
	APÊNDICE B – CÁLCULO DOS NÚMEROS DE LOVE	71
B.1	PERTURBAÇÃO NO ESPAÇO-TEMPO	71
B.1.1	Harmônicos esféricos vetoriais e tensoriais	71
B.2	EQUAÇÕES DE EINSTEIN PERTURBADAS	73

B.2.1	Componentes do tensor energia-momento com perturbação	73
B.2.2	Componentes do tensor de Einstein perturbado	74
B.3	SOLUÇÃO PARA A PERTURBAÇÃO $H(R)$	76
B.3.1	Solução de $H(r)$ no regime interno	76
B.3.2	Solução de $H(r)$ no regime externo	77
B.3.3	Continuidade na superfície da estrela	78
	ANEXO A – ARTIGO	80

1 INTRODUÇÃO

As Estrelas de Nêutrons (ENs) estão entre os objetos mais glamourosos do universo, resultam da dramática explosão de uma supernova e, por conta disso, possuem características extremas, como densidades maiores que do núcleo atômico, da ordem de 10^{14} g/cm^3 . Dada a altíssima densidade, o campo gravitacional de uma EN é muito intenso, chegando até $2 \times 10^{12} \text{ m/s}^2$ – cerca de 200 *bilhões* de vezes mais forte que o da Terra. Além disso, ENs também possuem campos magnéticos entre 10^{10} e 10^{15} G . Para fins de comparação, o campo magnético da Terra varia entre 0,25 e 0,65 G (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008; GLENDENNING, 2012; SCHAFFNER-BIELICH, 2020; LORIMER; KRAMER, 2012; TUROLLA; ZANE; WATTS, 2015). Isto posto, são evidentes os motivos que fazem as ENs tão intrigantes: suas condições extremas fazem delas ótimos laboratórios de física de altas energias, podendo contribuir com diversas áreas da Física, tais como cromodinâmica quântica, teoria de campos, relatividade geral e, principalmente, astrofísica.

Excluídos os buracos negros, as ENs são os objetos mais compactos que podem ser, a princípio, completamente descritos pela Física atual. Porém, a descrição destes objetos compactos é um desafio desde sua primeira detecção, em 1967, por Jocelyn Bell, visto que são detectáveis apenas a partir de sinais eletromagnéticos ou de ondas gravitacionais – quando em sistemas binários (HEWISH et al., 1979; SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

Nesta dissertação, serão estudados sistemas binários de Objetos Compactos (OCs), da acreção à coalescência. Em outras palavras, serão explorados binários nos quais há a transferência de matéria de uma estrela comum para uma EN e binários compostos por dois objetos compactos, nos quais há a possibilidade de fusão entre as componentes do sistema, i.e. a coalescência entre as duas ENs. Na **Parte I** (Capítulo 2) serão tratados os aspectos gerais das EN, desde a hipótese, detecção e formação, até o aparato físico e matemático necessário para seu estudo, abordando a relatividade geral e uma de suas soluções.

Na **Parte II** (Capítulo 4), contextualizados e explorados o objeto de estudo desta dissertação, serão analisados o primeiro tipo de binário, formado por uma Estrela de Nêutrons e uma estrela comum. Estes binários são interessantes devido à uma das consequências de sua interação: a acreção de matéria. Como já vimos, as ENs são objetos compactos e, portanto, possuem uma grande quantidade de massa em pouco espaço, causando uma grande deformação no espaço-tempo e, com isso, geram um grande campo gravitacional. Por conseguinte, a estrela comum perde matéria para a companheira.

A acreção ocorre quando a matéria que sai da estrela comum é canalizada para as EN por meio do campo magnético, formando colunas nos polos (MÉSZÁROS, 1984). O objetivo desta parte é demonstrar a modelagem destas colunas de acreção e os resultados do modelo em comparação com dados reais, publicados em nosso artigo *A Method to Fit Phase Diagrams of Slow-Rotation Pulsars with Accretion Columns*¹, publicado na revista *MDPI Galaxies* em janeiro

¹ Disponível no Anexo A ou pelo link: doi.org/10.3390/galaxies11010018. Acesso em 02 jan. 2024

de 2023 – desenvolvido pelo grupo de pesquisa em Astrofísica Relativística Computacional da UDESC em colaboração com o INPE, UFES e USP, com participação da autora (SILVA et al., 2023).

Já na **Parte III** (Capítulo 5) serão analisados os binários formados por duas Estrelas de Nêutrons. Estes binários são relevantes devido a várias características que possuem: a fusão iminente, a emissão de Ondas Gravitacionais (OG) e o efeito de maré que, no modelo estudado por nosso grupo, pode vir a ser uma ferramenta na identificação da *strange matter* (ou matéria estranha, em tradução livre), i.e. a matéria formada por quarks livres.

O avanço dos interferômetros terrestres, como a colaboração LIGO² e Virgo³, possibilitou a detecção e o estudo de ondas gravitacionais, propostas há mais de cem anos como parte da Relatividade Geral (RG) (ABBOTT et al., 2016). Desde a primeira detecção, em 2016, foram constatados vários eventos de fusão de binários de OCs, formados em maioria por buracos negros – estamos interessados em binários de ENs. De modo geral, o evento ocorre da seguinte forma: os OC orbitam o centro de massa, mas perdem energia via ondas gravitacionais e, por conservação de momento angular, a distância entre os objetos diminui e a velocidade angular aumenta; de forma que a fusão dos OCs é inevitável. Contudo, antes da fusão, as ondas gravitacionais apresentam uma assinatura singular: o efeito de maré. A aproximação destes OCs faz com que o campo gravitacional de um interfira na geometria da companheira, causando uma deformação devido ao efeito de maré (HINDERER, 2008; CHATZIIOANNOU, 2020; GLENDENNING, 2012; DAMOUR; NAGAR, 2009).

Com o efeito de maré contido no sinal das ondas gravitacionais, é possível quantificar a deformação dos corpos, graças aos Números de Love. Estas quantidades foram determinadas em 1909 de forma empírica, por Augustus Love mas possuem análogo em eventos regidos pela RG (LOVE, 1909; ABDELSALHIN, 2019; NAGAR et al., 2018).

Para a completa descrição de binários de ENs, é necessário um conjunto de ferramentas, que vão desde o formalismo da RG até uma Equação de Estado (EdE) que descreva a matéria, passando por métodos computacionais para que os cálculos sejam realizados. A definição de uma EdE é um mistério que envolve os físicos há muitos anos e, outrossim, quando tratamos de ENs, não sabemos como a matéria se comporta nas condições de existência destes OCs (SCHAFFNER-BIELICH, 2020). Devido a esta insciência, há a possibilidade de que a matéria que compõe estes OCs seja diferente da matéria hadrônica, ainda mais fundamental: uma matéria de quarks livres, fora das amarras dos nêutrons. Contemplaremos, então, uma EdE para uma Estrela de Quarks (EQ), consoante com os estudos de Alford et al. (2005) e Pereira, Flores e Lugones (2018).

Por fim, no Capítulo 7 constam as considerações finais sobre esta dissertação, tratando-se

² Sigla para *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*, ou Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferômetro Laser, em tradução livre. Localizado nos Estados Unidos da América. Mais informações em: ligo.caltech.edu. Acesso em 2 fev. 2024.

³ Interferômetro Terrestre nomeado em homenagem ao Aglomerado de Virgem, que contém cerca de 1500 galáxias. Localizado na Itália. Mais informações em: virgo-gw.eu. Acesso em 2 fev. 2024.

de um apanhado geral dos resultados obtidos e perspectivas futuras que complementam os tópicos abordados. O estudo dos binários de objetos compactos está apenas começando.

Parte I

Estrelas de Nêutrons – descoberta, formação e métodos de análise.

2 PARTE I - ESTRELAS DE NÊUTRONS

As Estrelas de Nêutrons possuem diversas propriedades intrigantes: densidade nuclear, altos campos gravitacional e magnético. Por enquanto, tomaremos o modelo canônico¹ das EN, ou seja, massa de $1,4 M_{\odot}$ e raio entre 10 e 15 km (GLENDENNING, 2012; SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008; SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

Nesta parte, será discutida a natureza das EN, sua hipótese, descoberta, formação e principais características. Ainda, no Capítulo 3, serão trabalhados os métodos essenciais para a análise e descrição das EN: a Relatividade Geral de forma elementar e a solução que será utilizada.

2.1 DESCOBERTA

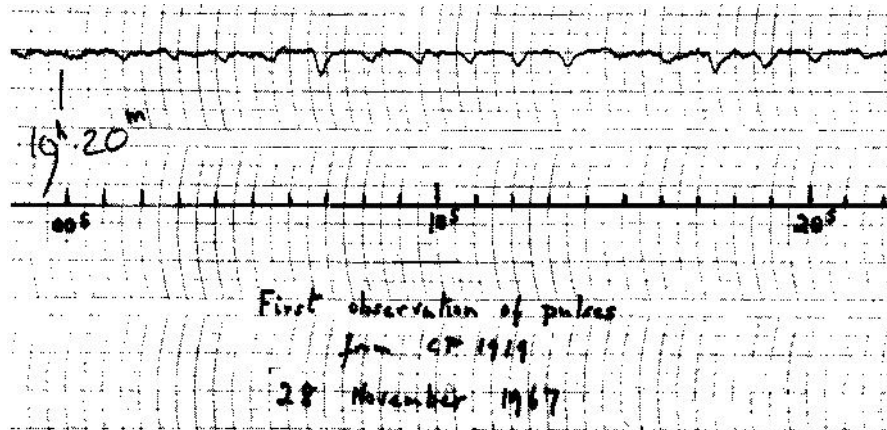
A primeira hipótese explícita da existência de uma estrela formada por nêutrons foi feita em 1934 por Walter Baade e Fritz Zwicky, enquanto estudavam a energia liberada por explosões de supernovas. Talvez inspirados pela descoberta dos nêutrons em 1932 por James Chadwick, os cientistas acreditaram que pudessem existir objetos compactos formados por nêutrons degenerados e que estariam no fim do processo de fusão nuclear, que determina a vida das estrelas (BURROWS, 2015).

Em 1939, os físicos Richard Tolman, Robert Oppenheimer e George Volkoff determinaram um modelo para esses objetos compactos, por meio da redução das equações de Einstein para o interior de uma estrela esférica, estática e relativística. Neste modelo, o raio seria de, aproximadamente, 10 km e a massa em torno de $3/4 M_{\odot}$ (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008).

Já em 1967, Jocelyn Bell, então estudante de pós-graduação e participante do grupo de pesquisa liderado por Antony Hewish, descobriu pulsos de rádio com o período de 1,377 segundos, que apareciam todos os dias durante quatro minutos (Figura 1). Em um primeiro momento, o sinal recebeu o nome de *Little green men 1* (Pequenos homens verdes 1, em tradução livre), pois não se sabia sua origem. Após Bell e seu grupo eliminarem todas as possibilidades de interferência e má interpretação de dados, foi publicado um artigo sobre o primeiro pulsar descoberto, o CP1919, localizado na constelação de Vulpecula. Então, em 1968, Thomas Gold e Franco Pacini postularam que os pulsares são estrelas de nêutrons que rotacionam rapidamente, devido ao seu altíssimo campo magnético de $\sim 10^{12}$ G (HEWISH et al., 1979; LORIMER; KRAMER, 2012).

¹ Conforme evidências, que serão discutidas no Capítulo 5, o modelo canônico conhecido na literatura já não é tão abrangente. Atualmente são tomadas massas entre 1 e $2,2 M_{\odot}$ e raios entre 8,9 e 13,2 km.

Figura 1 – Primeiras observações do pulsar CP1919.



Fonte: Cambridge University.

2.2 FORMAÇÃO

As estrelas são fruto do elegante equilíbrio entre a pressão termonuclear e a força gravitacional que exercem em si mesmas. De acordo com o modelo atual, a vida da estrela começa com a fusão do Hidrogênio (H), transformando-o em Hélio (He): $2\text{H} + 3\text{H} \rightarrow 4\text{He} + n$, elevando a temperatura da estrela. Este processo ocorre durante a maior parte da vida das estrelas (GLENDEENING, 2012; SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

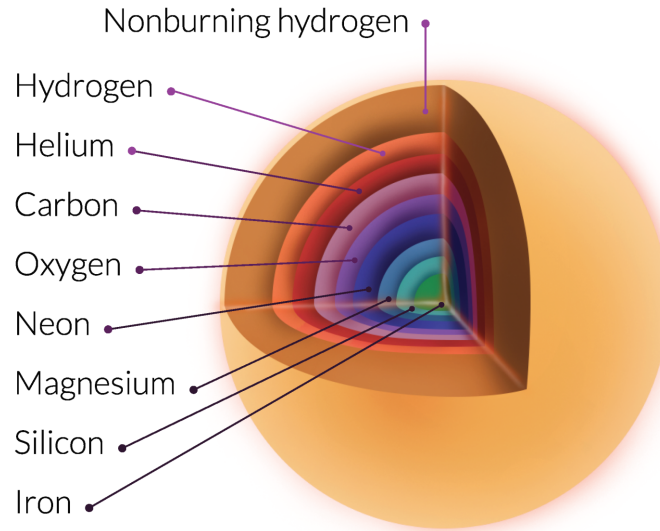
Após a formação do He, o núcleo atinge temperatura suficiente para a fusão em Carbono (C): $3^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C}$, cujo processo dura algumas centenas de anos. Durante o processo de formação de C há uma grande liberação de neutrinos pelo núcleo da estrela, devido a produção e aniquilação de pares elétrons-pósitrons ($\nu + N \rightarrow N + e^- + e^+$), com isso, a temperatura do núcleo aumenta e os processos de fusão do Oxigênio (O) são acelerados e duram poucos anos.

Então, com a criação de O, a estrela passa a fundir elementos como o Selênio (Se) e o Enxofre (S), por apenas algumas semanas. Conforme os elementos são criados no interior estelar, eles são direcionados para a superfície da estrela, criando cascas concêntricas, em que os elementos mais leves ficam mais distantes do núcleo, como ilustra a Figura 2.

No caso de estrelas massivas ($M \geq 8 M_{\odot}$), há combustível suficiente para completar o processo de fusão dos elementos do grupo do Ferro (Fe) – Ferro, Níquel e Cobalto – que, por se tratar de um processo endotérmico (diferente dos processos exotérmicos até então), fica ao final da vida estelar. Após a fusão de seu último elemento, o equilíbrio acaba e o colapso da estrela é inevitável – o produto final deste colapso será determinado por sua massa inicial (a morte de estrelas massivas resultarão em objetos compactos).

Durante o colapso de uma estrela com massa inicial entre $10 \leq M/M_{\odot} \leq 25$ há uma intensa formação de Fe em seu núcleo, fazendo com que haja um aumento de densidade. Quando a densidade do núcleo atinge o Limite de Chandrasekhar – que corresponde a $1,4 M_{\odot}$ – ocorre o processo de fóton-desintegração, aumentando a quantidade de nêutrons no núcleo (CHANDRASEKHAR, 1934). Após isso, a estrela explode violentamente em uma supernova, retirando

Figura 2 – Esquema representativo das distribuição dos elementos dentro da estrela ao final dos processos de fusão.



Fonte: Menezes (2021).

grande parte de sua matéria – a energia dessa explosão pode ser $\sim 10^{53}$ ergs (GLENDENNING, 2012; SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

Depois da explosão, os elementos que haviam sido retirados da estrela começam a cair em direção ao seu centro de massa. A matéria que atinge o caroço de Fe cria uma onda de choque, fazendo com que os elementos mais leves atinjam essa onda e afastem-se novamente da estrela, formando um espaço vazio entre essa massa e o núcleo restante da estrela.

Com o aumento da densidade do núcleo, a gravidade esmaga os elétrons até que se tornem relativísticos e, dessa maneira, passam a capturar prótons através do decaimento β inverso ($p + e^- \rightarrow n + \nu_e$), que é energeticamente favorável. Então, o núcleo passa a ter muitos nêutrons, tal que a pressão fermiônica e a força forte equilibram-se com a força gravitacional, atingindo um novo estado de equilíbrio: uma Estrela de Nêutrons (GLENDENNING, 2012; SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

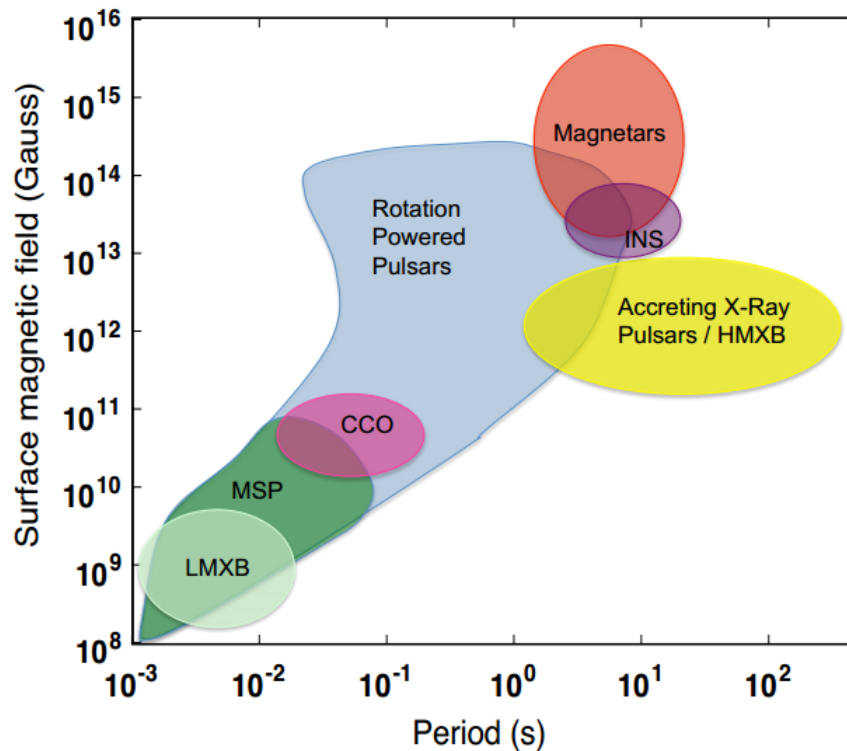
2.3 TIPOS E CARACTERÍSTICAS

As ENs podem ser separadas em algumas classes e subclasses, de acordo com sua fonte de energia primária e sua evolução rotacional: Pulsar Alimentado por Rotação (RPP - *Rotation-Powered Pulsars*) em que a rotação alimenta a emissão de ondas eletromagnéticas; Estrelas de Nêutrons Isoladas (INS - *Isolated Neutron Stars*), que possuem sua energia vinda do calor latente de sua matéria; Magnetares, que usam a energia de seu campo magnético; e as ENs que tem a energia derivada da acreção de matéria de uma companheira binária (HARDING, 2013).

Ainda, há a classe de sistemas binários de ENs, composto de pulsares que emitem raios-X, divididos em dois tipos: (i) com companhia binária de baixa massa (LMXB – *Low-*

Mass X-ray Binaries) e (ii) com companhia binária de alta massa (HMXB – *High-Mass X-ray Binaries*). Os LMXB são a classe progenitora dos chamados Pulsares de Milissegundos (MSP – *Millisecond pulsars*). Uma última classe importante são os Objetos Compactos Centrais (CCO – *Central Compact Objects*), que são uma fonte pontual de *soft* raios-X dentro do que foram supernovas e aparentam não emitir em outros comprimentos de onda (HARDING, 2013). As classes e subclasses estão representadas no diagrama de fase da Figura 3, de acordo com o campo magnético na superfície e o período.

Figura 3 – Diagrama das classes e subclasses das populações de EN (Campo magnético da superfície *versus* Período).



Fonte: Harding (2013).

Durante a explosão de uma estrela massiva, como já vimos, há uma grande perda de sua matéria e o surgimento de um objeto compacto em seu centro. Com a diminuição da massa, há também a diminuição significativa do momento de inércia I . Como consequência, o período de rotação pode atingir alguns milissegundos, com o aumento da velocidade angular ω por conta da conservação do momento angular ($L = I\omega$). Ainda, devido a diminuição das seções de área A , temos o aumento da densidade de linhas de campo magnético B que, por sua vez, podem atingir valores na ordem de 10^{12} G, devido a conservação do fluxo magnético - um dos efeitos de um campo magnético tão intenso é a modificação da estrutura atômica (LORIMER; KRAMER, 2012; MÉSZÁROS, 1992).

Estamos interessados no estudo de sistemas binários que envolvam uma ou duas ENs. No primeiro caso, podemos analisar os sistemas formados por uma EN e uma estrela comum, de alta ou baixa massa. No caso de sistemas LMXB, a estrela companheira tem massa $M < 5 M_{\odot}$,

podem ser estrelas de sequência principal, gigantes vermelhas ou anãs brancas; nestes casos, as ENs têm períodos de rotação entre 1 ms – 1 s e campos magnéticos em torno de $B \sim 10^8$ G, considerados fracos quando comparados a outras EN (FALKNER, 2013). Neste tipo de sistema binário, a matéria da estrela companheira é acreta devido ao avanço do Lóbulo de Roche² (HARDING, 2013). Quando a estrela companheira avança este limite de distância, a matéria pode fluir pelo ponto Lagrangiano interno, onde o potencial gravitacional é nulo, e então cair no campo gravitacional da EN, formando um disco de acreção (MARTÍNEZ-PAÍS; SHAHBAZ; VELÁZQUEZ, 2014).

Já em sistemas HMXB, as estrelas companheiras são massivas $M \geq 5 M_{\odot}$, apresentam campos magnéticos de ordem 10^{12} G e período $P \approx 1 - 1000$ s. Neste caso, a acreção de massa pode ocorrer de duas formas: pelo avanço do Lóbulo de Roche e por transferência de massa de vento. Da primeira forma, a camada atmosférica da estrela companheira ultrapassa o Lóbulo de Roche antes de sua fotosfera – o que ocorre apenas em estrelas massivas, que tem a camada atmosférica maior; a transferência de massa de vento, por sua vez, acontece quando a companheira apresenta fortes ventos solares, presentes apenas em estrelas massivas, e a matéria cai no campo gravitacional da estrela principal (MARTÍNEZ-PAÍS; SHAHBAZ; VELÁZQUEZ, 2014).

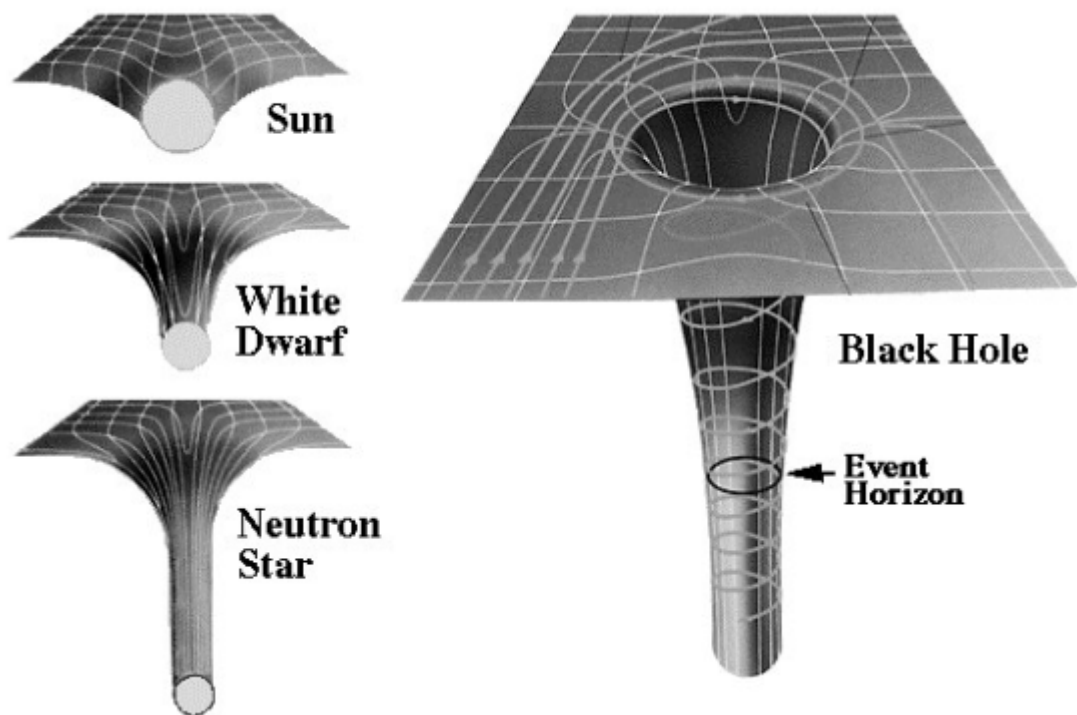
Por fim, temos os sistemas binários formados por duas ENs, os quais apresentarão características de acordo com a classe das ENs que os compõem. Ainda, a maior parte das informações sobre estes binários vêm de sinais de ondas gravitacionais, devido a sua alta deformação no espaço-tempo (ABBOTT et al., 2017).

² De acordo com a Física Clássica, o Lóbulo de Roche é a região do espaço ao redor da estrela em um sistema binário em que um corpo é gravitacionalmente vinculado a uma estrela. Avançando o Lóbulo de Roche, a matéria do corpo em órbita cai na estrela companheira (SAVONIJE, 1978).

3 RELATIVIDADE GERAL

A Teoria da Relatividade Geral foi proposta em 1915 pelo físico alemão Albert Einstein e trata-se de uma teoria de espaço, tempo e gravitação capaz de descrever o espaço-tempo curvo através da geometria Riemanniana (WALD, 2007). Assim, uma certa massa, ou quantidade de energia, irá determinar a geometria do campo e sua distribuição no contínuo espaço-tempo. Quanto maior for a interação entre matéria, energia e campo, mais perceptíveis serão os efeitos da RG, conforme ilustra a Figura 4 (SCHUTZ, 2007).

Figura 4 – Deformação do espaço-tempo.



Fonte: Juwig (2017).

As Estrelas de Nêutrons, nosso objeto de interesse, são corpos de densidades extremas, tal como núcleos atômicos gigantes, que distorcem o espaço-tempo de maneira significativa. O estudo destes objetos compactos é uma ótima aplicação da RG, portanto, nos é necessário um bom entendimento dos principais tópicos desta teoria (os cálculos que levam aos resultados da seção 3.1, subseção 3.1.1 e da seção 3.2 estão detalhados no Apêndice A).

3.1 ASPECTOS GERAIS

Com a Teoria da Relatividade Especial, publicada em 1905, e a Teoria da Relatividade Geral, publicada em 1915, Einstein trouxe mudanças significativas para a Física, como a unificação do espaço e do tempo, a velocidade da luz como um limitante superior de movimento e,

também, a gravidade como um efeito geométrico, causado pela matéria e energia que distorcem o espaço-tempo local.

Assim, um deslocamento infinitesimal no espaço-tempo pode ser representado pelo elemento de linha:

$$ds^2 = -c dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3.1.1)$$

que é invariante sob as transformações de Lorentz, isto é, independe do observador (SCHUTZ, 2007). Porém, a Equação 3.1.1 só é válida em referenciais inerciais (com movimentação uniforme). Ao utilizar referenciais não-inerciais, devemos reescrever a Equação 3.1.1, pois os quadrados infinitesimais não serão mais perfeitos para as coordenadas (POISSON; WILL, 2014). Então, de forma mais geral, podemos reescrever a Equação 3.1.1 como:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (3.1.2)$$

em que $g_{\alpha\beta}$ é o tensor métrico do espaço-tempo e depende das coordenadas dx^α , com $\alpha = 0, 1, 2, 3$ (o índice 0 representa a coordenada temporal, $x^0 = ct$, e os índices 1, 2, 3 as coordenadas espaciais) (SCHUTZ, 2007; SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

Mudanças no tensor métrico descrevem a geometria local do espaço-tempo, ou seja, o campo gravitacional, em função das coordenadas dx^α . Ainda, temos que o tensor da métrica é simétrico, ou seja, $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, e possui 10 componentes, *a priori*, arbitrárias (DERUELLE; UZAN, 2018). A simetria de $g_{\alpha\beta}$ implica na existência de um tensor contravariante $g^{\alpha\beta}$ que satisfaz a relação:

$$g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta, \quad (3.1.3)$$

sendo δ_β^α o delta de Kronecker. A relação é útil para levantar ou abaixar os índices, desde que seja no mesmo sistema de coordenadas, conforme a necessidade da descrição (POISSON; WILL, 2014).

A curvatura do espaço-tempo é descrita pelo chamado tensor de Riemann, definido por:

$$R_{\lambda\mu\nu}^\kappa = \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa + \Gamma_{\lambda\nu}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\kappa - \Gamma_{\lambda\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\kappa, \quad (3.1.4)$$

em que $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ são os símbolos de Christoffel e podem ser definidos a partir da métrica como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (\partial_\nu g_{\kappa\mu} + \partial_\mu g_{\kappa\nu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}). \quad (3.1.5)$$

Conforme a teoria da RG, qualquer distribuição de massa (ou energia) curva o espaço-tempo e o tensor de Riemann $R_{\lambda\mu\nu}^\kappa$ nos dá a medida dessa curvatura. O tensor de Riemann possui 20 componentes independentes não nulas (quando $R_{\lambda\mu\nu}^\kappa = 0$ temos um espaço-tempo plano, plenamente descrito pela geometria euclidiana) (SCHUTZ, 2007; SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

Consideremos que uma distribuição de massa, ou energia, pode ser descrita por um tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$. Para um fluido perfeito (com pressão isotrópica e sem viscosidade),

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (3.1.6)$$

em que $p(x^\lambda)$ é a pressão local, $\rho(x^\lambda)$ é a densidade de energia local e $u^\nu(x^\lambda)$ é a quadri-velocidade de um elemento infinitesimal do fluido, descrito pelo vetor x^λ (SCHUTZ, 2007; SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

Fazendo uma relação direta entre o campo gravitacional e a radiação no Universo, por meio do tensor de curvatura e do tensor de energia-momento, obtemos:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.1.7)$$

também conhecida como as Equações de Campo de Einstein, em que a quantidade $G_{\mu\nu}$ é chamada de tensor de Einstein; o tensor de Ricci é obtido a partir da contração do tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu} = g^{\sigma\rho}R_{\sigma\mu\rho\nu}, \quad (3.1.8)$$

o escalar de Ricci (ou escalar de curvatura) vem da contração do tensor de Ricci:

$$R = g^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}, \quad (3.1.9)$$

e κ é a constante de acoplamento, comumente utilizada como unitária, mas é definida por:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (3.1.10)$$

Caso tenhamos um tensor de Ricci nulo, ou seja, $R_{\mu\nu} = 0$, significa que não há distribuição de matéria em um determinado ponto no espaço-tempo, porém, não implica na nulidade do tensor de Riemann (DERUELLE; UZAN, 2018). Mesmo com todas as definições apresentadas, a Equação 3.1.7 é de difícil resolução, pois são não-lineares, hiperbólicas e envolvem derivadas parciais. Assim, uma proposta de solução, ainda que idealizada, nos é de grande ajuda.

3.1.1 Equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

As equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, também conhecidas como TOV, são umas das mais famosas soluções para as equações de campo de Einstein, levam em consideração uma estrela esférica, estática e relativística (WALD, 2007; SCHAFFNER-BIELICH, 2020). São elas:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon, \quad (3.1.11)$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{2(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}, \quad (3.1.12)$$

combinando as Equações 3.1.11 e 3.1.12:

$$\frac{dp}{dr} = -(\varepsilon + p) \frac{2(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}. \quad (3.1.13)$$

em que r a coordenada radial, ε a densidade de energia, $m(r)$ a quantidade de massa contida no raio r , v uma função da métrica e $p(r)$ a pressão.

As Equações TOV, Equação 3.1.11, Equação 3.1.12 e Equação 3.1.13 caracterizam a estrutura interna de uma estrela formada por matéria compacta e que obedeça os requisitos da solução (esférica e estática). Para finalizar a descrição deste tipo de estrela, é necessária a inserção de uma equação de estado da matéria que relacione pressão e densidade de energia – este tópico será abordado no Capítulo 5 (SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

3.2 SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

Em 1916, o físico alemão Karl Schwarzschild propôs uma solução para um caso particular das Equações de Campo de Einstein (Equação 3.1.7): um campo gravitacional causado por um objeto com simetria esférica e sem carga, com a constante cosmológica e momento angular nulos. Na métrica de Schwarzschild, o elemento de linha é descrito em coordenadas esféricas ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.2.1)$$

em que m é a chamada massa geométrica, estabelecida como $m = GM/c^2$ (DERUELLE; UZAN, 2018; SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

Essa solução computa corretamente os valores para o campo gravitacional esfericamente simétrico produzido por um objeto de massa M e raio R , fora de sua superfície e no vácuo. Além disso, a solução é assintoticamente plana, isto é, quando $r \rightarrow \infty$ obtemos um espaço-tempo plano (DERUELLE; UZAN, 2018; D'INVERNO, 1992).

Nota-se que na solução de Schwarzschild aparecem duas singularidades, uma em $r = 0$ e outra em $r = 2m$. A singularidade em $r = 0$ é irremovível e representa pontos no espaço-tempo em que a Física que conhecemos ainda não pode explicar. Já na singularidade $r = 2m$ temos o chamado raio de Schwarzschild, R_S , que define a superfície mínima para que uma determinada quantidade de matéria colapse em um buraco negro (D'INVERNO, 1992). Desta forma, temos que R_S é dado por:

$$R_S = 2m = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.2.2)$$

Há de se notar uma possível inconsistência na utilização da solução de Schwarzschild para a descrição de EN, uma vez que estes objetos apresentam alta rotação. Em 1963, o matemático neozelandês Roy Kerr propôs uma métrica que considera efeitos de rotação na deformação dos corpos, assim abandonando a simetria esférica considerada anteriormente. A alta rotação

das Estrelas de Nêutrons faz com que sua forma seja oblata. Para definir corretamente essa deformação, é necessário conhecer a Equação de Estado que a descreve, o que ainda é pouco conhecida para as EN. Portanto, utilizar a métrica de Kerr apenas acrescentaria complexidade a um estudo que a métrica de Schwarzschild descreve muito bem (FALKNER, 2013).

Parte II

Sistemas binários formados por Estrela de Nêutrons e companheira comum – Acreção de Matéria.

4 PARTE II - ACREÇÃO DE MATÉRIA

O presente capítulo corresponde ao artigo *A Method to Fit Phase Diagrams of Slow-Rotation Pulsars with Accretion Columns*, publicado na revista *MDPI Galaxies* em janeiro de 2023. Este artigo (Anexo A) foi desenvolvido pelo grupo de pesquisa em Astrofísica Relativística Computacional da UDESC, com participação da autora, em colaboração com o INPE, UFES e USP (SILVA et al., 2023).

Aqui, serão apresentados os resultados obtidos, de forma resumida, por meio da comparação entre os dados simulados e os dados coletados da fonte¹. Este capítulo começa com a caracterização do problema, em seguida são relatados os dados da fonte, então os tratamentos estatísticos utilizados e, por fim, os resultados obtidos.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA

Em toda essa parte, trataremos de sistemas binários formados por uma Estrela de Nêutrons e uma companheira comum. Como já vimos, temos dois tipos de configurações para esses binários, que dependem da massa da estrela companheira: de baixa massa (LMXB) e alta massa (HMXB).

A acreção de massa pela EN pode acontecer de duas formas: pelo avanço do Lóbulo de Roche e por transferência de massa de vento. Quando a estrela se aproxima o suficiente da EN para possibilitar a acreção, a matéria cedida é canalizada ao longo das linhas de campo magnético até um de seus polos – que serão chamados, a partir de agora, de *hot-spots* – e é conduzida até a superfície da EN. A forma como ocorre a conexão da matéria com as linhas de campo magnético é essencial para determinar o aspecto da coluna de acreção, nosso objeto de interesse (MÉSZÁROS, 1984).

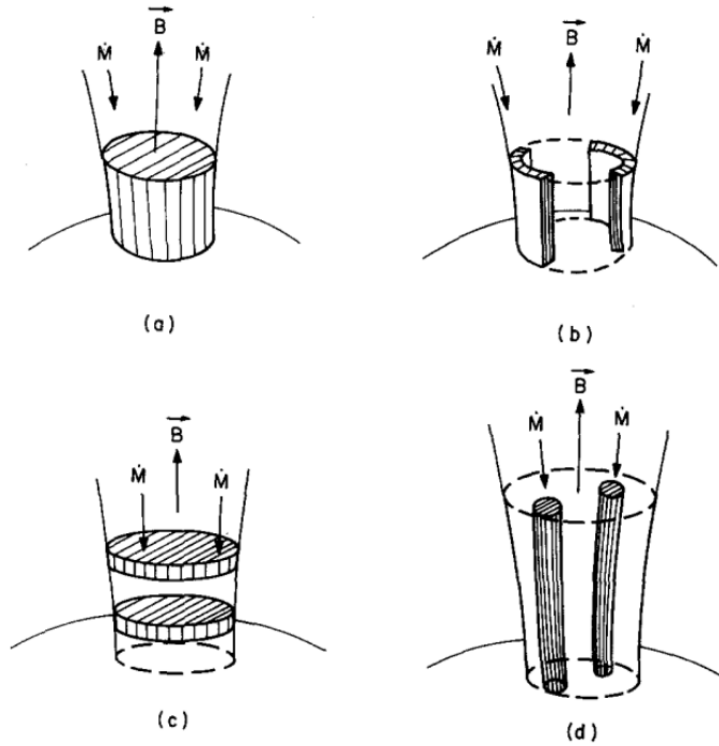
O fluxo da massa pode tomar diversas formas: considerando uma conexão estável, espera-se que a coluna de acreção tenha o formato de um funil, vazio ou cheio, como mostra a Figura 5(a-b); com uma conexão instável, podemos ter apenas fragmentos deste funil – quando a instabilidade ocorre próxima aos *hot-spots*, a transferência de massa pode acontecer em forma de panquecas, Figura 5(c), ou espaguete Figura 5(d) (MÉSZÁROS, 1984).

O formato da coluna de acreção vai depender da forma de transferência de massa: o funil cheio é relacionado com a queda radial da matéria com simetria esférica, que ocorre na acreção pelo avanço do Lóbulo de Roche; e as colunas que apresentam segmentos do funil são relacionadas com a transferência de massa de vento (BASKO; SUNYAEV, 1976).

Quando tratamos de estrelas de alta luminosidade, com $L_x \sim 10^{36} - 10^{38}$ ergs/s, o fluxo de radiação supera a pressão do gás e a matéria em acreção sofre um choque, dominada pela radiação, ao se aproximar da superfície da EN. Assim, nos *hot-spots*, temos os chamados montes térmicos, onde a maioria dos fótons emitidos pela coluna são fabricados. Estes fótons se afastam

¹ Mais informações podem ser encontradas na dissertação de mestrado de um dos autores, Me. Rodrigo R. da Silva. Disponível em udesc.br/cct/ppgf/publicacoes/21-24 Acesso em 17 fev. de 2023

Figura 5 – Possíveis geometrias para coluna de acreção: (a) funil cheio, (b) funil oco, (c) panquecas e (d) espaguetes.



Fonte: Mészáros (1984).

da estrela pela onda de choque e depois são emitidos pela coluna de acreção. Durante esse processo, a radiação energética freia as partículas até que repousem na superfície estelar, esse processo é representado na Figura 6 (BECKER; WOLFF, 2005; BECKER; WOLFF, 2007).

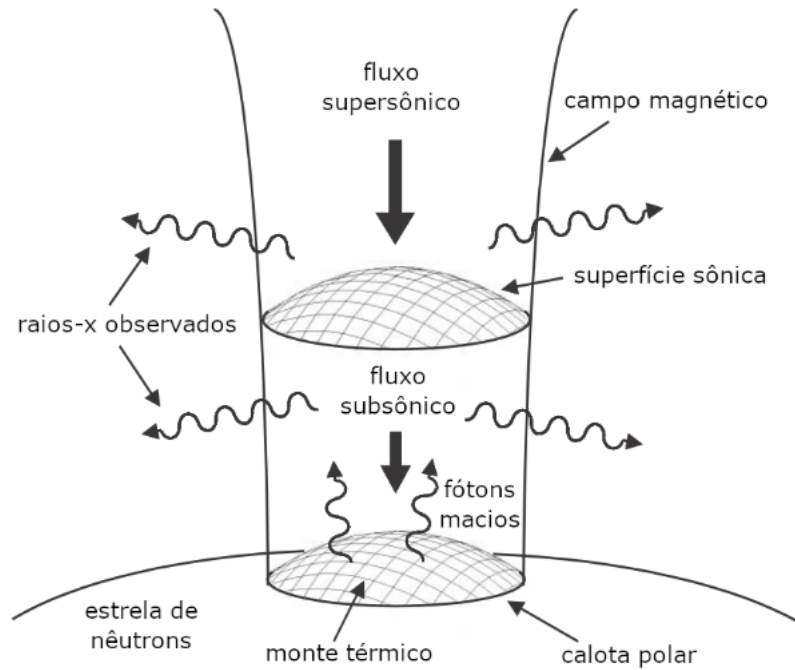
O espalhamento desses fótons e sua emissão pelas paredes das colunas formam o que chamaremos de *fan beam*. Já quando os fótons são emitidos pelas linhas de campo magnético, o que acontece quando a taxa de acreção é pequena, é chamado *pencil beam* – a Figura 7 ilustra a formação das colunas de acreção e as formas de emissão de fótons (ROTHSCHILD et al., 2014).

Em análises recentes, Lima et al. (2020) mostraram que um modelo de EN com campo magnético multipolar produz um fluxo luminoso mais fidedigno com os dados da fonte SGR J1745-2900; uma possível configuração desses *hot-spots* é representada na Figura 8 (LIMA et al., 2020). O mesmo resultado foi encontrado por Bilous et al. (2019), quando utilizado dados do NICER² da fonte PSR J0030+0451 (BILOUS et al., 2019).

O modelo tratado determina quais fótons emitidos pelos *hot-spots* chegam no observador. Conforme tamanho e localização dos *spots*, o modelo utiliza a métrica ao redor da estrela para determinar seu parâmetro de impacto no observador. Utilizando a métrica de Schwarzschild, Beloborodov montou esse modelo e desenvolveu uma aproximação das equações de movimento,

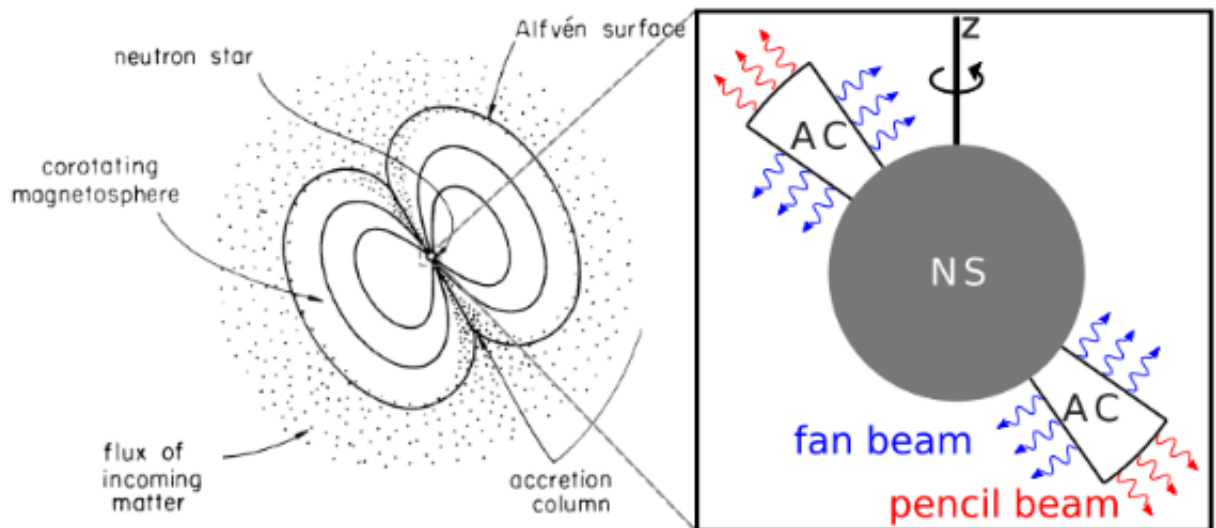
² NICER, sigla em inglês para *Neutron Star Interior Composition ExploreR* é um telescópio da NASA a bordo da Estação Espacial Internacional. Começou a operação em 2016, ainda ativa, com o intuito de estudar mais profundamente as Estrelas de Nêutrons e toda a Física que as acompanha. Mais informações em heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/nicer/. Acesso em 15 dez. 2023.

Figura 6 – Ilustração da emissão de raios-X pelas colunas de acreção.



Fonte: Becker e Wolff (2005).

Figura 7 – À esquerda: acreção de matéria nos polos magnéticos de uma EN. À direita: formas de emissão de fótons pelas colunas de acreção.

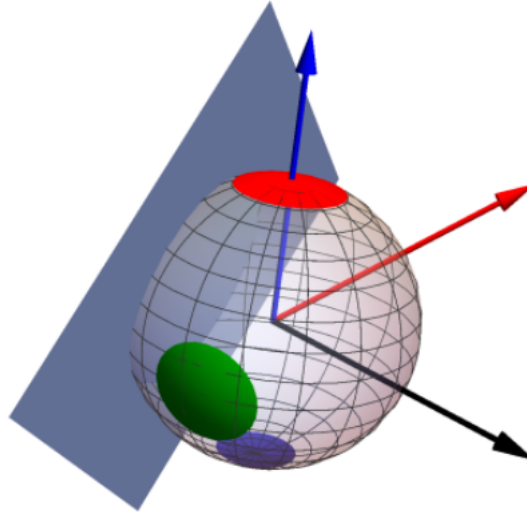


Fonte: Falkner (2013).

considerando os efeitos do *redshift* gravitacional (BELOBORODOV, 2002). Após isso, junto com Poutanen, desenvolveram um modelo para pulsares de milissegundo, considerando também o efeito Doppler dado pela rotação da estrela e o atraso temporal devido as diferenças no comprimento das trajetórias (POUTANEN; BELOBORODOV, 2006).

Ainda, Falkner (2013) desenvolveu uma simulação para colunas de acreção com forma de funil cheio, em que ele utiliza o modelo de Beloborodov para calcular o perfil de pulso emitido

Figura 8 – Provável configuração de *hot-spots* que melhor ajusta o fluxo da fonte SGR J1745-2900. Na figura, a seta azul representa o eixo polar do *spot* vermelho, a seta vermelha o eixo de rotação e a seta preta a direção do observador; o plano que corta a EN representa o ângulo máximo de visão.



Fonte: Lima et al. (2020).

por ENs. Ele enfatiza em seu trabalho a necessidade de se considerar a trajetória do fóton quando este se aproxima da estrela antes de se afastar. As colunas de acreção também possibilitam o aumento da visibilidade dos *spots* (FALKNER, 2013). A simulação de Falkner (2013) não foi confrontada com dados experimentais.

Neste trabalho, reproduzimos a simulação de Falkner (2013) e comparamos com os dados obtidos da fonte, descrita a seguir. Ainda, foram adotadas colunas de acreção em forma de funil cheio com emissão de corpo negro, emitindo, ao mesmo tempo, *fan beam* e *pencil beam*.

4.2 DADOS DA FONTE

A fonte estudada é a 1A0535+262, um sistema binário de raios-X, formado por uma EN e uma estrela comum, a HDE245770. Tem período orbital de $P_{orb} = 111,1 \pm 0,3$ d, período de rotação de $P \sim 103$ s (ou seja, é uma HMXB) e emissão de raios-X com luminosidade $L_x \leq 10^{35} \sim 10^{36}$ erg/s (HARRISON et al., 2013). Essa HMXB já foi estudada por Caballero et al. (2011), com uma decomposição dos perfis de pulso em séries de Fourier, as colunas de acreção foram consideradas ocas, de altura $h = 0,5$ km e foram utilizados valores fixos para massa e raio, $M = 1,4 M_{\odot}$ e $R = 10$ km (CABALLERO et al., 2011).

Os dados foram retirados do arquivo de dados da missão NuSTAR, onde as observações foram feitas em 26 de dezembro de 2018, por 33 horas – com exposição de cerca de 15 horas (ObsID 90401370001). Tais dados foram tratados de acordo com os procedimentos padrão da NuSTAR *Data Analyses Software* (NUSTARDAS pipeline v2.0), com os arquivos de calibragem

retirados da CALDB versão 20210427. A curva de luz foi retirada de uma região de 75 arcseg, centrada na posição da fonte, e o fundo foi retirado a partir de uma região livre de fontes, no mesmo detector, de 95 arcseg; ainda, foi feita uma correção de baricentro com a FTOOL barycorr.

Como todos dados reais utilizados no meio científico, é necessária a utilização de processos estatísticos, para que se otimize os dados – minimizando erros associados tanto à coleta quanto ao telescópio. Os dados utilizados foram aprimorados com dois métodos estatísticos, descritos a seguir.

4.3 MÉTODOS ESTATÍSTICOS

4.3.1 Algoritmo Genético

O Algoritmo Genético (AG) é um método estocástico de otimização, ou seja, ele otimiza um conjunto de variáveis aleatórias que representam o desenvolvimento de um sistema com o passar do tempo. Sua construção foi inspirada na teoria da evolução e seu método de seleção natural, assim, o melhor código é aquele com fenótipo capaz de sobreviver a todas alterações impostas (LIMA et al., 2020; WIRSANSKY, 2020).

Para a analogia, consideramos que o cromossomo é dado pelo conjunto de todos os parâmetros livres usados, capazes de criar um pulso teórico para a estrela. Os genes são determinados pelos parâmetros individuais de cada cromossomo, por exemplo: massa M e raio R são dois dos genes, que passarão por evoluções, cruzamentos e mutações, até chegar no melhor conjunto de parâmetros.

O AG é tipicamente composto por seis passos:

1. Inicialização: gerar uma população de soluções (cromossomos);
2. Evolução do fenótipo: cálculo das melhores soluções de cada modelo;
3. Seleção das melhores soluções;
4. Reprodução: os genes selecionados anteriormente serão recombinados;
5. Mutação: genes são selecionados e modificados aleatoriamente; e,
6. Repor a população.

A cada vez que os procedimentos entre os passos 2 e 6 são realizados, temos uma geração. Os melhores resultados são obtidos com uma exaustiva repetição desses passos, ou seja, uma longa análise geracional (LIMA et al., 2020; WIRSANSKY, 2020).

A avaliação dos fenótipos é realizada pela Qualidade de Ajustes (GoF - *Goodness-of-Fit*), expressa pelo quadrado da diferença entre o fluxo simulado (F^{sim}) e o observado (F^{obs}), ou seja,

$$\chi^2 = \sum_k \left[F_k^{\text{sim}} - F_k^{\text{obs}} \right]^2. \quad (4.3.1)$$

Quanto menor o valor de χ^2 mais próximo é o fluxo simulado do observado e as mutações servem para evitar o surgimento de um mínimo local. O objetivo do AG é minimizar χ^2 o máximo possível, contamos $\chi^2 = 0$ como um caso ideal (WIRSANSKY, 2020).

Assim, o AG nos permite chegar a valores muito próximos da função distribuição de probabilidades. Uma vez que o valor χ^2 é minimizado, o conjunto de parâmetros (cromossomos) tem papel fundamental para que as distribuições de probabilidade convirjam no próximo passo da análise estatística.

4.3.2 Método Monte Carlo Markov Chains

O método Monte Carlo Markov Chains (MCMC) é uma análise estatística centrada no teorema de Bayes que, de modo geral, pode ser expresso da seguinte forma:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \quad (4.3.2)$$

em que $P(A|B)$ é a probabilidade de ocorrer o evento A dado que o evento B ocorreu, $P(B|A)$ a probabilidade de o evento B ocorrer dado que o evento A ocorreu, $P(A)$ a probabilidade de ocorrer o evento A e $P(B)$ é a probabilidade de ocorrência do evento B (HOGG; FOREMAN-MACKEY, 2018).

Foi desenvolvido por Thomas Bayes (1702-1761), quando estudava a noção de probabilidade inversa, conhecida atualmente como probabilidade posterior. O teorema de Bayes determina a probabilidade da ocorrência de um evento em relação a um conhecimento prévio, que pode ser relacionado ao dado evento.

Observando a Equação 4.3.2 sob uma visão de algoritmo, temos que $P(A)$ é chamado de *prior*, $P(A|B)$ de *likelihood*. Assim, *prior* é a informação que temos do parâmetro de antemão e *likelihood* é como achamos que nossas amostras estão distribuídas pelo conjunto de parâmetros (HOGG; FOREMAN-MACKEY, 2018). Ainda, quando geramos um conjunto de amostras, em que θ' é a mais recente, seguimos três passos:

1. Amostragem: um conjunto de parâmetros θ' é retirado da função distribuição de probabilidades (*proposal*, determinado pelo AG);
2. Avaliação: é verificado se o valor θ' é o mais provável, pela razão $f(\theta')/f(\theta_k)$;
3. Seleção: se θ' é o valor mais provável, temos $\theta_{k+1} = \theta'$, caso contrário, há a probabilidade de aceitar θ' ou não.

em que $f(\theta) = \text{likelihood} \times \text{prior}$. Esses passos são repetidos até que o valor do parâmetro θ pare de variar (HOGG; FOREMAN-MACKEY, 2018).

É importante notar que o AG é necessário pela dificuldade de gerar um conjunto *proposals* apropriado para iniciar o MCMC. Caso o conjunto inicial fosse inserido manualmente, poderíamos sujeitar a análise a um viés inadequado; ainda, o AG nos fornece uma distribuição que evolui rapidamente com o tempo. Sendo assim, os dois métodos se complementam e nos permite uma análise mais completa.

4.4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na simulação, foram consideradas duas colunas de acreção independentes, de formato cônico e alturas fixas de $h = 1,0$ km. O ajuste do programa nos sugere $M = 1,53^{+0,52}_{-0,40} M_{\odot}$ e $R = 12,11^{+1,14}_{-0,87}$ km, com o nível de confiança de 1σ (68%) – os outros parâmetros podem ser observados na Tabela 1. Comparando os resultados da simulação com os dados da fonte, obtemos a Figura 9.

Tabela 1 – Melhores parâmetros considerando duas colunas de acreção (os parâmetros que envolvem ângulos são dados em graus).

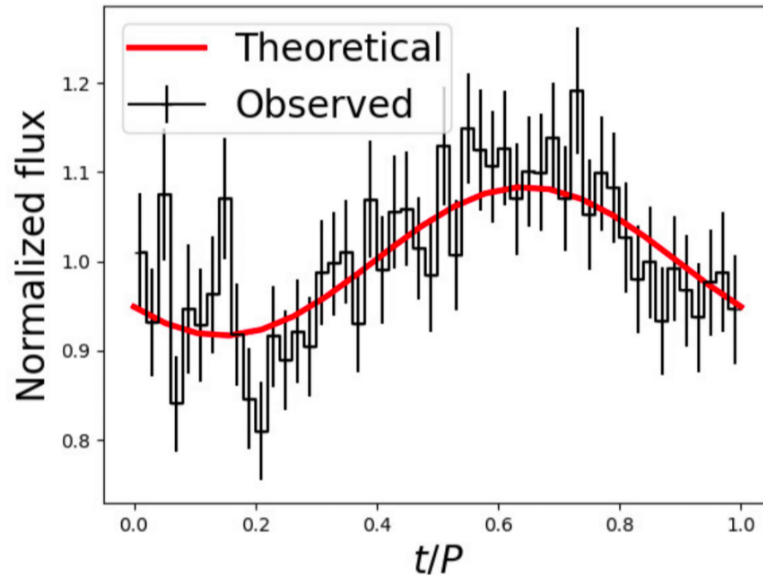
$M(M_{\odot})$	$1.53^{+0.52}_{-0.40}$
$R(\text{km})$	$12.11^{+1.14}_{-0.87}$
i	$4.93^{+0.96}_{-1.22}$
θ_1	$50.4^{+2.3}_{-2.0}$
θ_{01}	$72.3^{+2.1}_{-2.0}$
$T_1(\text{keV})$	$0.404^{+0.047}_{-0.066}$
θ_2	$321.1^{+1.7}_{-1.7}$
θ_{02}	$48.0^{+1.1}_{-1.2}$
$T_2(\text{keV})$	$59.31^{+0.99}_{-0.98}$
ϕ_2	$0.955^{+0.035}_{-0.154}$

Fonte: Silva et al. (2023).

Foram realizadas comparações para diferentes ângulos de semi-abertura da coluna θ_0 , como 5° , 10° , 20° e 30° , mantendo a altura $h = 1,0$ km. Observou-se que aberturas maiores implicam em mais *pencil beams*, devido ao aumento da área da coluna. Por conta da rotação da estrela ao longo da fase, algumas vezes os feixes de fótons são emitidos na direção do observador (LOS, sigla em inglês para *line of sight* ou linha de visada, em tradução livre), aumentando assim a fração pulsada com o distanciamento entre o fluxo mais alto e o mais baixo.

A Figura 10 ilustra a importância de considerar *fan beams* em colunas de altura maior ou igual a $h = 1,0$ km. Essa contribuição para o fluxo depende diretamente da forma da coluna, como pode-se perceber nas curvas inferiores da Figura 10. Isso ocorre porque, como definido

Figura 9 – Diagrama de fases para o conjunto dos melhores parâmetros calculados pelo MCMC.



Fonte: Silva et al. (2023).

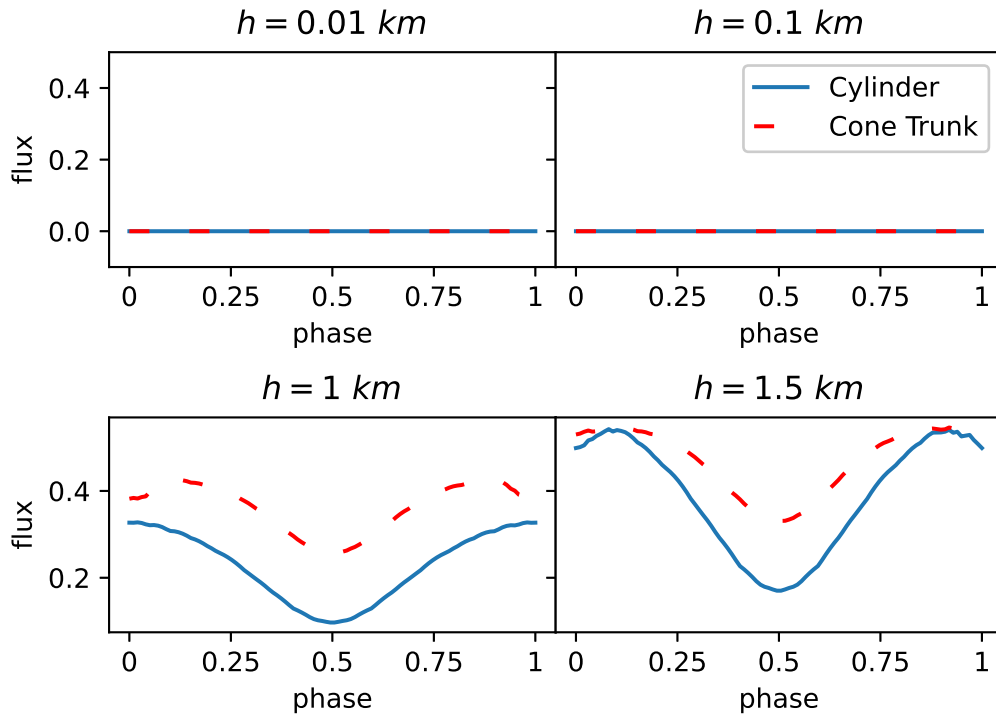
aqui, ambos tem o mesmo tamanho de base, ou *spot*, e assim a coluna em forma de cone tem mais superfície de emissão que a coluna cilíndrica.

De modo geral, a simulação desenvolvida gerou um perfil de pulso para uma EN com duas colunas de acreção, dado um conjunto de parâmetros $(M, R, f, i, \theta_0, \theta, \phi, h, T)$, sendo os últimos quatro para a forma de cada coluna. Foram observadas algumas características do perfil de pulso para essa emissão, como o aumento do fluxo devido ao *fan beam* e a mudança devido à geometria escolhida para a coluna.

Com a ajuda dos algoritmos de amostragem, um conjunto de parâmetros para a EN e as colunas de acreção foram restringidos para a fonte 1A 0535+262. Os melhores parâmetros desta fonte estão dispostos na Tabela 1 – lembrando que a altura das colunas foram fixadas em $h = 10$ km. Esses parâmetros pouco tem a ver com os obtidos por Caballero et al. (2011) e isso se deve às diferenças na geometria escolhidas para as colunas.

É importante que se note a boa concordância dos dados calculados (em vermelho) com os dados da fonte (em preto) na Figura 9 e, ainda, que os dados de massa e raio encontrados estão dentro dos intervalos esperados pela literatura correspondente (massa entre 1 e $2,2 M_{\odot}$ e raio entre 8,9 e 13,2 km) – indicando que o modelo desenvolvido está em conformidade com os dados reais (ALSING; SILVA; BERTI, 2018; MILLER et al., 2021; RAAIJMAKERS et al., 2021).

Figura 10 – *Fan beams* para colunas de diferentes alturas h . As linhas azuis correspondem a colunas cilíndricas e as linhas vermelhas tracejadas a colunas cônicas. Foram considerados: $M = 1,4 M_{\odot}$, $R = 12$ km, $i = 90^{\circ}$, $P = 1$ s, $\theta_{10} = 15^{\circ}$, $\theta_1 = 45^{\circ}$, $\phi_1 = 180^{\circ}$ e $T_1 = 0.7$ keV.



Fonte: Silva et al. (2023).

Parte III

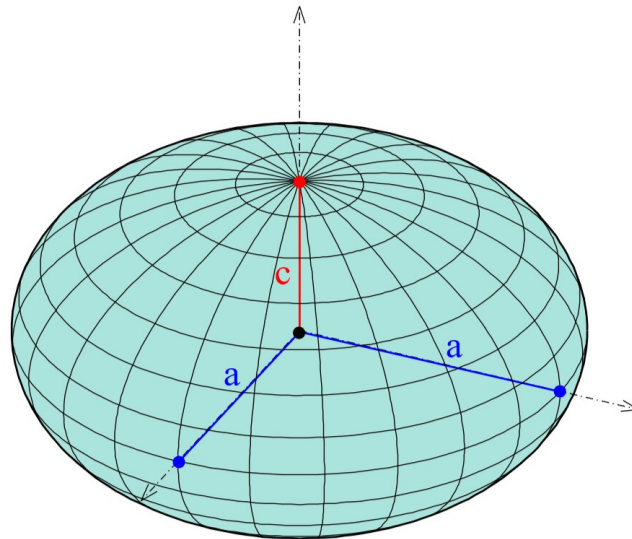
Sistemas binários de Objetos Compactos – Números de Love e Estrelas de Quarks.

5 PARTE III – COALESCÊNCIA

Agora, trataremos de sistemas binários formados por duas Estrelas de Nêutrons, cada qual com suas propriedades. Estes binários são de nosso interesse pela particularidade de seu comportamento, já que não são sistemas estáveis. Como já vimos na seção 2.2, as ENs são o resultado da morte de estrelas massivas que, após seu colapso, não tem mais produção de energia nuclear. Assim, o combustível remanescente é suficiente apenas para manter a rotação da estrela em torno de seu eixo e não gera mudanças significativas na superfície – as EN são separadas de acordo com suas características, como descrito na seção 2.3 (ABDELSALHIN, 2019; GITTINS; ANDERSSON; PEREIRA, 2020).

De acordo com as previsões da RG, esses binários perdem energia com emissão de Ondas Gravitacionais (OG) e, para manter o sistema coeso, há a diminuição do raio de órbita – por conservação do momento angular, a velocidade angular dos corpos aumenta. Com a proximidade dos corpos, há uma mudança na geometria dos componentes do sistema: cada estrela responde ao aumento do potencial gravitacional gerado pela outra, tomando um formato oblato (como mostra a Figura 11). As mudanças, cada vez mais consideráveis, na geometria das estrelas indicam que o sistema caminha para a coalescência, que, dependendo da massa total do sistema, pode gerar uma EN massiva ou um Buraco Negro (HINDERER, 2008; CHATZIIOANNOU, 2020).

Figura 11 – Esferoide oblato.



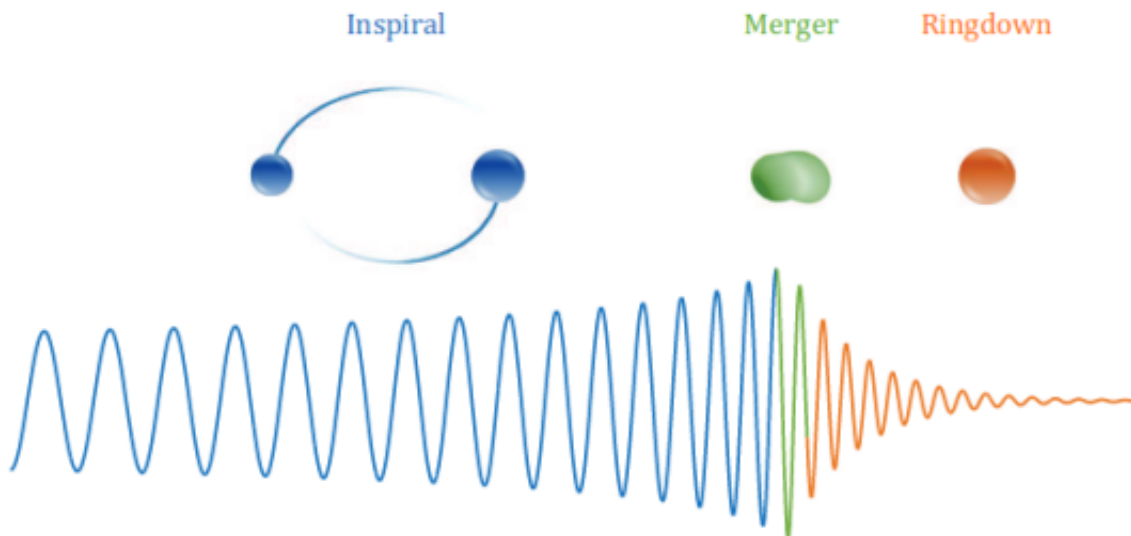
Fonte: Gregory Leal, 2017.

A interação entre as estrelas, antes do colapso, que resulta na deformação das superfícies é chamada de Efeito de Maré e, ao se desenvolver uma estrutura teórica para descrevê-lo, surgem os Números de Love - detectáveis nas OG e proporcionais à deformação. Os Números de Love são grandezas adimensionais e relacionam os momentos de multipolo e de maré, além de serem intermediadores da perturbação externa e deformação interna da estrela. Matematicamente, a deformação de corpos devido a um potencial externo é descrita por momentos de multipolo de

massa, gerados por conta da perturbação causada na estrela. Sob o regime relativístico, podem ser divididos em dois tipos: elétricos, que vêm das componentes pares da perturbação e magnéticos, que vem das componentes ímpares e não possuem análogos clássicos (ABDELSALHIN, 2019; CHATZIIOANNOU, 2020; HINDERER, 2008; MOTTA, 2020). Trataremos apenas dos Números de Love do tipo elétrico.

O avanço dos interferômetros ópticos terrestres, como o LIGO e Virgo, possibilitou o melhor entendimento dos eventos de coalescência de objetos compactos através da análise das OG emitidas. Entre os eventos detectados, destacam-se dois: GW170817 e GW190425, que têm sua origem na fusão de binários de Estrelas de Nêutrons. Pela análise do sinal, é possível observar as etapas do processo de fusão: *inspiral*, *merger* e *ringdown*¹, inclusive a quantificação da deformação dos corpos (ABBOTT et al., 2017; NAGAR et al., 2018; CHATZIIOANNOU, 2020; MOTTA, 2020). A Figura 12 ilustra as três fases da fusão de OCs.

Figura 12 – Representação das três etapas de fusão de objetos compactos. *Inspiral*, quando os objetos apenas espiralam em torno de um centro da massa; *merger* quando ocorre a fusão dos OCs; e o *ringdown*, etapa final da coalescência, com o amortecimento do objeto remanescente.



Fonte: Cornell University - Department of Astronomy (2017).

Este trabalho não trata da coalescência em si, mas do efeito de maré que acomete as estrelas durante a fase do *inspiral*, quando as EN estão perto o suficiente para terem números de Love expressivos e detectáveis mas ainda longe da fusão final. A seguir, será rapidamente tratado o efeito de maré em objetos clássicos e, logo depois, o efeito de maré em ENs; depois, é discutida a existência de Estrelas de Quarks, com uma proposta de modelagem. No Capítulo 6 serão apresentados os métodos computacionais empregados, os testes e os resultados encontrados.

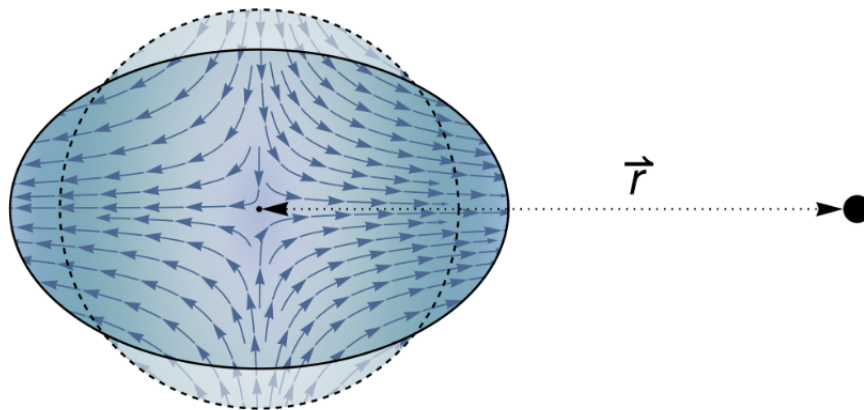
¹ As fases da coalescência de objetos compactos serão tratadas aqui por seus termos na língua inglesa, devido à dificuldade de tradução completa para a língua portuguesa.

5.1 EFEITO DE MARÉ CLÁSSICO

A tentativa de entendimento das marés remontam tempos antigos: por volta de 450 A.E.C, Heródoto observou e registrou as mudanças de nível do Mar Vermelho; cem anos depois, Aristóteles relacionou a movimentação marítima com a Lua; posteriormente, no início da era cristã, Plínio relacionou a movimentação da maré com as diferentes fases da Lua. Porém, o entendimento físico das marés, como conhecemos hoje, iniciou com o desenvolvimento da Teoria da Gravitação Universal de Isaac Newton, no século XVII (SAMPAIO, 2009; LOPES, 1996).

Pode-se caracterizar a maré como a resposta de um corpo ao potencial gravitacional gerado por um corpo externo. Na Terra, a maré é a resposta ao potencial gravitacional gerado, principalmente, pela Lua. Essa resposta se dá em forma de deformação: o corpo que sofre o efeito de maré torna-se mais oblato na direção do corpo que causa a maré, como podemos observar na Figura 13 (SAMPAIO, 2009).

Figura 13 – Representação da deformação de maré em um corpo, devido a uma fonte pontual de potencial gravitacional, colocada à distância r . O corpo originalmente esférico é esticado em direção a fonte pontual, passando ao formato oblato.



Fonte: Abdelsalhin (2019)

O efeito de maré na Terra é percebido pela alteração no nível dos mares, porém, a deformação ocorre também na superfície rochosa e na atmosfera do planeta. Em 1909, Augustus E. H. Love publicou o artigo *The yielding of the Earth to disturbing forces* (ou A submissão da Terra às forças perturbadoras, em tradução livre), em que estudava a rigidez da Terra e as hipóteses de sua constituição (LOPES, 1996; LOVE, 1909).

A partir de observações diárias, Love determinou dois parâmetros adimensionais que medem a rigidez de corpos celestiais e a suscetibilidade à deformação em resposta ao efeito de maré, hoje chamados de Números de Love. São eles: h , a razão entre a maré do corpo e a altura da maré de equilíbrio estático, ou seja, o deslocamento vertical-radial (para a Terra, $0 < h < 1$); e k , a dilatação cúbica, ou a força reativa causada pelo potencial deformante ($k = 0$ para corpos rígidos). Para a Terra, temos $h \approx 3/5$ e $k \approx 4/15$ (LOVE, 1909).

Com os avanços na área da Física, foi descoberto que a deformação causada pelo efeito de maré não se limita apenas à Terra, mas afeta todos os corpos celestes. Essa deformação é diretamente influenciada pela distância entre o corpo celeste e o agente causador da maré, bem como pela sua constituição. Na próxima seção, examinaremos como até mesmo os corpos ultradensos são suscetíveis a deformações significativas devido ao efeito de maré.

5.2 EFEITO DE MARÉ EM ESTRELAS DE NÊUTRONS

É amplamente conhecido que os sistemas binários de Estrelas de Nêutrons são extremamente complexos devido à natureza de seus componentes. As EN possuem campos gravitacionais intensos que, devido ao efeito de maré, causam deformações significativas em suas estrelas companheiras. Mesmo que a matéria que compõe uma EN seja ultradensa, a estrela ainda sofre deformações devido ao intenso campo de potencial gravitacional em que está imersa (NAGAR et al., 2018).

Vamos considerar uma estrela estática e esférica, em um campo de maré estacionário externo. A EN irá ser deformada para o formato oblato (análogo ao caso clássico representado na Figura 13) em resposta ao campo de maré gerado pela sua companheira. Esse tipo de deformação ocorre em sistemas binários coalescentes, em que cada EN sente o efeito de maré causado pelo campo gravitacional da estrela companheira. Neste caso, o efeito de maré não é estacionário, por conta da variação da distância das EN. Se os objetos estiverem distantes, como da fase *inspiral*, o campo gravitacional que causa o efeito de maré varia muito lentamente no tempo e podemos considerá-lo estacionário (ABDELSALHIN, 2019).

Tratando de EN, devemos sempre utilizar o aparato matemático fornecido pela Relatividade Geral (RG). Da mesma forma que no caso clássico, no desenvolvimento da descrição do efeito de maré relativístico surgem os Números de Love. Na RG, os números de maré de Love são definidos como as constantes de proporcionalidade entre os momentos multipolares resultantes da maré no objeto e os momentos de maré do campo gravitacional externo. (ABDELSALHIN, 2019; MOTTA, 2020).

A dedução dos números de Love relativísticos é abordada detalhadamente no Apêndice B. Em essência, seguimos os seguintes passos: começamos considerando uma estrela estática esférica e, em seguida, introduzimos uma perturbação linear causada por um campo externo de maré. Analisamos a forma dessa perturbação e, a partir da métrica perturbada, calculamos os componentes do tensor de Einstein. Por fim, chegamos a uma equação diferencial para a função $H(r)$, que descreve essa perturbação:

$$H'' + C_1 H' + C_0 H = 0, \quad (5.2.1)$$

sendo H'' a segunda derivada de H em relação a r , H' a primeira derivada de H em r e C_0 e C_1 são expressões que dependem das mesmas variáveis da TOV. Resolvendo $H(r)$ tanto dentro como fora da estrela, podemos determinar os números de Love.

Feitos os passos acima descritos, obtemos a equação que descreve os Números de Love do tipo elétrico, k_l :

$$k_l = \frac{1}{2}a_l C^{2l+1} = -\frac{1}{2}C^{2l+1} \frac{\hat{P}'_{l2}(x) - C_{yl}\hat{P}_{l2}(x)}{\hat{Q}'_{l2}(x) - C_{yl}\hat{Q}_{l2}(x)}, \quad (5.2.2)$$

o índice l surge na dedução com os polinômios de Legendre, C é a compacidade do objeto, definida como $C = GM/Rc^2$ (sendo G a constante gravitacional, M a massa, R o raio e c a velocidade da luz); ainda, $\hat{P}_{l2}(x)$ e $\hat{Q}_{l2}(x)$ são funções associadas de Legendre de primeira e segunda espécie. Tudo isso aplicado em $x = R/M - 1$.

Escrevendo explicitamente k_2 , que é o Número de Love de nosso interesse, temos, quando $l = 2$:

$$k_2 = \frac{8C^5}{5}(1-2C)^2[2+2C(y-1)-1] \times \{2C[6-3y+3C(5y-8)]+4C^3[13-11y+C(3y-2)+2C^2(1+y)]+3(1-2C)^2[2-y+2C(y-1)]\ln(1-2C)\}^{-1}, \quad (5.2.3)$$

sendo o novo parâmetro y a derivada logarítmica de H , definido como:

$$y = \frac{R \cdot H'_0(R)}{H_0(R)}, \quad (5.2.4)$$

e a função H a perturbação (MOTTA, 2020; GITTINS; ANDERSSON; PEREIRA, 2020; HINDERER, 2008).

É importante destacar que todo o desenvolvimento para chegar na Equação 5.2.3 considera apenas as equações da RG e da TOV, ou seja, até agora levamos em conta apenas a delimitação do corpo e as deformações geradas no espaço-tempo, por meio das OG. Na próxima seção, começaremos a discutir a composição da EN para que determinemos uma equação de estado que descreva seu comportamento.

5.3 ESTRELAS DE NÊUTRONS OU DE QUARKS?

Uma das questões mais importantes para a física dos objetos compactos é a determinação de uma EdE que descreva corretamente seu comportamento. Agora, vamos considerar uma diferente composição para as EN, mais fundamental que os nêutrons: uma estrela formada por quarks.

Como já estudado na seção 2.2, a matéria que constitui a Estrela de Nêutrons ocupa seu nível de energia de Fermi mais baixo, ou seja, todos os níveis de energia abaixo da energia de Fermi estão ocupados. Assim, a EN é mantida coesa pelo equilíbrio da força gravitacional, pressão fermiônica e a força nuclear forte – responsável pela interação de hádrons (GLENDENNING, 2012).

Porém, a Cromodinâmica Quântica (QCD, sigla para o inglês *Quantum Chromodynamics*) nos mostra que em determinadas temperaturas ou densidades extremas, ocorre uma transição

de fase da matéria bariônica para uma matéria de quarks. Assim, os quarks confinados dentro dos nêutrons transicionam para uma fase da matéria denominada plasma de quarks e glúons; nesta fase, os quarks, que compunham os nêutrons, e os glúons, que intermedeiam a interação entre os quarks, podem vagar livremente, sem as restrições bariônicas (ORSARIA et al., 2019; LATTIMER; PRAKASH, 2001; LUGONES, 2016).

5.4 ESTRELA DE QUARKS

Para iniciar a descrição de um modelo de estrela composta por quarks livres, é necessário utilizar o modelo de sacola do MIT (conhecido na literatura como *MIT bag-model*). Este modelo pressupõe que quarks e glúons estão confinados dentro de uma superfície, que representa a interface entre a matéria hadrônica e o vácuo – no nosso caso, a estrutura que representa a sacola é o limite da composição estelar, quando tem-se o raio R da estrela e a pressão $p = 0$ (SILVA, 2008).

Vamos considerar o modelo de Estrela de Quarks (EQ) desenvolvido por Alford et al. (2005), que coloca a “sacola” e a massa dos quarks como independentes da densidade de energia. Ainda, utilizaremos três parâmetros livres: B , conhecido como *constante da sacola* e simula o confinamento dos quarks; a_2 , associado às correções de massa dos quarks e o *gap* de energia no pareamento; e a_4 , um coeficiente da QCD para as correções de pressão entre os quarks livres (ALFORD et al., 2005; PEREIRA; FLORES; LUGONES, 2018; STEINER; LATTIMER; BROWN, 2013).

O modelo parte do grande potencial termodinâmico para matéria composta apenas por quarks, escrito em função do potencial químico μ :

$$\Omega = -\frac{3}{4\pi^2}a_4\mu^4 + \frac{3}{4\pi^2}a_2\mu^2 + B + \Omega_e, \quad (5.4.1)$$

sendo a_2 , a_4 e B constantes que independem de μ , definido como $\mu \equiv (\mu_u + \mu_s + \mu_d)/3$ e Ω_e o grande potencial termodinâmico para elétrons (PEREIRA; FLORES; LUGONES, 2018). Como estamos supondo uma estrela formada por quarks, não vamos considerar a contribuição de elétrons nas equações, ou seja, $\Omega_e = 0$ – os elétrons estão presentes mas seu aporte é desprezível frente aos quarks.

Com a relação $p = -\Omega$, a partir da Equação 5.4.1 obtemos a densidade de energia ε :

$$\varepsilon = 3\mu n_b - p = \frac{9}{4\pi^2}a_4\mu^4 - \frac{3}{4\pi^2}a_2\mu^2 + B, \quad (5.4.2)$$

em que n_b represente a densidade numérica de bárions (PEREIRA; FLORES; LUGONES, 2018).

Ainda, podemos determinar uma expressão analítica para a pressão em que $p = p(\varepsilon)$: isolando μ na Equação 5.4.2 e substituindo na Equação 5.4.1. Temos:

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{3}(\varepsilon - 4B) - \frac{a_2^2}{12\pi^2 a_4} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{16\pi^2 a_4}{a_2^2}(\varepsilon - B)} \right]. \quad (5.4.3)$$

Mesmo trabalhando com parâmetros livres, a existência da EQ é condicionada à pressão de transição de fase ser maior que zero, fazendo com que B não possa assumir qualquer valor (ALFORD et al., 2005). Neste trabalho, usaremos uma estrela formada apenas por quarks, portanto não é necessário considerar os efeitos que a transição quarks \rightarrow nêutrons podem gerar em ε e p .

6 MÉTODOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo é feita a descrição dos algoritmos desenvolvidos para o cálculo do número de Love k_2 de uma Estrela de Quarks, considerando a Equação 5.4.3. Para fins de comparação e validação do programa, foi desenvolvido o mesmo cálculo para Estrelas de Nêutrons regidas por duas Equações de Estado diferentes. A estrutura do que segue é: uma breve introdução das EdEs para os testes, a estruturação do algoritmo, validação dos programas e, por fim, aplicação do algoritmo na EdE de quarks.

6.1 EQUAÇÕES DE ESTADO PARA TESTES

Nosso objetivo é investigar o comportamento de uma estrela formada apenas por quarks, na literatura elas são conhecidas como *Strange Stars* (Estrelas Estranhas, em tradução livre), e não podemos esperar que o comportamento das EQs seja o mesmo de estrelas de matéria bariônica. Para validação dos programas desenvolvidos, optamos por fazer testes com Equações de Estados bem estabelecidas nos estudos de Objetos Compactos (OC), a fim de obter os mesmos resultados já publicados.

As EdEs escolhidas são: a Equação de Estado Politrópica (HINDERER, 2008; KOBERLEIN; MEISEL, 2013) e a Equação de Estado BSk20 (GORIELY; CHAMEL; PEARSON, 2010; GORIELY; CHAMEL; PEARSON, 2013; POTEKHIN et al., 2013). Ambas descrevem estrelas formadas por nêutrons, cada uma com um nível de complexidade diferente. A seguir, são tratados alguns aspectos de cada uma dessas EdE e suas expressões.

6.1.1 Equação de Estado Politrópica

A Equação de Estado Politrópica é uma expressão matemática utilizada para modelar a relação entre a pressão p e a densidade de energia ε em sistemas físicos, como gases confinados e estrelas de nêutrons. A equação politrópica tem origem na termodinâmica, com a descrição de fluidos em equilíbrio hidrostático envolvidos em um processo politrópico – quando há troca de calor $pV^n = C$, sendo p a pressão, V o volume, n o índice politrópico e C uma constante (SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

Vamos considerar uma estrela esfericamente simétrica, sem rotação e em equilíbrio hidrostático, tal que suas propriedades dependam apenas do raio r e sua pressão interior seja equilibrada por seu próprio campo gravitacional (KOBERLEIN; MEISEL, 2013). A equação de estado politrópica é:

$$p = \kappa \varepsilon^\Gamma, \quad (6.1.1)$$

em que p é a pressão, κ é uma constante de proporcionalidade, ε é a densidade de energia e $\Gamma = 1 + 1/n$, sendo n o índice politrópico (SETARE; ADAMI, 2015).

Esta EdE é bastante utilizada para descrever, de forma simplificada, sistemas complexos como as EN. No contexto astrofísico, utilizaremos o índice politrópico como $n = 1$ ou $\Gamma = 2$, pois é quando a expressão analítica melhor concorda com os dados observacionais das características de Estrelas de Nêutrons (HINDERER, 2008; FLANAGAN; HINDERER, 2008).

6.1.2 Equação de Estado BSk20

A Equação de Estado BSk20 faz parte de um conjunto de três equações (BSk19, BSk20 e BSk21) que descrevem a matéria hadrônica de OCs, no nosso caso, ENs. Foi desenvolvido pelo grupo de pesquisa Brussels-Montreal¹, comandado por Goriely, Chamel e Pearson (2010).

A BSk20 é uma EdE unificada, ou seja, por meio desta equação é possível descrever toda a estrutura interna de uma EN, desde o núcleo até a crosta, sem transições abruptas da matéria. Ela se origina de uma família de EdEs baseadas na Teoria do Funcional da Densidade de Energia, que faz parte da Mecânica Quântica para descrição das propriedades eletrônicas da física do estado sólido (GORIELY; CHAMEL; PEARSON, 2010; GORIELY; CHAMEL; PEARSON, 2013).

Inicialmente, a BSk20 tinha apenas valores tabelados, baseado em dados observacionais, mas Potekhin et al. (2013) conseguiram determinar uma expressão analítica que descreve as três EdEs do conjunto, diferenciando-as apenas pelos coeficientes (POTEKHIN et al., 2013). Seja $\xi = \ln(\rho/\text{g cm}^{-3})$ a expressão para a densidade de energia e $\zeta = \ln(P/\text{dyn cm}^{-2})$ a expressão da pressão, temos $P(\rho)$ definido como:

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{a_1 + a_2\xi + a_3\xi^3}{(1 + a_4\xi) \{ \exp [a_5(\xi - a_6)] + 1 \}} + \frac{a_7 + a_8\xi}{\exp [a_9(a_6 - \xi)] + 1} + \frac{a_{10} + a_{11}\xi}{\exp [a_{12}(a_{13} - \xi)] + 1} + \\ & + \frac{a_{14} + a_{15}\xi}{\exp [a_{16}(a_{17} - \xi)] + 1} + \frac{a_{18}}{[a_{19}(\xi - a_{20})]^2 + 1} + \frac{a_{21}}{[a_{22}(\xi - a_{23})]^2 + 1}. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Os coeficientes de nosso interesse são os que correspondem à BSk20 e estão dispostos na Tabela 2 (POTEKHIN et al., 2013).

¹ Indicativo na língua inglesa para o grupo formado pelo Instituto de Astronomia e Astrofísica da Universidade Livre de Bruxelas, na Bélgica, e o Departamento de Física da Universidade de Montreal, no Canadá.

Tabela 2 – Constantes utilizadas na Equação 6.1.2

i	a_i
1	4,078
2	7,587
3	0,00839
4	0,21695
5	3,614
6	11,942
7	13,751
8	1,3373
9	3,606
10	-22,996
11	1,6229
12	4,88
13	14,274
14	23,560
15	-1,5564
16	2,095
17	15,294
18	0,084
19	6,36
20	11,67
21	-0,04
22	14,8
23	14,18

Fonte: Potekhin et al. (2013).

6.2 ESTRUTURA DO ALGORITMO

Para o cálculo do número de Love k_2 de uma estrela compacta qualquer (seja de nêutrons ou de quarks) foi utilizado como base o código disponibilizado por Motta (2020), escrito e adaptado em linguagem de programação Python. Nossos programas estão disponíveis em um repositório público no site *GitHub*².

O algoritmo parte da expressão analítica para o número de Love (Equação 5.2.2), a integração das equações TOV (Equações 3.1.11, 3.1.12 e 3.1.13) e a resolução da equação diferencial da perturbação $H(r)$ (Equação 5.2.1) para que encontremos o valor da derivada logarítmica $y_l(R)$ (Equação 5.2.4), junto com a compacidade C . O método de integração numérica utilizado foi o Runge-Kutta de 4ª ordem, por sua confiabilidade e fácil implementação.

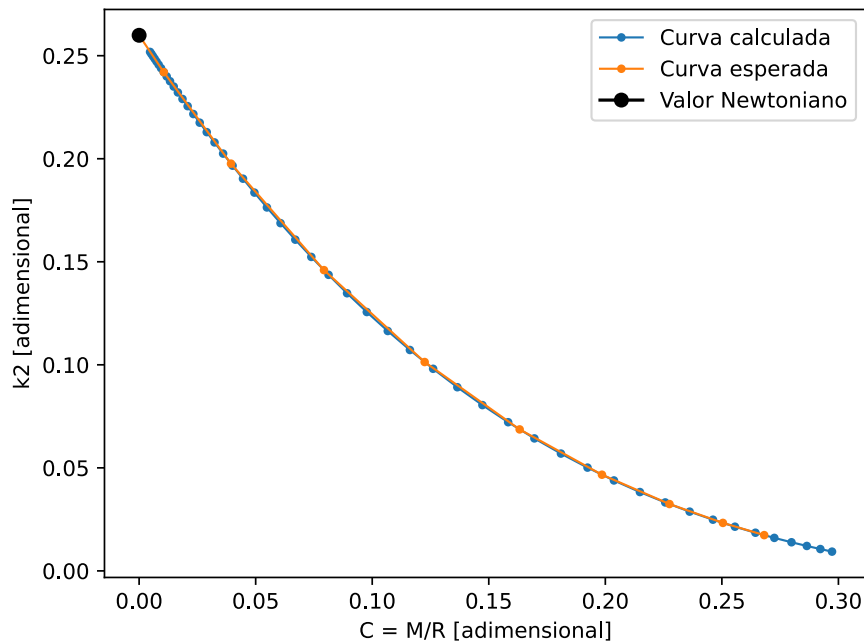
Tanto para os testes em EN quanto para a implementação para as EQ foi utilizada a mesma estrutura de programação, diferenciando-se apenas pela EdE utilizada. Os detalhes envolvidos em cada EdE estão especificados a seguir.

² Disponível em: github.com/CarolineLiz/Numeros-de-Love. Acesso em: 26 nov. 2023.

6.2.1 Resultados dos testes

O primeiro teste foi realizado com a EdE Politrópica, Equação 6.1.1, por sua simplicidade e abundância de análises na literatura. Considerando o índice politrópico $\Gamma = 2$ ou $n = 1$, obtemos a Figura 14, que mostra o gráfico do número de Love k_2 em função da compacidade C de uma família de estrelas, lembrando que $C = M/R$. Em azul, está representada a curva calculada pelo algoritmo; no mesmo *plot* foram incluídos os dados disponibilizados por Binnington e Poisson (2009), em laranja; e, ainda, em preto está representado o valor newtoniano³ do número de Love $k = 4/15 \approx 0,27$ (HINDERER, 2008; MOTTA, 2020; BINNINGTON; POISSON, 2009; LOVE, 1909).

Figura 14 – Número de Love k_2 em função da compacidade C de uma família de estrelas descritas pela EdE Politrópica. Sendo (i) em azul: pontos calculados; (ii) em laranja: pontos disponibilizados por Binnington e Poisson (2009); (iii) em preto: k_2 newtoniano.



Fonte: A autora (2024).

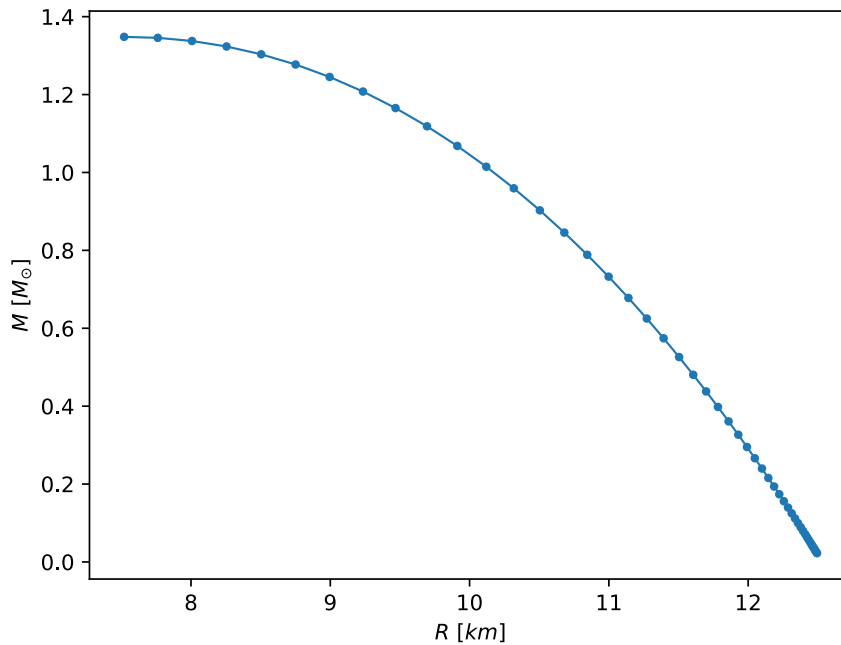
Ao observar a Figura 14, é possível notar a boa correspondência entre os dados calculados e os dados disponibilizados pela referência. Vê-se o comportamento: quanto maior a compacidade C da estrela, menor é seu número de Love k_2 – este comportamento é o que esperamos da matéria hadrônica, por intuição, o número de Love k_2 é uma indicação quantitativa da deformação de maré, quanto mais compacto é o objeto, mais difícil será deformá-lo, mesmo que esteja imerso em um campo de maré ultra-intenso gerado por outro OC. Ainda, quando a compacidade vai a

³ Com “newtoniano” deseja-se indicar os resultados expressos pela Mecânica Clássica, partindo das convenções de Isaac Newton.

zero (fazendo o limite de y com $R \rightarrow 0$ e substituindo no limite de k_2 com $C \rightarrow 0$) o número de Love se aproxima do resultado newtoniano (HINDERER, 2008; LOVE, 1909).

Mantendo a EdE Politrópica (Equação 6.1.1), foi gerada a Figura 15, que contém o gráfico da Massa em função do Raio para a mesma família de estrelas. Neste caso, pode-se observar que as EN com massa dentro do intervalo observacional (entre 1 e $2,2 M_{\odot}$), têm raio de até 10 km, o que corresponde às EN fiduciais – as medições de massas de EN acontecem, principalmente, pelo estudo contínuo de radio pulsares que fazem parte de sistemas binários (ALSING; SILVA; BERTI, 2018). Abaixo do intervalo de massa citado, nota-se que, quanto menor a massa, maior é o raio da estrela – este comportamento ocorre pois quanto menor é a massa, menor será o campo gravitacional, então a matéria da estrela pode se acomodar em um raio maior.

Figura 15 – Massa em função do Raio para uma família de estrelas de acordo com a EdE Politrópica.

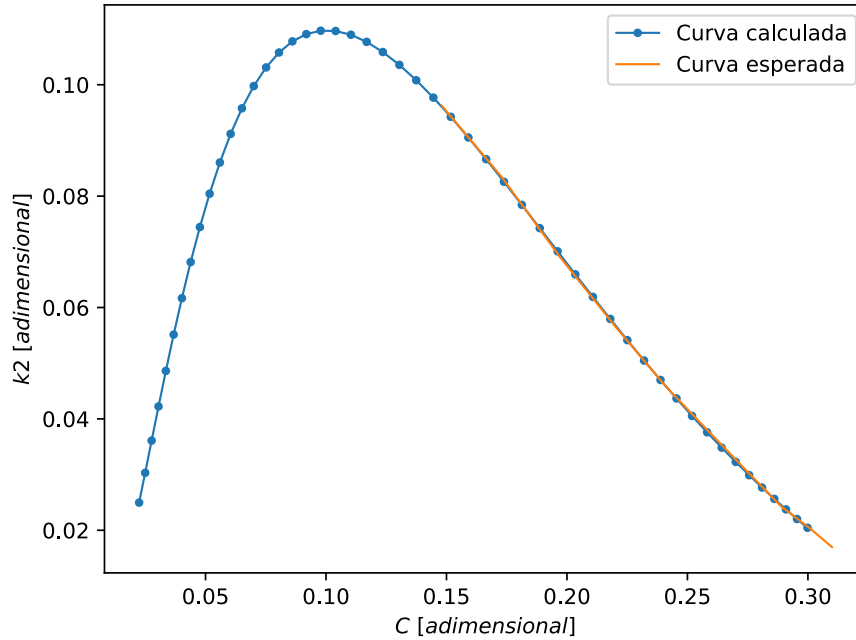


Fonte: A autora (2024).

Aplicando o mesmo algoritmo na EdE BSk20 (Equação 6.1.2), obtemos a Figura 16, gráfico do número de Love k_2 em função da compactidade C para uma família de estrelas. Em azul, está representada a curva calculada pelo algoritmo e, em laranja, a curva fornecida por Gittins, Andersson e Pereira (2020). É evidente a boa correspondência entre a curva calculada e a curva fornecida pela referência.

Considerando ainda a EdE BSk20, foi gerada a Figura 17, que mostra a relação de Massa em função do Raio da mesma família de estrelas. A curva calculada pelo algoritmo está representada em azul e a curva laranja corresponde aos dados fornecidos por Gittins, Andersson

Figura 16 – Número de Love k_2 em função da Compacidade de uma família de estrelas regidas pela EdE BSk20. (i) Em azul: curva calculada e (ii) em laranja: curva fornecida por Gittins, Andersson e Pereira (2020).



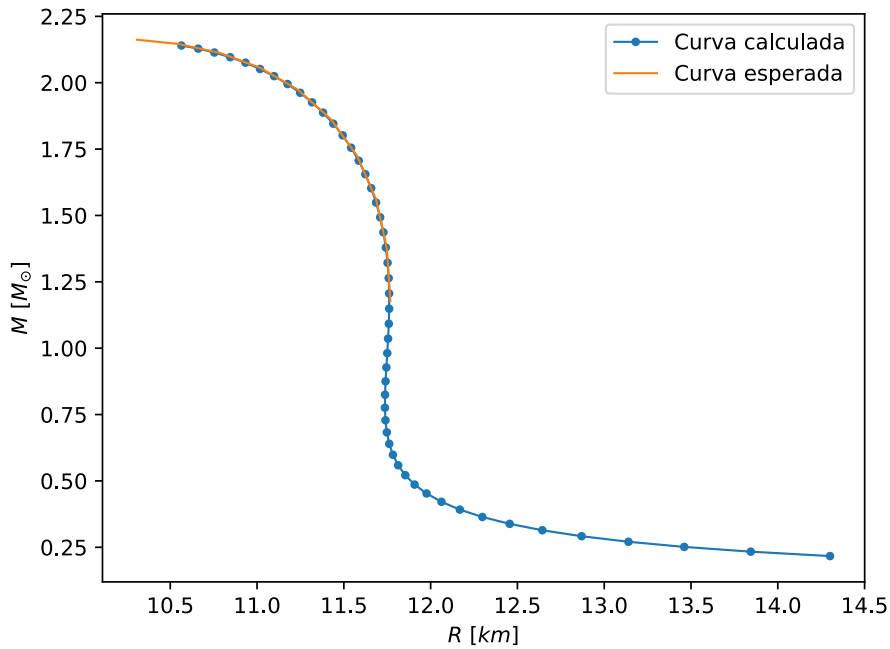
Fonte: A autora (2024)

e Pereira (2020). Novamente, nota-se a excelente correspondência entre o que foi calculado e o que foi observado. Ainda, nas estrelas com massa dentro do intervalo observacional – as medições para massas de EN vêm de dados de radio pulsares em sistemas binários (ALSING; SILVA; BERTI, 2018) – entre 1 e $2,2 M_{\odot}$, têm raio dentro do esperado: entre 10 e 12 km; as EN com massa abaixo do intervalo têm raios maiores, devido à diminuição de atração do campo gravitacional (ALSING; SILVA; BERTI, 2018).

Comparando as figuras que mostram a relação da massa em função do raio da EN (Figura 15 e Figura 17), verifica-se que, para massas correspondentes, os raios são diferentes: na Figura 15 quando a massa é $1,2 M_{\odot}$ o raio da estrela é pouco maior que 9 km, já na Figura 17, com a mesma massa de $1,2 M_{\odot}$, o raio é pouco maior que 11,5 km. Essa diferença pode ser melhor analisada com os gráficos que mostram os raios em função da pressão central para cada EdE: na Figura 18, quando o raio é 9 km a pressão central é cerca de $5,04 \times 10^{36} \text{ dyn/cm}^2$; e na Figura 19, com o raio de 11,5 km a pressão central é de, aproximadamente, $2,50 \times 10^{35} \text{ dyn/cm}^2$. Para esta comparação, foi escolhida uma estrela com massa de $1,2 M_{\odot}$, quando essa matéria é comportada em um raio menor, seu centro experimenta uma pressão maior, dada a densidade da matéria na região; quando a mesma quantidade de matéria é comportada em um raio maior, menor será sua densidade e menor é a pressão em seu centro.

Ainda que haja diferenças consideráveis entre as EdEs, seus resultados são válidos. Cada

Figura 17 – Massa em função do Raio para uma família de estrelas de acordo com a EdE BSk20. Em azul são os pontos calculados pelo programa e a curva em laranja é o *plot* dos dados fornecidos por Gittins, Andersson e Pereira (2020).

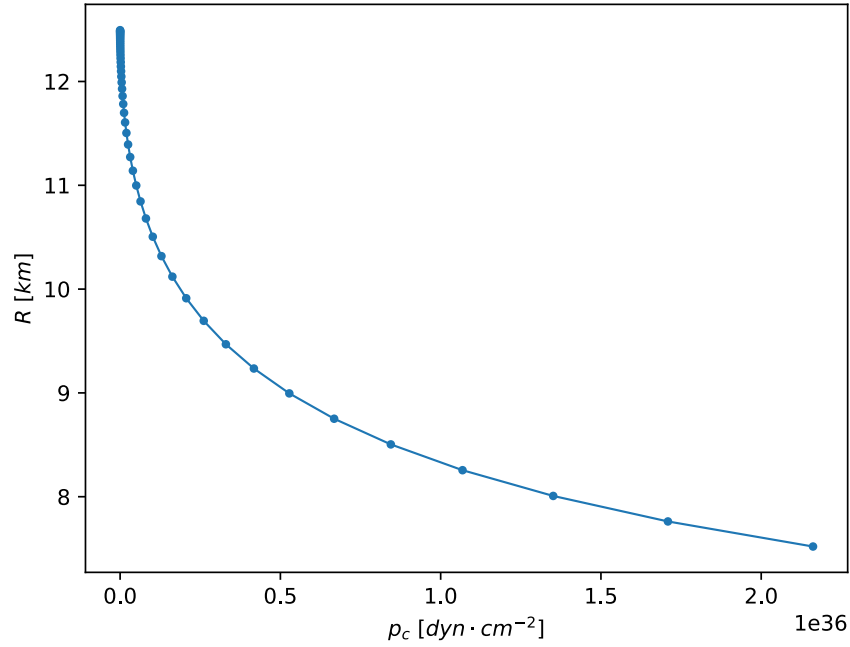


Fonte: A autora (2024).

ponto destacado nas figuras representa uma EN diferente e, a rigor, não se sabe quais delas estão corretas, se todas podem existir ou apenas algumas – cada EdE é uma tentativa de reproduzir os limites observacionais com base em diferentes hipóteses.

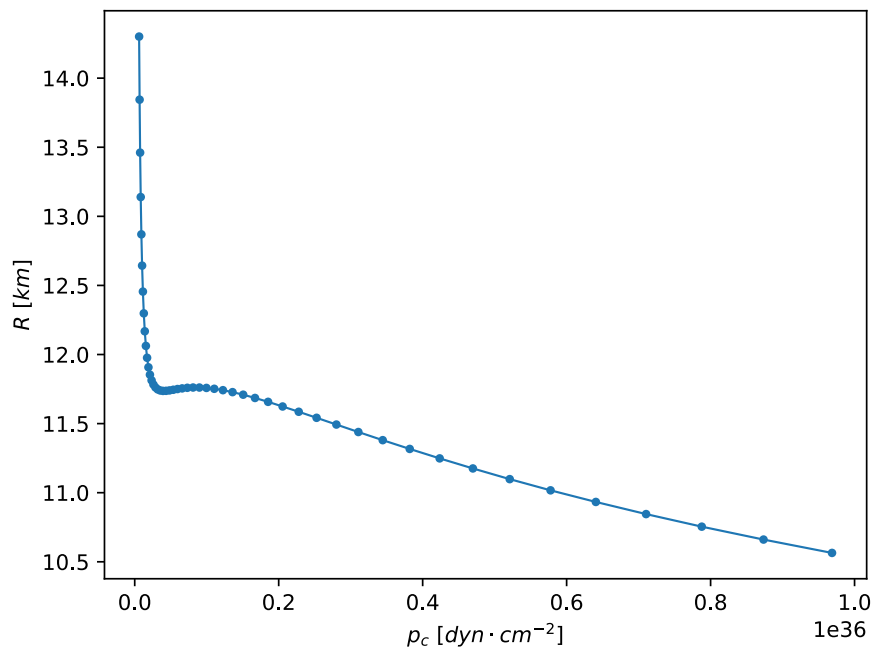
Na próxima seção, serão tratadas as características de uma família de estrelas regidas pela EdE de quarks. Os bons ajustes entre os dados calculados e os dados fornecidos pelas referências, indicam a validade do algoritmo desenvolvido e dão a confiança necessária para os próximos cálculos. É importante lembrar que as EdEs utilizadas nesta seção descrevem Estrelas de Nêutrons, ou seja, matéria bariônica – diferente da próxima seção.

Figura 18 – Raio em função da Pressão Central para uma família de estrelas regidas pela EdE Politrópica.



Fonte: A autora (2024).

Figura 19 – Raio em função da Pressão Central para uma família de ENs dada a EdE BSk20

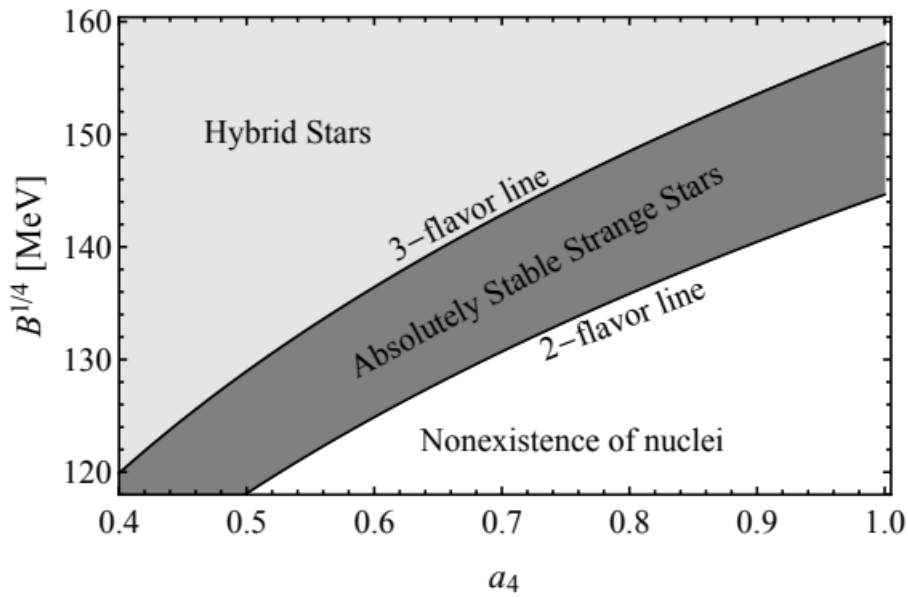


Fonte: A autora (2024).

6.3 NÚMERO DE LOVE PARA A ESTRELA DE QUARKS

Para a análise da EdE de Quarks, foi utilizado o mesmo algoritmo definido na seção 6.2, diferenciando-se apenas a própria EdE, dada pela Equação 5.4.3. Os parâmetros empregados seguem Alford et al. (2005) e Pereira, Flores e Lugones (2018) – antes de escolhê-los, é importante lembrar que estamos interessados em estrelas formadas exclusivamente por quarks e, para sua existência, devem apresentar estabilidade. Para tanto, observemos a Figura 20: ela representa um plano de parâmetros em que cada região destacada refere-se a existência, ou não, de um tipo de estrela – (i) em branco, está a região em que não existem estrelas com núcleos; (ii) em chumbo, a região que corresponde à existência de EQ estáveis; e (iii) em cinza, a região para Estrelas Híbridas (formada por quarks e hádrons) (PEREIRA; FLORES; LUGONES, 2018).

Figura 20 – Regiões no plano $(B^{1/4}, a_4)$ para $a_2 = 100$ MeV associadas à Estrelas Híbridas e Estrelas de Quarks estáveis. Abaixo da curva denominada *2-flavor line*, os parâmetros correspondem a estrelas sem núcleos.



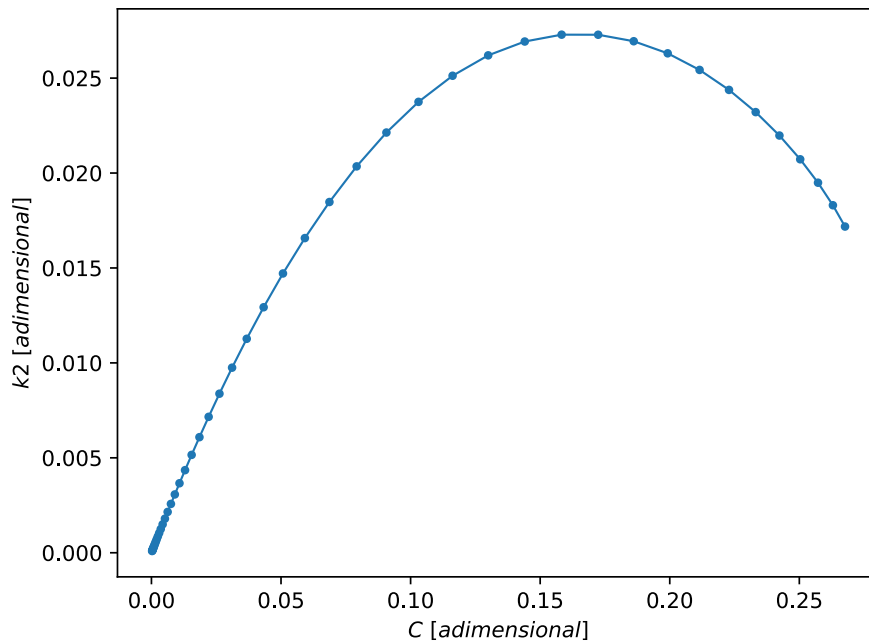
Fonte: Pereira, Flores e Lugones (2018).

A escolha de parâmetros foi realizada de modo que estivessem dentro da região que indica EQs estáveis, assim: $a_2 = 100^2$ MeV², $a_4 = 0,6$ (grandeza adimensional) e $B = 130^4$ MeV⁴, sendo B a *constante da sacola* e simula o confinamento dos quarks, a_2 uma constante associada a correções de massa e ao *gap* de energia dos quarks e a_4 um coeficiente da QCD para as correções de pressão entre os quarks livres (ALFORD et al., 2005; PEREIRA; FLORES; LUGONES, 2018; STEINER; LATTIMER; BROWN, 2013).

Foi gerada a Figura 21, que mostra o número de Love k_2 em função da compacidade C , sendo $C = M/R$, para uma família de estrelas formadas apenas por quarks. A primeira vista, notam-se duas coisas: (i) o número de Love aumenta com a compacidade até quando $C \approx 0,17$ e $k_2 \approx 0,027$ e então cai, diferente do comportamento observado com as EdEs anteriores (Figuras

14 e 16); e (ii) tanto k_2 quanto C iniciam em zero. Para investigar este comportamento, foram gerados os gráficos de k_2 em função da densidade central, Figura 22, e de C também em função da densidade central, Figura 23: nas duas figuras, as estrelas que têm menor valor de k_2 e de C são as que possuem menores densidades centrais, ou seja, são estrelas menores.

Figura 21 – Número de Love k_2 em função da compacidade C , considerando uma estrela formada por quarks.

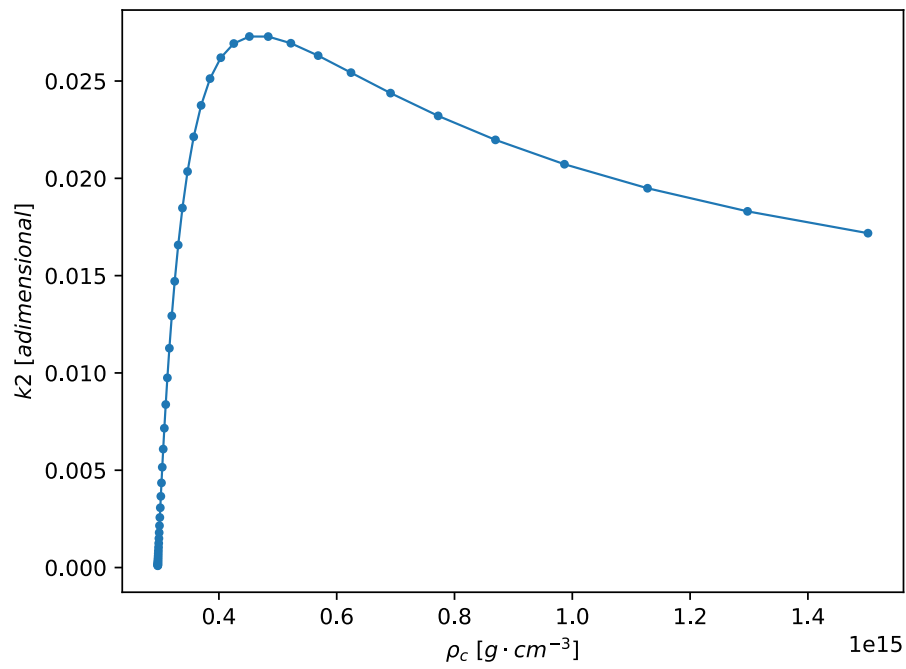


Fonte: A autora (2024).

Temos então que as menores estrelas são menos deformáveis? A princípio esta ideia pode parecer estranha, visto que a baixa compacidade deveria aproximar a estrela da maré newtoniana. Esta intuição de comportamento é válida para situações que tratam de matéria hadrônica, o que não é o caso em discussão. Quando a compacidade da estrela vai a zero, temos duas opções: ou o raio da estrela é, numericamente, muito maior que a massa; ou a massa da estrela é muito próxima de zero. Podem-se observar alguns limites: na função y (Equação 5.2.4), quando $R \rightarrow 0$, temos $y = 2$; e, substituindo isso no limite de k_2 (Equação 5.2.3) quando $C \rightarrow 0$ temos que $k_2 = 0$, em outros termos, quando o raio se torna tão pequeno, não há valor para o número de Love e, conseqüentemente, não há deformação de maré (HINDERER, 2008; DAMOUR; NAGAR, 2009).

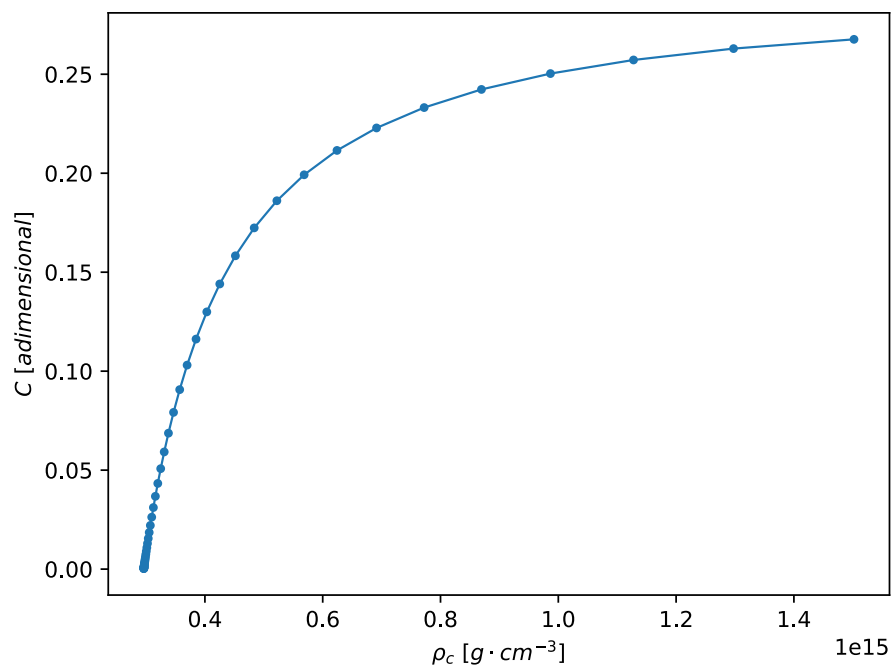
Percebe-se então que as EQs no início da curva na Figura 21 estão se aproximando de um ponto e, portanto, não podem ser deformadas. Isso é válido matematicamente mas um absurdo quando queremos modelar estrelas que realmente existem. Na prática, consideramos apenas as estrelas que se encaixam no intervalo observacional, ou seja, aquelas que têm massa entre 1 e $2,2 M_{\odot}$ – este intervalo vem de estudos de rádio pulsares feito por Alsing, Silva e Berti (2018).

Figura 22 – Número de Love k_2 em função da Densidade Central de uma família de EQs.



Fonte: A autora (2024).

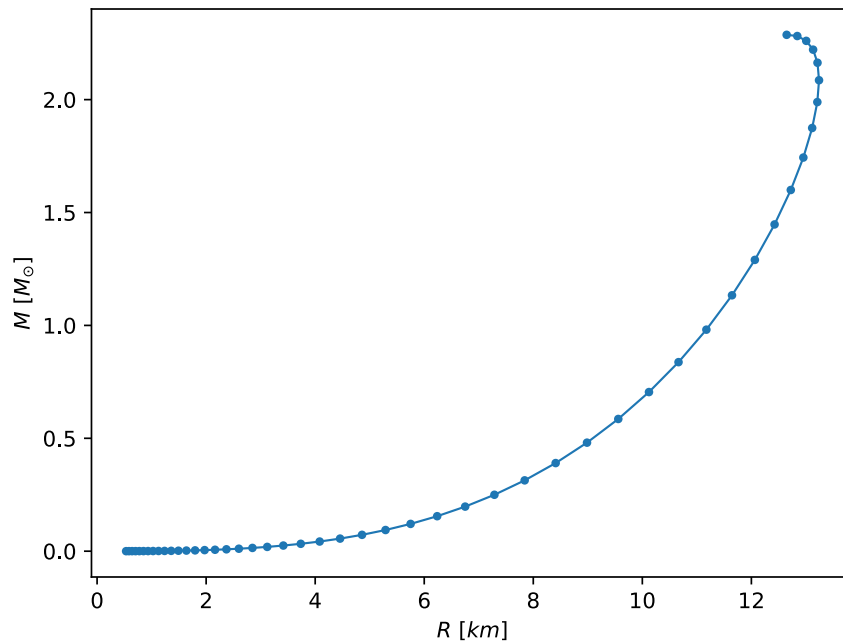
Figura 23 – Compacidade em função da Densidade Central para uma família de EQs.



Fonte: A autora (2024).

Para ter uma ideia geral de massas, observemos a Figura 24, que dá a relação entre a massa e o raio de uma família de EQs.

Figura 24 – Curva da relação Massa-Raio para uma família de estrelas regidas pela EdE de Quarks.



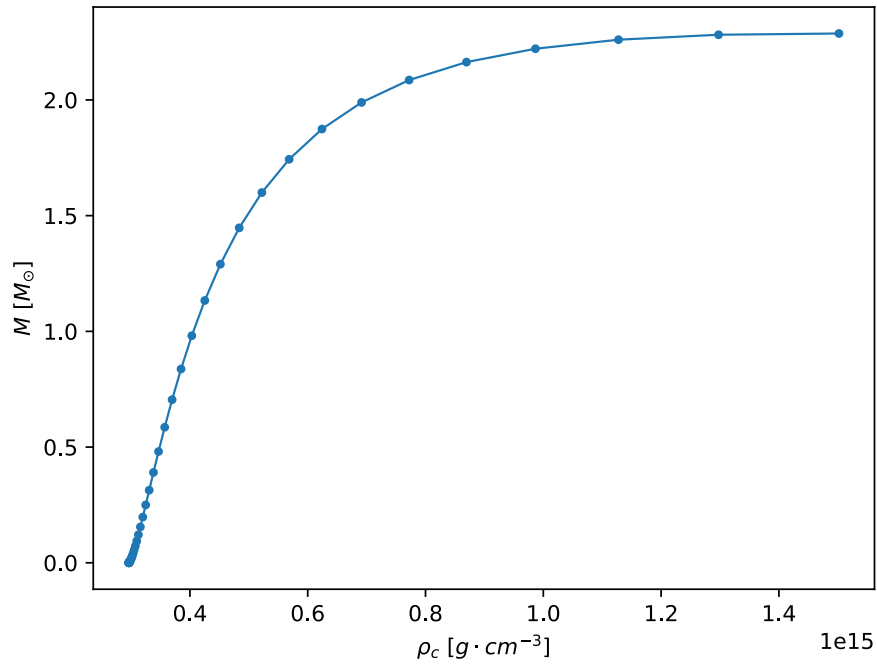
Fonte: A autora (2024).

Com a Figura 24, nota-se que a curva, neste caso, também inicia em zero. Como sabemos, as massas de estrelas compactas que já foram detectadas estão entre 1 e 2,2 M_{\odot} mas, vamos olhar para as estrelas que têm massa abaixo desse intervalo (entre 0 e 1 M_{\odot}): com o aumento da massa há o aumento do raio das estrelas – este comportamento é contrário ao observado na subseção 6.2.1. A diferença na relação de massa-raio das EQs acontece pois a matéria que as compõem está no estado mais fundamental possível; aqui, os raios permanecem pequenos pois a matéria de quarks tem graus de liberdade diferentes e seu arranjo não segue a matéria hadrônica (ALSING; SILVA; BERTI, 2018).

Antes de tratar das estrelas que estão dentro do intervalo observacional de massas, vejamos a relação da massa e do raio com a densidade central para uma mesma família de EQs: Na Figura 25, nota-se que as estrelas com massa entre 0 e 1 M_{\odot} possuem as menores densidades centrais. Já na Figura 26, com as mesmas baixas densidades centrais, são as estrelas com raios pequenos. Isto é, no início das curvas, tanto da Figura 24 quanto nas Figuras 25 e 26, encontram-se as menores estrelas que, devido aos dados observacionais, podem ser desconsideradas.

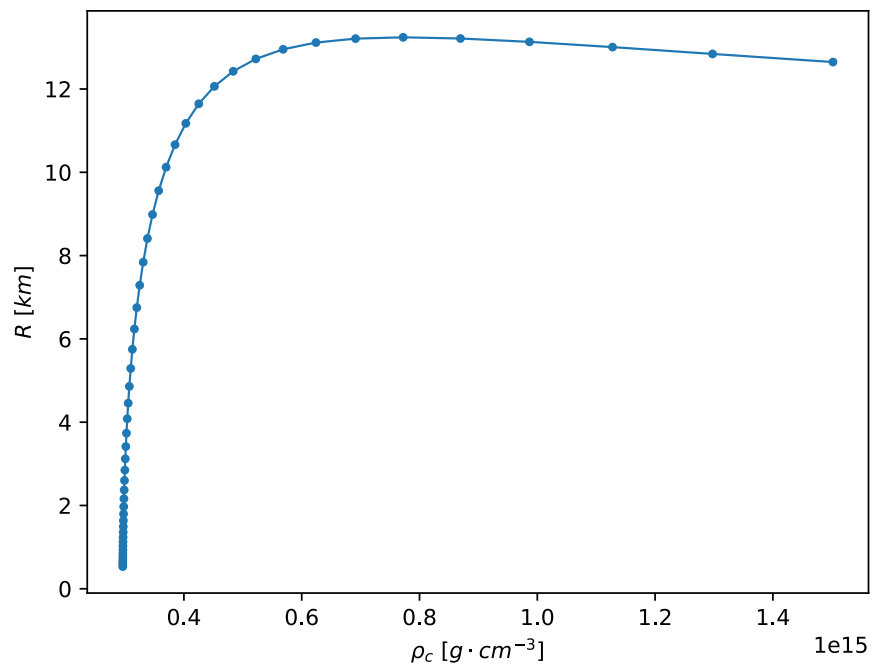
Agora, para as estrelas que tem massa dentro do intervalo observacional: na Figura 25, as estrelas com massa maior que 1 M_{\odot} possuem raio com mais de 11 km. Com dados de pulsares do telescópio NICER, estudados por Miller et al. (2021) e Raaijmakers et al. (2021); e nos dados

Figura 25 – Massa em função da Densidade Central para uma família de EQs.



Fonte: A autora (2024).

Figura 26 – Raio em função da Densidade Central para uma família de EQs.

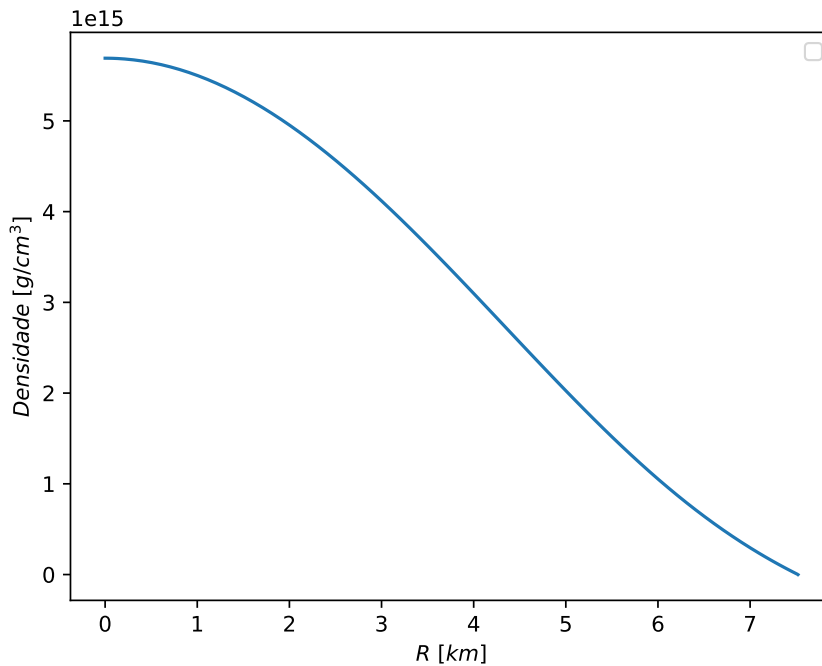


Fonte: A autora (2024).

de ondas gravitacionais da colaboração LIGO e Virgo de interferômetros terrestres, feitos por Abbott et al. (2018) e De et al. (2018), estima-se que o raio das estrelas detectadas fique, de modo geral, entre 8,9 e 13,2 km (MILLER et al., 2021; RAAIJMAKERS et al., 2021; ABBOTT et al., 2018). Pela Figura 24, é evidente que as estrelas com massa maior que $1 M_{\odot}$ têm o raio dentro do intervalo definido pelos dados, indicando a possibilidade de existência destas EQs e a validação deste modelo de quarks.

Ainda, considerando apenas uma estrela, foi obtida a Figura 27, que mostra o gráfico da Densidade em função do Raio. Nesta figura, é possível identificar o comportamento da densidade conforme o raio da estrela aumenta: quando o raio é zero, constata-se o centro da estrela, com a maior densidade, devido à intensidade do campo gravitacional em torno deste ponto; conforme o raio aumenta, a densidade cai até zero, indicando o limite entre a estrela e o espaço exterior. Dada a condição de estabilidade da estrela, ou seja, $\partial M / \partial \rho > 0$, temos que a densidade central máxima fica na ordem de 10^{15} g/cm³ - ordem de grandeza observada nas Figuras 22, 23, 25 e 26 (GLENDENNING, 2012; SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008).

Figura 27 – Densidade em função do raio para apenas uma Estrela de Quarks.



Fonte: A autora (2024).

Em outros termos, quando tratamos de uma estrela formada exclusivamente por quarks, a densidade central é cerca de dez vezes maior que a densidade nuclear⁴ – bom lembrete de que a natureza desta matéria não é a mesma da matéria que encontramos na Terra. Os resultados aqui

⁴ Já é bem estabelecido, na Física Nuclear, que a densidade do núcleo atômico tem ordem de grandeza de 10^{14} g/cm³ (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008).

encontrados concordam muito bem com o esperado em estudos relacionados e nos encorajam a continuar neste caminho intrigante.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo de sistemas binários de objetos compactos nos dá a certeza da suntuosidade do Universo e da elegância que a Física possui. Nesta dissertação foram apreciados dois tipos de binários formados por Estrelas de Nêutrons: formados por uma EN e uma estrela comum e formados por duas ENs, a fim de analisar algumas de suas propriedades e comportamentos.

No caso de binários formados por uma EN e uma estrela comum, o foco do trabalho foi na análise de colunas de acreção de matéria. Tais colunas são formadas devido à aproximação da EN e sua companheira: por conta do intenso campo gravitacional, a EN atrai a massa da estrela ordinária. Esta matéria é canalizada até a EN por meio das linhas de campo magnético e, quando em contato com a superfície da EN formam os chamados *hot-spots* (FALKNER, 2013; BECKER; WOLFF, 2005; BECKER; WOLFF, 2007). O sistema escolhido para o teste da simulação é formado pela EN 1A0535+262 e sua companheira HDE245770.

Foi realizada uma simulação, considerando uma EN com duas colunas de acreção, de formato cônico e alturas fixas de $h = 1,0$ km. Os dados da simulação foram tratados estatisticamente, usando o AG e o MCMC, e obtemos que a EN possui $M = 1,53^{+0,52}_{-0,40} M_{\odot}$ e $R = 12,11^{+1,14}_{-0,87}$ km, com 1σ de confiança – outros parâmetros relevantes foram dispostos na Tabela 1. Evidencia-se que massas e raios obtidos ficam dentro dos intervalos observacionais já estabelecidos: $1 \leq M/M_{\odot} \leq 2,2$ e $8,9 \leq R \text{ (km)} \leq 13,2$ (ABBOTT et al., 2018; DE et al., 2018; MILLER et al., 2021; RAAIJMAKERS et al., 2021). A comparação entre os dados obtidos computacionalmente com os dados da fonte 1A0535+262 está ilustrada na Figura 9, evidenciando a boa correspondência entre a curva calculada e os dados reais.

A modelagem das colunas de acreção nestes binários ainda pode render mais frutos. Pode-se alterar a simulação, adicionar mais colunas, mudar sua geometria ou incluir mais parâmetros, a fim de melhorar as análises e entendimentos destes sistemas.

Em binários formados por duas ENs, os aspectos estudados são a deformação das componentes, devido ao efeito de maré, e o teste da hipótese de que estas estrelas sejam, efetivamente, formadas por quarks livres. A análise destas propriedades se deve, principalmente, ao avanço dos interferômetros terrestres e a detecção de ondas gravitacionais, que contém estas informações.

O efeito de maré nestes sistemas foi estudado a partir dos números de Love, proporcionais à deformação. Mas, para completar a descrição do binário, é necessária uma Equação de Estado que descreva a matéria compacta das estrelas. Assim, neste estudo, foi embutida a hipótese de que a estrela é formada por quarks livres, fora da estrutura dos nêutrons. A Estrela de Quarks utilizada seguiu a estrutura dos trabalhos de Alford et al. (2005) e Pereira, Flores e Lugones (2018).

Assim sendo, foi desenvolvido um algoritmo para o desenvolvimentos dos cálculos necessários – testado com dados de ENs, revisados e publicados por Koberlein e Meisel (2013), Goriely, Chamel e Pearson (2010) e Potekhin et al. (2013). Os resultados obtidos, principalmente massas e raios, estão dentro dos intervalos observacionais esperados ($1 \leq M/M_{\odot} \leq 2,2$ e

$8,9 \leq R \text{ (km)} \leq 13,2$), indicando o rumo adequado dos estudos analíticos (ABBOTT et al., 2018; DE et al., 2018; MILLER et al., 2021; RAAIJMAKERS et al., 2021). Ressalta-se também o valor obtido para a densidade central máxima de uma EQ, que fica na ordem de 10^{15} g/cm^3 , ou seja, dez vezes maior que a densidade do núcleo atômico – o que nos relembra a natureza extrema dos objetos estudados.

O próximo passo no estudo de EQs será adicionar uma camada de matéria bariônica, funcionando como uma crosta frente ao núcleo de quarks livres, e a elasticidade da estrela. Para este estudo será necessário também analisar a transição de fase entre a matéria de quarks e a matéria hadrônica.

Os sistemas binários de Estrelas de Nêutrons continuam a ser fontes ricas de conhecimento, oferecendo vasto território a ser explorado e descoberto. Mesmo após quase cem anos desde a formulação inicial da hipótese sobre a existência das Estrelas de Nêutrons, o estudo desses objetos está longe de atingir seu termo, prometendo resultados significativos para o avanço tecnológico e, sem dúvida, enriquecendo nossa compreensão do Universo.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, Benjamin P et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical review letters**, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. Citado na página 15.
- ABBOTT, Benjamin P et al. Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. **Physical review letters**, APS, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 40.
- ABBOTT, Benjamin P et al. Gw170817: Measurements of neutron star radii and equation of state. **Physical review letters**, APS, v. 121, n. 16, p. 161101, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 59, 61 e 62.
- ABDELSALHIN, Tiziano. Tidal deformations of compact objects and gravitational wave emission. **arXiv preprint arXiv:1905.00408**, 2019. Citado 6 vezes nas páginas 15, 39, 40, 41, 42 e 71.
- ALFORD, Mark et al. Hybrid stars that masquerade as neutron stars. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 629, n. 2, p. 969, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 15, 44, 45, 54 e 61.
- ALSING, Justin; SILVA, Hector O; BERTI, Emanuele. Evidence for a maximum mass cut-off in the neutron star mass distribution and constraints on the equation of state. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 478, n. 1, p. 1377–1391, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 36, 50, 51, 55 e 57.
- BASKO, MM; SUNYAEV, RA. Limiting luminosity of accreting neutron stars with magnetic fields.[kinetics]. **Mon. Not. R. Astron. Soc.;(United Kingdom)**, v. 175, n. 2, 1976. Citado na página 29.
- BECKER, Peter A; WOLFF, Michael T. Spectral formation in x-ray pulsars: bulk comptonization in the accretion shock. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 630, n. 1, p. 465, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 61.
- BECKER, Peter A; WOLFF, Michael T. Thermal and bulk comptonization in accretion-powered x-ray pulsars. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 654, n. 1, p. 435, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 61.
- BELOBORODOV, Andrei M. Gravitational bending of light near compact objects. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 566, n. 2, p. L85, 2002. Citado na página 31.
- BILOUS, Anna V et al. A nicer view of psr j0030+ 0451: evidence for a global-scale multipolar magnetic field. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 887, n. 1, p. L23, 2019. Citado na página 30.
- BINNINGTON, Taylor; POISSON, Eric. Relativistic theory of tidal love numbers. **Physical Review D**, APS, v. 80, n. 8, p. 084018, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 49.
- BURROWS, Adam S. Baade and zwicky:“super-novae,” neutron stars, and cosmic rays. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 112, n. 5, p. 1241–1242, 2015. Citado na página 18.

CABALLERO, I et al. Analyzing x-ray pulsar profiles: geometry and beam pattern of a 0535+26. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 526, p. A131, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 36.

CHANDRASEKHAR, Subrahmanyan. Stellar configurations with degenerate cores. **The Observatory**, Editors of the Observatory, UK, v. 57, p. 373–377, 1934. Citado na página 19.

CHATZIIOANNOU, Katerina. Neutron-star tidal deformability and equation-of-state constraints. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 52, n. 11, p. 109, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 15, 39 e 40.

DAMOUR, Thibault; NAGAR, Alessandro. Relativistic tidal properties of neutron stars. **Physical Review D**, APS, v. 80, n. 8, p. 084035, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 55.

DE, Soumi et al. Tidal deformabilities and radii of neutron stars from the observation of gw170817. **Physical review letters**, APS, v. 121, n. 9, p. 091102, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 59, 61 e 62.

DERUELLE, Nathalie; UZAN, Jean-Philippe. **Relativity in Modern Physics**. [S.l.]: Oxford University Press, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 26.

D'INVERNO, Ray. **Introduction Einstein's Relativity**. [S.l.]: Clarendon Press, 1992. Citado na página 26.

FALKNER, Sebastian. **Light bending around neutron stars**. Tese (Doutorado) — Master's Thesis, FAU Erlangen, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 22, 27, 31, 32 e 61.

FLANAGAN, Eanna E; HINDERER, Tanja. Constraining neutron-star tidal love numbers with gravitational-wave detectors. **Physical Review D**, APS, v. 77, n. 2, p. 021502, 2008. Citado na página 47.

GITTINS, Fabian; ANDERSSON, Nils; PEREIRA, Jonas P. Tidal deformations of neutron stars with elastic crusts. **Physical Review D**, APS, v. 101, n. 10, p. 103025, 2020. Citado 7 vezes nas páginas 10, 39, 43, 50, 51, 52 e 71.

GLENDENNING, Norman K. **Compact stars: Nuclear physics, particle physics and general relativity**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 8 vezes nas páginas 14, 15, 18, 19, 20, 43, 59 e 68.

GORIELY, Stéphane; CHAMEL, Nicolas; PEARSON, JM. Further explorations of skyrme-hartree-fock-bogoliubov mass formulas. xii. stiffness and stability of neutron-star matter. **Physical Review C**, APS, v. 82, n. 3, p. 035804, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 46, 47 e 61.

GORIELY, Stéphane; CHAMEL, Nicolas; PEARSON, JM. Further explorations of skyrme-hartree-fock-bogoliubov mass formulas. xiii. the 2012 atomic mass evaluation and the symmetry coefficient. **Physical Review C**, APS, v. 88, n. 2, p. 024308, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.

HARDING, Alice K. The neutron star zoo. **Frontiers of Physics**, Springer, v. 8, n. 6, p. 679–692, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 22.

HARRISON, Fiona A et al. The nuclear spectroscopic telescope array (nustar) high-energy x-ray mission. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 770, n. 2, p. 103, 2013. Citado na página 32.

HEWISH, Antony et al. Observation of a rapidly pulsating radio source. In: **A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900–1975**. [S.l.]: Harvard University Press, 1979. p. 498–504. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 18.

HINDERER, Tanja. Tidal love numbers of neutron stars. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 677, n. 2, p. 1216, 2008. Citado 9 vezes nas páginas 15, 39, 40, 43, 46, 47, 49, 50 e 55.

HOGG, David W; FOREMAN-MACKEY, Daniel. Data analysis recipes: Using markov chain monte carlo. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, IOP Publishing, v. 236, n. 1, p. 11, 2018. Citado na página 34.

JUWIG, Oliver. **Gravitation und Exotische Materie**. 2017. <https://der-kristall.de/2017/10/gravitation-und-exotische-materie/http://www.808multimedia.com/winnt/kernel.htm>. Citado na página 23.

KOBERLEIN, Brian; MEISEL, David. **Astrophysics Through Computation: With Mathematica® Support**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 61.

LATTIMER, JM; PRAKASH, M. Neutron star structure and the equation of state. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 550, n. 1, p. 426, 2001. Citado na página 44.

LIMA, Rafael CR De et al. Evidence for a multipolar magnetic field in sgr j1745-2900 from x-ray light-curve analysis. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 889, n. 2, p. 165, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 30, 32 e 33.

LOPES, Wilson. Efeitos das marés sobre o sistema terra-lua. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 18, n. 4, p. 286–292, 1996. Citado na página 41.

LORIMER, Duncan Ross; KRAMER, Michael. Handbook of pulsar astronomy. **Handbook of Pulsar Astronomy**, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 14, 18 e 21.

LOVE, Augustus Edward Hough. The yielding of the earth to disturbing forces. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, The Royal Society London, v. 82, n. 551, p. 73–88, 1909. Citado 4 vezes nas páginas 15, 41, 49 e 50.

LUGONES, Germán. From quark drops to quark stars: some aspects of the role of quark matter in compact stars. **The European Physical Journal A**, Springer, v. 52, n. 3, p. 53, 2016. Citado na página 44.

MARTÍNEZ-PAÍS, Ignacio González; SHAHBAZ, Tariq; VELÁZQUEZ, Jorge Casares. **Accretion Processes in Astrophysics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. Citado na página 22.

MENEZES, Débora Peres. A neutron star is born. **Universe**, MDPI, v. 7, n. 8, p. 267, 2021. Citado na página 20.

MÉSZÁROS, P. Radiation from accreting magnetized neutron stars. **Space science reviews**, Springer, v. 38, n. 3, p. 325–351, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 14, 29 e 30.

MÉSZÁROS, Peter. **High-energy radiation from magnetized neutron stars**. [S.l.]: University of Chicago press, 1992. Citado na página 21.

MILLER, M Coleman et al. The radius of psr j0740+ 6620 from nicer and xmm-newton data. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 918, n. 2, p. L28, 2021. Citado 5 vezes nas páginas 36, 57, 59, 61 e 62.

MOTTA, Pedro Naethe. Efeitos de maré: uma abordagem newtoniana e relativística dos números de love. 2020. Citado 7 vezes nas páginas 40, 42, 43, 48, 49, 68 e 71.

NAGAR, Alessandro et al. Time-domain effective-one-body gravitational waveforms for coalescing compact binaries with nonprecessing spins, tides, and self-spin effects. **Physical Review D**, APS, v. 98, n. 10, p. 104052, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 15, 40 e 42.

ORSARIA, Milva G et al. Phase transitions in neutron stars and their links to gravitational waves. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 46, n. 7, p. 073002, 2019. Citado na página 44.

PEREIRA, Jonas P; FLORES, César V; LUGONES, Germán. Phase transition effects on the dynamical stability of hybrid neutron stars. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 860, n. 1, p. 12, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 15, 44, 54 e 61.

POISSON, Eric; WILL, Clifford M. **Gravity: Newtonian, post-newtonian, relativistic**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. Citado na página 24.

POTEKHIN, AY et al. Analytical representations of unified equations of state for neutron-star matter. **arXiv preprint arXiv:1310.0049**, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 46, 47, 48 e 61.

POUTANEN, Juri; BELOBORODOV, Andrei M. Pulse profiles of millisecond pulsars and their fourier amplitudes. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 373, n. 2, p. 836–844, 2006. Citado na página 31.

RAAIJMAKERS, Geert et al. Constraints on the dense matter equation of state and neutron star properties from nicer’s mass–radius estimate of psr j0740+ 6620 and multimessenger observations. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 918, n. 2, p. L29, 2021. Citado 5 vezes nas páginas 36, 57, 59, 61 e 62.

ROTHSCHILD, Richard E et al. Decadal review white paper physics of the accretion mound at the magnetic poles of neutron stars. 2014. Citado na página 30.

SAMPAIO, Jarbas Cordeiro. Efeitos de maré no movimento orbital de satélites artificiais. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2009. Citado na página 41.

SAVONIJIE, GJ. Roche-lobe overflow in x-ray binaries. **Astronomy and Astrophysics**, vol. 62, no. 3, Jan. 1978, p. 317-338. **Research supported by the Nederlandse Organisatie voor Zuiver-Wetenschappelijk Onderzoek and Universiteit van Amsterdam.**, v. 62, p. 317–338, 1978. Citado na página 22.

SCHAFFNER-BIELICH, Jürgen. **Compact star physics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2020. Citado 9 vezes nas páginas 14, 15, 18, 19, 20, 24, 25, 26 e 46.

SCHUTZ, Bernard. **A first course in general relativity**. [S.l.]: Cambridge university press, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 25 e 68.

SETARE, MR; ADAMI, H. Polytropic black hole. **Physical Review D**, APS, v. 91, n. 8, p. 084014, 2015. Citado na página 46.

SHAPIRO, Stuart L; TEUKOLSKY, Saul A. **Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 14, 18 e 59.

SILVA, Paulo Roberto. Interação forte e eletromagnetismo. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 30, p. 3305–1, 2008. Citado na página 44.

SILVA, Rodrigo R et al. A method to fit phase diagrams of slow-rotation pulsars with accretion columns. **Galaxies**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 11, n. 1, p. 18, 2023. Citado 5 vezes nas páginas 15, 29, 35, 36 e 37.

STEINER, Andrew W; LATTIMER, James M; BROWN, Edward F. The neutron star mass–radius relation and the equation of state of dense matter. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 765, n. 1, p. L5, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 54.

TUROLLA, Roberto; ZANE, Silvia; WATTS, AL. Magnetars: the physics behind observations. a review. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 78, n. 11, p. 116901, 2015. Citado na página 14.

WALD, Robert M. **General relativity**. [S.l.]: University of Chicago Press (Chicago, 1984), 2007. Citado 3 vezes nas páginas 23, 25 e 68.

WIRSANSKY, Eyal. **Hands-on genetic algorithms with Python: applying genetic algorithms to solve real-world deep learning and artificial intelligence problems**. [S.l.]: Packt Publishing Ltd, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.

APÊNDICE A – MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Os cálculos aqui demonstrados seguem o formalismo disposto nos livros de Wald (2007), Glendenning (2012) e Schutz (2007) e o trabalho de Motta (2020). O espaço-tempo plano, de acordo com a métrica de Minkowski, é dado por:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2),$$

em que cada superfície de t e r constantes é uma esfera. Assumindo que o espaço-tempo é esfericamente simétrico se puder ser folheado por 2-esferas, de elemento de linha:

$$dl^2 = f(r', t)(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2),$$

sendo a função $f(r', t)$ desconhecida e não apresenta dependência nas variáveis θ e ϕ , para preservar a simetria esférica. Pode-se definir $f(r', t) = r^2$, a princípio, esse r pode ser entendido como definindo a área da esfera dada por $4\pi r^2$.

Agora, vamos considerar que as esferas estão posicionadas em r e $r + dr$. Podemos imaginar uma reta quando t , θ e ϕ constantes é ortogonal às duas esferas, então, sabendo que \mathbf{e}_r é a tangente a essa reta, podemos afirmar que $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$ e $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\phi = 0$. Olhando para a métrica, sabemos que $g_{\alpha\beta} = g(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta$, assim, $g_{r\theta} = g_{r\phi} = 0$ e as componentes simétricas nulas.

Como consideramos que o espaço-tempo é todo esfericamente simétrico, podemos escolher o sistemas de coordenadas tal que \mathbf{e}_t é ortogonal a \mathbf{e}_θ e \mathbf{e}_ϕ , portanto $g_{t\theta} = g_{t\phi} = 0$, assim como suas componentes simétricas. Logo, a métrica toma a forma:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tr}dtdr + g_{rr}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2).$$

Por fim, as condições para que o espaço-tempo seja esfericamente simétrico:

1. Todas as componentes da métrica são independentes de t
2. A geometria não é alterada por inversão temporal ($t \rightarrow -t$)

A partir da condição (2), temos algumas implicações. Vamos olhar para a mudança do sistema de coordenadas com a inversão temporal, ou seja, $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (-t, r, \theta, \phi)$. Podemos utilizar uma matriz transformação Λ_{β}^{α} , em geral com 16 elementos, para descrever a mudança de coordenadas $x^{\bar{\alpha}}$ para x^{α} como: $x^{\bar{\alpha}} = \Lambda_{\alpha}^{\bar{\alpha}}$. Assim, a mudança de coordenadas implica que $\Lambda_0^{\bar{0}} = 0$, $\Lambda_i^{\bar{0}} = \Lambda_0^{\bar{i}}$ e $\Lambda_j^{\bar{i}} = \delta_j^i$. Então, as componentes da métrica mudam para:

$$\begin{aligned} g_{\bar{0}\bar{0}} &= (\Lambda_{\bar{0}}^0)^2 g_{00} = g_{00}; \\ g_{\bar{0}\bar{1}} &= (\Lambda_{\bar{0}}^0)(\Lambda_{\bar{1}}^1) g_{01} = -g_{01}; \\ g_{\bar{1}\bar{1}} &= (\Lambda_{\bar{1}}^1)^2 g_{11} = g_{11}, \end{aligned}$$

por conta da segunda condição, temos que $g_{01} = 0$.

A métrica que usaremos para introduzir a perturbação pode ser escrita como:

$$ds^2 = -e^{v(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2), \quad (\text{A.0.1})$$

O formato das componentes da métrica g_{tt} e g_{rr} foi escolhido em função das funções arbitrárias $v(r)$ e $\lambda(r)$ sem que haja quebra das condições acima citadas. A função $\lambda(r)$ é relacionada com a função $m(r)$:

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (\text{A.0.2})$$

no limite newtoniano, a função $f(r)$ representa a massa contida em uma esfera de raio r .

Considerando que a estrela é composta por um fluido perfeito, podemos escrever o tensor energia-momento da forma:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (\text{A.0.3})$$

sendo ε a densidade de energia e u^μ a quadrivelocidade dos elementos do fluido.

Como estamos tratando de um espaço curvilíneo, precisamos utilizar a derivada covariante, que generaliza o conceito de derivada parcial para estes espaços e é definida como: $\nabla_\beta V^\alpha = \partial_\beta V^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha V^\mu$, em que Γ são os símbolos de Christoffel, que serão definidos em termos da métrica em breve.

De acordo com as leis de conservação, o tensor energia-momento tem sua divergência nula, ou seja $T_{\mu\nu}^{\nu} = \nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$. Daqui, teríamos um conjunto de quatro equações. Porém, a única componente de interesse será quando $\mu = r$, as demais serão triviais ou com resultados redundantes. Sendo assim, conseguimos determinar o gradiente da pressão necessário para que o fluido permaneça estático sob a influencia do campo gravitacional:

$$(\varepsilon + p)\frac{dv}{dr} = -\frac{dp}{dr}.$$

Da equação de Einstein, temos $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$, considerando as componentes (t, t) e (r, r) , temos as equações:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon, \quad (\text{A.0.4})$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{2(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}, \quad (\text{A.0.5})$$

combinando as Equações A.0.4 e A.0.5:

$$\frac{dp}{dr} = -(\varepsilon + p)\frac{2(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}. \quad (\text{A.0.6})$$

As Equações A.0.4, A.0.5 e A.0.6 são o sistema de equações determinado por Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) para caracterizar a estrutura interna de uma estrela esférica, estática

e relativística. Para a descrição completa do sistema, é necessária a inserção de uma equação de estado que relacione densidade de energia e pressão.

Podemos olhar também para fora da estrela, quando $p = 0$ e $\varepsilon = 0$, utilizando a TOV, temos:

$$\frac{dm}{dr} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dr} = \frac{2m}{r^2 - 2mr},$$

e como solução, tomando as constantes de integração nulas, temos:

$$m(r) = \text{constante} = M \quad \text{e} \quad v(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right).$$

As soluções para fora da estrela dão origem a métrica:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2),$$

tomando o limite em que r assume um valor muito alto, podemos utilizar a aproximação $(1 - x)^{-1} = 1 + x$, logo:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2), \quad (\text{A.0.7})$$

que é a chamada métrica de Schwarzschild, para pontos exteriores de uma estrela de massa M .

APÊNDICE B – CÁLCULO DOS NÚMEROS DE LOVE

Para o desenvolvimento dos cálculos deste apêndice, foram usados como base os trabalhos de Abdelsalhin (2019), Gittins, Andersson e Pereira (2020) e Motta (2020). Considerando os resultados obtidos anteriormente no Apêndice A, vamos inserir uma perturbação no elemento de linha da métrica e trabalhar com as equações até que, ao final, tenhamos os Números de Love.

B.1 PERTURBAÇÃO NO ESPAÇO-TEMPO

Na configuração perturbada do nosso sistema, podemos descrever o deslocamento de cada elemento de fluido por um quadrivetor de pequena amplitude $\xi_j(t, r, \theta, \phi)$ em relação às coordenadas (t, r, θ, ϕ) . Por conta do deslocamento desses elementos de fluido, a métrica precisa ser alterada e o sistema não será mais descrito pela Eq. A.0.1. A "nova" métrica será:

$$ds^2 = (ds_0^2) + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{B.1.1})$$

em que ds_0^2 é a métrica inicial, sem a perturbação, e $h_{\mu\nu}$ é uma perturbação simétrica e independente do tempo. A geometria do espaço-tempo dependerá das dez componentes independentes de $h_{\mu\nu}$.

Agora, precisamos determinar as funções de ξ_j e $h_{\mu\nu}$ – são treze funções a serem decompostas em harmônicos esféricos. As componentes que, sob rotação, se transformam como escalares serão representadas por harmônicos esféricos escalares e são: ξ_r , h_{00} , h_{0r} e h_{rr} – é importante notar que essas componentes não dependem das coordenadas θ e ϕ . As componentes que se transformam como vetores dependem de θ ou ϕ : (ξ_θ, ξ_ϕ) , $(h_{0\theta}, h_{0\phi})$ e $(h_{r\theta}, h_{r\phi})$. E, as componentes que se transformam como tensores dependem simultaneamente de θ e ϕ , como é o caso de $h_{\theta\phi}$.

Ainda, cada harmônico esférico é definido por duas variáveis, l e m , com paridade π – quando par: $\pi = (-1)^l$, e quando ímpar: $\pi = (-1)^{l+1}$. As componentes de paridade par dão origem aos chamados Números de Love do tipo elétrico, relacionados aos momentos de multipolo de massa e que são do nosso interesse. Já as componentes ímpares dão origem aos números de Love do tipo magnético, que são relacionados aos momentos de multipolo do momento angular da estrela e não serão abordados neste trabalho.

B.1.1 Harmônicos esféricos vetoriais e tensoriais

Temos que a paridade dos harmônicos esféricos escalares é dada por $(-1)^l$, vejamos agora os vetoriais e escalares. Os harmônicos esféricos vetoriais pares são definidos por:

$$\Psi_{mj}^l = \partial_j Y_m^l, \quad (\text{B.1.2})$$

com $j \in \theta, \phi$. Pela expressão B.1.2, nota-se que as derivadas não serão afetadas pela transformação $(r, \phi, \theta) \rightarrow (r, \phi + \pi, \theta - \pi)$, a paridade deles também é $(-1)^l$.

Os harmônicos esféricos tensoriais são dados por

$$\Psi_{mjk}^l = Y_{m|jk}^l \quad \text{e} \quad \Phi_{mjk}^l = \gamma_{jk} Y_m^l, \quad (\text{B.1.3})$$

temos que $j, k \in \theta, \phi$ e a barra antes dos índices jk , na primeira equação de B.1.3, indica a derivada covariante em relação à métrica γ , que é a métrica na superfície da esfera. As componentes de γ são:

$$\begin{aligned} \gamma_{22} &= 1; \\ \gamma_{23} &= \gamma_{32} = 0; \\ \gamma_{33} &= \text{sen}^2 \theta, \end{aligned}$$

de forma análoga aos harmônicos esféricos vetoriais, nesse caso a paridade é da forma $(-1)^l$.

Fazendo a expansão da perturbação em harmônicos esféricos, obtemos:

$$\begin{aligned} \xi_r &= X(r)Y_m^l; & \xi_\theta &= V(r)\Psi_{m2}^l; & \xi_\phi &= V(r)\Psi_{m3}^l; \\ h_{tt} &= e^\nu H_0(r)Y_m^l; & h_{t,r} &= H_1(r)Y_m^l; & h_{rr} &= e^\lambda H_2(r)Y_m^l; \\ h_{0j} &= h_0(r)\Psi_{mj}^l; & h_{1j} &= h_1(r)\Psi_{mj}^l; \\ h_{jk} &= r^2 G(r)\Psi_{mjk}^l + r^2 H(r)\Psi_{mjk}^l. \end{aligned}$$

em todas as expressões os índices l e m indicam somatórios, reprimidos para não sobrecarregar a notação. Como vemos, as quantidades dependem apenas de variáveis espaciais, pois tratamos de uma perturbação estática.

Agora, vamos utilizar a simplificação de calibre de Reege-Wheeler, a fim de simplificar as perturbações da métrica de Schwarzschild. Seja $x^{\nu'} = x^\mu + \eta^\mu(x)$, podemos escrever a perturbação na métrica da seguinte forma:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \eta_{\mu;\nu} + \eta_{\nu;\mu},$$

para as transformações de coordenadas pares, vamos escrever as componentes do vetor η tal que:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= M_0(r)Y_m^l; \\ \eta_1 &= M_1(r)Y_m^l; \\ \eta_j &= M_2(r)\Psi_{mj}^l. \end{aligned}$$

em que as funções M_0 , M_1 e M_2 são funções arbitrárias, escolhidas a fim de anular as funções h_0 , h_1 e G . Assim, a perturbação será:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} H_0(r)e^\nu & H_1(r) & 0 & 0 \\ H_1(r) & e^\lambda H_2(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta K(r) \end{pmatrix} Y_l^m(\theta, \phi)$$

Vamos adicionar um parâmetro ζ na Equação A.0.1: $g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu} + \zeta h_{\mu\nu}$ ¹. A métrica perturbada, na forma matricial é dada por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^\nu(-1 + \zeta H_0(r)Y_m^l) & \zeta H_1(r)Y_m^l & 0 & 0 \\ \zeta H_1(r)Y_m^l & e^\lambda(1 + \zeta H_2(r)Y_m^l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2(1 + \zeta K(r)Y_m^l) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta(1 + \zeta K(r)Y_m^l) \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.4})$$

os termos Y_m^l têm dependência com as coordenadas (θ, ϕ) , suprimida para a melhor observação da matriz.

B.2 EQUAÇÕES DE EINSTEIN PERTURBADAS

Como já definimos a forma da perturbação, podemos inseri-la nas equações de Einstein e observar alguns comportamentos. Por enquanto, vamos olhar apenas para a parte perturbativa:

$$\delta G_V^\mu = 8\pi \delta T_V^\mu. \quad (\text{B.2.1})$$

Vamos tratá-la dessa forma pois o único índice levantado facilitará nosso cálculo de δT – pois precisaremos de poucas informações referentes à quadrivelocidade. Em tempo, analisaremos apenas perturbações lineares, assim, qualquer termo de segunda ordem ou mais será negligenciado.

B.2.1 Componentes do tensor energia-momento com perturbação

Para determinar as componentes do tensor energia-momento perturbado, partiremos da Eq.A.0.3, levantando um índice da métrica, temos: $T_V^\mu = (\varepsilon + p)u^\mu u_\nu + p\delta_V^\mu$, aplicando a perturbação:

$$\delta T_V^\mu = (\delta\varepsilon + \delta p)u^\mu u_\nu + ({}^{(0)}\varepsilon + {}^{(0)}p)(\delta u^\mu u_\nu) + \delta p\delta_V^\mu, \quad (\text{B.2.2})$$

em que o vetor da quadrivelocidade pode ser escrita como uma soma da parte não perturbada e a perturbação: $u^\mu = {}^{(0)}u^\mu + \delta u^\mu$.

Como estamos tratando de um sistema com perturbação estática, tanto na configuração de equilíbrio quanto na perturbada, o deslocamento do fluido não depende do tempo. Podemos escrever o vetor da quadrivelocidade de um elemento do fluido como:

$$\mathbf{u} = \left({}^{(0)}u^0 + \delta u^0, 0, 0, 0 \right),$$

as componentes u^1 , u^2 e u^3 envolvem derivadas do vetor deslocamento e, em uma configuração estática, são nulas.

¹ O índice ${}^{(0)}E$ indica o termo de determinada grandeza E em um regime sem perturbação

Agora, vamos impor uma normalização ${}^{(0)}g_{\mu\nu}{}^{(0)}u^\mu{}^{(0)}u^\nu = -1$ para determinar o valor de ${}^{(0)}u^0$. Obtemos ${}^{(0)}u^0 = e^{-\nu/2}$. Para o cálculo de δu^0 , faremos:

$$\left({}^{(0)}g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right) \left({}^{(0)}u^\mu + \delta u^\mu\right) \left({}^{(0)}u^\nu + \delta u^\nu\right) = -1,$$

considerando apenas termos de primeira ordem:

$$2 \left({}^{(0)}g_{00}\right) \left({}^{(0)}u^0\right) (\delta u^0) + (h_{00}) \left({}^{(0)}u^0\right) \left({}^{(0)}u^0\right) = 0.$$

Substituindo as componentes, teremos:

$$\delta u^0 = \frac{1}{2} H_0(r) e^{-\nu/2} Y_l^m(\theta, \phi),$$

sendo: $\mathbf{u} = \left(e^{-\nu/2}(1 + H_0/2), 0, 0, 0\right)$. Ainda precisamos das componentes de u_μ , conforme a Eq. B.2.2, então:

$$u_\mu = u^\nu g_{\nu\mu},$$

a única componente não nula será u_0 , em que: $u = \left({}^{(0)}u_0 + \delta u_0, 0, 0, 0\right)$

Assim:

$$u_0 = \left[-e^{\nu/2} \left(1 - \frac{H_0}{2}, 0, 0, 0\right)\right].$$

Como já determinamos a forma da quadrivelocidade, podemos então calcular as componentes do tensor energia-momento. Da Eq. B.1.4, podemos começar calculando a componente δT_0^0 :

$$\delta T_0^0 = (\delta \varepsilon + \delta p) u^0 u_0 + \left({}^{(0)}\varepsilon + {}^{(0)}p\right) (\delta u^0 u_0 + u^0 \delta u_0) + \delta p,$$

$$\delta T_0^0 = -\delta \varepsilon. \quad (\text{B.2.3})$$

Como a maior parte das componentes da quadrivelocidade são nulas, da Eq. B.1.4 só resta o termo δp , assim:

$$\delta T_1^1 = \delta T_2^2 = \delta T_3^3 = \delta p, \quad (\text{B.2.4})$$

todas as outras componentes são nulas.

B.2.2 Componentes do tensor de Einstein perturbado

Vamos calcular as componentes do tensor de Einstein partindo das definições:

$$\begin{cases} G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \\ R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu\Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu\Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\beta\nu}^\xi\Gamma_{\xi\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu}^\eta\Gamma_{\eta\nu}^\alpha \\ \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \end{cases} \quad (\text{B.2.5})$$

em que $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é o escalar de Ricci, $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ é o tensor de curvatura de Riemann e $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ são os símbolos de Christoffel em termos da métrica. Olhando para a equação de Einstein com perturbação (Eq. B.2.1), temos que $\delta G_t^r = 0$, assim:

$$H_1 = 0,$$

de $\delta G_\theta^\theta - \delta G_\phi^\phi = 0$, temos:

$$H_0(r) = H_2(r) = H(r). \quad (\text{B.2.6})$$

Da equação $\delta G_\theta^r = 0$, obtemos as relações:

$$K'(r) = H(r)v'(r) + H'(r), \quad (\text{B.2.7})$$

$$K''(r) = H'(r)v'(r) + H(r)v''(r) + H''(r). \quad (\text{B.2.8})$$

Agora, vamos analisar a equação $\delta G_\theta^\theta - \delta G_\phi^\phi = 16\pi\delta p$, considerando os resultados B.2.6, B.2.7 e B.2.8, após simplificações:

$$2H\frac{e^{\lambda(r)}Y}{2r}(v' + \lambda') = 16\pi\delta,$$

utilizando a Eq. A.0.6, que nos dá uma relação para $dv/dr = v'$, e a Eq. A.0.2, que nos dá a relação entre $\lambda(r)$ e $m(r)$, temos:

$$\delta p = \frac{1}{2}H(r)Y(\theta, \phi)(p + \varepsilon).$$

Por fim, temos a equação $\delta G_t^t - \delta G_r^r = 8\pi(-\delta p - \delta\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\lambda(r)}}{2r^2}Y(\theta, \phi)H(r)2rH(r)[\lambda'(r) + v'(r)] + 4rK'(r) - r^2K'(r)[\lambda'(r) + v'(r)] + 2rK''(r) + \\ + 2e^{\lambda(r)}[csc^2\theta\partial_{\phi\phi}Y + cot\theta\partial_\theta Y + \partial_{\theta\theta}Y] = 8\pi(\delta p - \delta\varepsilon), \end{aligned}$$

fazendo as substituições dos resultados já obtidos e usando a relação $csc^2\theta\partial_{\phi\phi}Y + cot\theta\partial_\theta Y + \partial_{\theta\theta}Y = l(l+1)Y$, temos:

$$H'' + C_1H' + C_0H = 0, \quad (\text{B.2.9})$$

em que:

$$C_1 = \frac{2}{r} + \frac{1}{2}(v' - \lambda') = \frac{2}{r} + e^\lambda \left[\frac{2m}{r} + 4\pi r(p - \varepsilon) \right],$$

$$C_0 = e^\lambda \left[\frac{-l(l+1)}{r^2} + 4\pi(\varepsilon + p) \frac{d\varepsilon}{dp} + 4\pi(5\varepsilon + 9p) \right] - (v')^2.$$

B.3 SOLUÇÃO PARA A PERTURBAÇÃO $H(R)$

A solução dessa equação diferencial será em duas partes: regime interno e regime externo. No externo, teremos uma solução analítica, pois para $r > R$, densidade e pressão são iguais a zero. No regime interno as funções de densidade e pressão serão diferentes de zero, então precisamos analisar a equação computacionalmente. Ao fim, iremos forçar uma solução contínua para que sejam definidos os números de Love.

B.3.1 Solução de $H(r)$ no regime interno

Vamos começar a solução da Eq. B.2.9 no regime interno junto com as Equações da TOV, A.0.4, A.0.5 e A.0.6, partindo de um raio pequeno, $r \sim 10^{-6}$, com valores iniciais para H , H' , v , m e p . Ainda, vamos precisar de uma análise para o entorno do ponto $r = 0$, para analisar o comportamento de $H(r)$. Já sabemos como as Equações da TOV se comportam perto da origem.

Primeiro, vejamos como a Eq. B.2.9 se comporta quando $r \rightarrow 0$:

$$H'' + \frac{2}{r}H' + \left\{ \frac{-l(l+1)}{r^2} + 4\pi \left[[p(0) + \varepsilon(0)] \frac{d\varepsilon}{dp}(0) + 5\varepsilon(0) + 9p(0) \right] \right\} H = 0, \quad (\text{B.3.1})$$

queremos entender como é o comportamento de $H(r)$ perto do ponto $r = 0$, para determinar as condições iniciais para a integração. Podemos identificar que a equação acima é da forma:

$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 2x \frac{dy(x)}{dx} + [ax^2 - l(l+1)]y(x) = 0,$$

cujas soluções são dadas por funções de Bessel esféricas: $y(x) = A j_l(ax) + B y_l(ax)$, sendo j_l a função de Bessel esférica de primeira espécie e y_l de segunda espécie, e a um termo constante que multiplica $H(r)$ na Equação B.3.1.

Temos que y_l diverge na origem, então exigimos que $B = 0$. Podemos relacionar as funções de Bessel esféricas com as funções de Bessel da forma:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x),$$

também sabemos que próximo de $x = 0$, $J_\alpha(x) \sim x^\alpha$. Assim, para $r \geq 0$: $H(r) \approx A' r^l$, sendo A' uma constante. Agora, podemos tirar as condições iniciais para o cálculo. Os valores a serem utilizados na perturbação do regime interno serão impostos pela derivada logarítmica de H , da seguinte forma:

$$y^{int} = \frac{rH'}{H}$$

assim, não há preocupação com a constante A' . As condições iniciais para a integração para $r \geq 0$:

$$\begin{cases} H(r) = r^l \\ H'(r) = lr^{l-1} \end{cases}$$

B.3.2 Solução de $H(r)$ no regime externo

Obteremos a solução neste regime de forma analítica, por meio de simplificações: $\varepsilon = 0$, $p = 0$ e $m = M$. Substituindo na Eq. B.2.9:

$$r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) H'' + \left[2r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + 2Mr\right] H' + \left[-l(l+1) - \frac{4M}{r^2(1 - 2M/r)}\right] H = 0,$$

substituindo r por $x = r/M - 1$, temos:

$$(1 - x^2)H'' - 2xH' + \left[l(l+1) - \frac{4}{1-x^2}\right] H = 0,$$

em que os apóstrofes indicam derivadas em relação a x .

É possível identificar que a equação se assemelha a equação associada de Legendre para $m = 2$. Assim, temos:

$$H(x) = a_P \hat{P}_l^2(x) + a_Q \hat{Q}_l^2(x), \quad (\text{B.3.2})$$

sendo \hat{P}_l^2 e \hat{Q}_l^2 funções associadas de Legendre de primeira e segunda espécie. Temos, com $m = 2$, que:

$$\hat{P}_l^2(x) = (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} \frac{2}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l.$$

Queremos o caso que $r \rightarrow \infty$, ou seja, quando $x \rightarrow \infty$. Vamos olhar para o termo de maior potência em x :

$$P_l^2(x) \approx \frac{(1 - x^2)}{2^l l!} (2l)(2l-1) \dots (l-1) x^{l-2},$$

o termo de maior ordem será dado por:

$$P_l^2(x) \approx -\frac{(2l)!}{2^l l! (l-2)!} x^l.$$

Vamos normalizar da seguinte forma:

$$\hat{P}_l^2(x) = -\frac{2^l l! (l-2)!}{(2l)!} P_l^2(x),$$

para que no limite assintótico tenhamos: $\hat{P}_l^2(x) \sim x^l$. Agora, façamos a mesma análise para a função associada de Legendre do segundo tipo:

$$Q_l^2(x) \approx -\frac{l!(l+1)(l+2)}{(2l+1)!!}x^{-(l+1)}.$$

Normalizando da forma:

$$\hat{Q}_l^2(x) = -\frac{(2l+1)!!}{l!(l+1)(l+2)}Q_l^2(x),$$

temos que no limite assintótico $\hat{Q}_l^2(x) \sim 1/x^{l+1}$.

Agora, definimos uma constante $a_l = a_Q/a_P$, a ser descoberta pelas condições de contorno na superfície da estrela. A derivada logarítmica exterior é:

$$y_l^{ext}(x) = \frac{rH'}{H} = (1+x) \frac{\hat{P}_{l2}'(x) + a_l \hat{Q}_{l2}'(x)}{\hat{P}_{l2}(x) - a_l \hat{Q}_{l2}(x)}.$$

E vamos exigir que a solução interna e externa se igualem na superfície:

$$y_l^{int}(R) = y_l^{ext}(R) = y_l(R).$$

B.3.3 Continuidade na superfície da estrela

É razoável considerar a continuidade das funções H e H' na superfície da estrela, mas é necessária alguma cautela pois algumas funções, como a pressão, não admitem expansão em série de Taylor em $r - R$ quando $r \rightarrow R$. Na Equação B.2.9, o termo que contém $d\varepsilon/dp$ é singular quando $\gamma > 2$, pois para qualquer politropo é possível mostrar que $p(r) \propto (r - R)^{\gamma/(\gamma-1)}$, sendo:

$$(\varepsilon + p) \frac{d\varepsilon}{dp} \propto (r - R)^{(2-\gamma)/(\gamma-1)}.$$

Apesar dessa singularidade, é possível verificar que a continuidade é garantida no caso $\gamma < \infty$. Logo, temos a continuidade da derivada logarítmica $y_l^{int}(R) = y_l^{ext}(R)$. Isolando a_l :

$$a_l = \frac{\hat{P}_{l2}'(x) - C_{yl} \hat{P}_{l2}^2(x)}{\hat{Q}_{l2}'(x) - C_{yl} \hat{Q}_{l2}^2(x)},$$

com $x = R/M - 1$ e C é a compacidade definida por $C = GM/Rc^2$.

Temos o potencial gerado pelo corpo analisado e pelos corpos externos:

$$U_A = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{l!} \frac{n^{<L>} I_L^A}{r^{l+1}} = \sum_l U_l^A, \quad (\text{B.3.3})$$

$$U_{mare} = - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!} r^l n^{<L>} \varepsilon_L(t) = \sum_l U_l^{mare}, \quad (\text{B.3.4})$$

em que I_L^A são os momentos de multipolo de massa gerados pelo corpo analisado e ε_L são os momentos de maré gerados pelos corpos externos. Quando $r \rightarrow \infty$ o termo dominante de \hat{P}_l^2 , da Eq. B.3.2 será:

$$H(r)_{aumen} = a_P \hat{P}_l^2(x) \sim a_P \left(\frac{r}{M}\right)^l,$$

e o termo dominante quando $r \rightarrow \infty$ de \hat{Q}_l^2 é:

$$H(r)_{dimin} = a_Q \hat{Q}_l^2(x) \sim a_Q \left(\frac{r}{M}\right)^{-(l+1)}.$$

Podemos relacionar os momentos por meio de uma constante de proporcionalidade: $I_L^A = \mu_l \varepsilon_L^A$ e, substituindo na Eq. B.3.3:

$$U_A = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{l!} \mu_l \frac{\varepsilon_L n^{<L>}}{r^{l+1}}.$$

Agora, podemos calcular a razão U_l^A/U_l^{mare} , conforme as Equações B.3.3 e B.3.4:

$$\frac{U_l^A}{U_l^{mare}} = \frac{\mu_l (2l-1)!!}{r^{(2l+1)}},$$

e relacionando com $H(r)_{dimin}/H(r)_{aumen}$ em $r = R$:

$$\frac{\mu_l (2l-1)!!}{R^{(2l+1)}} = a_l \left(\frac{M}{R}\right)^{2l+1}.$$

Recuperando os fatores de C e G , temos:

$$\frac{\mu_l G (2l-1)!!}{R^{(2l+1)}} = a_l C^{2l+1},$$

podemos comparar essa equação com a definição newtoniana dos números de Love:

$$GI_{<L>} = -\frac{2k_l R^{(2l+1)}}{(2l-1)!!} \varepsilon_{<L>}.$$

Assim, temos a expressão para os números de Love:

$$k_l = \frac{1}{2} a_l C^{2l+1} = -\frac{1}{2} C^{2l+1} \frac{\hat{P}_{l2}'(x) - C_{yl} \hat{P}_{l2}(x)}{\hat{Q}_{l2}'(x) - C_{yl} \hat{Q}_{l2}(x)}, \quad (\text{B.3.5})$$

aplicado em $x = R/M - 1$.

Agora, escrevendo explicitamente k quando $l = 2$:

$$k_2 = \frac{8C^5}{5} (1-2C)^2 [2+2C(y-1)-y] \times \{2C[6-3y+3C(5y-8)] + 4C^3[13-11y+C(3y-2) + 2C^2(1+y)] + 3(1-2C)^2 [2-y+2C(y-1)] \ln(1-2C)\}^{-1}. \quad (\text{B.3.6})$$




sendo o parâmetro y definido como $y = RH_0'(R)/H_0(R)$.

ANEXO A – ARTIGO

Neste anexo está incluído o artigo *A Method to Fit Phase Diagrams of Slow-Rotation Pulsars with Accretion Columns*, publicado em janeiro de 2023 na revista *MDPI Galaxies*. O artigo foi desenvolvido pelo grupo de pesquisa em Astrofísica Relativística Computacional da UDESC – com participação da autora desta dissertação – com colaboração das instituições: INPE, UFES e USP.

Article

A Method to Fit Phase Diagrams of Slow-Rotation Pulsars with Accretion Columns

Rodrigo R. Silva ^{1,†,‡}, Rafael C. R. de Lima ^{2,*} , Jaziel G. Coelho ^{1,3,‡} , Paulo E. Stecchini ^{1,4,‡},
Caroline M. de Liz ^{2,‡} and José C. N. de Araujo ^{1,†,‡} 

¹ Divisão de Astrofísica, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Avenida dos Astronautas 1758, São José dos Campos 12227-010, SP, Brazil

² Departamento de Física, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville 89219-710, SC, Brazil

³ Núcleo de Astrofísica e Cosmologia (Cosmo-Ufes), Departamento de Física, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória 29075-910, ES, Brazil

⁴ Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo, São Paulo 05508-900, SP, Brazil

* Correspondence: rafael.lima@udesc.br

† These authors contributed equally to this work.

‡ These authors contributed equally to this work.

Abstract: We demonstrate a method to simulate a pulse profile of the emission of accretion columns in a neutron star. Given a set of parameters that characterize the star, e.g., mass and radius, and the positions and shapes of the accretion columns, the pulse profile can be calculated and compared with real data. Some characteristics of phase diagrams are shown considering an accretion column in the form of a cone trunk and also in the form of a cylinder. Furthermore, in our first approach we develop a combination between a genetic algorithm and a Bayesian sampling algorithm to constrain some variables. Finally, as an example, we apply the method to observed data of source 1A 0535+262.

Keywords: 1A 0535+262; accretion column; pulse profile



Citation: Silva, R.R.; de Lima, R.C.R.; Coelho, J.G.; Stecchini, P.E.; de Liz, C.M.; de Araujo, J.C.N. A Method to Fit Phase Diagrams of Slow-Rotation Pulsars with Accretion Columns. *Galaxies* **2023**, *11*, 18. <https://doi.org/10.3390/galaxies11010018>

Academic Editors: Roberto Mignani and Yosuke Mizuno

Received: 29 September 2022

Revised: 9 January 2023

Accepted: 12 January 2023

Published: 16 January 2023



Copyright: © 2023 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

Pulsars are compact objects with emission characterized by the beam of radiation emitted from their magnetic poles. In binary systems, there can be an accretion of matter from the companion star to the magnetic poles of the pulsar, forming what are called accretion columns [1]. Accreting millisecond X-ray pulsars (AMXPs) are believed to be neutron stars in low mass X-ray binaries [2].

The accretion columns formed in those systems can have several shapes as filled funnel, hollow funnel, and pancaked or spaghetti (when instabilities are predominant) [1]. The filled funnel occurs when infalling matter comes with spherical symmetry [3]. The photons scattered through the walls of the column are called fan beam, whereas the photons that go upwards compound a pencil beam. Even though the type of emission is related to the accretion rate, a combination of fan beam and pencil beam cannot be discarded [4].

Falkner [5] developed a three-dimensional full cylindrical-shaped antipodal accretion column simulation and used the Beloborodov ray-tracing model [6] to calculate the pulse profile formed by the X-ray photons coming from the column. There, the geodesics were determined through the bilinear interpolation of some integrated points from the surface. The hot spots may have arbitrary sizes and locations (see also [7]). Furthermore, we allow different shapes for the accretion columns, e.g., cone trunk and cylindrical, as illustrated in Figure 1.

One pulsar believed to have accretion columns is 1A 0535+262, one of the best-studied high mass X-ray binary (HMXB) of the galaxy. The system is composed of a Be star and a neutron star with an orbital period of ~ 111 d [8] and a spin period of ~ 104 s [9]. From this pulsar, Doroshenko [10] has noted a spectral softening that could be explained by the

presence of accretion columns. Caballero [11] has done a pulse profile decomposition and found a good match with a neutron star $M = 1.4 M_{\odot}$, $R = 10$ km and an accretion column height of 0.5 km.

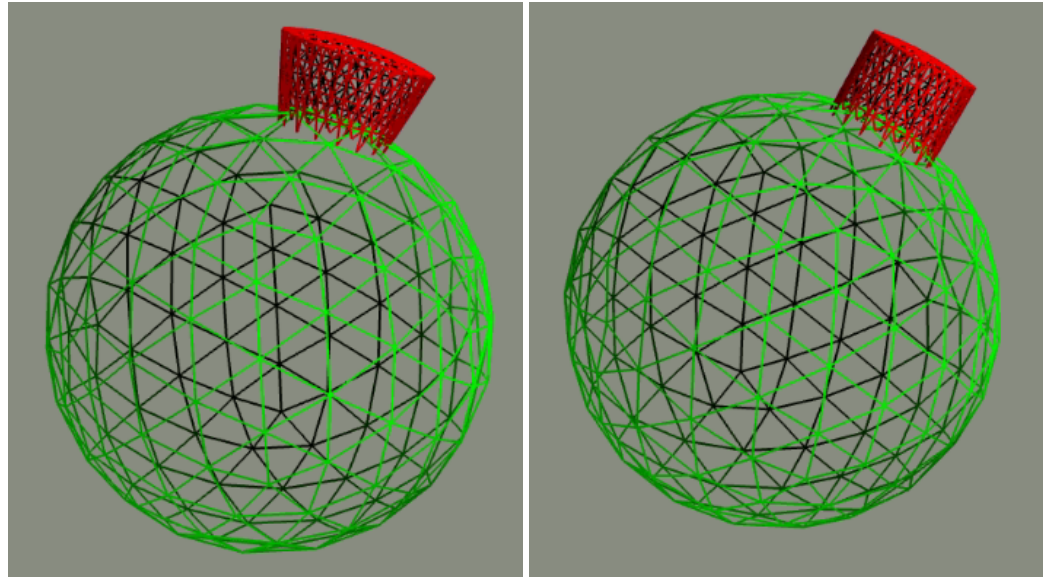


Figure 1. Two columns shapes, cone trunk shape in the left, and a cylindrical shape in the right.

1A 0535+262 long spin period makes it unnecessary to consider fast spin effects. The data available from the NuSTAR mission covers hundreds of spin periods and takes place in a quiescent phase of the source, making 1A 0535+262 a good candidate for finding accretion-column effects on its phase diagram.

The main goal of the present paper is to reproduce the emission profile in the X-ray range of these accretion columns, in a star with two columns in independent positions, taking into account a Schwarzschild spacetime, gravitational redshift, and the relativistic Doppler effect. The simulation creates a three-dimensional structure of the columns, with cylindrical or conical shapes with cap-like structures in the bottom and top of the columns. At the same time, we created a table from integration with the results of the photon geodesics. By the bilinear interpolation of the table data, we found the emission angle and the impact parameter for each column emission point. The resulting simulation was in agreement with other studies carried out, and we compared its aspects for different column heights, column shapes and positions, and star radii. We then used algorithms for sampling (the genetic algorithm and Markov Monte Carlo chain) to determine the best parameters that described the pulse profile of the source 1A 0535+262.

To do so, this paper is organized as follows. In Section 2, we present how the calculations are done and discuss the obtained results. Finally, in Section 3 we summarize the main conclusions and remarks about them.

2. Materials and Methods

In this section, we introduce the steps taken into our simulation of a neutron star with accretion columns. The parameters considered are the neutron star mass M , its radius R , the angular frequency f , and the angle of its rotational axis with the line of sight (LOS) i . We also have the parameters of the columns' positions and shape, which are the semi-aperture angle θ_0 ; its latitude θ ; its longitude ϕ , where the north was set to the column rotational axis; its column height H ; and its column temperature T . Some of those coordinates are illustrated in Figure 2.

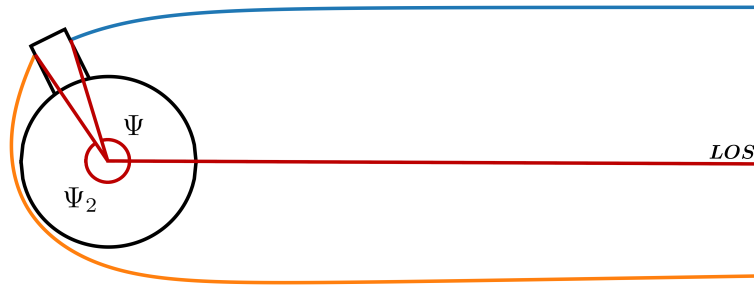


Figure 3. Two possible trajectories for the fan beam of an accretion column. The blue one shows a trajectory in which the periastron is the emitting point. The yellow trajectory has a periastron along the way, and the emitting point is positioned on the back of the column.

The solution needs to be taken apart in two steps, one where the photon goes from the emission point to the periastron and another where it leaves the periastron and goes to the observer. Therefore, one needs to know beforehand if the trajectory has a periastron or not. To do that, Ψ is calculated from a list of R and α through numerical integration, i.e.,

$$\Psi(R) = \int_R^\infty \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2} dr, \quad (1)$$

where $r_s = 2M$ is the Schwarzschild radius, where it is used the geometric unit system with $G = c = 1$. This is solved by Romberg's method provided by the SCIPY library for Python. The impact parameter is related to R and α through the expression

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{R} \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}}. \quad (2)$$

When $\alpha > \pi/2$, the trajectory has a periastron and then the angle between its radial direction and the LOS, Ψ^* , is

$$\Psi^*(R) = 2\Psi(r_p) - \Psi(R), \quad (3)$$

where $\Psi(r_p)$ is the same angle when the photon is precisely on the periastron and $\Psi(R)$ is the angle when it crosses the emitting radius. Further, knowing that $\alpha^* = \pi - \alpha$, $\Psi(R)$ can be retrieved via bilinear interpolation from a table containing the values for R , Ψ , and α . Therefore, we are able to read from this table the value for any α , given R and Ψ through bilinear interpolation; see Figure 4.

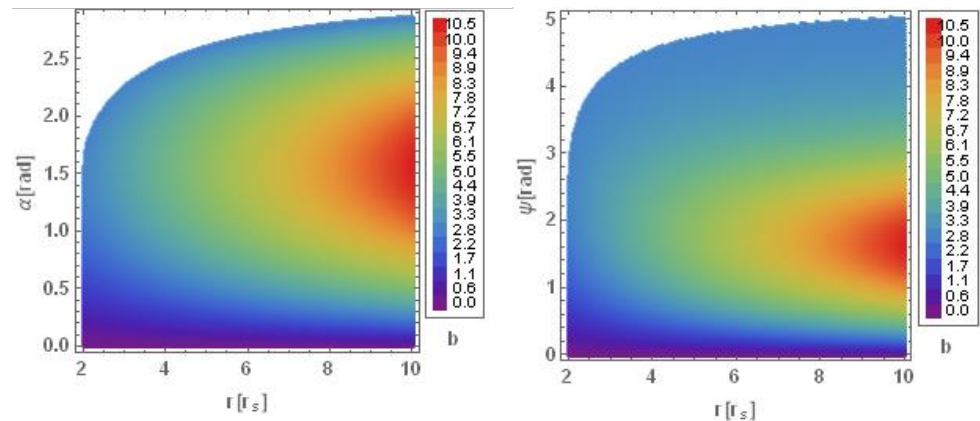


Figure 4. Relations between the parameters (R , Ψ , b , α). The two figures shows the distribution in the $r - \alpha$ and $r - \Psi$ plane, respectively. The colors are associated with the parameter b . These plots were made with 500 values for R and Ψ .

2.2. Object Creation

In order to calculate the flux, the coordinates of each subdivision of the accretion columns are needed. This was obtained by the *pymesh* platform in python. The mesh of the star and its accretion columns can be created by adding and subtracting three dimensional geometrical forms. We have used cylindrical and cone trunks. The top of each column is closed with a spherical cap, in order that a column tends to a polar cap as its height tends to zero. Additionally, *pymesh* provides the objects (stellar surface and columns) subdivisions, its baricenters, and its normal vectors, which are all needed to perform the calculations. Figure 1 shows how the accretion columns are visualized by the simulation.

2.3. Flux Calculation

Given the coordinates of an emitting subdivision of the column, its flux is calculated by ([12])

$$dF = I' \delta^4 (1 - u)^2 \cos \gamma' \frac{dS'}{D^2}, \quad (4)$$

where I' is the intensity in the corotating frame, δ is the Doppler shift, $u = r_s/r$, γ' is the angle between the direction of emission and the normal to the element, and dS' is the area of the element and D the distance to the source. The $\delta^4(1 - u)^2$ term accounts for Doppler and gravitational redshift effects. For the present analysis, an isotropic blackbody emission from the columns is assumed since our purpose here is to see geometrical effects only. Additionally, the distance of the source to the observer is not a necessary feature since the flux is normalized through

$$F_{norm} = \frac{F}{(F_{max} + F_{min})/2}. \quad (5)$$

After the flux for each subdivision is calculated, the star is rotated around its rotational axis, starting the flux count from the beginning. This process is repeated until the flux for the whole rotation is obtained.

2.4. Data Selection and Reduction

The data employed to constrain the parameters of 1A 0535+262 were retrieved from its longest available observation from the NuSTAR mission [13] archival database. This observation (ObsID 90401370001) occurred on 26 December 2018, three months after the type-I outbursts, when the source was in a deep quiescent state with luminosities as low as $\sim 7 \times 10^{34} \text{ erg s}^{-1}$ [14]. The observation lasted (total span time) approximately 33 h, with an effective on-source time (i.e., exposure time) of about 15 h ($\sim 55 \text{ ks}$).

Data were reduced following the standard procedures of the NuSTAR Data Analysis Software (NUSTARDAS pipeline v2.0); calibration files from CALDB version 20210427 were used. The source and background to generate lightcurves were extracted, respectively, from a $\sim 75 \text{ arcsec}$ region centred on the source position and from a source-free region—on the same detector—of $\sim 95 \text{ arcsec}$. A Barycenter correction with the FTOOL *barycorr* was applied.

2.5. Genetic Algorithm

Inspired by natural selection, the genetic algorithm (GA) is a programming technique in which the parameters, e.g., M and R, are treated as genes and a set of free parameters are treated as chromosomes. Following natural evolution, these chromosomes' phenotype, the pulse profile, must adapt to its surroundings, the data.

That said, the GA can be described by the following steps:

1. Initialization: the generation of a population of solutions (i.e., the chromosomes);
2. Phenotype evaluation: the calculation of each model solution's fitness;
3. The selection of the best solutions;
4. Reproduction: the genes of the best solutions are recombined;

5. Mutation: genes can be randomly selected and changed;
6. Population replacement.

The set composed of steps 2 to 6 is called a generation. In step 3, the best solutions are selected through the goodness-of-fit (χ) of a given solution, representing the square difference between the model and the observed data ,

$$\chi^2 = \sum_k [\bar{F}_k^{TOT} - \bar{F}_k^{OBS}]^2, \quad (6)$$

where \bar{F}_k^{TOT} is (4) summed over all observed points in an instant of rotation, normalized by Equation (5). \bar{F}_k^{OBS} is the normalized observed flux of our data , and $k = 1 - N$, where N is the number of points observed in the lightcurve, so the difference in flux is summed over the period of the pulse profile. The best fit will have its χ^2 closer to zero [7].

In the present work, the GA has the sole objective of finding an adequate prior probability distribution for the Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method. Then, the MCMC algorithm is able to evolve the prior distribution according to Bayes' Theorem until a convergence criterion is reached. The MCMC method is discussed in the next section.

2.6. Markov Chain Monte Carlo

The Markov chain Monte Carlo (MCMC) method is a Bayesian sample method, i.e., it is based on the Bayes' theorem given by

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \quad (7)$$

where, in statistical language, $P(A)$ is the prior probability, $P(B|A)$ is the likelihood probability, and $P(A|B)$ is the posterior probability. The $P(B)$ is not important in the applied method.

In order to run the algorithm, a prior probability distribution must be provided. The prior is supposed to reflect our prior knowledge of each variable in the model. The genetic algorithm is responsible for producing the mean values for such distributions (see Section 2.5). Then, normal distributions are built around the mean values, which become the input distributions for the MCMC algorithm.

The likelihood $P(B|A)$ is the conditional probability distribution that given the true parameter value being A , the output B is observed. For a sample set, where the most recent is θ_k , the next sample is generated by the following:

1. Sampling: A parameter set θ' is taken from a proposal, a probability distribution function.
2. Evaluation: The new set is evaluated to know whether it is more likely or not by the ratio $f(\theta')/\theta_k$.
3. Selection: If it is more likely, θ' will be the new sample. Otherwise, the algorithm accepts it anyway within a predefined probability.

Where $f(\theta)$ is the prior times the likelihood [15].

3. Results

Figure 5 shows the parameter space, i.e., the posterior probability, for M and R calculated as depicted in Sections 2.5 and 2.6. For this result, we considered two columns with independent positions, cone trunk shapes, and a column height fixed at 1 km. The fit for 1A 0535+262 suggests $M = 1.53^{+0.52}_{-0.40} M_{\odot}$ and $R = 12.11^{+1.14}_{-0.87}$ km at 1σ (68%) confidence level (CL). Other parameters can be found in Table 1. Figure 6 shows a comparison between the observed data and the fitted theoretical model.

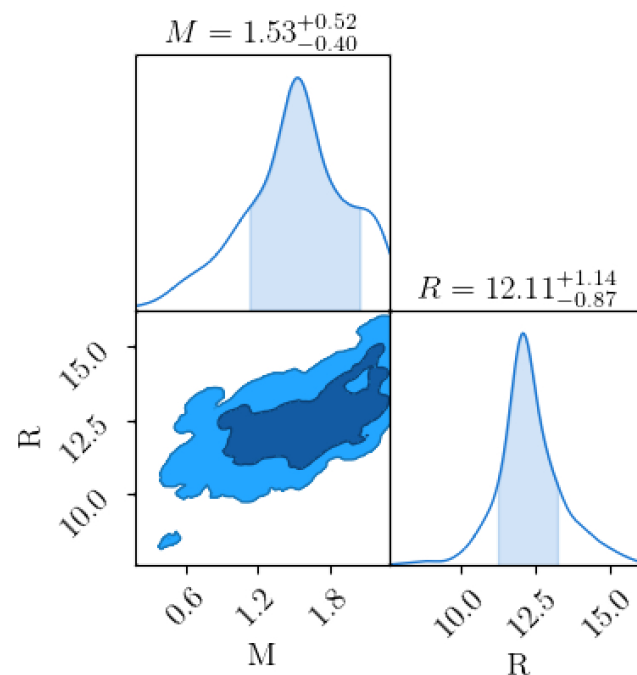


Figure 5. Parametric space at 1σ CL and one-dimensional marginalized distribution of M and R for two hot spots on the surface of 1A 0535+262. For completeness, M and R are measured in units of M_{\odot} , and km, respectively. The dark (light) blue shows the parametric space at 1σ (2σ) CL.

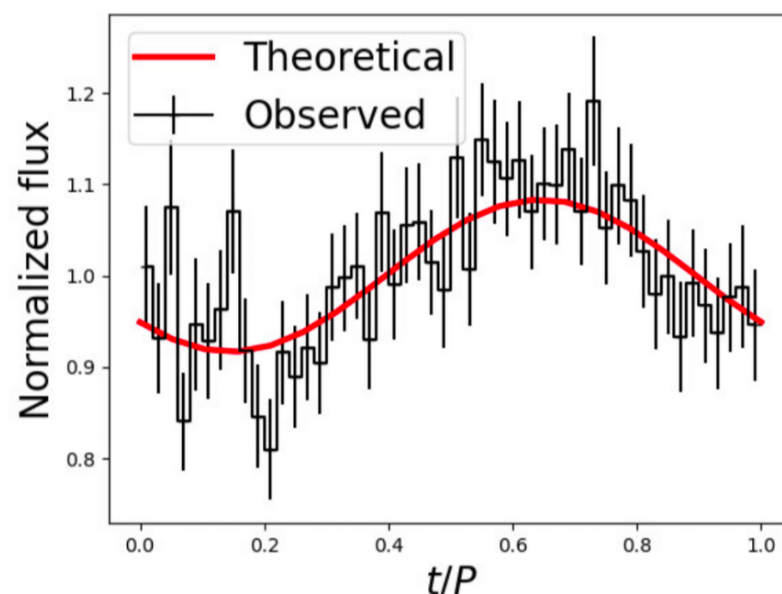


Figure 6. Phase diagram for the set of best parameters calculated in the posterior of the MCMC algorithm.

Figure 7 shows the phase diagrams for one column with height $H = 1.0$ km and different values for the semi-aperture θ_0 , e.g., 5° , 10° , 20° , and 30° . As expected, bigger apertures imply more pencil beam rays due to the increasing column area. Because of the rotation, sometimes, throughout the phase, the pencil beams are emitted in the observer direction (LOS). This increases the pulsed fraction with the widening of the difference between the higher flux and the lower one. Figure 8 shows the importance of the fan beams when $H \sim 1.0$ km. This contribution for the flux is dependent on the form of the column, as one can see in the lower plots of Figure 8. The reason for this is that, as defined

here, both have the same base size, i.e., the spot size, and therefore the cone trunk has more emission surface than the cylindrical column.

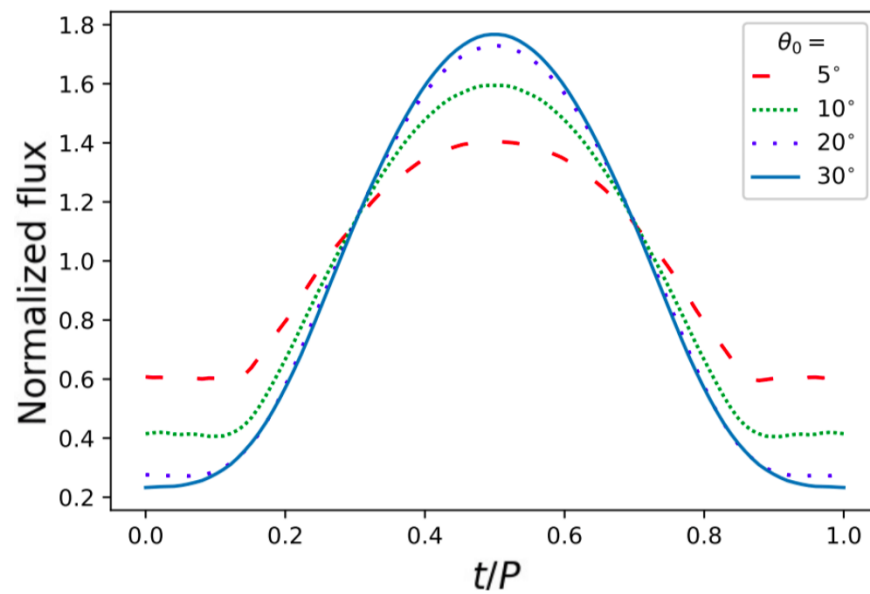


Figure 7. Phase diagrams for different values of angular semi-aperture θ_0 . The results are calculated for a column of height $H = 1.0$ km. The parameters are $M = 1.4 M_\odot$, $R = 12.0$ km, $i = 90^\circ$, $P = 1$ s, $\theta = 45^\circ$, and $\phi = 180^\circ$, $T = 0.7$ KeV.

Table 1. Best solutions with the parameters of the two accretion columns.

Best Solutions	
$M(M_\odot)$	$1.53^{+0.52}_{-0.40}$
$R(\text{km})$	$12.11^{+1.14}_{-0.87}$
i	$4.93^{+0.96}_{-1.22}$
θ_1	$50.4^{+2.3}_{-2.0}$
$\theta_{0\ 1}$	$72.3^{+2.1}_{-2.0}$
$T_1(\text{keV})$	$0.404^{+0.047}_{-0.066}$
θ_2	$321.1^{+1.7}_{-1.7}$
$\theta_{0\ 2}$	$48.0^{+1.1}_{-1.2}$
$T_2(\text{keV})$	$59.31^{+0.99}_{-0.98}$
ϕ_2	$0.955^{+0.035}_{-0.154}$

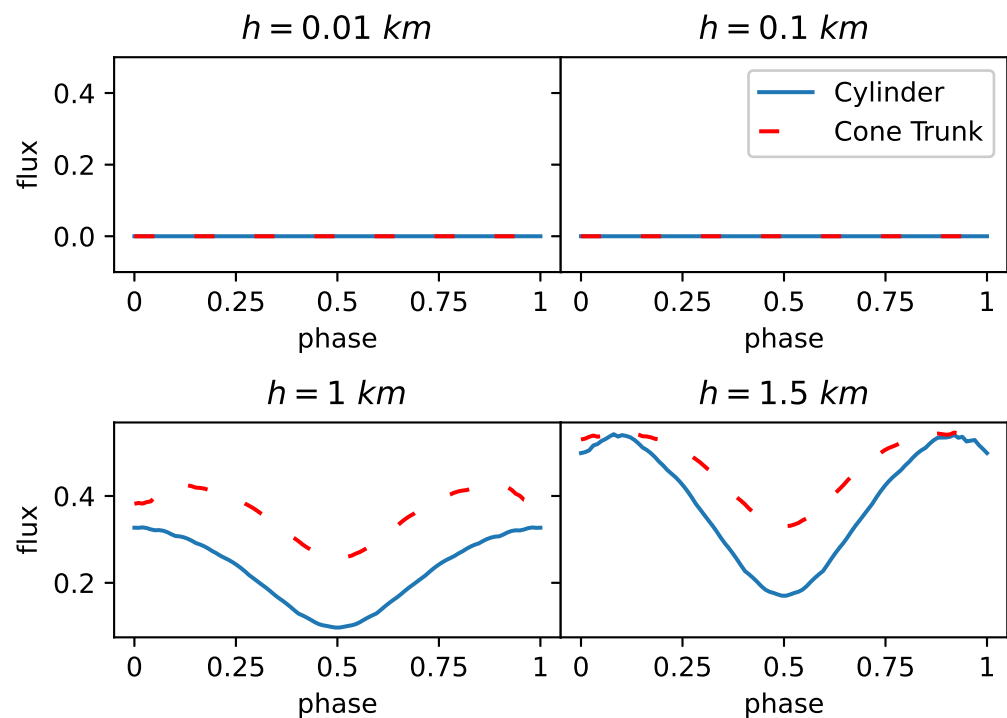


Figure 8. The fan beam phase diagrams for different column heights are shown. Blue continuous (red discontinuous) lines show results for cylindrical (cone trunks) columns. Parameters: $M = 1.4M_{\odot}$, $R = 12$ km, $i = 90^{\circ}$, $P = 1$ s, $\theta_{10} = 15^{\circ}$, $\theta_1 = 45^{\circ}$, $\phi_1 = 180^{\circ}$, and $T_1 = 0.7$ keV.

4. Summary

The simulation developed can create a pulse profile of a neutron star with accretion columns given a set of parameters ($M, R, f, i, \theta_0, \theta, \phi, H, T$), where the last four are given for each column. Some features of the pulse profile for that emission were observed, such as the increase in the flux due to the fan beam, as well as the change due to the chosen geometry for the column. With the assistance of sample algorithms, a set of parameters for the neutron star and the columns were constrained for the source 1A 0535+262.

Author Contributions: Conceptualization, R.C.R.d.L.; methodology, R.C.R.d.L. and R.R.S.; software, R.R.S. and C.M.d.L.; data curation, P.E.S.; writing—original draft preparation, J.G.C. and R.R.S.; writing—review and editing, J.G.C. and R.R.S.; supervision, J.C.N.d.A. and J.G.C. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: R.R.S. is grateful for the support of CAPES. R.C.R.d.L. acknowledges the support of Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC) under grant No. 2021TR912. J.G.C. is grateful for the support of CNPq (311758/2021-5), FAPESP (2021/01089-1), and NAPI “Fenômenos Extremos do Universo” of Fundação Araucária. P.E.S. acknowledges PCI/INPE/CNPq for financial support under grant #300320/2022-1.

Institutional Review Board Statement: Not applicable.

Informed Consent Statement: Not applicable.

Data Availability Statement: The data and the code underlying this article will be shared on reasonable request to the corresponding author.

Acknowledgments: We thank the referees for the thoughtful comments and suggestions that helped us to improve the presentation of our results.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

References

1. Mészáros, P. Radiation from accreting magnetized neutron stars. *Space Sci. Rev.* **1984**, *38*, 325. [\[CrossRef\]](#)
2. Patruno, A.; Watts, A.L. Accreting Millisecond X-ray Pulsars. In *Timing Neutron Stars: Pulsations, Oscillations and Explosions*; Belloni, T.M., Méndez, M., Zhang, C., Eds.; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2007; pp. 143–208.
3. Basko, M.; Sunyaev, R. The Limiting Luminosity of Accreting Neutron Stars with Magnetic Fields. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **1976**, *175*, 395–417. [\[CrossRef\]](#)
4. White, N.; Swank, J.; Holt, S. Accretion powered X-ray pulsars. *Astrophys. J.* **1983**, *270*, 711–734. [\[CrossRef\]](#)
5. Falkner, S. Light Bending around Neutron Stars. Master's Thesis, Fdr Karl Remeis Observatory Bamberg Astronomical Institute of the Friedrich-Alexander-University Erlangen-Nuremberg, Bamberg, Germany, 2012.
6. Beloborodov, A.M. Gravitational Bending of Light Near Compact Objects. *Astrophys. J. Lett.* **2002**, *566*, L85–L88. [\[CrossRef\]](#)
7. Lima, R.; Coelho, J.; Pereira, J.; Rodrigues, C.; Rueda, J. Evidence for a Multipolar Magnetic Field in SGR J1745-2900 from X-Ray Light-curve Analysis. *Astrophys. J.* **2020**, *889*, 165. [\[CrossRef\]](#)
8. Finger, M.; Wilson, R.; Harmon, B. Quasi-periodic Oscillations during a Giant Outburst of A0535+262. *Astrophys. J.* **1996**, *459*, 288–297. [\[CrossRef\]](#)
9. Rosenberg, F.D.; Eyles, C.J.; Skinner, G.K.; Willmore, A.P. Observations of a transient X-ray source with a period of 104 s. *Nature* **1975**, *256*, 628. [\[CrossRef\]](#)
10. Doroshenko, V.; Santangelo, A.; Doroshenko, R.; Caballero, I.; Tsygankov, S.; Rothschild, R. XMM-Newton observations of 1A 0535+262 in quiescence. *Astron. Astrophys.* **2014**, *561*, A96. [\[CrossRef\]](#)
11. Caballero, I.; Kraus, U.; Santangelo, A.; Sasaki, M.; Kretschmar, P. Analyzing X-ray pulsar profiles: Geometry and beam pattern of A 0535+26. *Astron. Astrophys.* **2011**, *526*, A131. [\[CrossRef\]](#)
12. Poutanen, J.; Beloborodov, A. Pulse profiles of millisecond pulsars and their Fourier amplitudes. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **2006**, *373*, 836–844. [\[CrossRef\]](#)
13. Harrison, F.; Craig, W.; Christensen, F.; Hailey, C.J.; Zhang, W.W.; Boggs, S.E.; Stern, D.; Cook, W.R.; Forster, K.; Giommi, P. The Nuclear Spectroscopic Telescope Array (NuSTAR) High-energy X-Ray Mission. *Astrophys. J.* **2013**, *770*, e103. [\[CrossRef\]](#)
14. Tsygankov, S.; Doroshenko, V.; Mushtukov, A.; Suleimanov, V.; Lutovinov, A.; Poutanen, J. Cyclotron emission, absorption, and the two faces of X-ray pulsar A 0535+262. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **2019**, *487*, L30–L34. [\[CrossRef\]](#)
15. Hilbe, J.; Souza, R.; Ishida, E. *Bayesian Models for Astrophysical Data*; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2017.

Disclaimer/Publisher's Note: The statements, opinions and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and not of MDPI and/or the editor(s). MDPI and/or the editor(s) disclaim responsibility for any injury to people or property resulting from any ideas, methods, instructions or products referred to in the content.