

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT**  
**MESTRADO EM FÍSICA**

**HUGNE SOARES CHAGAS**

**DINÂMICA DE UM NANOTUBO DE CARBONO CURVADO**  
**SUBMETIDO A PERTURBAÇÕES HARMÔNICAS**

**JOINVILLE**

**2021**

**HUGNE SOARES CHAGAS**

**DINÂMICA DE UM NANOTUBO DE CARBONO CURVADO  
SUBMETIDO A PERTURBAÇÕES HARMÔNICAS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Dinâmica não-linear.

Orientador: Dr. César Manchein

**JOINVILLE**

**2021**

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da  
Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Chagas, Hugne Soares  
Dinâmica de um nanotubo de carbono curvado submetido  
a perturbações harmônicas / Hugne Soares Chagas. -- 2021.  
83 p.

Orientador: César Manchein  
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de  
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa  
de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2021.

1. Nanotubos de carbono de parede simples. 2. Oscilador.  
3. Expoentes de Lyapunov. 4. Bifurcação. 5. Caos transiente.  
I. Manchein, César. II. Universidade do Estado de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de  
Pós-Graduação em Física. III. Título.

**HUGNE SOARES CHAGAS**

**DINÂMICA DE UM NANOTUBO DE CARBONO CURVADO SUBMETIDO A  
PERTURBAÇÕES HARMÔNICAS**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de **Mestre em Física** área de concentração em "Dinâmica Não-Linear", e aprovada em sua forma final pelo Curso de Mestrado em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina.

**Banca Examinadora:**

---

**Orientador**

Dr. César Manchein - UDESC

---

**Professor**

Dr. Holokx Abreu Albuquerque - UDESC

---

**Professor**

Dr. Rafael Marques da Silva - UFPR

Joinville, 27 de Maio de 2021

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais, Ubiraci e Luciana, pelo apoio irrestrito que foi dado a mim durante toda a minha vida acadêmica, preenchendo-me de afetos e cumplicidade, construindo com muito esforço as condições que me permitiram chegar até o final deste trabalho. Agradeço aos meus irmãos Túlio e Ariane pela corrente parceria. E agradeço à minha irmã Karlinha, que foi o ímã que me atraiu para a UDESC e foi o pedacinho da minha terra já me esperando aqui.

Sou imensamente grato ao meu primo e amigo Caíque, pessoa que influenciou fortemente os meus valores, que, quando eu cheguei em Joinville, ajudou-me financeiramente mesmo sem ter muitos recursos deste tipo, que me ensinou na prática a enxergar os 'fetiches' de uma sociedade alienante.

Agradeço ao meu orientador, o professor Dr. César Manchein, que, com muita paciência, guiou um aluno sem experiência na área da pesquisa e ofereceu toda a ferramenta necessária para meu desenvolvimento.

Venho aqui sem qualquer formalidade agradecer aos meus parças Fábio, Altamas e Faíque, companheiros de longa data, que preencheram e preenchem meu espírito com bom humor e jogos online.

Agradeço às pessoas que fizeram parte da minha formação em Física, em especial ao meu amigo William Barbosa, à professora Aurismácia Lima, que me fez ver como Física é *massa*, ao professor Dr. Jornandes Correia, que me ensinou que Física é também muita reflexão, à professora Dra. Cristina Porto, pelos quatro períodos de Física Geral, ao professor Dr. Ferdinand, pelas aulas de história da ciência e ao professor Dr. Jorge Anderson, pela competência como professor de Física.

Não poderia deixar de agradecer às comunidades de vôlei que pertenci durante minha estadia em Joinville: o time Ultravôlei-Joinville e a turma de vôlei do Germano Timm nas sextas à noite. É surpreendente o que este esporte me proporciona.

Muito grato à minha amiga e companheira Vitória pelos afetos e companheirismo. Com ela compartilhei grande parte dos meus momentos durante o desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço à CAPES pelo financiamento dos meus estudos e à UDESC, ressaltando os professores, os profissionais da limpeza e o laboratório de Dinâmica Não-Linear.

“O universo é aleatoriedade e dissipação, sim. Mas a aleatoriedade com direção pode produzir complexidade surpreendente.”

James Gleik

## RESUMO

O comportamento caótico é caracterizado pela aperiodicidade e pela dependência sensível do sistema às condições iniciais e aos valores de seus parâmetros de controle. O objetivo deste trabalho é investigar um modelo de nanotubo de carbono de parede simples curvado sob a influência de um forçamento harmônico a partir da variação dos seus parâmetros de controle, de modo a ampliar os resultados numéricos já encontrados na literatura e examinar a existência de multi-estabilidade e caos transiente, fenômenos recorrentes em sistemas dinâmicos que admitem caos. Através dos diagramas de Lyapunov, encontramos os valores dos parâmetros para os quais o sistema dinâmico pode ser regular ou caótico. Por meio dos diagramas de bifurcação, determinamos os valores críticos para os parâmetros, a partir dos quais o sistema sofre uma mudança topológica no seu retrato de fases. Verificamos a existência de regularidade e caos, e confirmamos a existência de caos transiente.

**Palavras-chaves:** Nanotubos de carbono de parede simples. Oscilador. Expoentes de Lyapunov. Bifurcação. Caos transiente.

## ABSTRACT

Chaotic Dynamics is characterized by non-periodic behavior and sensitive dependence of system equations on initial conditions and on the values of their control parameters. The aim of this work is to investigate a model of curved single-walled carbon nanotube under influence of a harmonic transverse load, by increasing the value of the control parameters, in order to expand numeric results found at literature and to track for the existence of multistability and transient chaos, recurrent phenomena at dynamical systems that allow chaos. Using Lyapunov diagrams we found the parameters values for which the dynamical system can behave in regular ways or may have chaotic behavior. By means of bifurcation diagrams, we determine critical parameters for which the system pass through a topological change in phase portrait. We verify the existence of regularity and chaos, and we confirm the existence of transient chaos.

**Key-words:** Single-walled Carbon Nanotubes. Oscillator. Lyapunov Exponents. Bifurcation. Transient Chaos.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Séries temporais da variável $x$ no sistema de Lorenz iniciadas a partir de duas condições iniciais muito próximas, a saber $P_1 = (-7.860616, -16.438335, 5.302712)$ e $P_2 = (-7.860, -16.438335, 5.302712)$ . Os valores dos parâmetros para a simulação foram $\sigma = 10$ , $r = 28$ e $b = 8/3$ .	17
Figura 2 – O atrator de Lorenz com trajetórias iniciando a partir das condições iniciais $P_1 = (-7.860616, -16.438335, 5.302712)$ em (a) e $P_2 = (-7.860, -16.438335, 5.302712)$ em (b).	19
Figura 3 – Representação do Conjunto de Cantor com diagrama de bifurcação sobressaído.	20
Figura 4 – Curva de Koch após quatro iterações.	20
Figura 5 – Nanotubos de carbono de parede simples (SWCNTs) vistos por um microscópio eletrônico de transmissão (TEM). (a) Típica amostra do produto de um procedimento de obtenção de SWCNTs contendo os nanotubos e estruturas amorfas de carbono. É necessário um processo de purificação para isolar os CNTs. (Barra para escala = 100 nm.) (b) Imagem ampliada de SWCNTs individuais. (Barra para escala = 10 nm.)	23
Figura 6 – Representação de uma órbita no espaço de estados tridimensional.	29
Figura 7 – Representação da evolução de um volume de condições iniciais no espaço de estados. Considerando um elemento de área da superfície deste volume, após a evolução temporal num intervalo de tempo $dt$ dos pontos nessa superfície, tem-se um elemento de volume $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} dt) dS$ .	30
Figura 8 – Atratores gerados pelo sistema de Rössler para os seguintes valores dos parâmetros: (a) $a = -0.1$ , $b = 0.2$ , $c = 5.7$ ; (b) $a = 0.1$ , $b = 0.1$ , $c = 6$ ; (c) $a = 0.2$ , $b = 0.2$ , $c = 5.7$ .	33
Figura 9 – Duas trajetórias iniciadas muito próximas distanciam-se exponencialmente num sistema caótico, mas permanecem confinadas numa região.	34
Figura 10 – Exemplo de um diagrama de Lyapunov.	38
Figura 11 – Diagrama de bifurcação do sistema dinâmico modelado pela equação diferencial $\ddot{q} + \mu\dot{q} + q + \beta q^2 + \gamma q^3 = f \cos(\omega t)$ . Foi construído através da variação do parâmetro $f$ no intervalo $0.5 \leq f \leq 3.5$ e estabelecendo $\mu = 0.5$ , $\beta = 0.468$ , $\gamma = 0.05$ e o argumento do cosseno constante igual a 1.0.	39

Figura 12 – Esquema do nanotubo de carbono com extremidades fixas, sendo a razão $e/L$ muito pequena. O pontilhado representa a linha neutra e $w(x, t)$ é a deflexão, isto é, o deslocamento transversal de qualquer ponto da linha neutra em relação ao eixo $x$ . . . . .	41
Figura 13 – Seção transversal perpendicular ao eixo do nanotubo de carbono. . . . .	42
Figura 14 – Alongamento longitudinal numa barra. . . . .	42
Figura 15 – Representação do diagrama pressão-deformação do aço estrutural sem escalas. . . . .	43
Figura 16 – Representação de uma viga simplesmente apoiada, que é o nome dado a uma viga com um apoio de pino em uma de suas extremidades e um apoio de rolete na outra (GERE; GOODNO, 2010, p. 262). Nas vigas ilustradas em (a) e (b), o apoio da esquerda é a representação de um apoio de pino, que evita translações, mas permite a torção; e o apoio da direita é um apoio de rolete, que não permite translação vertical, no entanto permite translação no sentido horizontal, além da torção. . . . .	44
Figura 17 – Visão ampliada do centro da viga. . . . .	45
Figura 18 – Força agindo sobre o elemento de área de uma seção transversal tomada na região de flexão pura da viga. . . . .	47
Figura 19 – Curvatura da viga fletida. . . . .	49
Figura 20 – Corpo deformado na configuração $C$ relativo à configuração $C_0$ . . . . .	51
Figura 21 – Relação linear entre momento fletor e ângulo de curvatura. . . . .	55
Figura 22 – Relação linear entre força e alongamento. . . . .	55
Figura 23 – Diagrama de Lyapunov formado pelo plano de parâmetros $f \times \mu$ com intervalos $[0, 70] \times [0, 0.9]$ . Destacadas em retângulos, estão as regiões que contém caos. A ampliação dessas regiões estão na Figura 26. . . . .	63
Figura 24 – Retratos de fases (à esquerda) e séries temporais da variável $x_1$ (à direita). Para gerá-los, definimos nas simulações o tamanho do passo de integração em $10^{-2}$ e número total de iterações em $3 \times 10^4$ , descartando um transiente de $10^5$ . No diagrama da Figura 23 estão marcados com um 'x' os pontos que correspondem aos valores dos parâmetros utilizados para esta simulação, sendo $\mu = 0.3$ para todos e diferentes valores de $f$ , que encimam cada gráfico. . . . .	64

Figura 25 – Séries temporais iniciadas a partir de duas condições iniciais muito próximas quando o sistema dinâmico encontra-se no regime caótico. Para gerá-las, definimos nas simulações o tamanho do passo de integração em $10^{-2}$ e número de interações em $5 \times 10^4$ , sem tempo transiente. Os valores dos parâmetros (pontos do plano de parâmetros) encimam as legendas. . . . .	66
Figura 26 – Diagramas de Lyapunov resultantes da ampliação das regiões selecionadas por retângulos na Figura 23. Em (a), ampliação da região sob retângulo de contorno lilás; em (b), ampliação da região sob retângulo de contorno verde. . . . .	67
Figura 27 – Em (a), (b) e (c), diagramas de Lyapunov resultantes da ampliação das regiões delimitadas na Figura 26(a); em (d), ampliação da região delimitada pelo retângulo de contorno lilás na Figura 27(c). As retas tracejadas na cor verde clara em (b) e (c) representam as equações das retas cujos pontos que foram selecionados para gerar os diagramas de bifurcação da Figura 28. . . . .	68
Figura 28 – Diagramas de bifurcação de codimensão 2. O diagrama em (a) foi construído a partir da variação dos parâmetros $f$ e $\mu$ segundo a linha tracejada destacada na Figura 27(b); o diagrama em (b) foi construído a partir da variação dos parâmetros $f$ e $\mu$ segundo a linha tracejada destacada na Figura 27(c). . . . .	69
Figura 29 – Diagramas de Lyapunov resultantes da ampliação das regiões selecionadas por retângulos na Figura 26(b). . . . .	69
Figura 30 – Retratos de fases gerados a partir da escolha de valores dos parâmetros de dentro das regiões de regularidade no diagrama de Lyapunov da Figura 29(a), cujos pontos correspondentes no plano de parâmetros foram marcados por um 'x'. Para gerá-los, definimos nas simulações o tamanho do passo de integração em $10^{-2}$ e número total de iterações em $3 \times 10^4$ , descartando um transiente de $10^5$ . Os valores dos parâmetros usados nas simulações encimam cada gráfico. . . . .	70
Figura 31 – Diagramas de Lyapunov para o plano de parâmetros $f \times \omega$ e diferentes valores de $\mu$ . . . . .	71
Figura 32 – Diagrama de Lyapunov resultado da ampliação da região delimitada na Figura 31(a), que é uma característica do fenômeno de caos transiente. As condições para esta simulação são as mesmas das citadas no início deste capítulo. . . . .	73

Figura 33 – Retratos de fases gerados para verificar a existência de caos transiente no sistema dinâmico. Para estas simulações, definimos o tamanho do passo de integração em $10^{-2}$ e número total de iterações em $9 \times 10^4$ , sem tempo transiente. A cada intervalo de tempo, indicados acima dos gráficos, é revelado a topologia do retrato de fases. . . .	74
Figura 34 – Painel comparativo de diagramas de Lyapunov ampliados na região de caos transiente, com valor de $\mu = 0.13$ . O diagrama em (a) é o mesmo do da Figura 32. Para construir o diagrama em (b), usamos os mesmos dados das simulações para a construção dos diagramas de Lyapunov conforme explicitado no início deste capítulo, com exceção do número de iterações, que fora estabelecido em $4 \times 10^6$ . . .	75
Figura 35 – Diagramas de Lyapunov para o plano de parâmetros $f \times \omega$ com intervalos definidos em $[0.5, 4.8] \times [0.2, 1.6]$ e diferentes valores de $\mu$ . . .	76
Figura 36 – Gráficos na posição superior: Diagramas de bifurcação construídos a partir da delimitação de $\omega$ em 0.86 e $f$ variando no intervalo $[0.5, 4.0]$ . Gráficos na posição inferior: Gráfico do maior expoente de Lyapunov sob as mesmas condições. . . . .	77
Figura 37 – Diagramas de Lyapunov para o plano de parâmetros $f \times \omega$ com intervalos delimitados em $[1.05, 3.05] \times [0.4, 1.025]$ e $\mu = 0.85$ . . . . .	78
Figura 38 – Em (a) diagrama de Lyapunov para o plano de parâmetros referente à área delimitada pelo retângulo na Figura 37; em (b), ampliação da região delimitada em (a). . . . .	79
Figura 39 – Retrato de fases do sistema dinâmico quando definido pelos valores dos parâmetros $\mu = 0.85$ , $f = 1.656$ e $\omega = 0.688$ . Para esta simulação, definimos o tamanho do passo de integração em $10^{-2}$ e número total de iterações em $3 \times 10^4$ , descartando um transiente de $10^5$ . . . .	79

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Combinações dos sinais dos expoentes de Lyapunov em sistemas contínuos tridimensionais e respectiva dinâmica característica. No cálculo numérico do espectro de Lyapunov, os valores dos expoentes devem ser ordenados do maior para o menor. . . . .	36
--	----

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
1.1	BREVE INTRODUÇÃO HISTÓRICA SOBRE A DINÂMICA NÃO-LINEAR	15
1.1.1	<b>O problema dos três corpos</b>	<b>15</b>
1.1.2	<b>As décadas finais do século XX com o advento dos computadores nos meios acadêmicos</b>	<b>16</b>
1.2	NANOTUBOS DE CARBONO	23
1.3	OBJETIVOS E ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	24
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS PARA O ESTUDO DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES</b>	<b>26</b>
2.1	SISTEMAS DE TEMPO CONTÍNUO: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	26
2.2	ESPAÇO DE ESTADOS E ATRATORES	29
2.3	OS EXPOENTES DE LYAPUNOV	32
2.3.1	<b>Cálculo numérico do espectro de Lyapunov</b>	<b>35</b>
2.3.2	<b>Diagramas de Lyapunov</b>	<b>37</b>
2.4	DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO	39
<b>3</b>	<b>O MODELO</b>	<b>41</b>
3.1	GRANDEZAS E RELAÇÕES FUNDAMENTAIS	42
3.2	DEFORMAÇÕES NORMAIS NA FLEXÃO	44
3.2.1	<b>Equação diferencial da curva de deflexão para pequenas deflexões</b>	<b>48</b>
3.3	TENSOR DEFORMAÇÃO	50
3.4	EQUAÇÕES DE ENERGIA	54
3.4.1	<b>Energia cinética</b>	<b>54</b>
3.4.2	<b>Energia potencial de flexão</b>	<b>54</b>
3.4.3	<b>Energia potencial de alongamento</b>	<b>55</b>
3.5	EQUAÇÃO DE MOVIMENTO	56
3.5.1	<b>Metodologia da solução</b>	<b>57</b>
3.5.2	<b>Significado físico das variáveis dinâmicas</b>	<b>61</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>62</b>
4.1	DELIMITAÇÃO DOS VALORES DOS PARÂMETROS	63
4.2	PLANO DE PARÂMETROS $f$ versus $\mu$	63
4.3	PLANO DE PARÂMETROS $f$ versus $\omega$	71
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>80</b>

**REFERÊNCIAS . . . . . 82**

## 1 INTRODUÇÃO

A observação do comportamento caótico em sistemas dinâmicos cujos modelos matemáticos se baseiam em regras bem definidas, como as da Mecânica Newtoniana, levou ao surgimento da expressão *caos determinístico*. O comportamento caótico em um sistema é caracterizado, de maneira qualitativa, pela aperiodicidade e grande sensibilidade às condições iniciais e às alterações nos valores dos parâmetros de controle do sistema (FERRARA; PRADO, 1994, p. 137). Nas próximas seções, faremos uma breve narrativa de fatos históricos pertinentes ao desenvolvimento da Dinâmica Não-Linear, bem como uma introdução sobre o objeto de estudo deste trabalho: o nanotubo de carbono. Apresentaremos em seguida a motivação, objetivos e procedimentos metodológicos deste estudo, e a estrutura da dissertação.

### 1.1 BREVE INTRODUÇÃO HISTÓRICA SOBRE A DINÂMICA NÃO-LINEAR

Dividiremos esta seção em duas partes: a primeira tratando de como se deu a necessidade do desenvolvimento de ferramentas para investigar sistemas não-lineares ao passo que se descobria que estes se comportavam de maneira complicada<sup>1</sup>; a segunda, apontando alguns desenvolvimentos pertinentes à Dinâmica Não-Linear após o advento dos computadores nos meios acadêmicos.

#### 1.1.1 O problema dos três corpos

O sucesso preditivo obtido ao se utilizar da Mecânica Newtoniana no problema da interação entre dois corpos, consolidou o que chamamos de determinismo clássico. Neste caso, um sistema dinâmico é modelado por regras matemáticas que descrevem a evolução temporal das suas variáveis dinâmicas a partir do conhecimento destas grandezas num tempo passado. O problema da interação entre dois corpos massivos foi inspirado na dinâmica dos corpos celestes, e consiste na aplicação das leis de Newton em dois corpos interagentes representados por pontos materiais, aproximação que considera que toda a massa do corpo concentra-se em um ponto singular. Para esta situação, são obtidas expressões analíticas que descrevem a posição dos corpos em função do tempo, e pôde-se verificar o aspecto elíptico de órbitas planetárias e o período das órbitas, inclusive de cometas (MONTEIRO, 2006; PIRES, 2008).

Entretanto, o problema envolvendo três corpos foi sendo descoberto como insolúvel através de técnicas analíticas, o que, no limite, pôs em xeque a certeza sobre

<sup>1</sup> Para a imensa maioria dos sistemas não-lineares não se pode obter soluções exatas ou aproximadas, e as soluções, de modo geral, não são globais, dependendo sensivelmente das condições iniciais escolhidas e dos valores dos parâmetros de controle.



a estabilidade do Sistema Solar<sup>2</sup> (MONTEIRO, 2006). A investigação da estabilidade do sistema solar ramificou-se em trabalhos pertinentes ao estudo dos sistemas de equações não-lineares, em especial os trabalhos de Aleksandr Lyapunov (1857-1918), cujos trabalhos vincularam o estudo da estabilidade à teoria das equações diferenciais (MONTEIRO, 2006), e seu contemporâneo, Henri Poincaré (1854-1912), cujo trabalho foi pioneiro sobre teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos, introduzindo uma nova forma de tratar as equações diferenciais não-lineares. Poincaré, provavelmente, foi o primeiro cientista a vislumbrar a existência de caos no problema de três corpos ao reconhecer que pequenas diferenças nas condições iniciais podem gerar soluções totalmente diferentes (MONTEIRO, 2006; PIRES, 2008).

### **1.1.2 As décadas finais do século XX com o advento dos computadores nos meios acadêmicos**

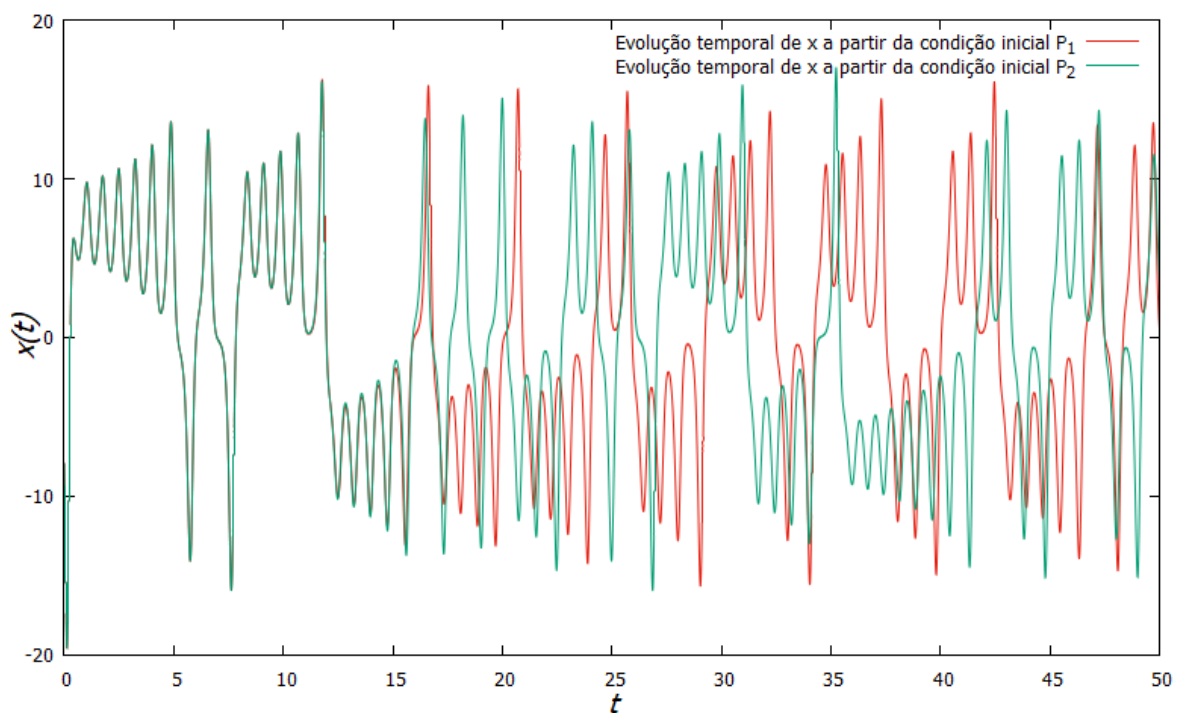
No início da década de 60, Edward Lorenz (1917-2008), um matemático que trabalhou como pesquisador meteorológico, registrou um comportamento inesperado ao trabalhar com um modelo caricatural de condições climáticas. Lorenz tomara um sistema de 12 equações deterministas baseadas na dinâmica dos fluidos para representar de modo simplificado as condições meteorológicas terrestres. A partir de determinadas condições iniciais de temperatura, pressão e velocidade dos ventos, ele obtia os valores destas grandezas para os próximos dias através de um método numérico usando um simples computador valvulado. A fim de estudar mais detalhadamente um trecho da solução, Lorenz tomou um atalho. Ao invés de recomeçar a simulação, ele usou os valores que o computador registrou no meio da sequência. Ao retomar a simulação, o computador registrava uma sequência bem diferente da anterior. Lorenz então reviu os dados, trocou válvulas do computador e depois de alguma investigação percebeu que era devido às novas condições iniciais escolhidas. O computador utilizado por ele armazenava na memória um valor com até seis casas decimais, mas somente era impresso um número de até três casas decimais, e ao retomar a simulação, Lorenz usou os números impressos como novas condições iniciais. Um truncamento na terceira casa decimal, que, tratando-se da temperatura medida em Celsius, por exemplo, correspondia a um erro menor que um milésimo de grau Celsius, era o que gerava a divergência na evolução temporal das grandezas dinâmicas (GLEIK, 1989; HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2004).

Com este resultado, Edward Lorenz poderia justificar a impossibilidade de fazer uma previsão das condições climáticas a longo prazo, pois mesmo neste sistema caricatural das condições meteorológicas, a incrível sensibilidade às condições iniciais

<sup>2</sup> Os astrônomos já observavam que as órbitas planetárias não eram perfeitamente regulares, para a qual tinha-se a explicação qualitativa (parcial) de ser devido à interação gravitacional mútua entre os corpos massivos do Sistema Solar.

tornava este tipo de previsão impossível. Decidido a investigar mais profundamente o impacto desta nova descoberta, Lorenz investiu em um sistema ainda mais simples de apenas três equações diferenciais, sem abrir mão da não-linearidade. E a partir de determinados valores de parâmetros, ele obteve a aperiodicidade e a sensibilidade às condições iniciais que também eram características no sistema com 12 equações diferenciais.

Figura 1 – Séries temporais da variável  $x$  no sistema de Lorenz iniciadas a partir de duas condições iniciais muito próximas, a saber  $P_1 = (-7.860616, -16.438335, 5.302712)$  e  $P_2 = (-7.860, -16.438335, 5.302712)$ . Os valores dos parâmetros para a simulação foram  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = 8/3$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

O sistema adaptado e usado por Lorenz é um sistema não-linear com três equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}$$

em que as variáveis dinâmicas  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam (no contexto do fenômeno de convecção), respectivamente, a taxa de convectividade, a diferença de temperatura horizontal e diferença de temperatura vertical, e os parâmetros  $\sigma$ ,  $r$  e  $b$ , são, respectivamente, o número de Prandtl, o número de Rayleigh e um parâmetro relacionado às dimensões espaciais do sistema físico (HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2004). As não-linearidades estão nos termos  $xz$  e  $xy$ .

Mesmo condições iniciais tomadas muito próximas uma da outra, levariam a soluções divergentes nos sistemas estudados por Lorenz, contrariando o que se conhecia sobre os sistemas lineares, em que erros pequenos nas condições iniciais crescem lentamente, não alterando de forma significativa os resultados. Naqueles sistemas dinâmicos não-lineares, por outro lado, uma minúscula diferença nas condições iniciais cresce exponencialmente durante o cálculo, mudando radicalmente a solução final. Na Figura 1 podemos verificar a sensibilidade às condições iniciais do sistema de Lorenz através da representação da evolução temporal da variável  $x$  a partir de duas condições iniciais tomadas muito próximas:  $P_1 = (-7.860616, -16.438335, 5.302712)$  e  $P_2 = (-7.860, -16.438335, 5.302712)$ . Esta corresponde apenas a um truncamento na terceira casa decimal no  $x(t_0)$  de  $P_1$ . Além das condições iniciais, a dinâmica em sistemas não-lineares pode depender sensivelmente da variação dos valores dos parâmetros.

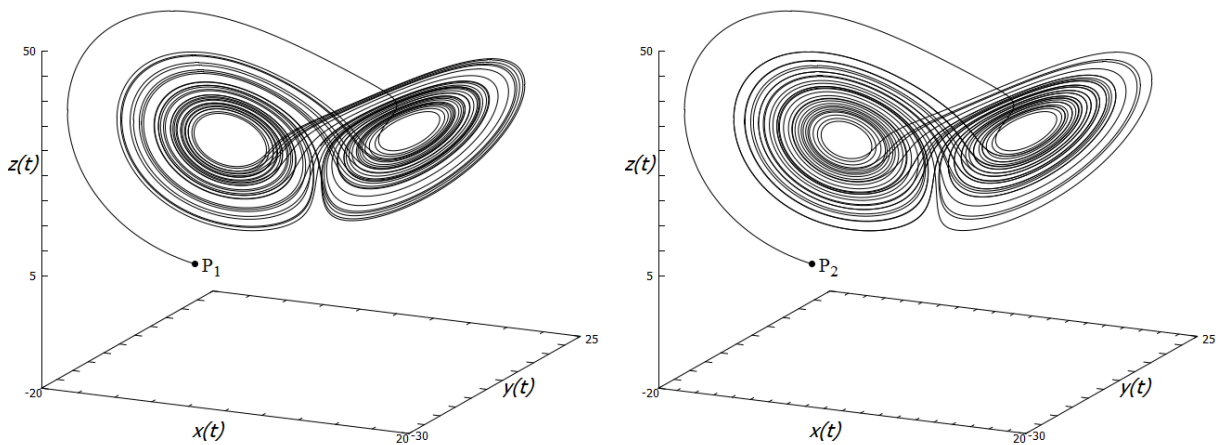
Para além da série temporal, a relação entre as variáveis dinâmicas de um sistema pode ser analisada qualitativamente num espaço cartesiano cujos eixos representam estas variáveis, o chamado espaço de estados<sup>3</sup>. O modelo com três equações diferenciais adaptado por Lorenz exibiu a então incompreensível sensibilidade às condições iniciais: as soluções para condições iniciais muito próximas eram radicalmente diferentes num tempo suficientemente longo. Todavia, ao representar as variáveis dinâmicas no espaço de estados, as trajetórias dessas soluções convergiam para um mesmo atrator<sup>4</sup>. Podemos visualizar o atrator gerado por Lorenz na Figura 2, cuja forma assemelha-se às asas de uma borboleta. Os atratores na Figura 2 foram construídos a partir das mesmas condições iniciais e parâmetros usados para a construção da Figura 1. Dado a idiossincrasia deste conjunto, ele foi chamado de *atrator estranho*. O atrator estranho, agora nomeado de *atrator caótico*, é formado por uma trajetória no espaço de fases que nunca se fecha ou se cruza, mas ainda permanecendo numa região delimitada (MONTEIRO, 2006). Neste caso, ela não condiz com os preceitos da geometria euclidiana.

Muitas das contribuições para o entendimento geométrico do atrator caótico foram dadas por Benoit Mandelbrot (1924-2010), matemático auto denominado *fractalista*. Mandelbrot, que trabalhou para a International Business Machines (IBM), tinha contato com economistas e engenheiros. Entre essas áreas, ele acabou percebendo um padrão na distribuição de dados supostamente aleatórios em fenômenos não relacionados e que não se encaixavam em modelos estatísticos tradicionais, como a distribuição normal. Mandelbrot enxergou um mesmo padrão na distribuição da oscilação de preços de algodão e na distribuição de erros em linhas de transmissão telefônica

<sup>3</sup> O espaço de estados (ou espaço de fases) será discutido no próximo capítulo.

<sup>4</sup> Os atratores serão definidos e exemplificados no próximo capítulo.

Figura 2 – O atrator de Lorenz com trajetórias iniciando a partir das condições iniciais  $P_1 = (-7.860616, -16.438335, 5.302712)$  em (a) e  $P_2 = (-7.860, -16.438335, 5.302712)$  em (b).



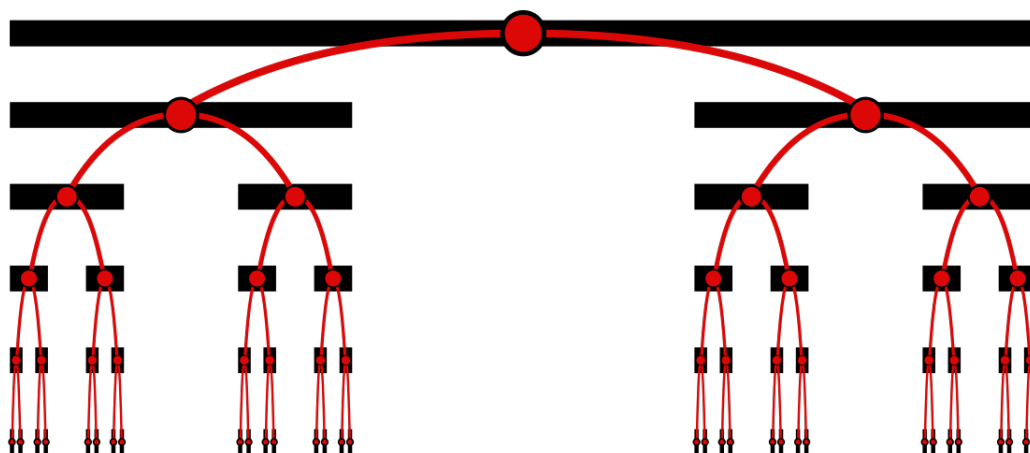
Fonte: Elaborado pelo autor.

usadas para transmitir informações de computador para computador (GLEIK, 1989). Tal padrão consistia na seguinte descrição: no problema do ruído nas linhas de transmissão, sabia-se que pela sua natureza o ruído era aleatório, mas ainda sim ocorria em grupos. Períodos de comunicação sem erros era seguido por períodos com erros. Analisando mais detalhadamente os períodos com erros, observava-se que eles também eram seguidos de períodos sem erros e períodos com erros. Mandelbrot mostrou uma maneira de descrever esta distribuição de forma a condizer com os padrões observados.

Efetivamente, Mandelbrot apontou que aquela distribuição se correlacionava com a teoria dos *conjuntos de Cantor*, nome em homenagem ao matemático que a elaborou, Georg Cantor (1845-1918), no século XIX (GLEIK, 1989). Constrói-se um conjunto de Cantor a partir de um intervalo de números de 0 a 1 representados por um segmento de linha. Então, retira-se o terço médio deste segmento resultando em outros dois segmentos. Retira-se novamente o terço médio de cada segmento, resultando em outros quatro segmentos, e assim sucessivamente até o infinito. O resultado é um conjunto de pontos que, apesar de ser infinito, estão dispostos em grupos e estão infinitamente dispersos.

Mandelbrot dedicou-se também a estudar as formas geométricas que seguiam esta lógica de construção, como a *curva de Koch*. Para construir a curva de Koch, toma-se um triângulo equilátero e, no terço médio de cada um dos lados, sobreponha-se outro triângulo equilátero cujos lados medem um terço dos lados do original. O novo contorno terá agora doze segmentos. Este procedimento pode ser repetido até o infinito, sobrescrevendo um novo triângulo em cada segmento dos novos contornos com as mesmas regras já descritas. A cada nova transformação é acrescentada uma

Figura 3 – Representação do Conjunto de Cantor com diagrama de bifurcação sobressaído.



Fonte: (CIENCIA, 2020).

pequena área à figura, mas a área total nunca será maior que a de uma circunferência traçada nos contornos do triângulo original. A curva do contorno cresce infinitamente, mas nunca se cruza, pois cada novo triângulo é sempre pequeno o suficiente para impedir o contato com outro. Este resultado paradoxal de uma extensão infinita que nunca se cruza permanecendo dentro de um espaço finito é também uma propriedade dos atratores estranhos.

Figura 4 – Curva de Koch após quatro iterações.



Fonte: Gleik (1989).

Essa nova linha de estudos na geometria foi nomeada *fractal* por Benoit Mandelbrot. Este termo então designaria na matemática formas e distribuições em que a propriedade de dimensão estende-se além das dimensões usuais da geometria euclidiana, possuindo dimensão fracionada. De maneira basilar, nos objetos fractais os padrões de formação se repetem parcial ou totalmente em escalas cada vez menores, uma característica de auto-semelhança (LICHTENBERG; LEIBERMAN, 1992).

Os físicos também encontraram o caminho para a Ciência do Caos no problema da turbulência nos fluidos. O fluido num curso suave era um problema já mo-

nótono para os físicos. As partes do fluido em regime suave, a despeito das suas inúmeras partículas constituintes, seguem um fluxo previsível, estático ou periódico. No entanto, a partir de certas condições, este movimento se torna ininteligível para o que se espera de modelos matemáticos tradicionais: vórtices em várias escalas, instáveis e dispersivos, coexistindo entretanto com algumas regiões de regularidade. Uma imagem caótica. A turbulência ganhou descrições imprecisas dos cientistas russos Andrei Kolmogorov (1903-1987) e Lev Landau (1908-1968), cujas contribuições são imprescindíveis, inclusive, para a teoria do caos (GLEIK, 1989).

Os físicos experimentais Harry Swinney (1939-) e Jerry Gollub (1944-2019), aquele inspirado pelos fenômenos na criticalidade das transições de fase (do sólido para o líquido, do não imantado para o imantado, do fluido para o super fluido), construíram um experimento capaz de investigar em detalhes a transição do regime suave para o turbulento nos fluidos. As transições envolvem efeitos macroscópicos que são difíceis de prever pela análise dos fenômenos microscópicos dos constituintes do sistema. O experimento de Swinney e Gollub pretendia confirmar o início da turbulência nos fluidos tal como descrevia a teoria de Landau, que conjecturou que novas frequências apareceriam uma de cada vez a medida que o fluxo aumentava. Os experimentadores identificaram uma primeira transição com o surgimento de uma nova frequência bem definida, mas na transição seguinte o fluido já não possuía frequências definidas, exibindo um comportamento caótico. Apesar de inconclusivo, o resultado não fomentava a teoria de Landau, que sugerira um aumento de complexidade gradual (GLEIK, 1989).

Foi com David Ruelle (1935-), que teve contato com os resultados do mencionado experimento de Swinney e Gollub e com o trabalho de Edward Lorenz, que a conexão entre a turbulência e o atrator estranho foi sugerida. Juntamente com o matemático Floris Takens (1940-2010), conjecturaram que a turbulência podia ser produzida pela combinação de equações simples, poderia surgir abruptamente e que, no espaço de estados, deveria existir um atrator que representasse a turbulência, contendo a infinidade de ritmos de um fluxo turbulento mas representados numa região finita. O termo atrator estranho havia sido designado por Ruelle e Takens (MONTEIRO, 2006).

A região limítrofe de transição do regime periódico para o caótico também foi investigada por Mitchell Feigenbaum (1944-2019) através do conhecido mapa logístico  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ . Esta equação foi popularizada por Robert May como um modelo de evolução em populações de insetos e se notabilizou pela estranha complexidade vinda de uma equação simples. A depender do valor do parâmetro  $r$ , a equação pode se estabilizar num único valor, oscilar em dois ou mais valores (que acontece após sofrer duplicações de período a partir de determinados valores críticos do parâme-

tro  $r$ ), divergir ou oscilar entre valores diversos dentro de um intervalo, apresentando um comportamento caótico. O mapa logístico pode ser representado num gráfico bidimensional em que o eixo horizontal representa o valor do parâmetro  $r$  e o eixo vertical representa os possíveis valores de  $x_{n+1}$  ao atingir estabilidade<sup>5</sup>, os conhecidos *diagramas de bifurcação*. Feigenbaum verificou um padrão de convergência dos pontos de duplicação de período que se confirmou numa constante. Ele encontrou a mesma constante num mapa com uma função trigonométrica,  $x_{n+1} = r \sin(\pi x_n)$ , uma regularidade numérica e geométrica incrível, até então obscura na Matemática ou Física. Este resultado é hoje conhecido como uma das *constantes de Feigenbaum* (GLEIK, 1989).

Durante as décadas de 1960, 1970 e 1980, os desenvolvimentos para a ainda não consolidada Dinâmica Não-Linear ocorriam de maneira independente entre pesquisadores formados como físicos ou matemáticos (em sua grande maioria), envolvendo problemas de variadas áreas do conhecimento. Além dos já citados, podemos citar, por exemplo, Robert May (1936-2020) nos problemas de biologia populacional (MAY, 2019), Michel Hénon (1931-2013) no problema da Astronomia dos aglomerados globulares e Otto RöSSLer (1940-) através da biologia química (GLEIK, 1989). É importante ressaltar que a teoria moderna para os sistemas dinâmicos não-lineares se desenvolveu no contexto do advento dos computadores nos meios acadêmicos. Após a Segunda Guerra Mundial, esta ferramenta foi gradativamente se popularizando nos centros de pesquisa, encontrando resistência entre cientistas mais ortodoxos. Naturalmente, em tal contexto, os computadores eram equipamentos muito inferiores em relação aos níveis tecnológicos atuais, tendo baixa capacidade para armazenar informações, baixo poder de processamento e recursos gráficos bem limitados.

Em 1977, os físicos Joseph Ford (1927-1995) e Giulio Casati (1942-) organizaram a primeira conferência de uma Ciência chamada Caos (GLEIK, 1989)<sup>6</sup>. A teoria do caos era verificada em fenômenos estudados nas mais variadas áreas do conhecimento, desde a Astronomia à Economia. A Dinâmica Não-Linear é, portanto, uma área de estudos que admite inter e transdisciplinaridade e que estabelece uma nova forma de tratar sistemas não-lineares através de técnicas topológicas e geometria fractal, suscitando um método sistemático para investigar a caoticidade. Concomitantemente, revitaliza os debates filosóficos nos âmbitos epistemológico e ontológico.

<sup>5</sup> A depender do valor do  $x_n$  inicial, a evolução da equação passa por um período transiente até se estabilizar numa das condições citadas. Por isso, na geração dos diagramas de bifurcação descarta-se as iterações iniciais. No mapa logístico, a equação passa a divergir para  $r > 4$ .

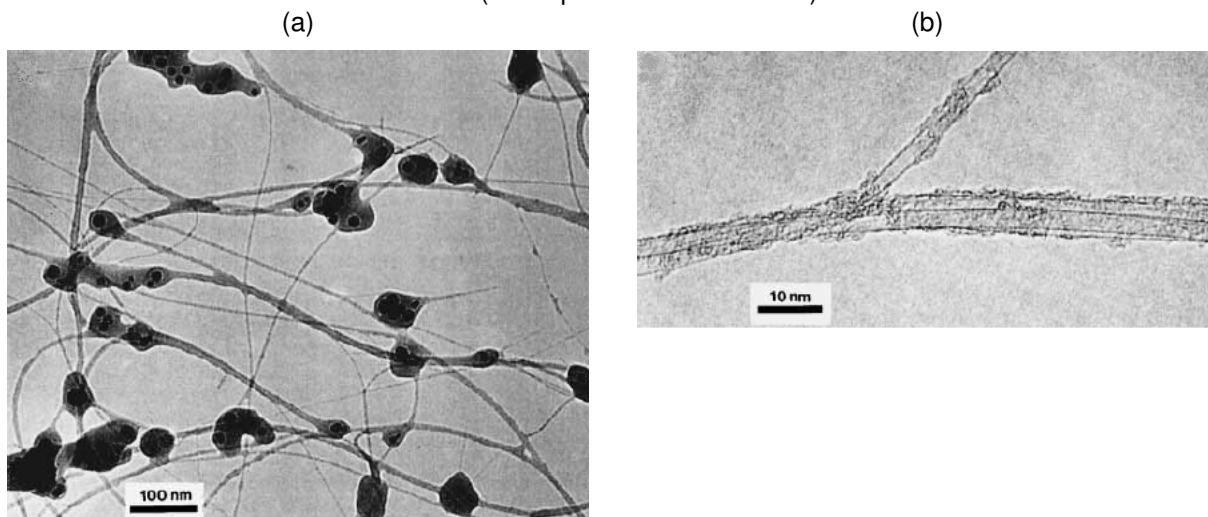
<sup>6</sup> James Gleik é um jornalista e escritor que se ocupou de fazer uma investigação dos trabalhos pertinentes à teoria do caos.

## 1.2 NANOTUBOS DE CARBONO

O objeto de estudo deste trabalho pode ser descrito, assumindo condições que serão abordadas no capítulo 3 desta dissertação, por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não-autônoma e não-linear, que tem a pretensão de descrever características gerais do movimento oscilatório de um **nanotubo de carbono de parede simples** cujas flexões ocorrem num plano chamado plano de flexão.

Os nanotubos de carbono, CNTs (sigla para a expressão em inglês *carbon nanotubes*), são estruturas cristalinas em formato cilíndrico oco com extremidades fechadas constituídas puramente de carbono, ligados entre si na configuração de hibridização  $sp^2$  (FERREIRA, 2003). Basicamente, eles se formam com o enrolamento de uma folha bidimensional de carbono, o grafeno, que pode se fechar num único tubo cilíndrico, o nanotubo de carbono de parede simples (SWCNT, sigla para *Single Wall Carbon Nanotube*), ou formar um tubo com múltiplos cilindros concêntricos, os nanotubos de carbono de paredes múltiplas. Em relação às dimensões, podem ter diâmetro da ordem de poucos nanômetros e comprimento podendo chegar a vários micrômetros.

Figura 5 – Nanotubos de carbono de parede simples (SWCNTs) vistos por um microscópio eletrônico de transmissão (TEM). (a) Típica amostra do produto de um procedimento de obtenção de SWCNTs contendo os nanotubos e estruturas amorfas de carbono. É necessário um processo de purificação para isolar os CNTs. (Barra para escala = 100 nm.) (b) Imagem ampliada de SWCNTs individuais. (Barra para escala = 10 nm.)



Fonte: Harris (1999).

Sua descoberta é atribuída ao físico japonês Sumio Iijima (1939-) no início da década de 1990, quando este observou, através de um microscópio eletrônico de transmissão, e descreveu em detalhes as curiosas estruturas que se formavam num cátodo de grafite como subproduto de um processo de *arc-evaporation* (HARRIS, 1999). Até meados da década de 1980 as únicas estruturas cristalinas bem defini-



das feitas totalmente de carbono conhecidas eram os alótropos diamante e grafite, de ocorrência natural. Foi então que um grupo de pesquisadores liderados por Harry Kroto (1939-2016), Richard Smalley (1943-2005) e Robert Curl (1933-) iniciaram uma série de experimentos para investigar os produtos da vaporização a laser sob uma superfície de grafite. Esta empreitada resultou no descobrimento da primeira estrutura cristalina sintética de carbono com estabilidade e simetria únicos: um cluster (agrupamento) formado por 60 átomos de carbono, identificados por um espectrômetro de massa, que ficou conhecido como fulereno. Este trabalho rendeu um prêmio Nobel em Química para seus líderes (O'CONNELL, 2006) e foi um pertinente predecessor dos trabalhos que levaram aos nanotubos de carbono.

Tão logo as propriedades dos CNTs se evidenciaram, as pesquisas envolvendo estas estruturas avançaram rapidamente dentro da comunidade científica. Apenas 9 artigos com as palavras-chave *nanotubos de carbono* foram publicados em 1992. Em 2004 foram mais de 5000 (O'CONNELL, 2006). Os CNTs chamam a atenção dos pesquisadores nas áreas da Física, Química e Ciência dos Materiais pelas suas extraordinárias propriedades eletrônicas e mecânicas. A depender do número de camadas e do ângulo de enrolamento da folha de grafeno na formação do nanotubo (propriedade conhecida como *quiralidade*), um CNT pode ser um metal ou um semicondutor; sua dimensão é quase unidimensional; e suas características mecânicas aliam baixíssima densidade e alta resistência mecânica. Por estes motivos o CNT é o material mais promissor para as atuais nanoaplicações, cujas aplicações auspiciosas e em curso incluem a fabricação de transistores menores que as atuais litografias em camadas de silício, condutores, sondas de microscópicos de tunelamento e fortalecimento de fibras em compostos de alta performance, substituindo o kevlar, as fibras de carbono e as fibras de vidro (O'CONNELL, 2006).

### 1.3 OBJETIVOS E ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Neste trabalho documentamos um estudo sobre o material mais promissor da nanotecnologia à luz da Dinâmica Não-Linear, investigando o comportamento caótico e regular do movimento oscilatório de um SWCNT submetido a oscilações harmônicas tendo como base os trabalhos (MAYOOF; HAWWA, 2009) e (GENG; ZHANG, 2012). A partir da investigação, apresentaremos resultados numéricos sobre a influência do valor dos parâmetros de controle do modelo do supracitado sistema na sua dinâmica. Estamos interessados especialmente na variação da amplitude do forçamento harmônico, da frequência angular propulsora e do parâmetro que representa os efeitos dissipativos. Pretendemos responder aos seguintes questionamentos: Para quais situações tem-se dinâmica regular e para quais tem-se dinâmica caótica? Existirá caos transiente? Existirá multiestabilidade?

Esta dissertação é composta por cinco capítulos, incluindo esta introdução. No capítulo 2 discorremos de forma concisa sobre os fundamentos de sistemas dinâmicos não-lineares e apresentamos as ferramentas que utilizamos para a identificação e caracterização da dinâmica do sistema: cálculo do espectro de Lyapunov, análise qualitativa dos atratores nos espaços de estados e construção dos diagramas de bifurcação. No capítulo 3 deduzimos o modelo matemático que descreve as oscilações de um SWCNT sob certas condições. No capítulo 4 apresentamos e discutimos os resultados numéricos obtidos. No capítulo 5 é feito um panorama do trabalho, salientando os limites do modelo trabalhado, discutindo concisamente os resultados e conclusões, além de apresentar futuras propostas de trabalho.

## 2 FUNDAMENTOS PARA O ESTUDO DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

Um sistema pode ser definido como um conjunto de componentes que possuem alguma relação de interação ou interdependência mútuas, de modo que possa ser compreendido como um todo organizado. Um sistema é dito dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus elementos variam com o tempo (MONTEIRO, 2006).

Nas variadas áreas do conhecimento, tais como Física, Química, Ecologia, Economia, os sistemas dinâmicos são expressos em termos de modelos matemáticos que descrevem sua evolução temporal. Estes modelos são construídos a partir da compreensão das regras/leis que governam os fenômenos estudados, geralmente com a finalidade de predizê-los. Vamos nos ater aos modelos cujo tempo  $t$  é a única variável independente. Quanto à variável temporal, um sistema dinâmico pode ser de tempo discreto (que é modelado por equações de diferenças onde o tempo  $t$  é um número inteiro geralmente positivo) ou pode ser de tempo contínuo, onde o tempo  $t$  é um número real, e este sistema é modelado por equações diferenciais. O tipo de variável temporal (discreta ou contínua) se adequa ao propósito do modelo do fenômeno a ser estudado. Neste trabalho é adequado um modelo de tempo contínuo, de modo que o enfoque deste capítulo será a análise de sistemas de equações diferenciais.

### 2.1 SISTEMAS DE TEMPO CONTÍNUO: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Equações diferenciais são equações que envolvem uma relação de igualdade entre as derivadas de funções (variáveis dependentes), as funções e suas variáveis independentes. As equações diferenciais cujas funções possuem apenas uma variável independente são ditas Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). A título de generalização, uma EDO linear de ordem  $n$  é escrita como (MONTEIRO, 2006):

$$a_0(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx(t)}{dt} + a_n(t) x(t) = F(t), \quad (2.1)$$

em que  $a_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) são chamados de parâmetros que podem ou não depender de  $t$  e  $F(t)$  é uma função de entrada ou um forçamento externo que igualmente pode ou não depender de  $t$ . Caso os parâmetros sejam constantes e a função de entrada não dependa explicitamente de  $t$  a equação é dita autônoma. Caso contrário, é dita não-autônoma (HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2004; MONTEIRO, 2006). Ainda, se temos  $F(t) = 0$ , a equação diferencial é dita homogênea. Se  $F(t) \neq 0$ , tem-se uma equação não-homogênea. A ordem da derivada de maior ordem numa equação diferencial é também a ordem da equação diferencial.

Sem formalismo, numa equação diferencial linear, a única potência permitida para as variáveis dependentes e suas derivadas é 1, e seus coeficientes só podem ser ou constantes ou funções apenas das variáveis independentes. Por exemplo, as equações diferenciais

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} - x(t) &= 0, \\ \frac{d^3x(t)}{dt^3} - (\cos t) \frac{dx(t)}{dt} + tx(t) &= \sin t,\end{aligned}$$

são EDOs lineares. Por outro lado, as equações diferenciais

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} - \sin x(t) &= 0, \\ \left(\frac{d^3x(t)}{dt^3}\right)^2 - (\cos t) \frac{dx(t)}{dt} + t(x(t))^3 &= \sin t,\end{aligned}$$

são não-lineares. Nestes exemplos de EDOs não-lineares, a primeira é não-linear pois a variável dependente é argumento de uma função trigonométrica, e a segunda é não-linear pois a derivada de terceira ordem da função está elevada ao quadrado e a função  $x(t)$  está elevada ao cubo.

Encontrar uma solução para (2.1) é encontrar uma função  $x(t)$  que verifica a equação (2.1) para todo o  $t$ . O fato é que, mesmo para equações diferenciais lineares a parâmetros contantes, a solução vinda da integração analítica das equações nem sempre é uma tarefa simples (HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2004; MONTEIRO, 2006). Em geral, não existem fórmulas analíticas para tratar EDOs lineares de ordem superior a um. Além disso, quase nunca é factível encontrar uma solução analítica para EDOs lineares a parâmetros variáveis (não-autônomas). Neste caso, quando não se pode encontrar analiticamente uma solução exata, busca-se uma aproximação polinomial da solução real. E tornaram-se clássicas algumas equações não-autônomas homogêneas que apresentam solução em série que converge (MONTEIRO, 2006), como por exemplo a equação de Bessel,

$$t^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + t \frac{dx(t)}{dt} + (t^2 - b^2)x(t) = 0,$$

( $b$  é uma constante) e a equação de Legendre,

$$(1 - t^2) \frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2t \frac{dx(t)}{dt} + l(l + 1)x(t) = 0,$$

em que  $l$  é uma constante.

Outro caminho para obter soluções para as equações diferenciais é através da sua integração numérica, que envolve um processo iterativo de obter uma sequência de pontos  $(t_k, x_k)$  que se aproximam da solução real  $(t_k, x(t_k))$ . A precisão do método é determinada pela sofisticação do algoritmo e pelo tamanho do passo de integração  $\Delta t$

( $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ ). Há alguns algoritmos para obter os  $x_k$ , tais como o método de Euler e o Runge-Kutta de quarta ordem (HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2004), este último é o método utilizado na obtenção dos resultados numéricos deste trabalho. A solução calculada pelo método numérico só é válida para o conjunto de condições iniciais e de parâmetros usados na integração (MONTEIRO, 2006).

Para que o comportamento caótico possa existir num sistema dinâmico, é necessário que ele seja não-linear (MONTEIRO, 2006, p. 422). Então, para o caso de sistemas de tempo contínuo, estes deverão ser modelados por equações diferenciais não-lineares para que se possa existir caos. O estudo do comportamento caótico nos revela que as soluções encontradas para condições iniciais muito próximas em sistemas não-lineares no regime caótico destoam-se completamente num tempo suficientemente longo (como exemplificado na Figura 1), uma vez que eles apresentam dependência sensível às condições iniciais (MONTEIRO, 2006; HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2004; OTT, 1993). Nas próximas seções deste capítulo apresentaremos meios de se examinar qualitativamente e quantitativamente o tipo de dinâmica (regular ou caótica) num sistema.

Uma equação diferencial de ordem  $n$  pode ser escrita como um sistema de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem (MONTEIRO, 2006). Isso é feito através de uma mudança de variáveis. Por exemplo, a equação (2.1) pode ser escrita como um sistema de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem tomando  $x(t) \equiv x_1(t)$  e

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1(t)}{dt} \equiv x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \equiv x_3(t), \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} \equiv x_n(t), \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = \frac{F(t)}{a_0(t)} - \frac{a_n(t)}{a_0(t)}x_1(t) - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}x_2(t) - \frac{a_{n-2}(t)}{a_0(t)}x_3(t) - \dots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)}x_n(t). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

As variáveis  $x_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) são chamadas variáveis de estado (ou variáveis dinâmicas). O estado de um sistema num dado instante  $t$  é especificado pelos valores de  $x_j(t)$  nesse instante. É conveniente escrever uma equação diferencial de ordem  $n$  como um sistema de  $n$  equações de 1ª ordem por alguns motivos, entre os quais está o motivo de os métodos numéricos de integração lidarem com as equações desta forma.

Um sistema dinâmico linear ou não-linear pode ser escrito na notação vetorial:

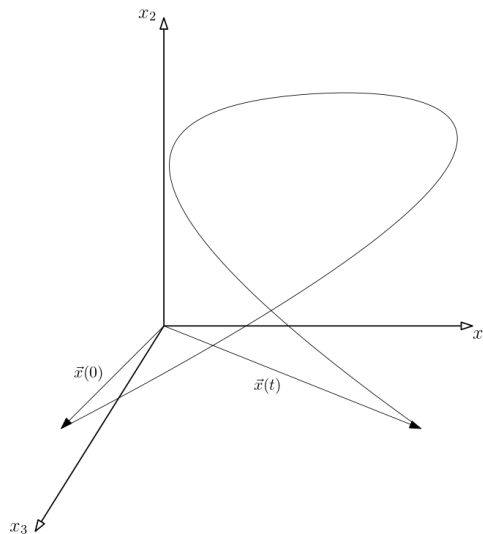
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor de estados com  $n$  coordenadas e  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  é conhecido como campo de velocidades.

## 2.2 ESPAÇO DE ESTADOS E ATRADORES

Em sistemas dinâmicos, o **espaço de estados** (ou espaço de fases) é um espaço  $n$ -dimensional formado pelos eixos coordenados  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Deste modo, o estado de um sistema dinâmico (escrito como um sistema de  $n$  EDOs) num instante  $t$  é representado por um ponto no espaço de estados com coordenadas  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ . Conforme o tempo passa, este ponto se move, e o caminho formado pelos pontos ao longo da evolução temporal é chamado de **órbita** ou trajetória (OTT, 1993). O espaço de estados é o espaço abstrato no qual se pode fazer uma análise qualitativa de um sistema dinâmico. Chamaremos aqui de **retrato de fases** a projeção do espaço de estados no plano bidimensional, com base na tradução do termo *phase portrait* usado na referência (GENG; ZHANG, 2012).

Figura 6 – Representação de uma órbita no espaço de estados tridimensional.



Fonte: Elaborado pelo autor.

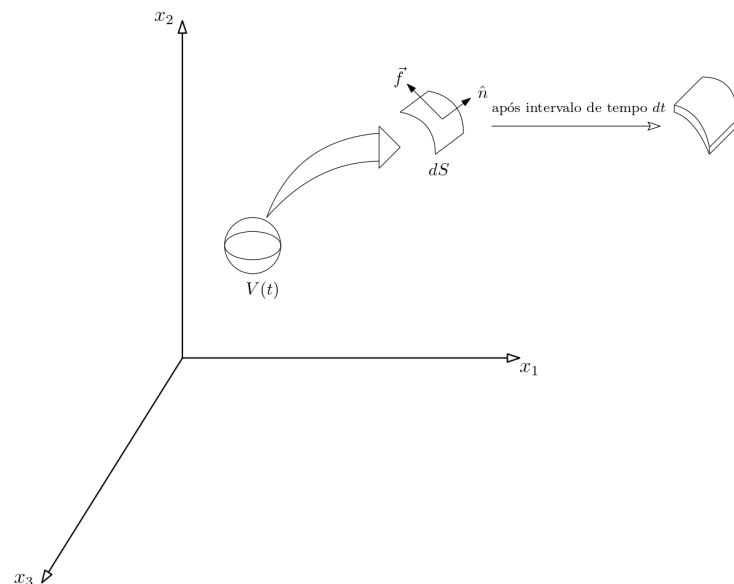
Vale explicitar que a dimensão do espaço de estados será igual ao número de variáveis dinâmicas que caracterizam o sistema, que é também o número de EDOs do sistema de equações. Além disso, qualquer sistema não-autônomo que é escrito na forma de  $n$  equações de 1ª ordem, pode ser reescrito numa forma autônoma (MONTEIRO, 2006), definindo  $kt \equiv x_{n+1}$ , onde  $k$  é uma constante que pode acompanhar a variável  $t$ . Lançando mão deste artifício, o sistema definido por (2.3) torna-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} = k. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

O espaço de estados correspondente ao sistema não-autônomo, reescrito numa forma autônoma, é chamado de **espaço de estados estendido** e possui dimensão  $n + 1$ .

Um resultado importante que caracteriza um sistema dinâmico como sendo conservativo ou dissipativo pode ser derivado analisando a evolução temporal de um volume<sup>1</sup> de condições iniciais no espaço de estados. Vamos considerar uma superfície fechada arbitrária  $S(t)$  de volume  $V(t)$  num espaço de estados tridimensional, conforme a Figura 7. Os pontos em  $S(t)$  e no seu interior são as condições iniciais das trajetórias. Num intervalo de tempo infinitesimal  $dt$  os pontos irão se mover segundo as equações que governam o sistema e  $S(t)$  evoluirá para uma nova superfície  $S(t + dt)$  com volume  $V(t + dt)$ .

Figura 7 – Representação da evolução de um volume de condições iniciais no espaço de estados. Considerando um elemento de área da superfície deste volume, após a evolução temporal num intervalo de tempo  $dt$  dos pontos nessa superfície, tem-se um elemento de volume  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} dt) dS$ .



Fonte: Elaborado pelo autor com base em Monteiro (2006, p. 70).

<sup>1</sup> Naturalmente, só será um volume num espaço de estados tridimensional; será uma área num espaço bidimensional, um comprimento num espaço unidimensional e um hiper-volume num espaço  $n$ -dimensional com  $n > 3$ .

Primeiramente, vamos tomar um vetor unitário  $\mathbf{n}$  normal a um elemento infinitesimal de superfície  $dS$  e o vetor  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  que é a velocidade no ponto  $\mathbf{x}$ . Por conseguinte, o produto escalar entre  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{f}$  nos dá a componente normal da velocidade em  $\mathbf{x}$ . Num intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , a evolução de um pedaço infinitesimal da superfície  $dS$  cria um volume infinitesimal  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} dt)dS$ . Logo,  $V(t + dt)$  é igual a  $V(t)$  mais a integral dos elementos infinitesimais de volume  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} dt)dS$  criados pela evolução dos elementos de superfície:

$$V(t + dt) = V(t) + \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} dt) dS.$$

Rearranjando a equação acima e dividindo ambos os membros por  $dt$ , temos o seguinte resultado:

$$\frac{V(t + dt) - V(t)}{dt} \equiv \frac{dV}{dt} = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV, \quad (2.5)$$

a última integral foi obtida usando o teorema do divergente.

Como o volume é arbitrário, só teremos  $dV/dt = 0$  se e somente se o divergente do campo de velocidades  $\nabla \cdot \mathbf{f}$  for nulo. Neste caso, o sistema dinâmico é dito conservativo (MONTEIRO, 2006). Caso  $\nabla \cdot \mathbf{f} < 0$ , o sistema é dissipativo<sup>2</sup>.

Nos sistemas dissipativos, existem regiões limitadas do espaço de estados para onde as órbitas convergem. Ou seja, a partir de qualquer condição inicial  $\mathbf{x}(0)$  de um sistema dinâmico dissipativo, transcorrido tempo suficiente, sua trajetória  $\mathbf{x}(t)$  será atraída para uma figura conhecida como **atrator** (OTT, 1993). A definição de atrator não se aplica a sistemas dinâmicos expansivos e conservativos, de modo geral. Mais especificamente, um atrator é um conjunto  $C$  que satisfaz as seguintes condições (MONTEIRO, 2006)

- a)  $C$  é um conjunto invariante, ou seja, uma trajetória  $\mathbf{x}(t)$  que começa em  $C$ , permanece em  $C$  durante todo o tempo;
- b)  $C$  atrai um conjunto aberto de condições iniciais;<sup>3</sup>
- c) Não há subconjunto de  $C$  que satisfaça as duas condições anteriores ( $C$  é mínimo).

A partir desta definição já podemos supor que a complexidade de um atrator será maior quanto maior for a dimensão do espaço de estados. Para um sistema de tempo contínuo bidimensional e autônomo, o teorema de Poincaré-Bendixson garante que os únicos atratores possíveis serão o *atrator de ponto fixo*, que corresponde a uma solução cujo comportamento é independente do tempo, e o *ciclo limite*, que é uma

<sup>2</sup> Quando  $\nabla \cdot \mathbf{f} > 0$ , o sistema é expansivo.

<sup>3</sup> Esta condição impede que um ponto de sela seja considerado um atrator, por exemplo, uma vez que nem todas as condições iniciais tomadas a partir de uma hipersfera centrada no ponto de sela são atraídas para ele (apesar de ser invariante e mínimo, um ponto isolado é um conjunto fechado).



órbita fechada e descreve um comportamento periódico. No caso tridimensional, além dos dois já citados, ainda encontraremos outro atrator regular, que é o *atrator quase-periódico*, caracterizado por uma superfície toroidal e que representa um regime com duas frequências fundamentais cuja razão é um número irracional. Frequências com essas características são ditas incomensuráveis (MONTEIRO, 2006).

Por fim, existe mais um atrator em sistemas de dimensão  $\geq 3$ , aquele que fora conjecturado por Ruelle e Takens e obtida por Lorenz, o *atrator caótico*. Este atrator é caracterizado por uma curva que nunca se fecha e nem se cruza, porém permanece confinada numa região (MONTEIRO, 2006). Em outras palavras, trajetórias que partem de condições iniciais vizinhas no atrator caótico, devem se afastar exponencialmente, mas ainda ocupando uma região limitada do espaço de estados. Este suposto paradoxo é resolvido pela introdução dos conceitos da *geometria fractal*, que elucida a formação de um atrator caótico como envolvendo processos de esticamento e dobra das trajetórias (OTT, 1993). O atrator caótico é dito ter dimensão fractal.

Na Figura 8 podemos visualizar atratores gerados pelo sistema de Rössler, que é um modelo clássico na Dinâmica Não-Linear. Trata-se um sistema não-linear tridimensional de tempo contínuo formado pelas seguintes EDOs:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c).\end{aligned}$$

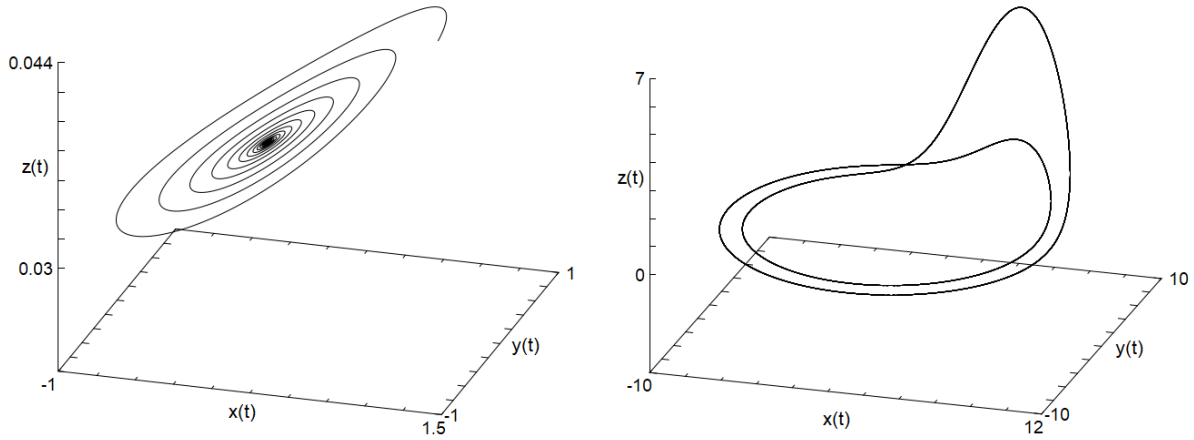
A partir do teorema de Poincaré-Bendixson, se estabelece que para ter caos em um sistema dinâmico dissipativo de tempo contínuo e autônomo é necessário que ele seja, no mínimo, tridimensional, além de ser não-linear. Para sistemas dinâmicos dissipativos de tempo contínuo e não-autônomos admitirem dinâmica caótica, basta ter dimensão  $n \geq 2$ , além de ser não-linear (OTT, 1993).

## 2.3 OS EXPOENTES DE LYAPUNOV

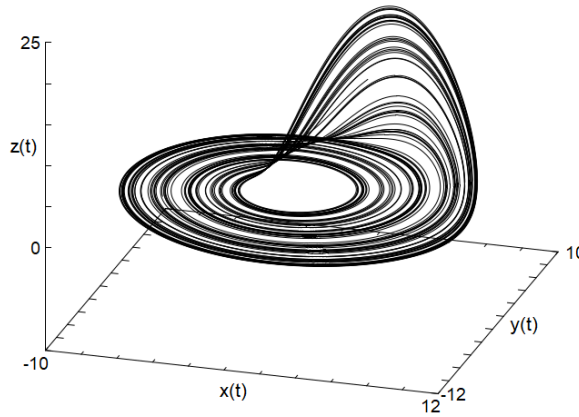
Conforme discutido na seção anterior, duas trajetórias vizinhas no atrator caótico devem divergir exponencialmente. Isto é o que caracteriza a dependência sensível do sistema às condições iniciais. A sensibilidade às condições iniciais pode ser identificada através do cálculo dos *expoentes de Lyapunov* (MONTEIRO, 2006), que estão relacionados à rapidez com que as órbitas próximas convergem ou divergem (WOLF et al., 1985).

Vamos considerar um sistema dinâmico dissipativo de tempo contínuo, no qual tomamos duas condições iniciais muito próximas  $\mathbf{x}_1(0)$  e  $\mathbf{x}_2(0)$ , com a distância entre elas dada por  $\|\Delta\mathbf{x}(0)\|$  conforme ilustrado na figura Figura 9. A evolução temporal go-

Figura 8 – Atratores gerados pelo sistema de Rössler para os seguintes valores dos parâmetros: (a)  $a = -0.1, b = 0.2, c = 5.7$ ; (b)  $a = 0.1, b = 0.1, c = 6$ ; (c)  $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$ .  
 (a) Atrator de ponto fixo. (b) Atrator periódico de período 2.



(c) Atrator caótico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

vernada pelas equações diferenciais a partir destas condições iniciais formam as órbitas representadas por  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , respectivamente. No instante  $t$ , o deslocamento entre as duas soluções é dado por  $\Delta x(t)$ . Se as duas condições iniciais estão infinitesimalmente próximas ( $\|\Delta x(0)\| \rightarrow 0$ ) e, após um intervalo de tempo suficientemente longo, a distância entre as órbitas crescer exponencialmente em relação à distância quando  $t = 0$  mas estando confinadas numa região do espaço de estados<sup>4</sup>, isto é,

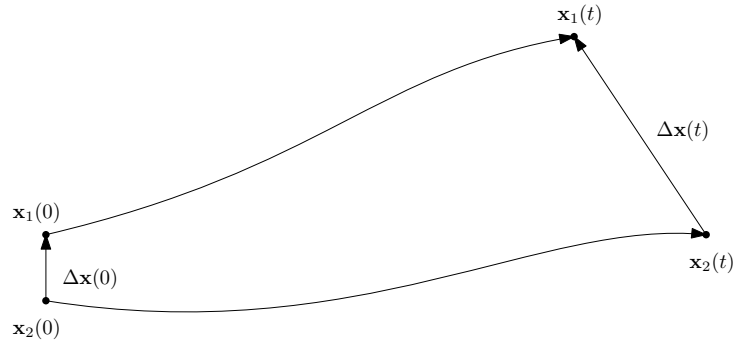
$$\frac{\|\Delta x(t)\|}{\|\Delta x(0)\|} \sim \exp(\lambda t), \quad (2.6)$$

com  $\lambda > 0$ , então o sistema apresenta dependência sensível às condições iniciais e é caótico (OTT, 1993).

De forma semelhante à que foi feita na seção 2.2 para chegar ao resultado que classifica um sistema como conservativo ou não conservativo, vamos considerar

<sup>4</sup> A determinação de que as órbitas devam permanecer confinadas numa região impede que sistemas lineares triviais sejam considerados caóticos por esta definição, uma vez que as órbitas nestes sistemas podem divergir exponencialmente quando  $t \rightarrow \infty$ .

Figura 9 – Duas trajetórias iniciadas muito próximas distanciam-se exponencialmente num sistema caótico, mas permanecem confinadas numa região.



Fonte: Elaborado pelo autor.

um sistema de  $n$  EDOs e tomar, no espaço de estados, uma hiper-esfera de condições iniciais de hiper-volume  $V(t_0)$  centrada num ponto  $\mathbf{x}(t_0)$ . Conforme o tempo passa, o hiper-volume se deforma. Vamos assumir que o raio inicial  $r_j(t_0)$  da hiper-esfera ao longo da  $j$ -ésima dimensão tenha variado exponencialmente no tempo, de forma que a relação entre o valor do raio correspondente no instante  $t$  dado por  $r_j(t)$  e o raio no instante  $t_0$  seja

$$r_j(t) = r_j(t_0) \exp[\lambda_j(t - t_0)], \quad (2.7)$$

em que  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Usando as condições que definiram a expressão (2.6), rearranjando a equação (2.7) e tomando o logaritmo natural de seus membros, temos

$$\lambda_j = \lim_{r_j(t_0) \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln[r_j(t)/r_j(t_0)]}{t - t_0}. \quad (2.8)$$

Os números  $\lambda_j$  são chamados de *expoentes de Lyapunov* (MONTEIRO, 2006) e estão relacionados com a expansão ou contração em diferentes direções do espaço de estados.

A hiper-esfera infinitesimal de condições iniciais torna-se um hiper-elipsoide com o transcorrer do tempo. Como a orientação dos hiper-elipsoides varia continuamente ao longo do atrator, as direções associadas aos expoentes de Lyapunov também variam de uma forma bem complicada (WOLF et al., 1985). Deste modo, não se pode atribuir uma direção bem definida do espaço de estados para cada expoente. Os números  $\lambda_j$  que formam o *espectro de Lyapunov* são organizados do maior para o menor dentro do algoritmo que computa os expoentes. Discorreremos sobre o cálculo numérico do espectro de Lyapunov na subseção 2.3.1.

Em um instante  $t > t_0$  o hiper-volume  $V(t)$  deve ser proporcional ao produto

das distâncias  $r_j(t)$  que o caracterizam:

$$V(t) \propto \prod_{j=1}^n r_j(t) = V(t_0) \exp \left[ (t - t_0) \sum_{j=1}^n \lambda_j \right]. \quad (2.9)$$

Se temos  $V(t) < V(t_0)$ , o sistema é dissipativo. Em termos dos expoentes de Lyapunov,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j < 0.$$

A soma dos expoentes de Lyapunov é a média temporal da velocidade de divergência no espaço de estados. Se  $V(t) = V(t_0)$ , o sistema é conservativo e a soma dos expoentes de Lyapunov é zero.

Os sinais dos expoentes de Lyapunov proporcionam um exame qualitativo do sistema dinâmico (MONTEIRO, 2006). Tratando-se dos sistemas dinâmicos de tempo contínuo tridimensionais, no atrator de ponto fixo, há contração do volume ao longo de todas as direções do espaço de estados, de forma que a trajetória convirja para um ponto. Neste caso, tem-se os expoentes  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  e  $\lambda_3 < 0$ .

No atrator periódico, a distância entre dois pontos numa dada direção se mantém constante, em média, no transcorrer do tempo, de modo que o expoente de Lyapunov associado a esta direção é nulo. Nas direções perpendiculares, há contração do volume. Logo, os expoentes associados a estas direções são negativos.

O atrator quase-periódico tem expoentes de Lyapunov  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3 < 0$ , de forma que as trajetórias atratoras se situam sobre uma superfície.

Para se ter um atrator caótico, um dos expoentes deve ser positivo para que o sistema tenha dependência sensível às condições iniciais. Outro expoente deve ser negativo e maior, em módulo, do que o expoente positivo para que o sistema se confirme como sendo dissipativo. Aquele ao longo da trajetória deve ser nulo. Então, para o atrator caótico, tem-se

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0 \text{ e } \lambda_3 < 0,$$

sendo  $|\lambda_3| > \lambda_1$ . A Tabela 1 organiza as combinações dos sinais dos expoentes de Lyapunov e o tipo de dinâmica correspondente.

### 2.3.1 Cálculo numérico do espectro de Lyapunov

Primeiramente, definamos os expoentes de Lyapunov da forma mais condizente com seu cálculo numérico. Os expoentes de Lyapunov são definidos pela evolução a longo prazo dos eixos de uma hiper-esfera infinitesimal no espaço de estados (WOLF et al., 1985). Uma forma de implementar este cálculo no ambiente computacional seria definir os eixos principais desta hiper-esfera de condições iniciais de forma

Tabela 1 – Combinações dos sinais dos expoentes de Lyapunov em sistemas contínuos tridimensionais e respectiva dinâmica característica. No cálculo numérico do espectro de Lyapunov, os valores dos expoentes devem ser ordenados do maior para o menor.

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$	Ponto de equilíbrio
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$	Periodicidade
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$	Quase-periodicidade
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$	Caos

Fonte: Elaborado pelo autor.

que as separações fossem tão pequenas quanto as permitidas pelo computador e evoluí-las através da integração das equações de movimento.

O problema desta abordagem é que, para sistemas no regime caótico, não se pode garantir a condição de separação infinitesimal para que o cálculo dos expoentes convirja após um tempo suficientemente longo (WOLF et al., 1985).

Uma abordagem que supera este problema foi implementada para o cálculo dos expoentes de Lyapunov de sistemas não-lineares dissipativos de tempo contínuo (sistema de equações diferenciais), por volta dos anos de 1979 e 1980, por Benne-  
tin et al. e Shimada e Nagashima (WOLF et al., 1985). O método consiste em adotar um espaço tangente a uma trajetória fiduciária. Isto é, a partir de uma condição inicial arbitrária, obtém-se a trajetória fiduciária (centro da hiper-esfera) via integração numérica das equações do sistema dinâmico; a trajetória dos pontos na superfície da hiper-esfera centrada na trajetória fiduciária é obtida via integração das *equações dinâmicas linearizadas*. Estas, por sua vez, são obtidas pelo produto da **matriz jacobiana** do sistema não-linear com os vetores que identificam os eixos da esfera de condições iniciais. Deste modo, a deformação na direção do  $i$ -ésimo eixo da hiper-esfera ( $\dot{\delta}_i$ ) é dada por:

$$\dot{\delta}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial(dx_1(t)/dt)}{\partial x_1} & \frac{\partial(dx_1(t)/dt)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial(dx_1(t)/dt)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial(dx_2(t)/dt)}{\partial x_1} & \frac{\partial(dx_2(t)/dt)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial(dx_2(t)/dt)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(dx_n(t)/dt)}{\partial x_1} & \frac{\partial(dx_n(t)/dt)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial(dx_n(t)/dt)}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{i_1} \\ \delta_{i_2} \\ \vdots \\ \delta_{i_n} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

em que  $\mathbf{J}$  é a matriz jacobiana do sistema dinâmico definido por (2.3) e  $(\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \dots, \delta_{i_n})$  são as componentes do vetor que identifica o  $i$ -ésimo eixo ( $i = 1, 2, \dots, n$ , correspondendo à dimensão do sistema). Os vetores que identificam os eixos da hiper-esfera de condições iniciais formam, inicialmente, uma base ortonormal que está ancorada na trajetória de referência. Por definição, os eixos obtidos via aplicação das equações linearizadas são infinitesimais relativos ao atrator (WOLF et al., 1985).

A cada passo da iteração, uma nova matriz jacobiana (que segue a trajetória

fiduciária) age sobre os últimos vetores obtidos, que são os vetores iniciais multiplicados por todas as matrizes jacobianas antecedentes. O cálculo dos expoentes de Lyapunov envolve a soma do comprimento de cada vetor que identifica os eixos do então hiper-elipsoide. Nos sistemas caóticos, devido a precisão finita do método numérico, os vetores tendem a colapsar na direção de maior crescimento e as direções dos eixos do espaço tangente passam a ser indistinguíveis. Este problema é evitado com o algoritmo de **reortonormalização de Gram-Schmidt** (GSR), responsável por ortonormalizar a base formada pelos vetores que identificam os eixos.

Seja  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$  um conjunto de vetores obtidos após um passo de integração de (2.10). Eles formam uma base no espaço vetorial. Após o computador guardar o tamanho de cada vetor, a base formada por eles será ortonormalizada segundo a GSR como segue:

- Um vetor é eleito arbitrariamente para ser a referência para que um segundo vetor seja feito ortogonal a ele. Digamos que seja o  $\mathbf{v}_1$ . Dividindo o vetor pela sua norma, teremos o vetor normalizado, e o vetor referência para a nova base ortonormal será:

$$\mathbf{v}_1' = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}.$$

Como  $\mathbf{v}_1'$  preserva a direção original do vetor de referência, ele irá sempre seguir a direção de maior crescimento;

- Para fazer um segundo vetor,  $\mathbf{v}_2'$ , ser ortogonal a  $\mathbf{v}_1'$ , a GSR determina que:

$$\mathbf{v}_2' = \frac{\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' \rangle \mathbf{v}_1'}{\|\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' \rangle \mathbf{v}_1'\|},$$

sendo  $\langle, \rangle$  a notação para produto interno;

- Os próximos vetores deverão ser ortogonais a todos os seus antecessores, por exemplo,  $\mathbf{v}_3'$  deverá ser ortogonal tanto a  $\mathbf{v}_1'$  quanto a  $\mathbf{v}_2'$ . Assim, temos que

$$\mathbf{v}_n' = \frac{\mathbf{v}_n - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n-1}' \rangle \mathbf{v}_{n-1}' - \dots - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1' \rangle \mathbf{v}_1'}{\|\mathbf{v}_n - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n-1}' \rangle \mathbf{v}_{n-1}' - \dots - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1' \rangle \mathbf{v}_1'\|}.$$

Após a GSR,  $(\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', \dots, \mathbf{v}_n')$  será a nova base ortonormal.

Os expoentes de Lyapunov não são uma medida local, seja em termos espaciais ou temporal. Eles são obtidos pela soma da deformação dos eixos de um elemento de volume no espaço de estados, computados a longo prazo, dividida pelo tempo total da iteração. Trate-se, portanto, de uma média.

### 2.3.2 Diagramas de Lyapunov

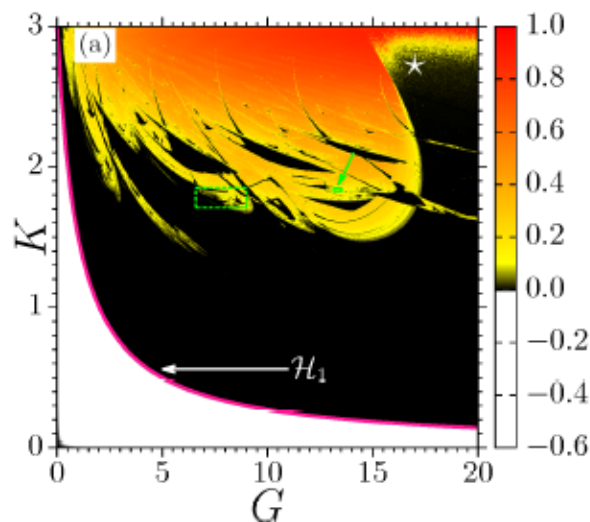
Não é necessário representar todo o espectro de Lyapunov para se fazer um exame qualitativo da dinâmica do sistema. Nos sistemas dinâmicos a tempo contínuo

tridimensionais em particular, uma representação que envolva apenas o expoente de maior valor é suficiente para identificar os atratores.

Isto é feito através do *diagrama de Lyapunov*, que trata-se de uma representação tridimensional em que dois dos eixos são formados pelo *plano de parâmetros* e o terceiro é formado pelos expoentes de Lyapunov de maior valor calculados para cada par de parâmetros. O eixo dos expoentes é representado por uma paleta de cores graduada para espelhar o valor do expoente.

É fundamental esclarecer que aqui estaremos nos referindo a parâmetros fixos, ou seja, que permanecem constantes durante o tempo de estudo das variáveis dinâmicas de interesse. Os parâmetros influenciam o comportamento dinâmico do sistema, entretanto, durante a obtenção de uma órbita (i.e., durante o tempo total de integração do sistema para determinados valores dos parâmetros), os valores dos parâmetros (coeficientes) permanecem fixos. Para gerar um diagrama de Lyapunov de um sistema que depende de dois ou mais parâmetros, dois parâmetros são elegidos a serem variados após uma órbita completa ser calculada, e os intervalos sob os quais estes parâmetros variam, formam um plano que chamados de *plano de parâmetros*. Os demais parâmetros são mantidos fixos durante a varredura completa do plano de parâmetros.

Figura 10 – Exemplo de um diagrama de Lyapunov.



Fonte: Manchein, Albuquerque e Mello (2018).

Nesta dissertação, construímos os diagramas de Lyapunov com base na referência (MANCHEIN; ALBUQUERQUE; MELLO, 2018), trabalho no qual se encontra o diagrama de Lyapunov da Figura 10. A paleta de cores na lateral direita indica:

- a) branco para expoente de Lyapunov negativo, que representa os pontos de

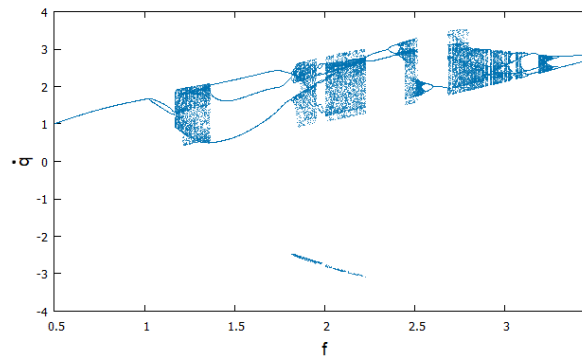
equilíbrio;

- b) preto para maior expoente nulo, que pode indicar comportamento periódico ou quase-periódico;
- c) gradiente de amarelo para vermelho para expoentes positivos, que são as regiões de caos. Quanto maior for o expoente, mais sensível às condições iniciais é o sistema, isto é, mais rápido as soluções de duas órbitas próximas<sup>5</sup> passam a divergir.

## 2.4 DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO

A variação dos parâmetros altera o comportamento qualitativo das órbitas. Graficamente, podemos analisar os pontos críticos a partir dos quais há uma mudança no comportamento assintótico do sistema. Os *diagramas de bifurcação* são gráficos bidimensionais em que o eixo horizontal representa o parâmetro de controle e o eixo vertical uma das variáveis dinâmicas do sistema, conforme exemplificado na Figura 11.

Figura 11 – Diagrama de bifurcação do sistema dinâmico modelado pela equação diferencial  $\ddot{q} + \mu\dot{q} + q + \beta q^2 + \gamma q^3 = f \cos(\omega t)$ . Foi construído através da variação do parâmetro  $f$  no intervalo  $0.5 \leq f \leq 3.5$  e estabelecendo  $\mu = 0.5$ ,  $\beta = 0.468$ ,  $\gamma = 0.05$  e o argumento do cosseno constante igual a 1.0.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Seja um sistema dinâmico definido pelo sistema de  $n$  equações diferenciais e por um parâmetro qualquer  $\mu \in R$ :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}_\mu(\mathbf{x}, t). \quad (2.11)$$

Tal sistema possui  $x_1, x_2, \dots, x_n$  variáveis dependentes. A variação de  $\mu$  pode alterar a estabilidade estrutural do sistema e o ponto  $((x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)|_{\mu=\mu_c, \mu_c})$  em que o sistema sofre uma mudança topológica no espaço de estados é chamado de *ponto*

<sup>5</sup> Por órbitas próximas entende-se órbitas que se iniciam a partir de dois estados quase indistinguíveis.



*de bifurcação*, sendo  $\mu_c$  o valor crítico do parâmetro a partir do qual a estabilidade é alterada (MONTEIRO, 2006).

Bifurcações de codimensão 1 são obtidas a partir da variação de somente um parâmetro do sistema, enquanto os demais permanecem constantes (MONTEIRO, 2006). A codimensão da bifurcação indica o número de parâmetros que são variados para obtê-la, e neste trabalho também haverá diagramas de bifurcação de codimensão 2, isto é, obtidos pela variação de dois parâmetros simultaneamente. Para obter os valores no eixo vertical, integram-se as equações de movimento passando pelo crivo da análise de estabilidade. Neste caso, os diagramas de bifurcação nos revelam o comportamento dinâmico do sistema para cada valor do parâmetro, sendo assim possível analisar a partir de quais valores dos parâmetros há uma mudança topológica no retrato de fases.

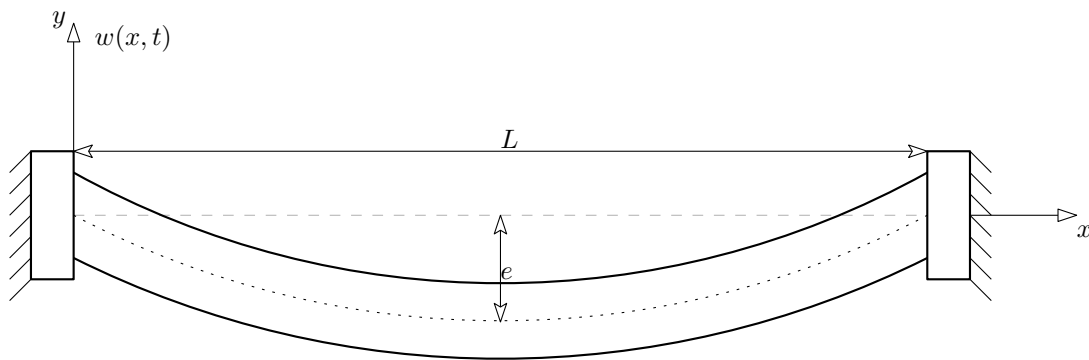
Os diagramas de bifurcação podem ser utilizados para identificar o período de órbitas periódicas e estudar os caminhos que levam ao caos. Não há aqui qualquer intenção de se fazer um estudo sobre os tipos de bifurcação e as rotas para o caos. Os diagramas de bifurcação serão utilizados como ferramenta complementar aos diagramas de Lyapunov.

### 3 O MODELO

Neste capítulo, deduziremos a equação que descreve as vibrações de um SWCNT sob condições que serão esclarecidas conforme o desenvolvimento. Partiremos da definição das grandezas fundamentais até as relações necessárias para escrever as equações de energia, que serão usadas para a obtenção da equação de movimento através da Mecânica Hamiltoniana.

O nanotubo será modelado como uma viga<sup>1</sup> tubular presa nas duas extremidades, ou com extremidades duplamente engastadas, conforme ilustra a Figura 12. Esta

Figura 12 – Esquema do nanotubo de carbono com extremidades fixas, sendo a razão  $e/L$  muito pequena. O pontilhado representa a linha neutra e  $w(x, t)$  é a deflexão, isto é, o deslocamento transversal de qualquer ponto da linha neutra em relação ao eixo  $x$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

configuração não permite translações e torções nas extremidades da viga. Trata-se de um problema de condição de contorno homogêneo:

$$w(0, t) = w(L, t) = \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial w(L, t)}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

sendo  $w(0, t)$  e  $w(L, t)$  a deflexão<sup>2</sup> nas extremidades e  $\frac{\partial w}{\partial x}$  uma das componentes da deformação de cisalhamento<sup>3</sup>.

Assumiremos o plano  $xy$  como o plano de simetria desta viga tubular, e que as forças (externas) laterais que nela atuam, atuam neste plano de modo que as flexões também ocorram nele e não existam torções em nenhum ponto da viga. Nos referimos, então, ao plano  $xy$  como *plano de flexão*. A posição da origem do sistema

<sup>1</sup> Vigas são elementos estruturais em que as forças e torques agem perpendicularmente ao seu eixo (GERE; GOODNO, 2010).

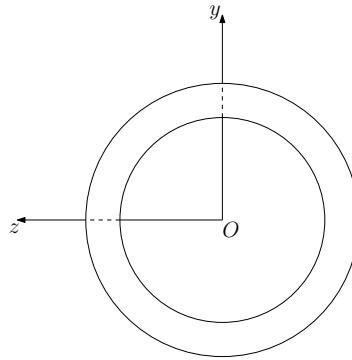
<sup>2</sup> Na subseção 3.2.1 será discorrido sobre a necessidade da obtenção de uma equação diferencial para a curva de deflexão para uma descrição parcial das deformações no nanotubo.

<sup>3</sup> Isto será esclarecido na seção 3.3.

de coordenadas será discutida na seção 3.2. O nanotubo de carbono é assumido ter seção transversal  $A$  anular conforme ilustrado na Figura 13, comprimento  $L$  de dimensão muito maior que seu diâmetro e sua massa está distribuída uniformemente com densidade  $\rho$ .

As imagens de nanotubos de carbono feitas por microscópios eletrônicos de transmissão mostram que essas estruturas não são, geralmente, retas. Elas costumam ter uma certa curvatura. O efeito da curvatura mostrou ser significativo para a determinação do módulo de elasticidade, entretanto não há trabalhos que relacione este efeito às características de vibração (GENG; ZHANG, 2012). A Figura 12, que ilustra o esquema de CNT, enfatiza esta curvatura, sendo  $e$  a amplitude de curvatura.

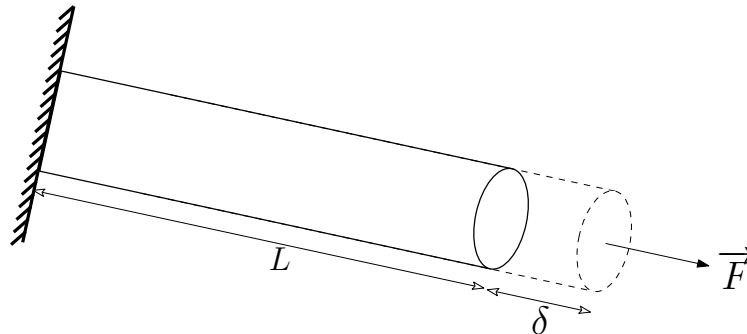
Figura 13 – Seção transversal perpendicular ao eixo do nanotubo de carbono.



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.1 GRANDEZAS E RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

Figura 14 – Alongamento longitudinal numa barra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Primeiramente iremos introduzir as grandezas pertinentes e as relações entre elas que são fundamentais para o problema. Vamos considerar uma barra prismática e homogênea de comprimento  $L$  engastada em uma de suas extremidades que, sob

a ação de uma força  $F$  na extremidade livre, sofre um alongamento longitudinal  $\delta$ , conforme ilustra a Figura 14. Uma barra prismática é um membro estrutural reto com a mesma seção transversal ao longo do seu comprimento. Considerando que esta força está distribuída uniformemente na área de seção transversal  $A$  da barra, é exercida uma pressão  $p$  dada por:

$$p = \frac{F}{A}. \quad (3.2)$$

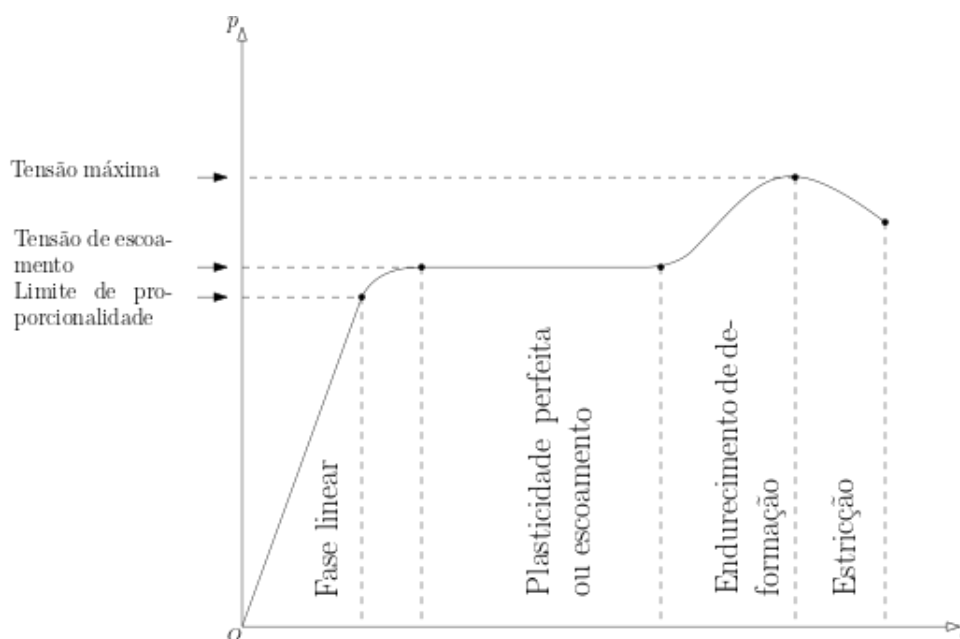
Há um encurtamento da área de seção transversal do corpo em paralelo ao alongamento longitudinal, entretanto, para fins práticos, podemos desconsiderar esta diminuição em pequenas deformações.

A análise da pressão exercida num corpo e a deformação gerada pode ser representada num diagrama pressão-deformação obtido pelo *teste de tração*. Chamamos de deformação  $\epsilon$  a razão entre o alongamento longitudinal  $\delta$  e o comprimento inicial da barra  $L$ :

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}. \quad (3.3)$$

No teste de tração, um corpo de prova é preso pelas suas extremidades e é sujeito a uma tração. Um extensômetro mede o alongamento para cada valor de força aplicada. Usando os conceitos de pressão e deformação tem-se quantidades que não representam explicitamente as dimensões do corpo de prova, e, assim, os pares pressão-deformação são expressos num diagrama que forma uma curva característica do material (GERE; GOODNO, 2010).

Figura 15 – Representação do diagrama pressão-deformação do aço estrutural sem escalas.



Fonte: Elaborado pelo autor com base em Gere e Goodno (2009, p. 12).

A Figura 15 apresenta um diagrama pressão-deformação sem escalas do aço estrutural (também conhecido como aço com baixo teor de carbono ou aço mole). Naturalmente há curvas pressão-deformação para cada material, entretanto a resposta linear indicada pela região "fase linear" é comum, de modo geral. Nesta faixa, o comportamento é dito elástico e podemos escrever como a equação de uma reta:

$$p = E\epsilon, \quad (3.4)$$

em que a inclinação da reta  $E$  é chamado de módulo de elasticidade e a relação (3.4) é uma das formas da *Lei de Hooke* (TIMOSHENKO; GERE, 1972; GERE; GOODNO, 2010). Além de linear, esta relação também é de proporcionalidade.

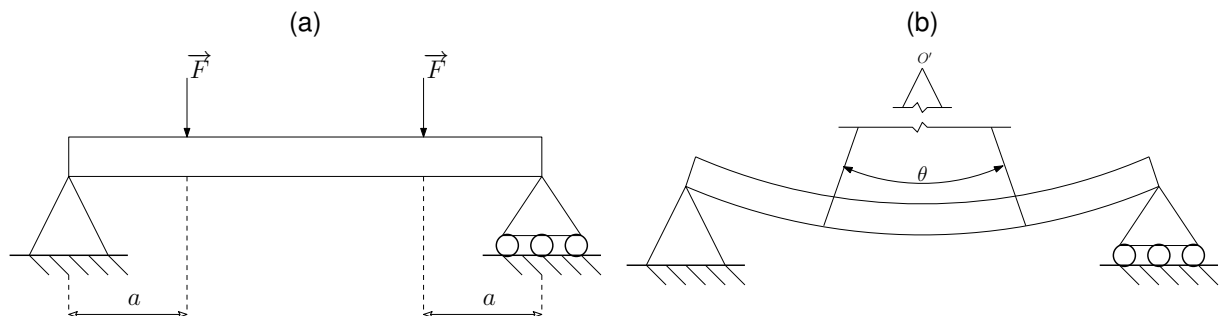
No modelo estudado aqui, adotamos o critério de pequenas oscilações, o que corresponde, naturalmente, a pequenos alongamentos e estará na faixa de comportamento elástico. Neste caso, tem-se o módulo de elasticidade  $E$  constante. Combinando as equações (3.2) e (3.4) em (3.3), temos

$$\delta = \frac{FL}{EA}, \quad (3.5)$$

ou seja, o alongamento longitudinal é diretamente proporcional à força aplicada e ao comprimento inicial da barra. Por outro lado, quanto maior for o módulo de elasticidade e a área de seção transversal, mais difícil será de provocar um alongamento.

### 3.2 DEFORMAÇÕES NORMAIS NA FLEXÃO

Figura 16 – Representação de uma viga simplesmente apoiada, que é o nome dado a uma viga com um apoio de pino em uma de suas extremidades e um apoio de rolete na outra (GERE; GOODNO, 2010, p. 262). Nas vigas ilustradas em (a) e (b), o apoio da esquerda é a representação de um apoio de pino, que evita translações, mas permite a torção; e o apoio da direita é um apoio de rolete, que não permite translação vertical, no entanto permite translação no sentido horizontal, além da torção.



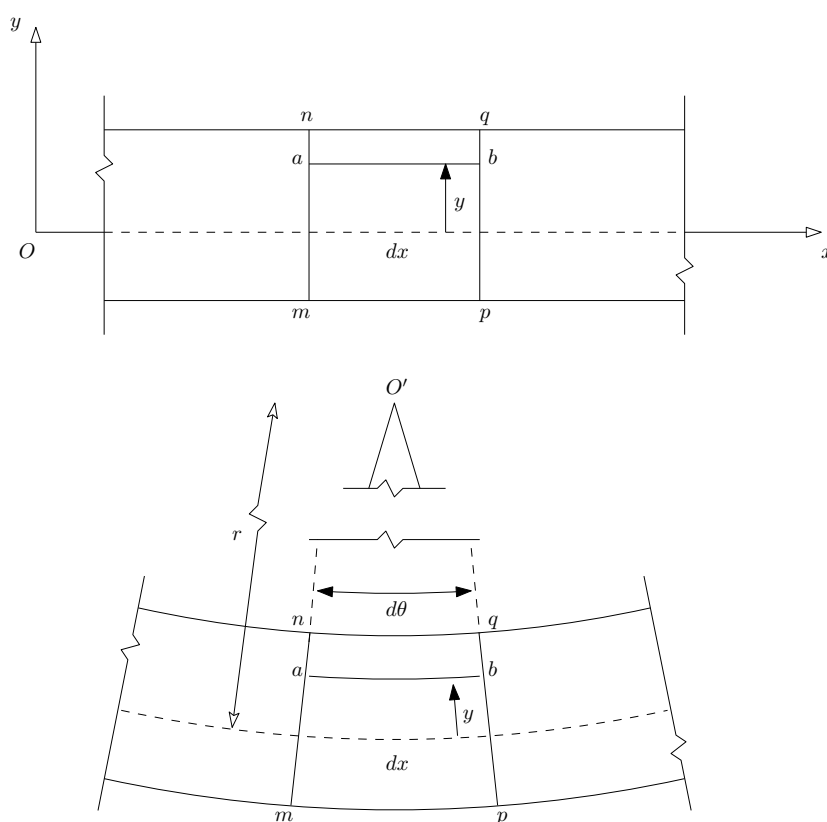
Fonte: Elaborado pelo autor.

Consideremos agora uma viga simplesmente apoiada esquematizada na Figura 16 (a). Nela são aplicadas duas forças laterais a uma distância  $a$  igual das extremidades. Assumiremos o plano  $xy$  como o plano de simetria da viga e que as forças

que nela atuam, estão contidas neste plano, de forma que as flexões também ocorrerem nele. A viga também é prismática e de material homogêneo. Em resposta às forças aplicadas (e o próprio peso da barra sobre os apoios) surgem pressões (ou tensões, na nomenclatura das engenharias) no interior da viga, e esta pode vir a flexionar. As resultantes das tensões numa seção transversal são conhecidas como força de cisalhamento (força agindo paralelamente à seção transversal) e momento fletor (resultante dos torques das forças internas em relação ao eixo  $z$ ) (TIMOSHENKO; GERE, 1972; GERE; GOODNO, 2010).

Numa flexão, representada na Figura 16 (b), as fibras longitudinais da parte superior irão se contrair, enquanto que as da parte inferior irão se alongar. Entretanto, entre a parte superior e inferior da viga existe uma região onde as fibras longitudinais não sofrem deformação. Toda esta região é conhecida como superfície neutra, e sua interseção com o plano  $xy$  chama-se *linha neutra*. A origem do sistema de coordenadas é posicionado convenientemente na superfície neutra. Segue que, nesta flexão, as fibras longitudinais acima da superfície neutra sofrerão compressão, enquanto que as abaixo da superfície neutra serão tracionadas.

Figura 17 – Visão ampliada do centro da viga.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para analisar as deformações nessas fibras, tomamos dois cortes transver-

sais  $mn$  e  $pq$  equidistantes do centro da viga e que estão na região entre as forças aplicadas. A Figura 17 ilustra uma visão ampliada deste corte. Devido à configuração que impomos a esta viga, sem entrar em detalhes, a região compreendida entre as forças aplicadas encontra-se em *flexão pura*, estado em que não há forças de cisalhamento e o momento fletor é constante ao longo de toda seção transversal dentro desta região. Na flexão pura, a barra se curva formando um arco de circunferência e os cortes transversais  $mn$  e  $pq$  permanecem perpendiculares ao plano  $xz$ . Deste modo, os planos dos cortes  $mn$  e  $pq$  se interceptam no centro de curvatura do arco  $O$  formando um ângulo  $d\theta$ . O raio  $r$  é, então, a distância entre o ponto  $O$  e qualquer ponto da superfície neutra nos limites da região em questão. Como estamos considerando deflexões muito pequenas, a curva formada pela deflexão é quase plana, e o raio  $r$  de curvatura é muito maior que o comprimento da barra.

O elemento  $dx$  é um segmento da linha neutra, logo seu comprimento não sofre deformação durante a flexão. Entretanto, as demais fibras longitudinais acima e abaixo da linha neutra se contraem ou se alongam, gerando assim deformações normais  $\epsilon_x$ . Pela relação de comprimento de uma circunferência, temos que

$$dx = r d\theta. \quad (3.6)$$

O segmento de uma fibra longitudinal  $C_{ab}$  localizada a uma distância  $y$  acima da linha neutra terá, então, o comprimento:

$$C_{ab} = (r - y) d\theta. \quad (3.7)$$

Substituindo (3.6) em (3.7), teremos

$$C_{ab} = (1 - y/r) dx. \quad (3.8)$$

Para determinar o encurtamento  $\delta_{ab}$  (ou alongamento) sofrido por esta fibra, tomamos a diferença entre seu comprimento  $C_{ab}$  e o comprimento não deformado  $dx$ :

$$\delta_{ab} = C_{ab} - dx$$

$$\delta_{ab} = (1 - y/r) dx - dx$$

$$\delta_{ab} = -y/r dx = -ky dx, \quad (3.9)$$

em que  $k$  é a curvatura, o inverso do raio:  $k = 1/r$ . Quanto menor for a flexão da barra, maior será o raio  $r$  de curvatura, e menor será a curvatura  $k$ . Por questões dimensionais, é mais conveniente trabalhar com a curvatura  $k$ . Estamos adotando  $k$  como positivo quando a barra é fletida com concavidade voltada para cima. Assim, pela equação (3.9), tomando uma distância  $y$  positiva (acima da linha neutra), teremos

um alongamento de valor negativo, ou seja, um encurtamento da fibra. Caso contrário,  $y$  negativo (fibras abaixo da linha neutra), teremos um alongamento positivo.

Conforme definido em (3.3), pode-se estabelecer uma relação para a deformação normal  $\epsilon_x$  tomando a razão entre o alongamento  $\delta$  determinado por (3.9) e o comprimento que não sofre deformação  $dx$ :

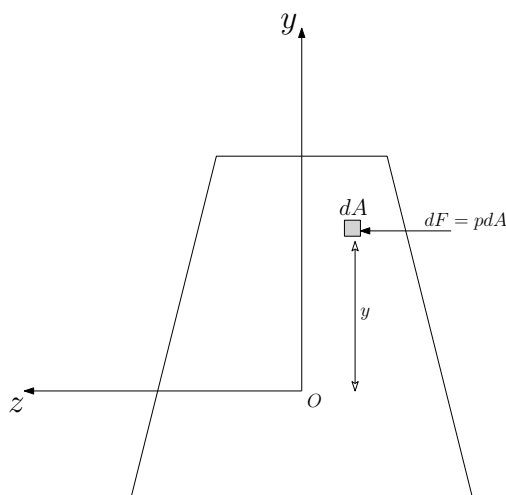
$$\epsilon_x = -ky. \quad (3.10)$$

Como estamos no limite de deformação do material onde este apresenta um comportamento elástico linear, podemos utilizar a lei de Hooke em (3.4) para relacionar a deformação normal  $\epsilon_x$  com uma tensão associada  $p_x$ . Substituindo a relação encontrada em (3.10) na lei de Hooke, temos

$$p_x = -kEy, \quad (3.11)$$

ou seja, para  $y$  positivo tem-se uma tensão de compressão e para  $y$  negativo, uma tensão de alongamento.

Figura 18 – Força agindo sobre o elemento de área de uma seção transversal tomada na região de flexão pura da viga.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos deduzir duas equações das condições de equilíbrio aplicadas à superfície da seção transversal<sup>4</sup>. Na Figura 18 tem-se a representação da seção transversal da viga. A força agindo sob um elemento de área  $dA$  da seção transversal será,

<sup>4</sup> Os desenvolvimentos apresentados nesta seção podem ser encontrados em materiais da disciplina de Mecânica dos Materiais. Nesta dissertação adotamos as referências (TIMOSHENKO; GERE, 1972) e (GERE; GOODNO, 2010), ambas estão disponíveis na biblioteca física da UDESC CCT (campus de Joinville).



então,  $p_x dA$ . Uma vez que não há forças externas agindo na direção axial (eixo  $x$ ), a resultante das forças em toda seção transversal deve ser nula:

$$\int_A p_x dA = - \int_A k E y dA = 0,$$

$$\int_A y dA = 0. \quad (3.12)$$

Como a integral em (3.12) é uma propriedade da área, pode-se concluir que a origem do sistema de coordenadas (que coincide com a linha neutra), está localizada no centro geométrico (centroide) da área de seção transversal<sup>5</sup>.

A segunda equação expressa o fato de que o momento resultante das tensões normais  $p_x$  agindo sobre a seção transversal é igual ao momento fletor  $M$ . Uma tensão  $p_x$  positiva agindo num elemento de área  $dA$  localizado numa posição  $y$  acima da linha neutra, produz um momento elementar  $p_x y dA$  negativo, pois estamos considerando o momento fletor  $M$  como positivo no sentido da barra fletida de referência<sup>6</sup>:

$$dM = -p_x y dA.$$

A integral de todos esses momentos elementares em toda a área de seção transversal  $A$  deve ser igual ao momento fletor:

$$M = - \int_A p_x y dA = \int_A k E y^2 dA = k E \int_A y^2 dA,$$

$$M = k E I, \quad (3.13)$$

em que  $I = \int_A y^2 dA$  é o momento de inércia de área e é uma propriedade da área de seção transversal. Podemos rearranjar a equação (3.13) em

$$k = \frac{M}{EI}, \quad (3.14)$$

que mostra que a curvatura  $k$  é maior quanto maior for o momento fletor  $M$ , mas é inversamente proporcional ao produto  $EI$ , chamado de rigidez de flexão da viga (TIMOSHENKO; GERE, 1972).

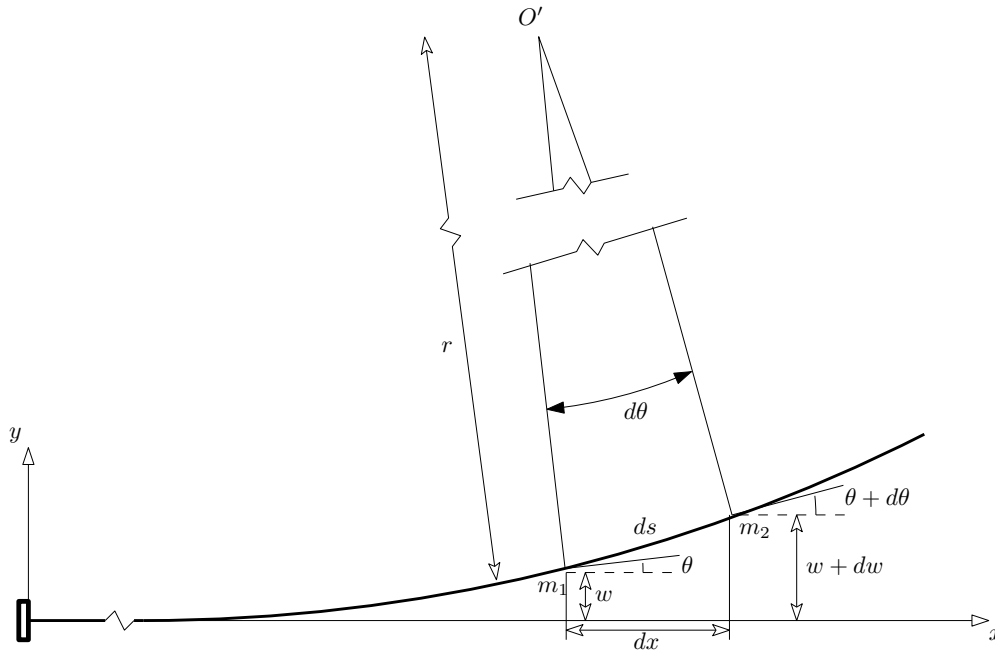
### 3.2.1 Equação diferencial da curva de deflexão para pequenas deflexões

A deflexão  $w$  é o deslocamento transversal de qualquer ponto do eixo da barra (eixo  $x$ ). Tal como nos desenvolvimentos das seções anteriores, estamos considerando as flexões no plano de flexão, plano  $xy$ . Para obter uma equação para a curva de deflexão, vamos considerar o caso estacionário, ou seja, a deflexão como função apenas da coordenada  $x$ ,  $w(x)$ .

<sup>5</sup> Conclusão válida quando o material obedece a lei de Hooke e não há forças axiais externas.

<sup>6</sup> O momento fletor  $M$  positivo, na nossa convenção, tende a comprimir a parte superior da viga e tracionar a parte inferior.

Figura 19 – Curvatura da viga fletida.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Convenientemente, consideraremos a viga engastada em uma de suas extremidades e com uma força sendo aplicada para cima na sua extremidade livre, conforme Figura 19. A deflexão  $w$  em um ponto qualquer  $m_1$  na curva de deflexão está localizado a uma distância  $x$  a partir da origem. A reta tangente à curva de deflexão no ponto  $m_1$  faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ . Um segundo ponto  $m_2$ , localizado a uma distância  $x + dx$ , representa a deflexão  $w + dw$ , e a reta tangente a este ponto da curva faz um ângulo  $\theta + d\theta$  como o eixo  $x$ , onde  $d\theta$  é o aumento no ângulo conforme andamos na curva do ponto  $m_1$  para o ponto  $m_2$ . Tomando retas normais às retas tangentes nos pontos  $m_1$  e  $m_2$ , elas também formarão um ângulo  $d\theta$  (ângulos opostos pelo vértice).

Como  $ds$  é o comprimento do arco de circunferência delimitado pelos pontos  $m_1$  e  $m_2$ , temos que  $ds = r d\theta$ , onde  $r$  é o raio de curvatura, ou, em função da curvatura  $k$ ,

$$k = \frac{d\theta}{ds}. \quad (3.15)$$

A primeira derivada da curva de deflexão  $w(x)$  em relação a  $x$ ,  $\frac{dw}{dx}$ , no ponto  $m_1$  é igual a tangente do ângulo  $\theta$ . Entretanto, para deflexões muito pequenas,  $\tan \theta \approx \theta$ , e a diferença  $ds$  é praticamente a mesma que o incremento  $dx$  ao longo do eixo  $x$ . Assim, temos que

$$\frac{dw}{dx} = \tan \theta \approx \theta, \quad (3.16)$$

e a equação (3.15) torna-se

$$k = \frac{d\theta}{dx}. \quad (3.17)$$

Tomando a derivada de  $\theta$  em relação à  $x$  na equação (3.16), temos

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2}. \quad (3.18)$$

Combinando esta equação com a equação (3.17), obtemos uma relação entre a curvatura de uma barra e sua deflexão:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = k.$$

Enfim, caso o material obedeça a lei de Hooke, podemos usar a equação (3.14) e combinar com equação acima para obter

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI}, \quad (3.19)$$

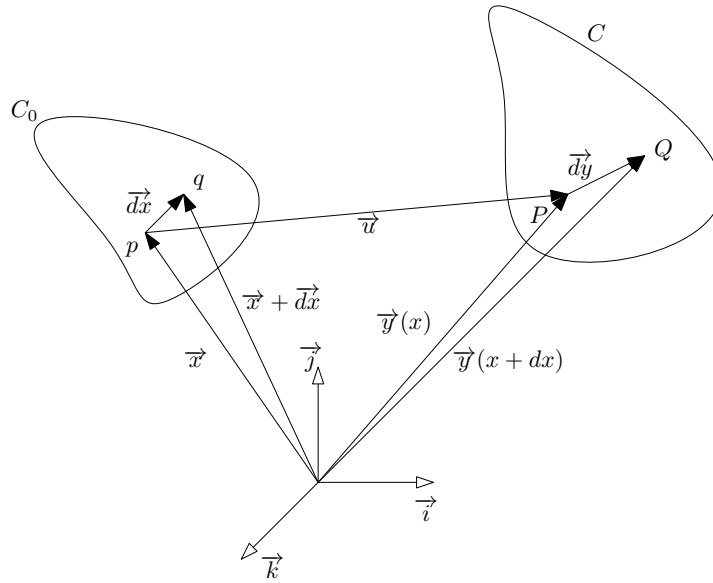
que é conhecida como equação diferencial da curva de deflexão para pequenas deflexões. A equação (3.19) pode ser integrada para cada caso particular para encontrar a deflexão  $w$ , com a condição de que o momento fletor  $M$  seja conhecido como uma função de  $x$ . Esta relação é fundamental para se obter a expressão para a energia potencial de flexão do nanotubo.

### 3.3 TENSOR DEFORMAÇÃO

Na seção 3.2 são obtidas relações a partir da análise das deformações normais à área de seção transversal perpendicular à superfície neutra de uma viga em flexão pura. Já nesta seção, apresentaremos as ferramentas que descrevem o alongamento de um elemento infinitesimal de um corpo contínuo. Esta análise culmina nas expressões necessárias para obter uma equação para a energia potencial devido esticamento do nanotubo, onde estarão contidos termos não-lineares do modelo. Para isso, lançamos mão da seguinte idealização matemática: um corpo contínuo é caracterizado por um conjunto de pontos materiais. A vizinhança de um ponto material num corpo contínuo é densa e está totalmente ocupada por outro ponto material. Uma configuração de referência (também chamada de configuração não deformada) para o corpo é adotada para, assim, poder ser escrita uma configuração atual deformada relativamente à configuração de referência (ABEYARATNE, 2015).

Sendo  $C_0$  a configuração de referência de um corpo qualquer. Dois pontos  $p$  e  $q$  quaisquer em  $C_0$  localizados pelos vetores posição  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ , respectivamente, formam o elemento infinitesimal  $d\mathbf{x}$ , conforme ilustrado na Figura 20. Na configuração deformada  $C$ , os pontos  $p$  e  $q$  são deslocados para os pontos  $P$  e  $Q$ , localizados por

Figura 20 – Corpo deformado na configuração  $C$  relativo à configuração  $C_0$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

$y(\mathbf{x})$  e  $y(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ , respectivamente, e o elemento na configuração deformada  $C$  será dado por

$$d\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{y}(\mathbf{x}).$$

Ressalta-se que o número de pontos materiais contidos no elemento  $d\mathbf{x}$  é o mesmo em  $d\mathbf{y}$ , ou seja, um ponto material em  $C_0$  não se divide em dois em  $C$ , ou dois pontos em uma das configurações não se fundem na outra. É uma relação de mapeamento entre uma configuração e outra. Um ponto  $y(\mathbf{x})$  localizado em  $C$  é escrito em função do seu ponto correspondente em  $\mathbf{x}$ .

Expandindo  $y(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$  em série de Taylor, temos

$$y(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = y(\mathbf{x}) + \nabla y(\mathbf{x})d\mathbf{x} + O(|d\mathbf{x}|^2).$$

Desprezando termos de ordem superiores a 1:

$$y(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - y(\mathbf{x}) = \nabla y(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

$$d\mathbf{y} = \mathbf{F}d\mathbf{x}, \quad (3.20)$$

sendo  $\mathbf{F} = \nabla y(\mathbf{x})$  o tensor gradiente de deformação, um tensor de segunda ordem, que pode ser representado por uma matriz  $3 \times 3$ . Em função dos seus elementos, o tensor  $\mathbf{F}$  é escrito como<sup>7</sup>

$$F_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}. \quad (3.21)$$

<sup>7</sup> Em notação indicial.

$\mathbf{F}$ , conforme a equação (3.20), é a transformação matemática que leva um elemento de comprimento do corpo da configuração de referência  $C_0$  para a configuração do corpo deformado  $C$ . É fácil perceber que, por exemplo, caso  $\mathbf{F}$  seja o tensor identidade  $\mathbf{I}$ , não haverá deformação no elemento de comprimento. O tensor gradiente de deformação pode conter as regras matemáticas que realizam uma rotação e/ou um alongamento.

Geralmente são utilizados tensores de deformação que são função do tensor gradiente de deformação  $\mathbf{F}$ . A diferença é que os tensores de deformação representam a taxa de deformação, conforme foi definido na equação (3.3), e devem ser nulos para não provocar uma deformação num elemento de comprimento. Na literatura são utilizados numerosos tipos desses tensores, que vão depender das deformações que são possíveis num corpo. Para o modelo aqui estudado, é conveniente usar uma versão simplificada do tensor de deformação de Green-Lagrange  $\varepsilon$ , que caracteriza pequenos alongamentos porém moderadas rotações dos planos de seção transversal. Este tensor é comumente conhecido como tensor deformação de von Kármán (REDDY; MAHAFFEY, 2013).

Iremos deduzir o tensor de von Kármán a partir do tensor de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$ , que é obtido tomando a diferença entre o quadrado dos comprimentos dos elementos na configuração deformada,  $d\mathbf{y}$ , e na de referência,  $d\mathbf{x}$ :

$$\frac{1}{2} (d\mathbf{y}^2 - d\mathbf{x}^2) = \frac{1}{2} (d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}).$$

Usando a relação em (3.20) a equação acima torna-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (d\mathbf{y}^2 - d\mathbf{x}^2) &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}), \\ \frac{1}{2} (d\mathbf{y}^2 - d\mathbf{x}^2) &= \frac{1}{2} (d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}), \\ \frac{1}{2} (d\mathbf{y}^2 - d\mathbf{x}^2) &= \frac{1}{2} (d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) d\mathbf{x}), \\ \frac{1}{2} (d\mathbf{y}^2 - d\mathbf{x}^2) &= \frac{1}{2} (d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\mathbf{x}), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} (d\mathbf{y}^2 - d\mathbf{x}^2) = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{x}. \quad (3.22)$$

$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  é conhecido como tensor direito de Cauchy-Green.  $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I})$  é o tensor de Green-Lagrange, que ainda pode ser escrito em termos do campo de deslocamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}. \quad (3.23)$$

Tomando o gradiente de  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ :

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{I},$$

$$\nabla u = \mathbf{F} - \mathbf{I},$$

$$\mathbf{F} = \nabla u + \mathbf{I}. \quad (3.24)$$

Substituindo (3.24) no tensor  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} [(\nabla u + \mathbf{I})^T (\nabla u + \mathbf{I}) - \mathbf{I}],$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u). \quad (3.25)$$

Em termo dos seus elementos, podemos escrever

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (3.26)$$

Para o problema tratado aqui, o único componente não nulo do tensor é o  $E_{11}$  (ou  $E_{xx}$ ), pois as flexões ocorrem no plano de flexão  $xy$  e, no limite de pequenas deflexões, a seção transversal permanece constante ao longo do comprimento do nanotudo:

$$E_{xx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right],$$

$$E_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2. \quad (3.27)$$

No tensor de von Kármán  $\epsilon$ , que trata-se de uma simplificação do tensor de Green-Lagrange,  $\left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \approx 0$ . Logo,

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2. \quad (3.28)$$

Segundo a teoria das vigas de Euler-Bernoulli, que estabelece que para pequenas flexões na viga, o plano da seção transversal permanece perpendicular ao eixo neutro (REDDY; MAHAFFEY, 2013), o campo de deslocamento  $u(x, t)$  para uma viga com imperfeição geométrica (curvatura) é escrito como:

$$u_x(x, y, t) = u(x, t) - y' \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$u_y(x, y, t) = w(x, t) + Z(x), \quad (3.29)$$

em que  $Z(x)$  é a função da curvatura da viga e  $y'$  é um ponto medido a partir do eixo neutro.

Assumindo pequenas deformações, o tensor de von Kármán usando o campo de deslocamento (3.29) é aproximadamente (FARSHIDIANFAR; SOLTANI, 2012)

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{dZ}{dx} \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3.30)$$

### 3.4 EQUAÇÕES DE ENERGIA

Nesta seção serão escritas as equações de energia cinética e potencial a partir das equações até então obtidas.

#### 3.4.1 Energia cinética

Cada elemento de massa do nanotubo  $dm = \rho A dx$  com velocidade não nula contribui com a energia cinética total  $T$  do sistema. A velocidade em um ponto da linha neutra do nanotubo é dada pela derivada temporal do deslocamento transversal  $\frac{\partial w}{\partial t}$ . Logo, a energia cinética total é dada por

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (3.31)$$

#### 3.4.2 Energia potencial de flexão

Conforme discutido na seção 3.2 a partir da análise de uma viga em flexão pura, as fibras longitudinais de uma viga sofrem deformações normais à seção transversal, isto é, elas se comprimem ou se tracionam. Neste estado de compressão ou tração é armazenada energia na forma de energia potencial.

Os resultados a seguir só são válidos para materiais que seguem a Lei de Hooke. Numa flexão neste caso, existe uma relação linear entre o momento fletor  $M$  e o ângulo de curvatura  $d\theta$  de um elemento da viga, cuja relação podemos obter combinando as equações (3.14) e (3.17):

$$d\theta = \frac{M dx}{EI}. \quad (3.32)$$

Conforme o momento fletor aumenta em magnitude desde zero até seu valor máximo, é realizado trabalho e, pelo princípio de conservação de energia, a energia fica armazenada na forma de energia potencial. O trabalho realizado é igual à área da região hachurada na Figura 21, que representa um diagrama mostrando a relação linear entre momento fletor e ângulo e curvatura. Assim, a energia potencial de flexão num elemento da viga será:

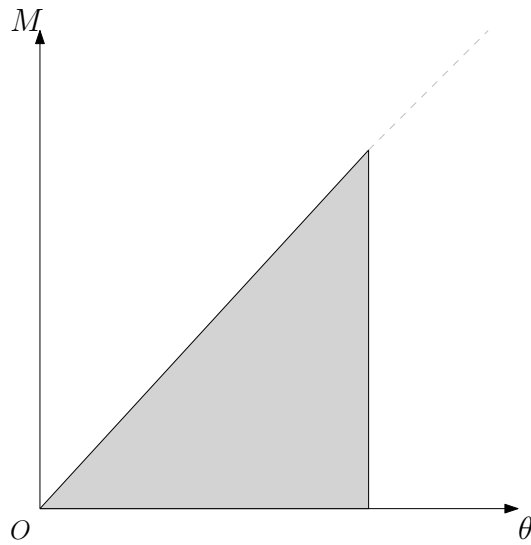
$$dW = dU_f = \frac{M d\theta}{2}.$$

Combinando a equação (3.32) com a expressão acima, temos

$$dU_f = \frac{EI}{2} \frac{(d\theta)^2}{dx}. \quad (3.33)$$

Substituindo (3.18) em (3.33) e integrando ao longo de todo o comprimento do nanotubo, temos que a energia potencial de flexão total  $dU_f$  armazenada no nanotubo será

Figura 21 – Relação linear entre momento fletor e ângulo de curvatura.



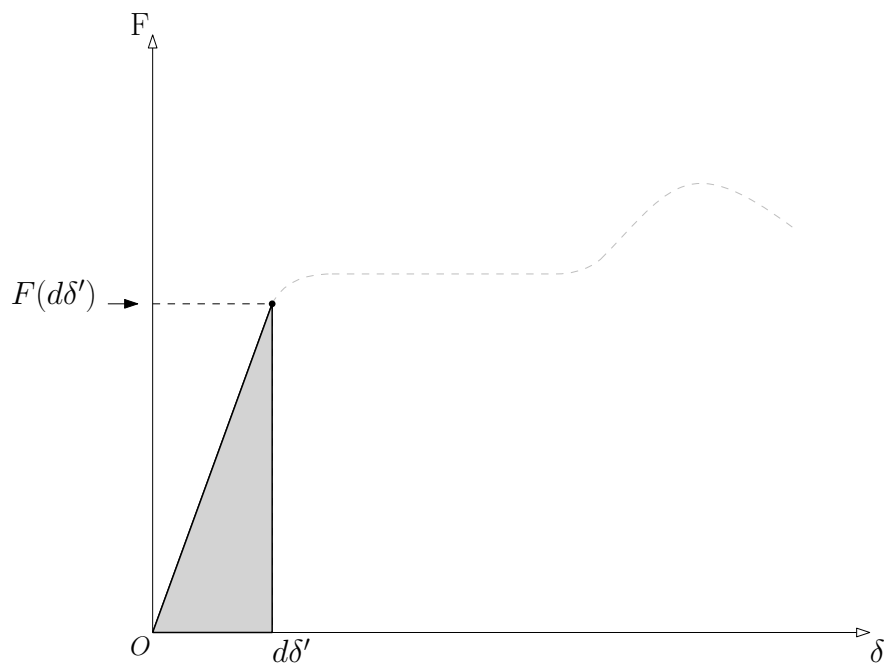
Fonte: Elaborado pelo autor.

dada por

$$U_f = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (3.34)$$

### 3.4.3 Energia potencial de alongamento

Figura 22 – Relação linear entre força e alongamento.



Fonte: Elaborado pelo autor.



Uma outra equação de energia potencial é obtida por conta das deformações governadas pelo tensor de deformação conforme discutido na seção 3.3. Durante estas deformações, trabalho é realizado ao esticar (ou comprimir) um elemento  $dx$  numa quantidade  $d\delta'$ . Pelo princípio de conservação de energia, a energia potencial é igual ao trabalho realizado. Caso a força seja removida, o elemento deformado volta ao comprimento original.

Se o material segue a lei de Hooke, o diagrama tensão-alongamento obedece uma relação linear, conforme esquematizado na Figura 22. Assim, o trabalho realizado durante a deformação de um elemento da viga, que é igual à energia potencial  $dU_a$ , é

$$dW = dU_a = \frac{F(d\delta')d\delta'}{2},$$

isto é, a área da região hachurada na Figura 22. Combinando a equação (3.5) com a expressão acima, obtemos

$$dU_a = \frac{EA d\delta'^2}{2dx}. \quad (3.35)$$

Conforme já definido no início da seção 3.1 na equação (3.3),  $d\delta' = \varepsilon dx$ . Substituindo esta relação na equação (3.35), temos

$$dU_a = \frac{EA}{2} \varepsilon^2 dx. \quad (3.36)$$

No nosso problema, a deformação é dada pela componente não nula do tensor de deformação de von Kármán  $\varepsilon_{xx}$ . Por isso, substituiremos a relação em (3.30) na equação (3.36). A energia potencial de alongamento total  $U_a$  é a integral de  $dU_a$  ao longo de todo o comprimento do nanotubo de carbono:

$$U_a = \frac{EA}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{dZ}{dx} \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (3.37)$$

### 3.5 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Para obter a equação de movimento, seguiremos o mesmo caminho trilhado pelos autores das referências (MAYOOF; HAWWA, 2009; GENG; ZHANG, 2012; JOSHI; SHARMA; HARSHA, 2012). Primeiramente, obtemos a lagrangiana  $\mathcal{L}$  do sistema, que é definida como

$$\mathcal{L} = T - U,$$

sendo  $U$  a soma da energia potencial de flexão  $U_f$  e a energia potencial de alongamento  $U_a$ . A partir das equações de energia obtidas na seção anterior, a lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx - \frac{EA}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{dZ}{dx} \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (3.38)$$

$\mathcal{L}$  é o funcional  $\mathcal{L}(w'', w', \dot{w}, w, x, t)$ . A equação de movimento é obtida a partir da aplicação do *princípio variacional de Hamilton*  $\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0$ , que trata-se do problema do cálculo variacional de encontrar a função que extremiza o funcional (GOLDSSTEIN; POOLE; SAFKO, 2001). A aplicação do princípio de Hamilton na lagrangiana definida por (3.38) nos dá a equação de movimento na forma:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = EA \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{dZ}{dx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{dZ}{dx} \right) \right]. \quad (3.39)$$

Os próximos passos eliminam a componente da deformação longitudinal. Note que o termo

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{dZ}{dx} \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

é a componente não nula de  $\varepsilon_{xx}$ . Aplicar  $\varepsilon_{xx}$  a toda extensão do nanotubo nos retorna o alongamento por esticamento. Analisamos então a integral de 0 a  $L$  de  $\varepsilon_{xx} dx$ , de forma que a equação (3.39) torna-se

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{EA}{L} \frac{d}{dx} \left\{ \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{dZ}{dx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right] \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{dZ}{dx} \right) \right\}. \quad (3.40)$$

Todo o termo também deve ser dividido por  $L$  para manter a igualdade. Como o nanotubo tem extremidades fixas, o alongamento na direção longitudinal  $\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0$ , o que nos deixa apenas com os últimos dois termos tensor. Deste modo, obtemos

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{EA}{L} \int_0^L \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{dZ}{dx} \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{d^2 Z}{dx^2} \right), \quad (3.41)$$

pois a integral definida em  $x$  será constante numa derivada em relação a  $x$ .

Vamos impor um forçamento harmônico da forma  $F \cos(\Omega t)$  agindo transversalmente ao nanotubo, em que  $F$  é a distribuição espacial do forçamento, estando em unidade de força por unidade de comprimento. Assim, temos a seguinte equação diferencial parcial (EDP)

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = F \cos(\Omega t) + \frac{EA}{L} \int_0^L \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{dZ}{dx} \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{d^2 Z}{dx^2} \right), \quad (3.42)$$

com as condições de contorno (3.1).

### 3.5.1 Metodologia da solução

Com o objetivo de converter a equação (3.42) numa EDO, o método de Galerkin será utilizado (ARANI; HASHEMIAN; KOLAHCHI, 2013; MAYOOF; HAWWA, 2009;

GENG; ZHANG, 2012; JOSHI; SHARMA; HARSHA, 2012). Segundo este, a solução  $w(x, t)$  pode ser simplificada por

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N \mathcal{X}_i(x) \cdot \mathcal{T}_i(t),$$

sendo  $N$  o número de graus de liberdade do sistema,  $\mathcal{X}_i(x)$  a  $i$ -ésima autofunção e  $\mathcal{T}_i(t)$  o  $i$ -ésimo parâmetro de deflexão dependente do tempo do modelo (ARANI; HASHEMIAN; KOLAHCHI, 2013).

Um modelo com apenas um grau de liberdade pode ser resolvido com precisão apropriada (ARANI; HASHEMIAN; KOLAHCHI, 2013) e a solução terá a forma

$$w(x, t) = \mathcal{X}(x) \cdot \mathcal{T}(t). \quad (3.43)$$

Substituindo a solução da forma (3.43) em (3.42), teremos

$$\begin{aligned} \rho A \mathcal{X} \ddot{\mathcal{T}} - EI \frac{d^4 \mathcal{X}}{dx^4} \mathcal{T} = F \cos(\Omega t) + \\ \frac{EA}{L} \int_0^L \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\mathcal{X}}{dx} \mathcal{T} \right)^2 + \frac{dZ}{dx} \frac{d\mathcal{X}}{dx} \mathcal{T} \right] dx \left( \frac{d^2 \mathcal{X}}{dx^2} \mathcal{T} + \frac{d^2 Z}{dx^2} \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

De modo a realizar um estudo do comportamento dinâmico do sistema sob a condição de ressonância primária (primeiro modo de vibração), assumiremos que a função  $\mathcal{X}(x)$  tenha a forma espacial dada por  $\mathcal{X}(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right]$ , que corresponde à solução espacial (com boa aproximação) para o modo normal de vibração fundamental da versão linear do problema definido por (3.42) e (3.1) (MAYOOF; HAWWA, 2009; GENG; ZHANG, 2012; JOSHI; SHARMA; HARSHA, 2012). Também assumiremos que a função da curvatura do nanotubo tenha a forma:

$$Z(x) = e \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (3.45)$$

em que  $e$  representa a amplitude máxima da curvatura do nanotubo medida do eixo  $x$  até a linha neutra e é muito menor que o comprimento  $L$  do nanotubo. Substituindo  $\mathcal{X}(x)$  e (3.45) na equação (3.44), temos a expressão

$$\begin{aligned} \rho A \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right] \ddot{\mathcal{T}} - EI \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^4 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \mathcal{T} = F \cos(\Omega t) + \\ \frac{EA}{L} \left[ 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 e \mathcal{T} \int_0^L \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx + \frac{4}{3} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \mathcal{T}^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx \right] \cdot \\ \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \mathcal{T} - \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 e \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Resolvendo as integrais com limite de integração de 0 a  $L$ :

$$\begin{aligned} \rho A \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right) \right] \ddot{\mathcal{T}} - EI \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^4 \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right) \mathcal{T} = F \cos(\Omega t) + \\ \frac{EA}{L} \left( \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{L} eT + \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{L} \mathcal{T}^2 \right) \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right) \mathcal{T} - \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 e \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.47)$$

e reorganizando os termos, ficamos com

$$\begin{aligned} \rho A \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right) \right] \ddot{\mathcal{T}} - EI \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^4 \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right) \mathcal{T} = F \cos(\Omega t) + \\ EA \frac{64}{9} \frac{\pi^3}{L^4} e \mathcal{T}^2 \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right) - EA \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\pi^3}{L^4} e^2 \mathcal{T} \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right) + \\ EA \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \mathcal{T}^3 \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right) - EA \frac{2}{3} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 e \mathcal{T}^2 \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Usando as relações trigonométricas  $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$  e  $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} 1 - \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right) &= 2 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right), \\ \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right) &= 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right), \end{aligned}$$

e reescrevemos a equação (3.48) como sendo

$$\begin{aligned} 2\rho A \sqrt{\frac{2}{3}} \ddot{\mathcal{T}} \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) + EI 16 \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \mathcal{T} - EI 32 \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \mathcal{T} \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) = \\ F \cos(\Omega t) + EA \frac{64}{9} \frac{\pi^3}{L^4} e \mathcal{T}^2 - EA \frac{128}{9} \frac{\pi^3}{L^4} e \mathcal{T}^2 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) - \\ EA \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\pi^3}{L^4} e^2 \mathcal{T} \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right) + EA \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \mathcal{T}^3 - \\ EA \frac{16}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \mathcal{T}^3 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) - EA \frac{2}{3} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 e \mathcal{T}^2 \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Multiplicando todos os termos de (3.49) por  $\mathcal{X}^*(x) = \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right) \right] = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right)$ , e usando os resultados

$$\begin{aligned} \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \cdot 2 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) &= \frac{3}{4} \mathcal{X}^*(x), \\ \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right) \cdot 2 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) &= \sqrt{\frac{3}{4}} \mathcal{X}^*(x), \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \rho A \ddot{\mathcal{T}} \mathcal{X}^* - EI 8 \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \mathcal{T} \mathcal{X}^* + EA \frac{32}{9} \frac{\pi^3}{L^4} e \mathcal{T}^2 \mathcal{X}^* + EA \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{\pi^3}{L^4} e^2 \mathcal{T} \mathcal{X}^* + \\ EA \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \mathcal{T}^3 \mathcal{X}^* + EA \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{4}} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 e \mathcal{T}^2 \mathcal{X}^* = F \cos(\Omega t) \mathcal{X}^*. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Finalmente, dividindo todos os termos por  $\mathcal{X}^*(x)$  e agrupando os coeficientes, teremos

$$\ddot{\mathcal{T}} + a\mathcal{T} + b\mathcal{T}^2 + c\mathcal{T}^3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{F}{\rho A} \cos(\Omega t), \quad (3.51)$$

sendo

$$\begin{aligned} a &= \frac{8\sqrt{3}}{9} \frac{\pi^3}{L^4} e^2 \frac{E}{\rho} - \frac{16}{3} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{\rho A} = \omega_0^2, \\ b &= \frac{E}{\rho} e \left( \frac{32\sqrt{6}\pi^3 + 9\sqrt{6}\pi^4}{27L^4} \right), \\ c &= \frac{8}{9} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{E}{\rho}. \end{aligned}$$

A equação (3.51) tem um termo quadrático devido à curvatura assumida para o nanotubo e um termo cúbico devido aos efeitos de esticamento. São os termos não-lineares da equação. Não foram considerados efeitos de dissipação de energia na dedução da equação. Por isso, para simular uma situação mais realista, adicionamos o termo de dissipação  $\frac{\omega_0}{Q} \dot{\mathcal{T}}$  de viés fenomenológico<sup>8</sup>, em que  $Q$  é a razão entre a energia armazenada e a energia perdida por ciclo do oscilador (GENG; ZHANG, 2012):

$$\ddot{\mathcal{T}} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\mathcal{T}} + \omega_0^2 \mathcal{T} + b\mathcal{T}^2 + c\mathcal{T}^3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{F}{\rho A} \cos(\Omega t). \quad (3.52)$$

Podemos normalizar e adimensionalizar a equação (3.52). Escrevendo o tempo em termos de um tempo característico  $\tau = 1/\omega_0$  e o comprimento em termos de um comprimento característico  $d_0$ , que é o diâmetro externo do nanotubo, temos

$$\begin{aligned} \omega_0^2 d_0 \ddot{q} + \frac{\omega_0^2}{Q} d_0 \dot{q} + \omega_0^2 d_0 q + b d_0^2 q^2 + c d_0^3 q^3 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{F}{\rho A} \cos(\omega t) \\ a d_0 \ddot{q} + \frac{a}{Q} d_0 \dot{q} + a d_0 q + b d_0^2 q^2 + c d_0^3 q^3 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{F}{\rho A} \cos(\omega t), \end{aligned}$$

em que  $\omega = \Omega/\omega_0$  e  $x$  é a variável dependente em sua versão adimensional. Dividindo todos os termos por  $a d_0$ , temos a versão adimensional da equação:

$$\ddot{q} + \mu \dot{q} + q + \beta q^2 + \gamma q^3 = f \cos(\omega t), \quad (3.53)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{Q}, \\ \beta &= \frac{b d_0}{a}, \\ \gamma &= \frac{c d_0^2}{a}, \\ f &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{F}{\rho A d_0 a}. \end{aligned}$$

<sup>8</sup> Modelos fenomenológicos são adotados quando não se conhecem os processos fundamentais, mas o modelo descreve bem os efeitos macroscópicos.

A equação (3.53) é uma EDO de segunda ordem não-autônoma e não-linear. Definindo o conjunto de variáveis  $(q, \dot{q}, \theta \equiv \omega t)$  como sendo

$$(q, \dot{q}, \theta) \equiv (x_1, x_2, x_3),$$

e com uma manipulação algébrica análoga à usada em (2.4), podemos escrever (3.53) como um sistema não-linear composto por três EDO's de primeira ordem autônomas com dimensão de espaço estendido  $n = 3$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{q} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{q} = -\mu x_2 - x_1 - \beta x_1^2 - \gamma x_1^3 + f \cos x_3 \\ \dot{x}_3 = \dot{\theta} = \omega. \end{cases} \quad (3.54)$$

A matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  do sistema é dada por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(dx_1(t)/dt)}{\partial x_1} & \frac{\partial(dx_1(t)/dt)}{\partial x_2} & \frac{\partial(dx_1(t)/dt)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(dx_2(t)/dt)}{\partial x_1} & \frac{\partial(dx_2(t)/dt)}{\partial x_2} & \frac{\partial(dx_2(t)/dt)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(dx_3(t)/dt)}{\partial x_1} & \frac{\partial(dx_3(t)/dt)}{\partial x_2} & \frac{\partial(dx_3(t)/dt)}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (1 - 2\beta x_1 - 3\gamma x_1^2) & -\mu & -f \sin x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

que é fundamental para o cálculo dos expoentes de Lyapunov.

### 3.5.2 Significado físico das variáveis dinâmicas

Ao retornarmos ao problema na versão da equação (3.42), com as condições de contorno (3.1), temos uma EDP formada pela função deflexão  $w(x, t)$ , suas derivadas parciais em relação à  $x$  e  $t$  e estas variáveis independentes. A deflexão é medida em unidade de comprimento. Após a aplicação da metodologia descrita na subseção 3.5.1 para a obtenção de uma solução, realizamos uma separação de variáveis seguida por uma série de desenvolvimentos algébricos para eliminar a variável independente  $x$ , o que nos levou à EDO em (3.52). A análise dimensional dos termos da equação (3.52) nos revela que eles têm dimensão de unidades de comprimento por unidade de tempo ao quadrado.

Com o problema na forma da equação (3.53), a variável  $q$  é adimensional;  $\dot{q}$  é uma espécie de frequência. Além disso, realizamos mais uma transformação para escrever a equação diferencial de segunda ordem não-autônoma, em sua versão autônoma, dada pelo sistema de equações (3.54). Daí, chegamos na conclusão de que a equação (3.53) descreve características gerais do movimento oscilatório do nanotubo, tendo em mente o nível de abstração a partir do resumo das transformações realizadas supracitado.

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, apresentamos os resultados obtidos a partir da investigação do sistema dinâmico definido por (3.54) recorrendo às definições de atrator, espectro de Lyapunov e diagrama de bifurcação conforme expostas no capítulo 2, com a finalidade de descrever a dependência do sistema dinâmico à variação dos parâmetros que representam a amplitude do forçamento externo  $f$ , a frequência do forçamento  $\omega$  e a componente de dissipação  $\mu$ . As equações diferenciais foram resolvidas através do algoritmo de *Runge-Kutta de quarta ordem*.

Para construir os diagramas de Lyapunov, discretizamos os planos de parâmetros em um milhão de pontos igualmente espaçados formando uma malha 1000x1000. Na prática, a distância entre dois pontos num mesmo eixo do plano de parâmetros é dada pelo tamanho do intervalo (módulo da diferença entre os dois extremos que definem o intervalo) dividido pelo número de pontos que se deseja na direção de cada eixo menos 1. Definimos arbitrariamente as condições iniciais a partir das quais se inicia a trajetória fiduciária no espaço de estados para o cálculo dos expoentes de Lyapunov como sendo  $(x_1(t_0) = -1 \times 10^{-2}, x_2(t_0) = 5 \times 10^{-2}, x_3(t_0) = -3 \times 10^{-2}, t_0 = 0)$ , e usamos  $10^{-3}$  como tamanho do passo de integração. Constatamos que o número total de iterações estabelecido em  $2 \times 10^6$  é suficiente para garantir a convergência para um valor dos expoentes de Lyapunov para este sistema, descartando um transiente de  $10^4$ .

Os retratos de fases são gerados a partir da integração do sistema de equações diferenciais que descreve o sistema dinâmico, tomando condições iniciais arbitrárias. Então, plotamos num plano os valores calculados para  $x_1$  e  $x_2$ .

Para construir os diagramas de bifurcação, utilizamos a mesma fórmula para determinar o valor do incremento no eixo dos parâmetros que a utilizada para o plano de parâmetros nos diagramas de Lyapunov. Para os valores no eixo vertical, determinamos que, a cada valor do parâmetro, fossem calculados 60 valores de uma das variáveis dinâmicas descartando 300 resultados que representam um arbitrário (porém suficiente) período transiente. Foram estabelecidas as mesmas condições iniciais das tomadas para o cálculo dos expoentes de Lyapunov e o passo de integração foi definido em  $10^{-4}$ . Todas as figuras neste capítulo foram geradas através do software Gnuplot versão 5.2.

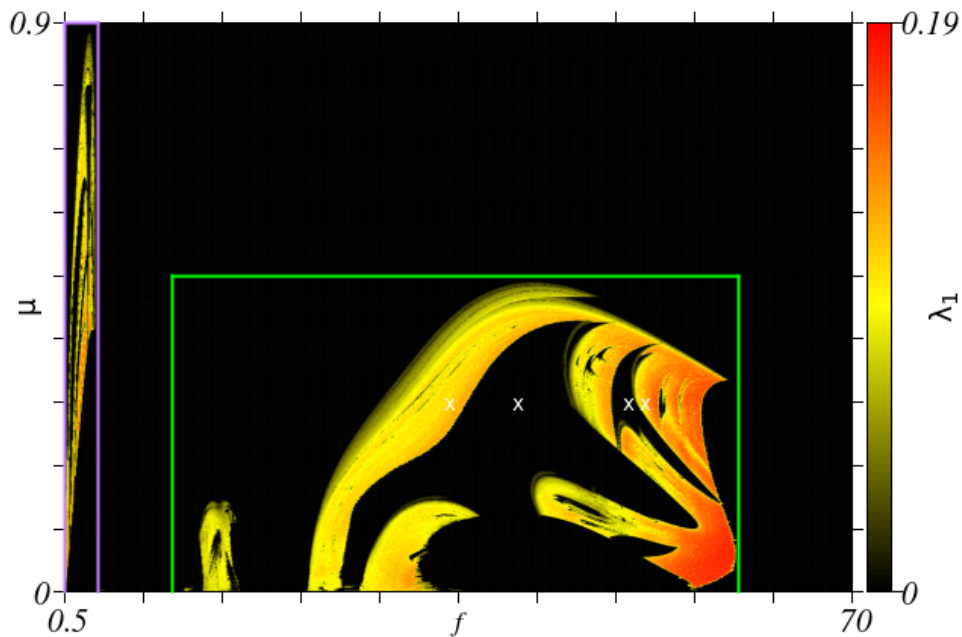
#### 4.1 DELIMITAÇÃO DOS VALORES DOS PARÂMETROS

Na referência (GENG; ZHANG, 2012), foi realizado um trabalho analítico para determinar os valores dos parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  para os quais pode haver dinâmica caótica, através da *análise de Melnikov*. Tomamos a liberdade de estabelecer os mesmos valores para  $\beta$  e  $\gamma$  que os utilizados no supracitado trabalho. Em **todas as simulações** realizadas neste trabalho de dissertação, os valores de  $\beta$  e  $\gamma$  foram fixados em 0.468 e 0.05, respectivamente.

#### 4.2 PLANO DE PARÂMETROS $f$ versus $\mu$

A motivação para o início desta investigação foi reproduzir os resultados numéricos apresentados por Geng e Zhang (2012), bem como ampliá-los. A partir deste intento, definimos primeiramente um plano de parâmetros  $f \times \mu$  com intervalo do parâmetro que representa a amplitude do forçamento harmônico  $f$  delimitado em  $[0, 70]$  e o intervalo do parâmetro do termo de dissipação  $\mu$  delimitado em  $[0, 0.9]$ , para assim gerar o diagrama de Lyapunov representado na Figura 23. A frequência angular do forçamento harmônico  $\omega$  foi estabelecida em 1.0, condição para se ter ressonância primária.

Figura 23 – Diagrama de Lyapunov formado pelo plano de parâmetros  $f \times \mu$  com intervalos  $[0, 70] \times [0, 0.9]$ . Destacadas em retângulos, estão as regiões que contém caos. A ampliação dessas regiões estão na Figura 26.



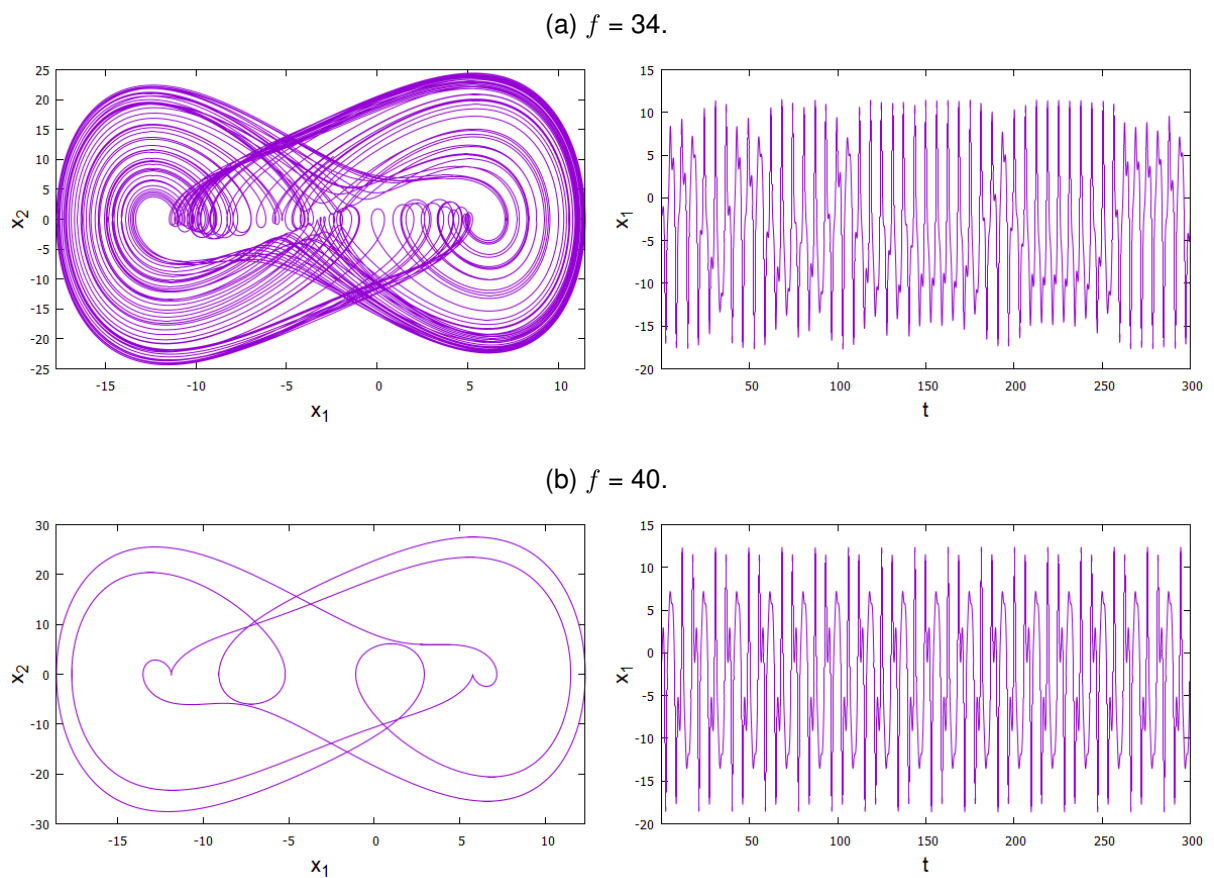
Fonte: Elaborado pelo autor.

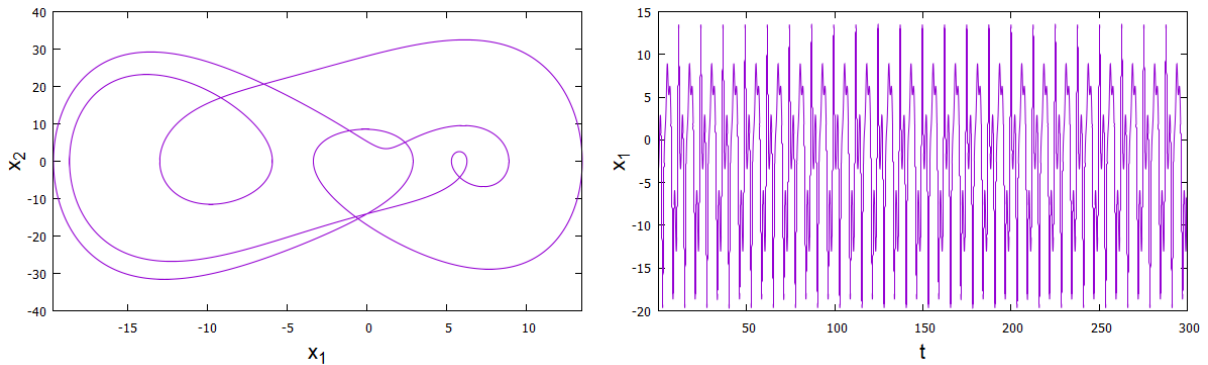
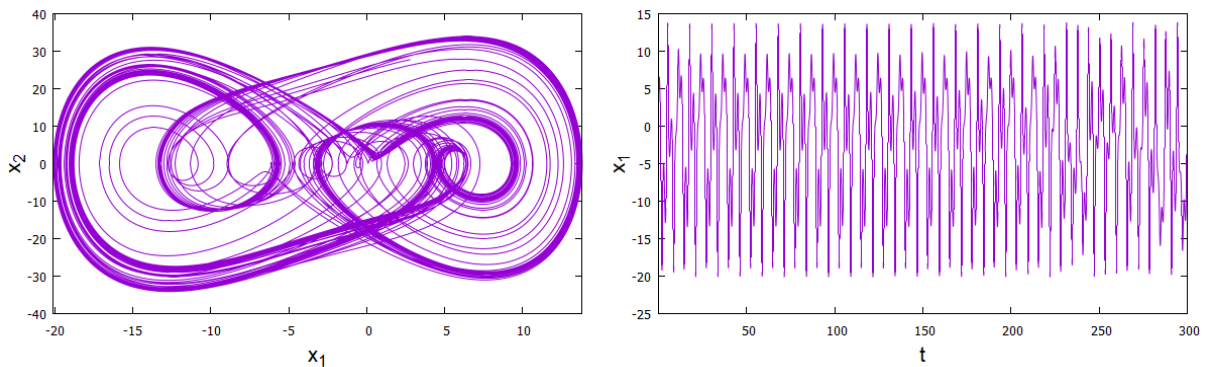
Conforme discorrido na subseção 2.3.2, a região em preto do plano de parâmetros na Figura 23 representa maior expoente de Lyapunov nulo, portanto represen-



tando dinâmica regular periódica ou quase-periódica para o sistema dinâmico definido pelos correspondentes valores de parâmetros. A região colorida pelo gradiente de cores do amarelo para o vermelho representa maior expoente de Lyapunov positivo, o que indica dinâmica caótica. Quanto mais intensa for a cor na direção do vermelho, maior é o valor do expoente de Lyapunov, isto é, mais sensível às condições iniciais é o sistema dinâmico. Para exibir estes atributos, num primeiro momento, elegemos alguns pontos do plano de parâmetros do diagrama de Lyapunov na Figura 23 para construir retratos de fases e as séries temporais da variável dinâmica  $x_1$ . Os pontos escolhidos estão marcados com um 'x' no supracitado diagrama. Deste modo, é possível categorizar o comportamento dinâmico do sistema sob aqueles valores dos parâmetros através de um exame qualitativo, além, é claro, de verificar os resultados já postos no diagrama de Lyapunov. O resultado para os retratos de fases e séries temporais encontram-se Figura 24.

Figura 24 – Retratos de fases (à esquerda) e séries temporais da variável  $x_1$  (à direita). Para gerá-los, definimos nas simulações o tamanho do passo de integração em  $10^{-2}$  e número total de iterações em  $3 \times 10^4$ , descartando um transiente de  $10^5$ . No diagrama da Figura 23 estão marcados com um 'x' os pontos que correspondem aos valores dos parâmetros utilizados para esta simulação, sendo  $\mu = 0.3$  para todos e diferentes valores de  $f$ , que encimam cada gráfico.



(c)  $f = 49.7$ .(d)  $f = 51.2$ .

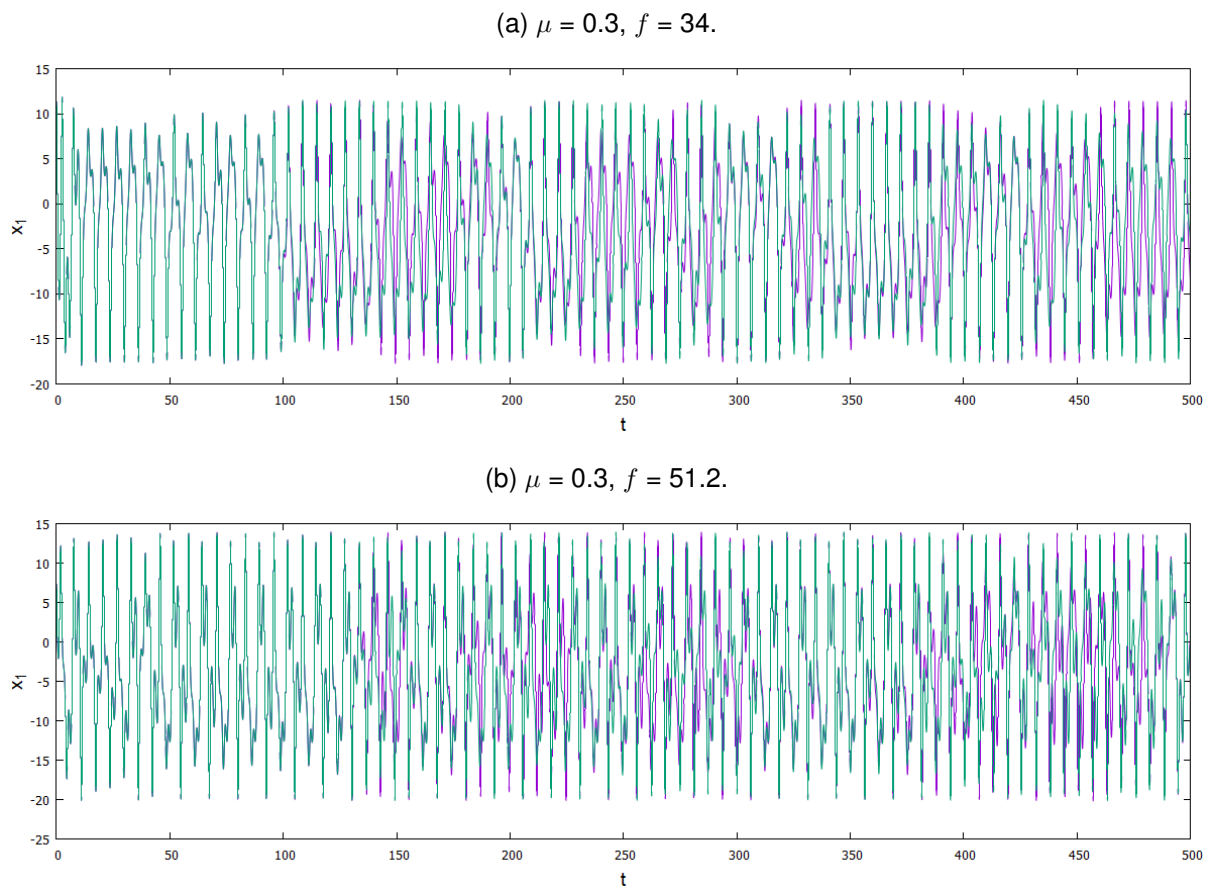
Fonte: Elaborado pelo autor.

Dos retratos de fases na Figura 24, (b) e (c) evidenciam o caráter periódico regular do comportamento dinâmico do sistema para aqueles valores dos parâmetros. Nestes retratos de fases, observa-se uma curva fechada. Enquanto que, em (a) e (d), os retratos de fases apresentam uma curva que nunca se fecha, característica de aperiodicidade dos sistemas dinâmicos no regime caótico. À direita dos retratos de fases estão as séries temporais da variável  $x_1$ .

Além da aperiodicidade, os sistemas dinâmicos no regime caótico apresentam grande sensibilidade às condições iniciais, conforme discorrido no capítulo 2. Para ilustrar esta sensível dependência, geramos séries temporais estabelecendo no sistema dinâmico (3.54) os valores dos parâmetros usados para gerar os gráficos na Figura 24(a) e (d). Este resultado encontra-se na Figura 25, em que, em (a), o gráfico lilás é uma série temporal da variável dependente  $x_1$  iniciada a partir das condições iniciais  $(x_1|_{t=t_0} = 11.3504291463565, x_2|_{t=t_0} = -3.2701669559943, x_3|_{t=t_0} = 10.9599999990992, t_0 = 0)$ , e o gráfico esverdeado é uma série temporal iniciada a partir de  $(x_1|_{t=t_0} = 11.350429, x_2|_{t=t_0} = -3.2701669559943, x_3|_{t=t_0} = 10.9599999990992, t_0 = 0)$ ; em (b), o gráfico em lilás representa uma série temporal da variável  $x_1$  iniciada a partir de  $(x_1|_{t=t_0} = 7.3904435523934, x_2|_{t=t_0} = -10.2852354590762, x_3|_{t=t_0} =$

10.9599999990992,  $t_0 = 0$ ), e o gráfico esverdeado, uma série temporal iniciada a partir das condições iniciais ( $x_1|_{t=t_0} = 7.390443, x_2|_{t=t_0} = -10.2852354590762, x_3|_{t=t_0} = 10.9599999990992, t_0 = 0$ ). Ou seja, em ambos os casos, para gerar o par comparativo, foi tomado somente um truncamento a partir da sexta casa decimal na condição inicial  $x_1|_{t=t_0}$ , suficiente para as trajetórias no espaço de fase iniciadas a partir das supracitadas condições iniciais, se afastem exponencialmente. De maneira prática, mesmo uma medição tomada com precisão da ordem de  $10^{-6}$  neste modelo, não garantiria a obtenção de soluções quase indistinguíveis, nos moldes que se tem para sistemas dinâmicos no regime regular. Trata-se de um exercício para despontar à particularidade dos sistemas caóticos de possuírem dependência sensível às condições iniciais.

Figura 25 – Séries temporais iniciadas a partir de duas condições iniciais muito próximas quando o sistema dinâmico encontra-se no regime caótico. Para gerá-las, definimos nas simulações o tamanho do passo de integração em  $10^{-2}$  e número de interações em  $5 \times 10^4$ , sem tempo transiente. Os valores dos parâmetros (pontos do plano de parâmetros) encimam as legendas.

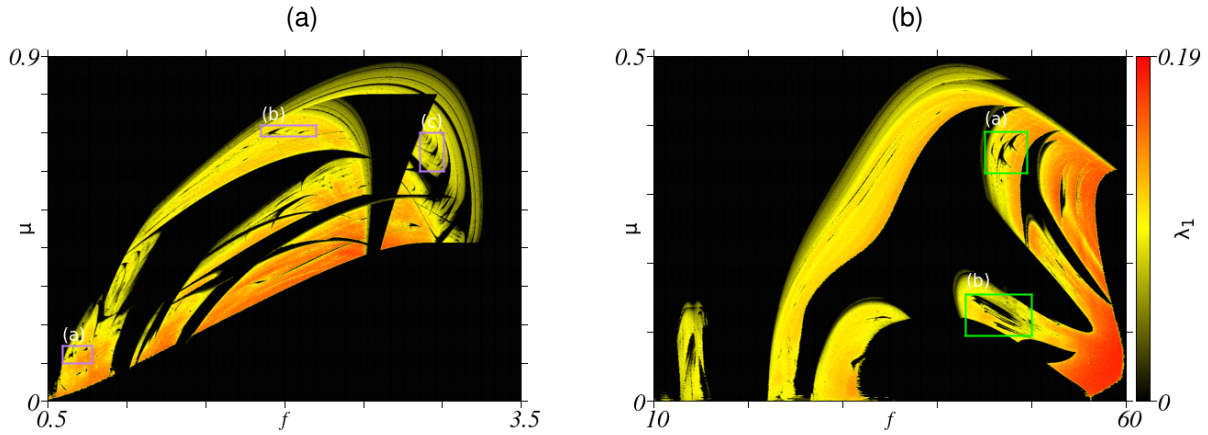


Fonte: Elaborado pelo autor.

Voltando à Figura 23, é interessante ampliar as regiões delimitadas por retângulos, onde são encontradas formas caracterizadas por regiões de regularidade imersas em domínio caótico. Estas formas aparecem com frequência em sistemas di-

nômicos que admitem caos. Na Figura 26, encontram-se os diagramas de Lyapunov gerados a partir da ampliação das supracitadas regiões selecionadas.

Figura 26 – Diagramas de Lyapunov resultantes da ampliação das regiões selecionadas por retângulos na Figura 23. Em (a), ampliação da região sob retângulo de contorno lilás; em (b), ampliação da região sob retângulo de contorno verde.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Examinando a Figura 26(a), verificamos a existência de frequentes formas no formato de *camarões*. Os diagramas de Lyapunov na Figura 27 (a), (b) e (c) resultam da ampliação das regiões selecionadas pelos retângulos na Figura 26(a). A essas formas do tipo *camarão*, nos referimos às regiões de regularidade imersas em domínio caótico, que são evidenciadas nos diagramas de Lyapunov em (b) e (c) da Figura 27. A partir destes diagramas, decidimos gerar diagramas de bifurcação definindo retas no plano de parâmetros cujos pontos atravessam essas formas do tipo *camarão*. Os resultados são diagramas de bifurcação de codimensão 2, isto é, obtidos pela variação de dois parâmetros simultaneamente. Com esta ferramenta podemos identificar valores críticos dos pares de parâmetros  $f$  e  $\mu$  a partir dos quais o sistema dinâmico passa por uma mudança na topologia dos retratos de fases. Os resultados são apresentados na Figura 28.

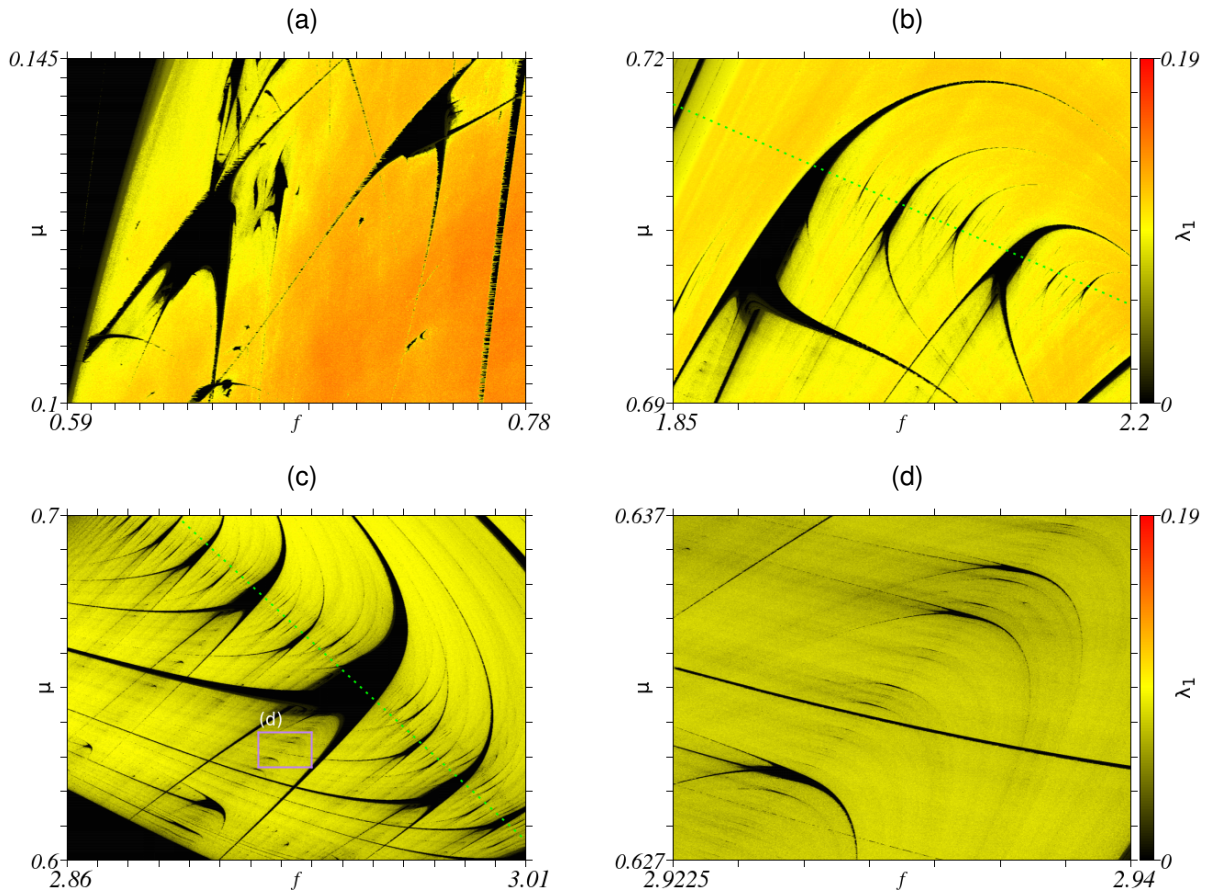
O diagrama de bifurcação na Figura 28(a), foi gerado a partir da variação dos dois parâmetros  $f$  e  $\mu$ , em que  $\mu$  variou obedecendo a equação da reta

$$\mu(f) = -0.04485f + 0.79752,$$

para  $f$  no intervalo  $[1.85, 2.2]$ . Esta reta passa pelos pontos  $(1.95701, 0.70974)$  e  $(2.1688, 0.70024)$  do plano de parâmetros do diagrama de Lyapunov da Figura 27(b), escolhidos convenientemente para atravessar as estruturas de formato *camarão*. De maneira semelhante, para a obtenção do diagrama de bifurcação no quadro (b) da Figura 28, o parâmetro  $\mu$  variou obedecendo a equação da reta

$$\mu(f) = -0.74605f + 2.84855,$$

Figura 27 – Em (a), (b) e (c), diagramas de Lyapunov resultantes da ampliação das regiões delimitadas na Figura 26(a); em (d), ampliação da região delimitada pelo retângulo de contorno lilás na Figura 27(c). As retas tracejadas na cor verde clara em (b) e (c) representam as equações das retas cujos pontos que foram selecionados para gerar os diagramas de bifurcação da Figura 28.



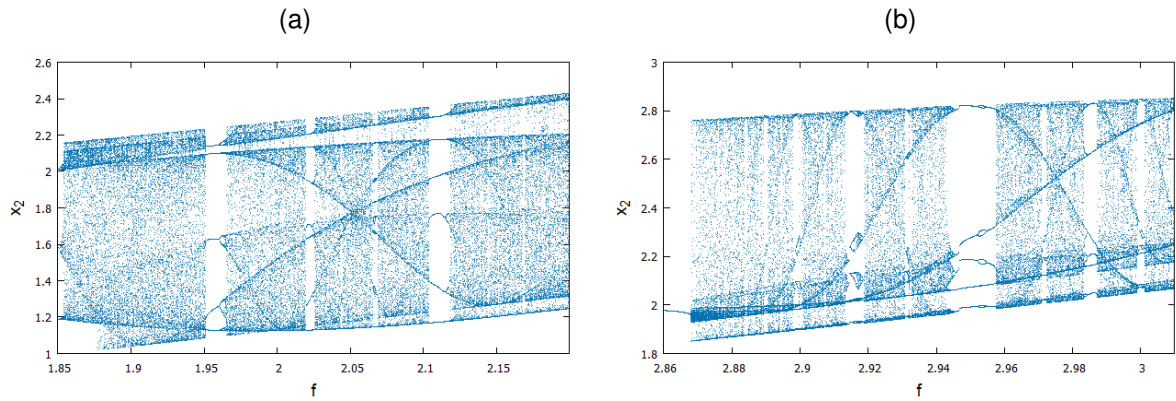
Fonte: Elaborado pelo autor.

para  $f$  no intervalo  $[2.86, 3.01]$ . Esta reta passa pelos pontos  $(2.89035, 0.69219)$  e  $(3.00069, 0.60987)$  do plano de parâmetros do diagrama da Figura 27(c). Nos diagramas na Figura 28, o eixo horizontal representa o parâmetro  $f$ ; os valores de  $\mu$  correspondentes são obtidos a partir das equações de reta definidas. As regiões de muita densidade de pontos indicam os valores dos parâmetros para os quais se têm caos. As regiões cujo gráfico está discretizado, indicam os valores dos parâmetros para os quais se tem periodicidade, sendo a quantidade de valores discretos no eixo vertical equivalente ao período da órbita. Estas regiões nos diagramas de bifurcação coincidem com os intervalos das estruturas regulares nos diagramas de Lyapunov por onde passam as retas que definimos na construção dos diagramas de bifurcação destes casos. Uma menção fica para o resultado que consiste em regiões, em ambos os diagramas de bifurcação, onde pontos se concentram formando espécies de funções senoidais.

Ademais, ainda analisando a Figura 27(c), podemos identificar uma estrutura



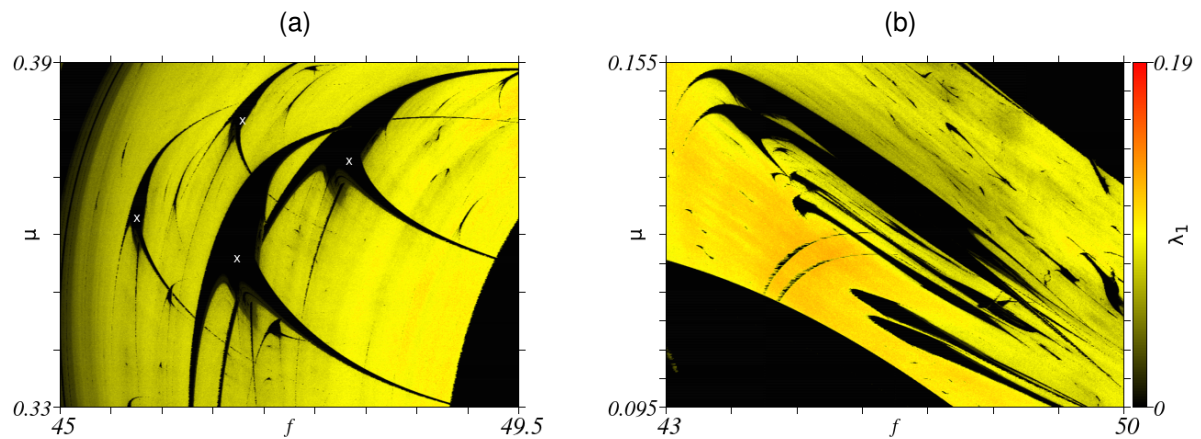
Figura 28 – Diagramas de bifurcação de codimensão 2. O diagrama em (a) foi construído a partir da variação dos parâmetros  $f$  e  $\mu$  segundo a linha tracejada destacada na Figura 27(b); o diagrama em (b) foi construído a partir da variação dos parâmetros  $f$  e  $\mu$  segundo a linha tracejada destacada na Figura 27(c).



Fonte: Elaborado pelo autor.

de auto-similaridade. Esta região foi delimitada por um retângulo de contorno lilás na Figura 27(c) e ampliada na Figura 27(d).

Figura 29 – Diagramas de Lyapunov resultantes da ampliação das regiões selecionadas por retângulos na Figura 26(b).

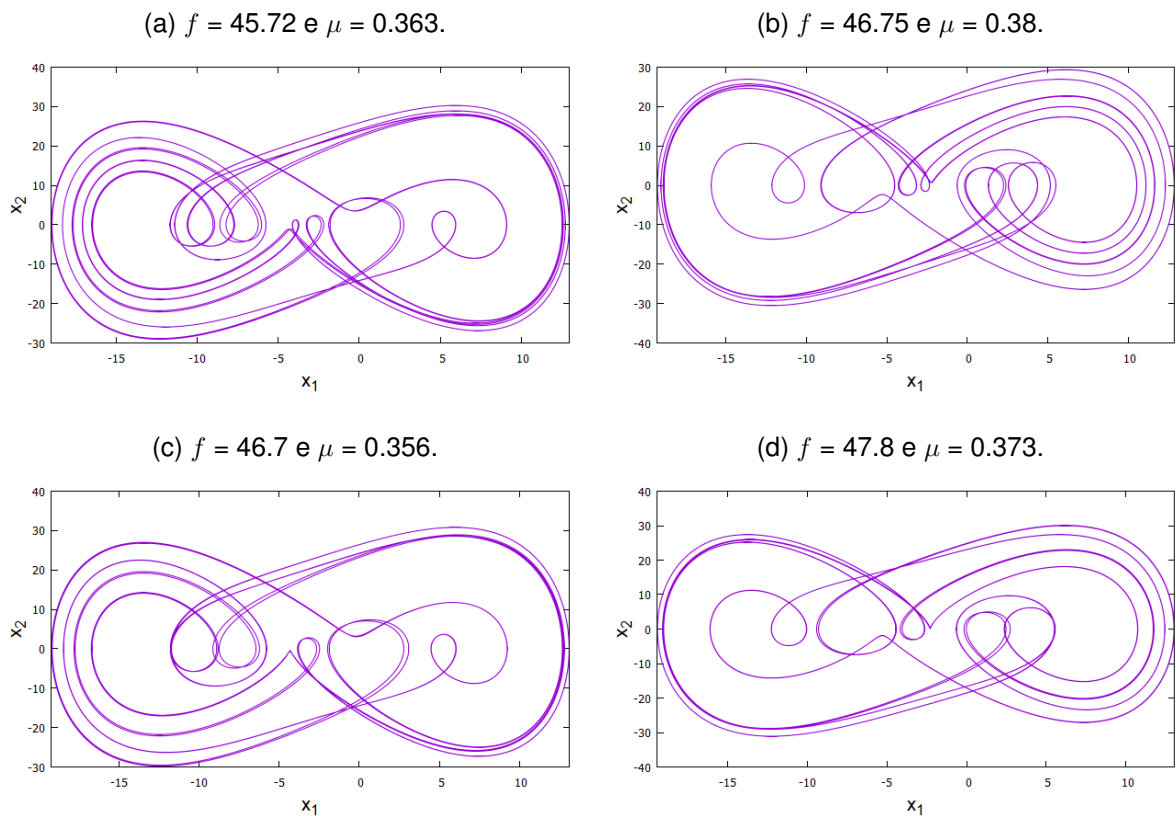


Fonte: Elaborado pelo autor.

Os diagramas de Lyapunov na Figura 29 são obtidos da ampliação das áreas delimitadas pelos retângulos na Figura 26(b), e foram gerados com o objetivo de evidenciar as regiões regulares sob domínio caótico. Na Figura 29(a) aparecem as citadas formas de formato de *camarão*. Geramos retratos de fases através dos valores dos parâmetros  $f$  e  $\mu$  que estão no interior dessas formas, cujos pontos no plano de parâmetros estão demarcados por um 'x' na Figura 29(a). Os retratos de fases resultantes encontram-se na Figura 30. As curvam fechadas nos gráficos representam

dinâmica periódica e, pelo exame qualitativo, evidencia-se a semelhança na topologia. Já na Figura 29(b), podemos observar uma espécie de duplicação das regiões de regularidade.

Figura 30 – Retratos de fases gerados a partir da escolha de valores dos parâmetros de dentro das regiões de regularidade no diagrama de Lyapunov da Figura 29(a), cujos pontos correspondentes no plano de parâmetros foram marcados por um 'x'. Para gerá-los, definimos nas simulações o tamanho do passo de integração em  $10^{-2}$  e número total de iterações em  $3 \times 10^4$ , descartando um transiente de  $10^5$ . Os valores dos parâmetros usados nas simulações encimam cada gráfico.



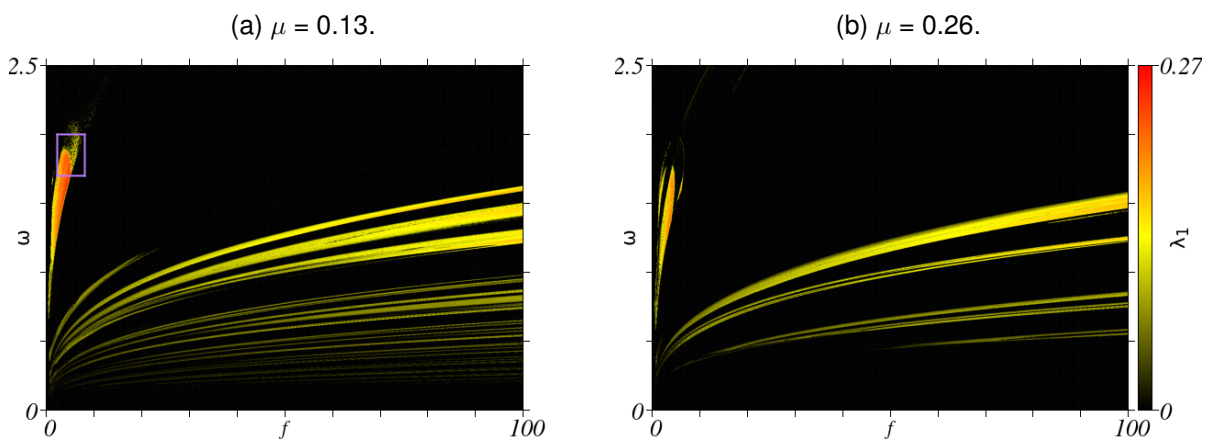
Fonte: Elaborado pelo autor.

### 4.3 PLANO DE PARÂMETROS $f$ versus $\omega$

A motivação para a escolha do plano de parâmetros  $f$  versus  $\omega$  para a construção de diagramas de Lyapunov foi realizar uma prospecção no sistema dinâmico fora da condição de ressonância primária estabelecida na seção anterior. Com esta finalidade, delimitamos o intervalo da frequência angular do forçamento harmônico  $\omega$  em  $[0, 2.5]$  e o intervalo da amplitude do forçamento harmônico  $f$  em  $[0, 100]$ <sup>1</sup>. Para este caso, o parâmetro da componente de dissipação  $\mu$  foi variado para representar menor ou maior influência dos efeitos dissipativos. Os diagramas de Lyapunov resultantes estão ilustrados na Figura 31, cujas legendas indicam o valor do parâmetro  $\mu$  estabelecido em cada simulação.

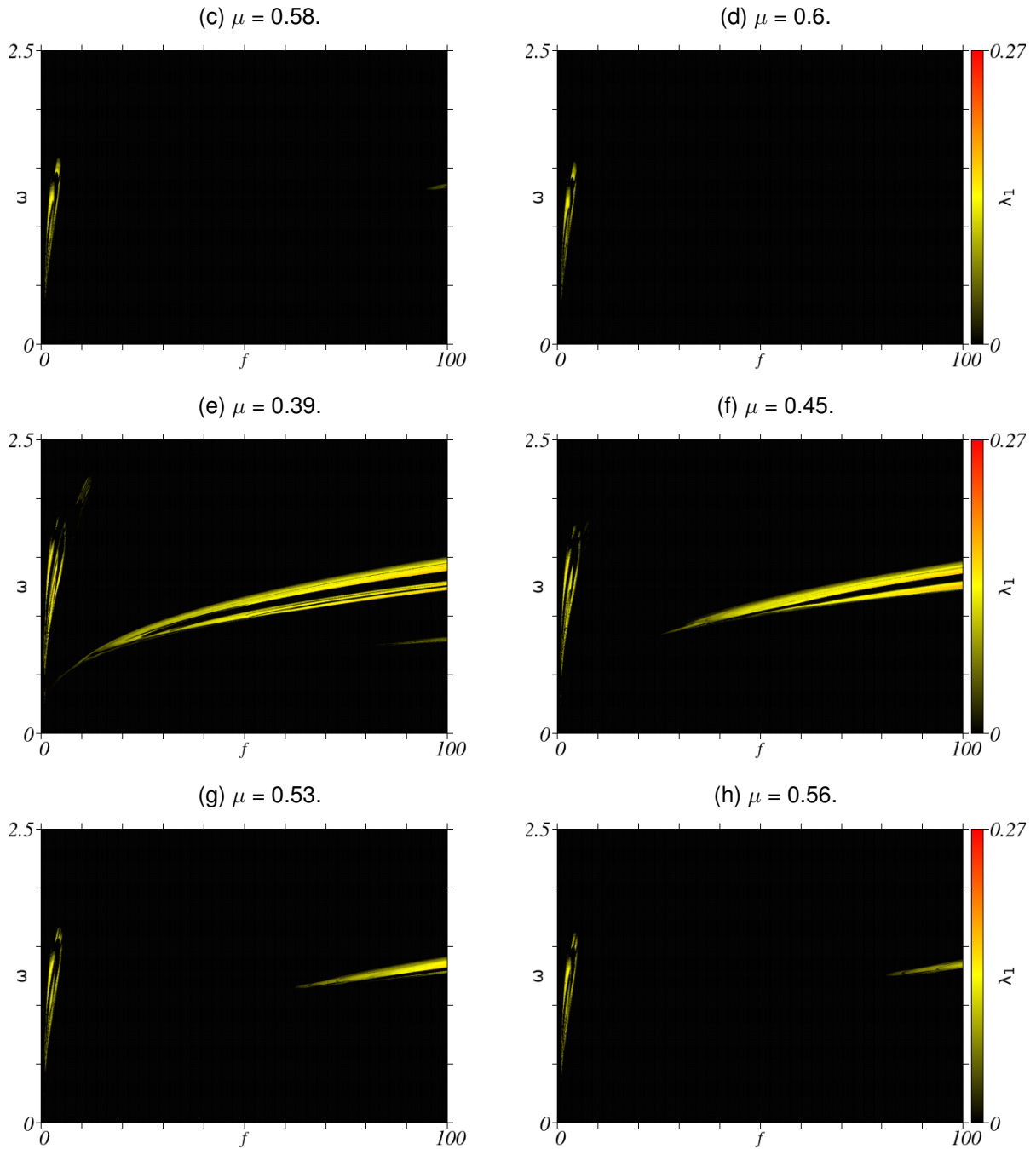
Novamente, as regiões em preto nos diagramas de Lyapunov espelham o maior expoente de Lyapunov tendo valor nulo, portanto podendo representar dinâmica regular periódica ou quase-periódica. O gradiente de cores do amarelo para o vermelho está indexado aos maiores expoentes de Lyapunov sendo positivos, resultado da divergência no espaço de estados de órbitas quase idênticas, conforme discorrido no capítulo 2. Logo, indicam os valores dos parâmetros para os quais o sistema dinâmico é caótico. Qualitativamente, observa-se uma formação de região caótica para os valores iniciais de  $f$ , seguidos por um conjunto de *faixas* de regiões caóticas conforme se aumenta a amplitude do forçamento, isto nos diagramas na Figura 31 em (a), (b), (c), (d), (e), (f) e (g).

Figura 31 – Diagramas de Lyapunov para o plano de parâmetros  $f \times \omega$  e diferentes valores de  $\mu$ .



<sup>1</sup> O estabelecimento deste intervalo se deu após a sondagem do plano de parâmetros numa extensão maior (aumento do tamanho do intervalo de  $f$  e de  $\omega$ , ao que foi constatado que as regiões de maior interesse para a investigação da dinâmica do sistema limitavam-se aos intervalos então estabelecidos.





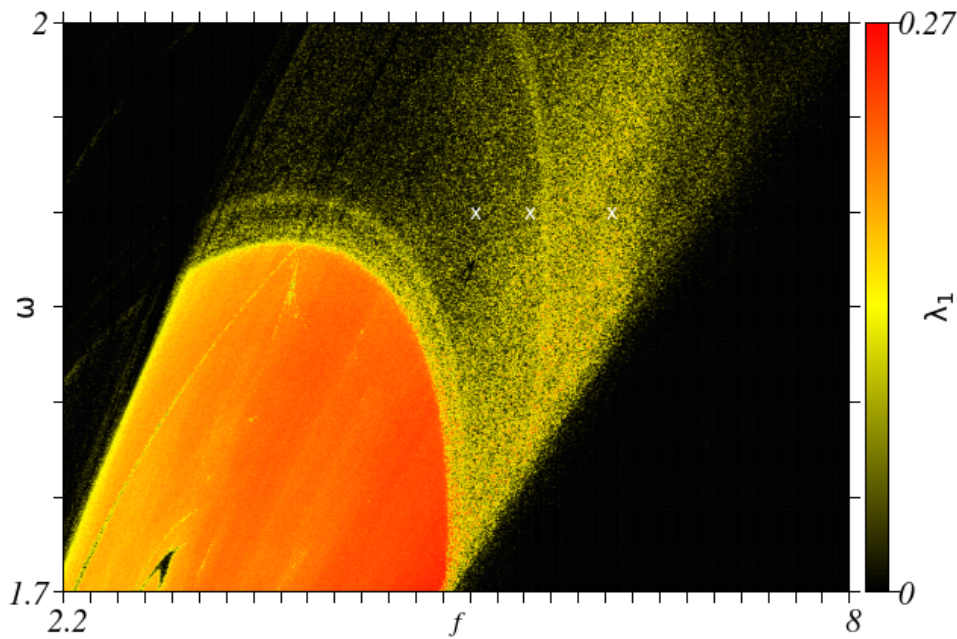
Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme aumentamos o valor de  $\mu$ , o conjunto de *faixas* de regiões caóticas vão se esmaecendo e a região de caos para os valores iniciais de  $f$  vai sendo suprimida, acompanhada da diminuição do valor dos expoentes de Lyapunov, identificado, nos diagramas de Lyapunov, pela diminuição da intensidade da cor relativo à caixa de cores que acompanha os planos de parâmetros. Nesta situação, com o aumento no valor de  $\mu$ , aproxima-se do limite conservativo, ou seja, quanto maior o valor de  $\mu$  maior será a supressão no domínio caótico. Para  $\mu = 0.6$ , cujo diagrama de Lyapunov encontra-se na Figura 31(h), já não há as descritas *faixas* de regiões caóticas

existentes para valores de  $\mu$  predecessores quando  $0 \leq f \leq 100$ .

Ademais, há uma região peculiar no digrama de Lyapunov para  $\mu = 0.13$  que selecionamos na Figura 31(a), e cuja ampliação, seguida de aumento na resolução, encontra-se na Figura 32. Este *granulado* de caos sobre uma região que representa a dinâmica regular pode indicar a existência de **caos transiente** (HOFF, 2014; MAGALHÃES, 2019).

Figura 32 – Diagrama de Lyapunov resultado da ampliação da região delimitada na Figura 31(a), que é uma característica do fenômeno de caos transiente. As condições para esta simulação são as mesmas das citadas no início deste capítulo.

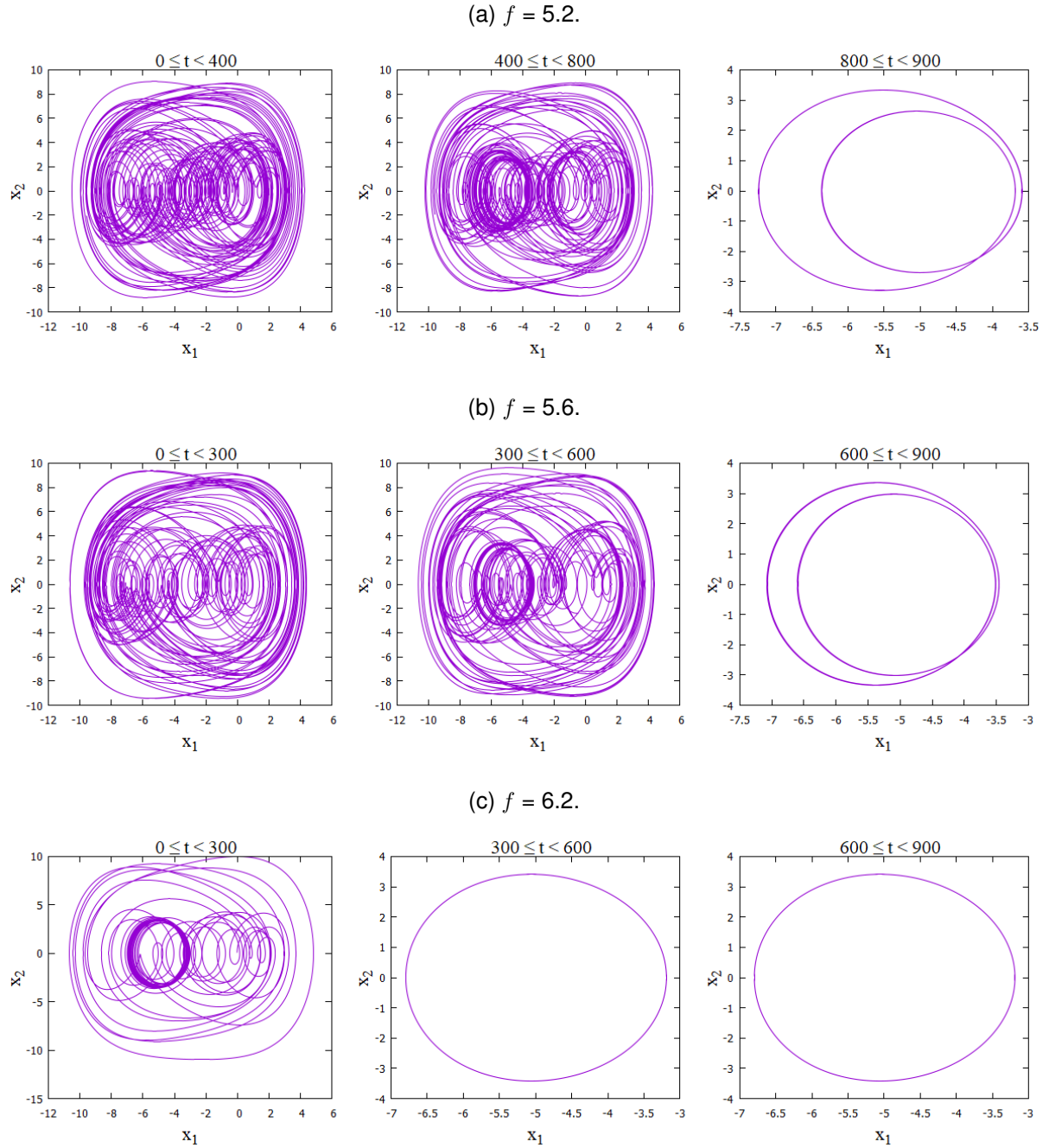


Fonte: Elaborado pelo autor.

Dá-se o nome caos transiente quando um sistema dinâmico pode se comportar de forma caótica apenas por um período denominado transiente, até passar a apresentar um comportamento regular periódico ou quase-periódico. O *granulado* no diagrama de Lyapunov é indício da instabilidade topológica do sistema dinâmico naquela região. Uma maneira de confirmar este fenômeno é através da análise qualitativa dos retratos de fases de um sistema dinâmico evoluído a partir de condições iniciais arbitrárias, observando se há mudança topológica no retrato de fases em diferentes momentos, o que corresponde ao fenômeno descrito. Fizemos este procedimento e os resultados foram estruturados na Figura 33.

Os retratos de fases na Figura 33 foram construídos estabelecendo, para o sistema dinâmico, valores de  $f$  e  $\omega$  de dentro da suposta região de caos transiente. Em todas as simulações, fixamos  $\omega = 1.9$  e os valores para  $f$  estão indicadas nas legendas, reiterando que, nas simulações realizadas, o valor de  $\mu$  para o qual se obteve

Figura 33 – Retratos de fases gerados para verificar a existência de caos transiente no sistema dinâmico. Para estas simulações, definimos o tamanho do passo de integração em  $10^{-2}$  e número total de iterações em  $9 \times 10^4$ , sem tempo transiente. A cada intervalo de tempo, indicados acima dos gráficos, é revelado a topologia do retrato de fases.



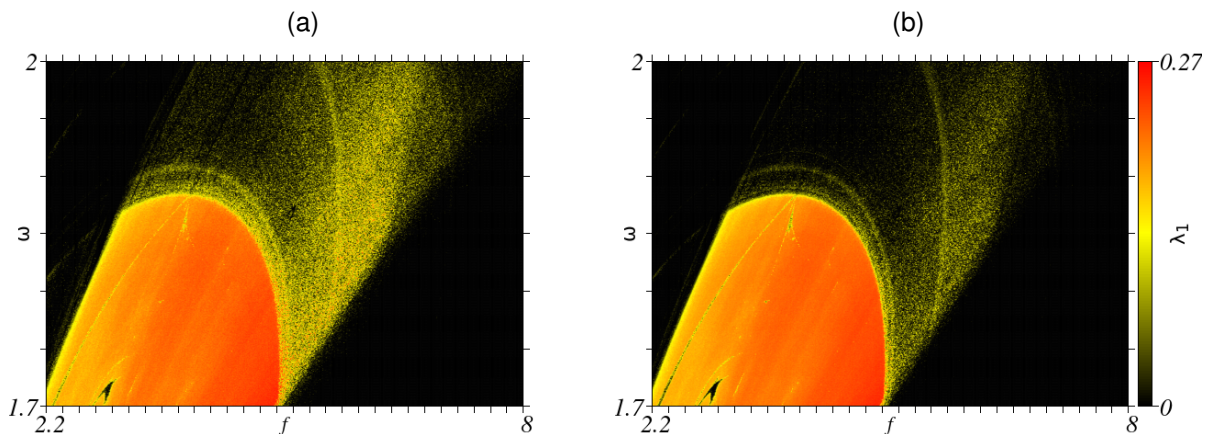
Fonte: Elaborado pelo autor.

o diagrama de Lyapunov com índice de caos transiente é 0.13. No plano de parâmetros, os valores dos parâmetros escolhidos estão marcados com um 'x'. Definimos<sup>2</sup>

<sup>2</sup> É importante salientar que há a possibilidade de escolher um conjunto de condições iniciais para o qual o sistema já se encontrará no regime periódico, não sendo possível confirmar o fenômeno de

para as simulações destes retratos de fases, as mesmas condições iniciais usadas para obter a trajetória fiduciária no cálculo dos expoentes de Lyapunov e que foram indicadas já no início deste capítulo, a saber  $(x_1(t_0) = -1 \times 10^{-2}, x_2(t_0) = 5 \times 10^{-2}, x_3(t_0) = -3 \times 10^{-2}, t_0 = 0)$ . Para cada conjunto de dados de uma simulação, dividimo-los em três partes que correspondem, cada um, a um determinado intervalo do tempo total de integração. Deste modo, é possível examinar possíveis transições topológicas durante a simulação. O intervalo de tempo ao qual corresponde cada retrato de fases, encimam cada gráfico, e, como o passo de integração foi estabelecido em  $10^{-2}$ , cada valor unitário de  $t$  equivale a  $10^2$  iterações. O  $t = 400$ , por exemplo, significa a  $4 \times 10^4$ -ésima iteração.

Figura 34 – Painel comparativo de diagramas de Lyapunov ampliados na região de caos transiente, com valor de  $\mu = 0.13$ . O diagrama em (a) é o mesmo do da Figura 32. Para construir o diagrama em (b), usamos os mesmos dados das simulações para a construção dos diagramas de Lyapunov conforme explicitado no início deste capítulo, com exceção do número de iterações, que fora estabelecido em  $4 \times 10^6$ .



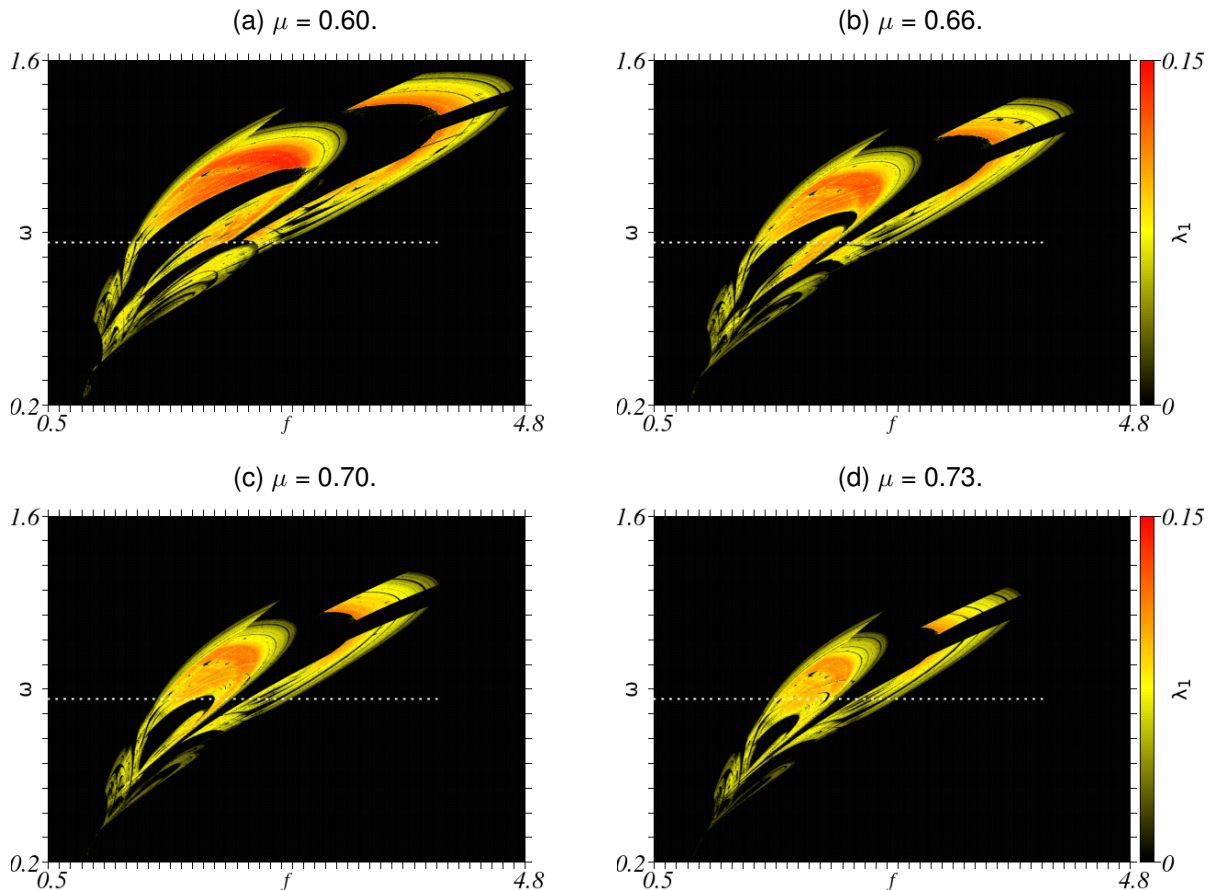
Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando a Figura 33, podemos observar que há transição topológica do caos para o regime periódico em todas as simulações, o que confirma a existência do fenômeno de caos transiente neste sistema dinâmico. Na Figura 33(a), os dois primeiros gráficos, da esquerda para a direita, representam retratos de fases de um sistema no domínio caótico. Entretanto, a partir da  $8 \times 10^4$ -ésima iteração, pelo menos, já pode ser constatada a transição topológica para o regime periódico de período 2; em (b), os dois primeiros gráficos também indicam que o sistema encontra-se no domínio caótico, porém a transição para um regime periódico de período 2 já pode ser constatada a partir da  $6 \times 10^4$ -ésima iteração, conforme indica o terceiro retrato de fases; por fim, em (c), vemos uma transição topológica do caos para um regime periódico de período 1 já constatado a partir da  $3 \times 10^4$ -ésima iteração. Na Figura 34, colocamos lado

caos transiente. Por isso, pode se fazer necessário realizar simulações com diferentes condições iniciais.

a lado diagramas de Lyapunov da supracitada região de caos transiente, tendo, para a construção do diagrama na Figura 34(b), o tempo total de integração ampliado. Com o aumento do tempo total de integração, podemos observar a supressão do granulado de caos sobre a região de domínio regular, uma vez que os valores dos expoentes de Lyapunov tendem a zero após o tempo de caos transiente.

Figura 35 – Diagramas de Lyapunov para o plano de parâmetros  $f \times \omega$  com intervalos definidos em  $[0.5, 4.8] \times [0.2, 1.6]$  e diferentes valores de  $\mu$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

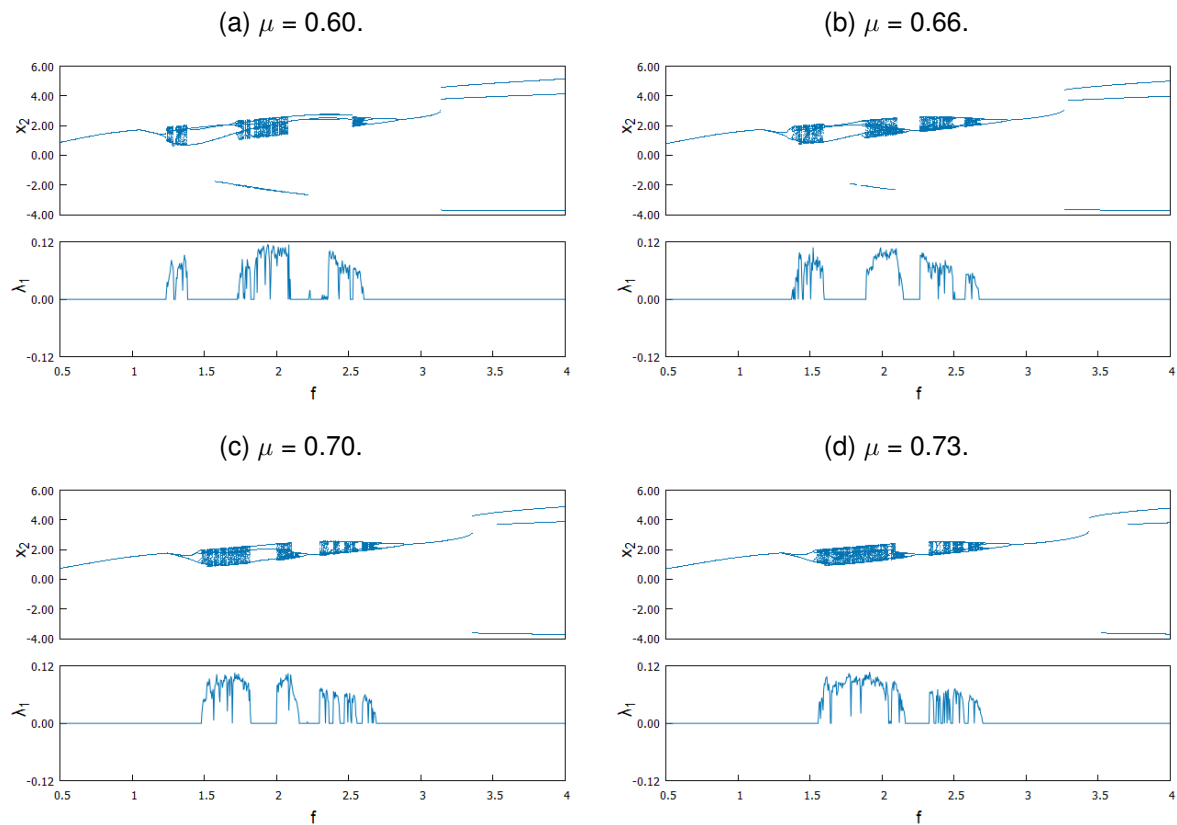
A fim de examinar a pequena região caótica revelada pelo diagrama de Lyapunov na Figura 31(h), ampliamos o trecho correspondente à região de caos supracitada, definindo os intervalos do plano de parâmetros  $f \times \omega$  em  $[0.5, 4.8] \times [0.2, 1.6]$ . O diagrama de Lyapunov correspondente encontra-se ilustrado na Figura 35(a). Realizamos também simulações numéricas para diagramas de Lyapunov aumentando a magnitude do parâmetro de dissipação  $\mu$  para efeito comparativo. Os resultados encontram-se na Figura 35 nos quadros (b), (c) e (d). Sobre cada diagrama, estão os valores que foram estabelecidos para  $\mu$ .

Os diagramas de Lyapunov na Figura 35 são bastante peculiares, com a imagem colorida, fruto da existência de expoentes de Lyapunov positivos (portanto, do



caos), formando uma espécie de *asa*, interiorizada por regiões que configuram regularidade. Naturalmente, nota-se sem surpresas a supressão do domínio caótico ao se aumentar a magnitude do termo de dissipação.

Figura 36 – Gráficos na posição superior: Diagramas de bifurcação construídos a partir da delimitação de  $\omega$  em 0.86 e  $f$  variando no intervalo  $[0.5, 4.0]$ . Gráficos na posição inferior: Gráfico do maior expoente de Lyapunov sob as mesmas condições.



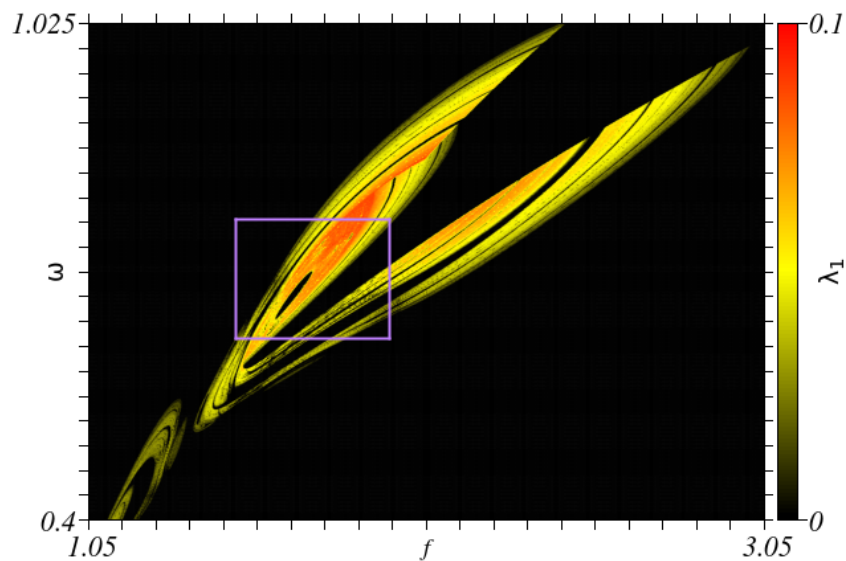
Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos obter valores críticos dos parâmetros, para os quais o sistema dinâmico sofre uma mudança de comportamento, através dos diagramas de bifurcação. Avaliando os diagramas de Lyapunov na Figura 35, estabelecemos  $\omega = 0.86$  enquanto variamos  $f$  no intervalo  $[0.5, 4.0]$  (regiões indicadas pelas linhas tracejadas nos diagramas de Lyapunov), que julgamos conter multiplicidade de tipos de comportamento dinâmico, gerando assim os diagramas de bifurcação de codimensão 1 (ou seja, obtidos a partir da variação de somente um parâmetro de controle do sistema, mantendo os demais fixos) representados na Figura 36. Tendo como base cada diagrama de Lyapunov na Figura 35, construímos o diagrama de bifurcação correspondente, conforme as legendas na Figura 36 indicam o valor de  $\mu$  adotado. Abaixo de cada diagrama de bifurcação, encontra-se também o gráfico do maior expoente de Lyapunov  $\lambda_1$  para o mesmo intervalo de  $f$  e mesmo valor de  $\omega$ . Observa-se, evidentemente, que os expoentes de valor nulo estão associados ao movimento periódico, enquanto que os

expoentes positivos, associam-se às regiões de caos. Logo, estas ferramentas podem ser usadas paralelamente para verificar o resultado obtido através de uma delas. O valor do parâmetro, neste caso o parâmetro  $f$ , a partir do qual o expoente de Lyapunov passa a ser positivo, é o parâmetro crítico<sup>3</sup> a partir do qual o sistema deixa o regime periódico e entra no caótico.

Ao definir o valor do parâmetro de dissipação  $\mu$  em 0.85, também obtivemos um diagrama de Lyapunov peculiar, apresentado na Figura 37. O plano de parâmetros  $f \times \omega$  para a obtenção deste diagrama foi definido nos intervalos  $[1.05, 3.05] \times [0.4, 1.025]$ . O desenho formado pela parte colorida (região de caos) tem aspecto de "asa pontiaguda em formato de V", tendo em seu interior uma estrutura arredondada que indica periodicidade. A região que contém esta estrutura foi selecionada por um retângulo e ampliada, resultando no diagrama de Lyapunov na Figura 38(a).

Figura 37 – Diagramas de Lyapunov para o plano de parâmetros  $f \times \omega$  com intervalos delimitados em  $[1.05, 3.05] \times [0.4, 1.025]$  e  $\mu = 0.85$ .



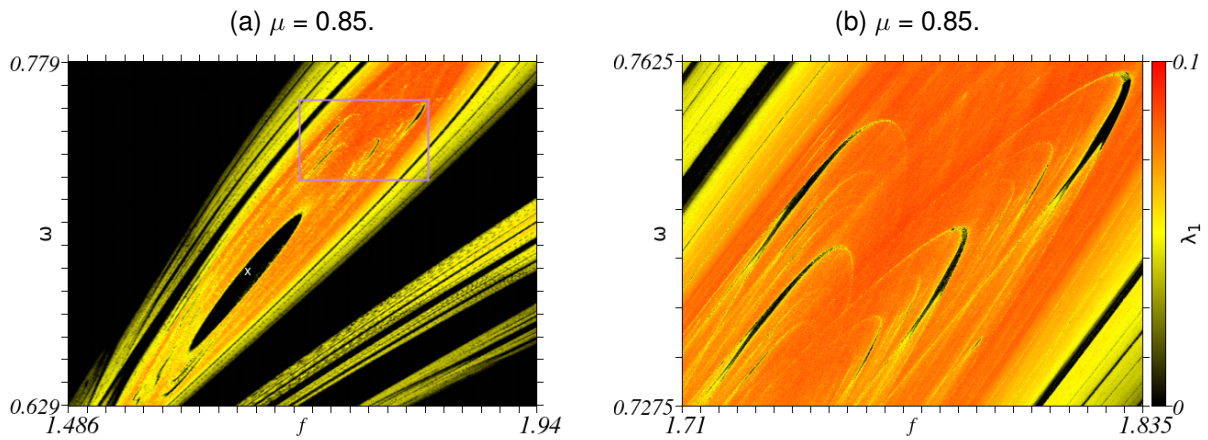
Fonte: Elaborado pelo autor.

Tomamos um ponto do plano de parâmetros (marcado por um 'x') contido nesta estrutura de regularidade arredondada evidenciada na Figura 38(a) para gerar o retrato de fases da Figura 39. Para esta simulação, fixamos  $f$  em 1.656 e  $\omega$  em 0.688. Este retrato de fases evidencia o comportamento dinâmico periódico do sistema quando definido pelos supracitados valores dos parâmetros, e revela sua topologia.

Há também outras formas peculiares de regularidade imersas no domínio caótico no diagrama de Lyapunov da Figura 38(a), como a que fora selecionada por um

<sup>3</sup> A precisão é determinada pelo tamanho do incremento no valor do parâmetro na programação.

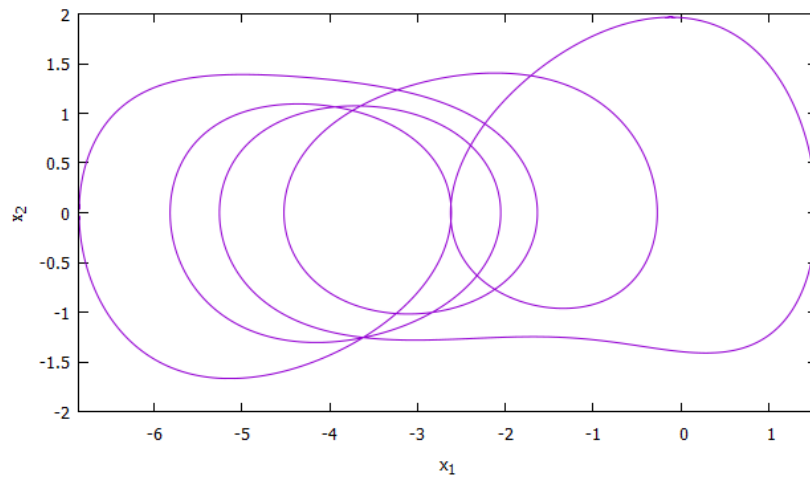
Figura 38 – Em (a) diagrama de Lyapunov para o plano de parâmetros referente à área delimitada pelo retângulo na Figura 37; em (b), ampliação da região delimitada em (a).



Fonte: Elaborado pelo autor.

retângulo. A figura Figura 38(b) é uma ampliação desta região, e nela podemos ver as já citadas formas em formato de *camarão*.

Figura 39 – Retrato de fases do sistema dinâmico quando definido pelos valores dos parâmetros  $\mu = 0.85$ ,  $f = 1.656$  e  $\omega = 0.688$ . Para esta simulação, definimos o tamanho do passo de integração em  $10^{-2}$  e número total de iterações em  $3 \times 10^4$ , descartando um transiente de  $10^5$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.



## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste trabalho, realizamos uma investigação de um modelo de nanotubo de carbono de parede simples curvado sob influência de forçamento harmônico e cujas flexões estão contidas num plano chamado de plano de flexão. A dedução deste modelo encontra-se no capítulo 3 desta dissertação. O comportamento dinâmico de um modelo do material mais promissor da nanotecnologia foi investigado à luz da Dinâmica Não-Linear. Pretendíamos ampliar os resultados numéricos apresentados na referência (GENG; ZHANG, 2012) e buscar pela existência de multiestabilidade e caos transiente no sistema.

Com relação aos limites do modelo, podemos salientar os seguintes pontos: o filamento de nanotubo foi considerado ter extremidades fixas (isto é, ser duplamente engastado). Logo, a deflexão nas extremidades, i.e.  $w(0, t)$  e  $w(L, t)$ , assim como a velocidade transversal nestes pontos, é zero. Portanto, trata-se de um problema de condições de contorno homogêneo; ademais, o nanotubo é considerado ter formato curvado descrito pela função  $Z(x) = e \sin(\pi x/L)$ , sendo  $e$  a amplitude de curvatura; todas as deflexões ocorrem num plano chamado plano de flexão, o que implica que as forças externas agem transversalmente ao nanotubo, e este também não sofre torções; o CNT estudado sofre apenas pequenas deformações, sendo seu comportamento dado como elástico linear que obedece à Lei de Hooke (módulo de elasticidade  $E$  constante); no limite de pequenas flexões no CNT, podemos considerar que não há deformação por cisalhamento nas flexões, e o campo de deslocamento pode ser escrito considerando a teoria das vigas de Euler-Bernoulli; finalmente, para chegar na equação diferencial ordinária não-linear de segunda ordem e não-autônoma (3.53), a solução da parte espacial do problema dado pela equação (3.44) e pelas condições de contorno (3.1),  $\mathcal{X}(x)$ , foi estabelecida como sendo  $\mathcal{X}(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right]$ , que corresponde à solução espacial para o modo de vibração fundamental da versão linear do problema.

Em relação aos valores dos parâmetros da equação (3.53), os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$ , que acompanham os termos não-lineares da equação, foram estabelecidos em 0.468 e 0.05, respectivamente, para todas as simulações apresentadas neste trabalho. No primeiro momento da investigação do sistema dinâmico objeto de estudo neste trabalho, delimitamos a frequência angular do forçamento  $\omega$  em 1.0, situação de ressonância primária, e a investigação procedeu com a variação dos parâmetros relacionados à amplitude do forçamento harmônico  $f$  e aos efeitos de dissipação  $\mu$ . Através do diagrama de Lyapunov construído a partir da delimitação dos supracitados valores dos parâmetros  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\omega$  e do plano de parâmetros  $f \times \mu$  definido nos intervalos

$[0, 70] \times [0, 0.9]$ , identificamos as regiões que representam os valores dos parâmetros para os quais a dinâmica é dita periódica (região em preto do diagrama de Lyapunov na Figura 23) e as regiões coloridas pelo gradiente de cores do amarelo para o vermelho indexadas aos valores dos parâmetros para os quais o sistema dinâmico é caótico. Examinamos qualitativamente o tipo de comportamento dinâmico do sistema através dos retratos de fases nas Figuras 24 e 30 nesta primeira etapa, em que curvas fechadas no retrato de fases estão associadas à dinâmica periódica, enquanto as curvas abertas, associadas ao comportamento caótico. Ressaltamos as formas peculiares formadas por regiões de regularidade sobre domínio caótico nos diagramas de Lyapunov apresentados neste trabalho, em especial as regiões com formato de *camarão*. Com base nos diagramas de Lyapunov da Figura 27(b) e Figura 27(c), geramos os diagramas de bifurcação de codimensão 2 apresentados na Figura 28 através da variação simultânea dos parâmetros  $f$  e  $\mu$  de forma a obedecerem equações de reta que cortam as regiões no formato de *camarão* nos mencionados diagramas de Lyapunov. Destes diagramas de bifurcação, destacamos uma concentração de pontos nas regiões caóticas que formam uma espécie de funções senoidais, o que indica que, apesar do comportamento caótico, a distribuição estatística destes resultados parecem obedecer alguma regra matemática.

No segundo momento deste trabalho, definimos o plano de parâmetros  $f \times \omega$  e realizamos simulações para construir diagramas de Lyapunov definindo, em cada simulação, um valor para o parâmetro do termo de dissipação  $\mu$  de modo a examinar situações com menor e maior influência dos efeitos de dissipação. Observamos a supressão das regiões de caoticidade conforme aumentamos a magnitude do parâmetro  $\mu$ . No diagrama de Lyapunov da Figura 31(a), para  $\mu = 0.13$ , identificamos uma região apresentando uma suposta existência de caos transiente, que foi confirmada através da análise de transição topológica apresentada na Figura 33, o que responde a um dos questionamentos feitos na introdução.

Numa perspectiva para trabalhos futuros, ainda pela mesma metodologia de obtenção de uma solução para o problema definido por (3.42) e (3.1), podemos proceder usando a solução espacial que represente o segundo modo de vibração do problema em sua versão linear, por exemplo, e comparar com os resultados obtidos neste trabalho. Também, podemos examinar como a amplitude de curvatura do nanotubo pode afetar suas características de vibração. Por fim, podemos trabalhar com a mesma equação diferencial não-linear apresentada nesta dissertação adicionando um contra-forçamento  $F_2(t)$  do tipo  $F_2(t) = f_2 \sin(\omega_2 t)$ , analisando o que esta quebra de simetria provoca nos diagramas de Lyapunov.

## REFERÊNCIAS

- ABEYARATNE, R. **Continuum Mechanics**. [S.l.]: Cambridge - Singapore, 2015.
- ARANI, A. G.; HASHEMIAN, M.; KOLAHCHI, R. Time discretization effect on the non-linear vibration of embedded swbnnt conveying viscous fluid. **Composites Part B: Engineering**, Elsevier, v. 54, p. 298–306, 2013.
- BONATTO, C.; GALLAS, J. A.; UEDA, Y. Chaotic phase similarities and recurrences in a damped-driven duffing oscillator. **Physical review e**, APS, v. 77, n. 2, p. 026217, 2008.
- CIENCIA, I. Y. **Cantor Set**. 2020. <<https://www.investigacionyciencia.es/revistas/investigacion-y-ciencia/la-gran-explosin-de-la-vida-775/el-conjunto-de-cantor-17743>>. Accessed: 2020-12-05.
- FARSHIDIANFAR, A.; SOLTANI, P. Nonlinear flow-induced vibration of a swcnt with a geometrical imperfection. **Computational materials science**, Elsevier, v. 53, n. 1, p. 105–116, 2012.
- FERRARA, N. F.; PRADO, C. **Caos: Uma introdução**. [S.l.]: Edgard Blücher LTDA - São Paulo, 1994.
- FERREIRA, O. P. **Nanotubos de Carbono: Preparação e caracterização**. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP - Instituto de Química: Laboratório de Química do Estado Sólido, São Paulo, Julho 2003.
- GENG, Y.; ZHANG, L. Transition to chaos in a curved carbon nanotube under harmonic excitation. **International Journal of Modern Physics B**, World Scientific, v. 26, n. 32, p. 1250210, 2012.
- GERE, J.; GOODNO, B. **Mecânica dos Materiais**. 7. ed. [S.l.]: Cengage Learning - São Paulo, 2010.
- GLEIK, J. **Caos: A criação de uma nova ciência**. 16. ed. [S.l.]: Elsevier - Rio de Janeiro, 1989.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. 3. ed. [S.l.]: Pearson - Londres, 2001.
- HARRIS, P. **Carbon Nanotubes and related structures**. [S.l.]: Cambridge University Press - New York, 1999.
- HIRSCH, M.; SMALE, S.; DEVANEY, R. **Differential Equations, Dynamical Systems and an introduction to Chaos**. 2. ed. [S.l.]: Elsevier - San Diego, 2004.
- HOFF, A. **Estruturas de Bifurcação em Sistemas Dinâmicos Quadridimensionais**. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina - Centro de Ciências Tecnológicas, Joinville, Fevereiro 2014.

JOSHI, A. Y.; SHARMA, S. C.; HARSHA, S. Chaotic response analysis of single-walled carbon nanotube due to surface deviations. **Nano**, World Scientific, v. 7, n. 02, p. 1250008, 2012.

LICHTENBERG, A.; LEIBERMAN, M. **Regular and Chaotic Dynamics**. 2. ed. [S.l.]: Springer - New York, 1992.

MAGALHÃES, W. F. **Dinâmica de Partículas Inerciais Acopladas a um Meio Visco**. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina - Centro de Ciências Tecnológicas, Joinville, Julho 2019.

MANCHEIN, C.; ALBUQUERQUE, H. A.; MELLO, L. F. Exploring the dynamics of a third-order phase-locked loop model. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, World Scientific, v. 28, n. 11, p. 1830038, 2018.

MAY, R. M. **Stability and complexity in model ecosystems**. [S.l.]: Princeton university press, 2019.

MAYOOF, F. N.; HAWWA, M. A. Chaotic behavior of a curved carbon nanotube under harmonic excitation. **Chaos, Solitons & Fractals**, Elsevier, v. 42, n. 3, p. 1860–1867, 2009.

MEUCCI, R. et al. Optimal phase-control strategy for damped-driven duffing oscillators. **Physical review letters**, APS, v. 116, n. 4, p. 044101, 2016.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. 2. ed. [S.l.]: Livraria da Física - São Paulo, 2006.

O'CONNELL, M. **Carbon Nanotubes**: Properties and applications. [S.l.]: CRC Press - New York, 2006.

OTT, E. **Chaos in dynamical systems**. [S.l.]: Cambridge University Press - New York, 1993.

PIRES, A. **Evolução das ideias da Física**. 2. ed. [S.l.]: Livraria da Física - São Paulo, 2008.

REDDY, J.; MAHAFFEY, P. Generalized beam theories accounting for von kármán non-linear strains with application to buckling. **Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics**, American Scientific Publishers, v. 1, n. 1, p. 120–134, 2013.

TIMOSHENKO, S.; GERE, J. **Mechanics of Materials**. [S.l.]: Brooks/Cole Engineering Division - Monterey, 1972.

WOLF, A. et al. Determining lyapunov exponents from a time series. **Physica D: Non-linear Phenomena**, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985.