

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PATRICK JORDY DE LIMA BARBOSA

CAMINHADAS QUÂNTICAS COM DEFEITOS FOURIER SIMÉTRICOS

JOINVILLE
2022

Patrick Jordy de Lima Barbosa

Caminhadas Quânticas com defeitos Fourier simétricos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Edgard Pacheco Moreira Amorim

JOINVILLE
2022

Barbosa, Patrick Jordy de Lima

Caminhadas Quânticas com defeitos Fourier simétricos /
Patrick Jordy de Lima Barbosa. - Joinville - 2022. 66 p.

Orientador: Edgard Pacheco Moreira Amorim

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Física, Joinville, 2022.

1. Caminhadas quânticas. 2. Defeito de rede. 3. Localização. 4. Emaranhamento. I. Amorim, Edgard Pacheco Moreira II. Universidade do Estado de Santa Catarina - Programa de Pós-Graduação. III. Título.

PATRICK JORDY DE LIMA BARBOSA

CAMINHADAS QUÂNTICAS COM DEFEITOS FOURIER SIMÉTRICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Edgard Pacheco Moreira Amorim
Universidade do Estado de Santa Catarina (presidente/orientador)

Membros:

Prof. Dr. André Fabiano Steklain Lisbôa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 30 de maio de 2022.

Para meu pai (*in memoriam*), que sempre me apoiou.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Luciano e Claudiceia, que sempre moveram o mundo para que eu pudesse somente estudar. Tudo que conquistei é graças a vocês.

À minha namorada Lorena Rosa Cerutti. Todo o amor do mundo é pouco para você.

Ao meu irmão. Por compartilhar comigo os bons e maus momentos.

Aos meus parentes próximos. Nos momentos difíceis da vida, pude contar com todos vocês ao meu lado.

Aos professores, todos os que admirei durante esta jornada. Não existe profissão mais honrada no mundo.

Agradeço em especial o meu orientador e professor Edgard Pacheco Moreira Amorim, por me ajudar a me tornar uma pessoa e um profissional melhor.

À CAPES, pelo financiamento da bolsa de estudos durante esse período.

RESUMO

Barbosa, P. J. L.: *Caminhadas Quânticas com defeitos Fourier simétricos*. Dissertação de Mestrado (Universidade do Estado de Santa Catarina, 2022). 66 p.

Neste trabalho estudamos a caminhada quântica discreta no tempo sobre uma rede unidimensional com defeitos Fourier em posições simétricas. O estado inicial é dado por um bit quântico partindo da origem. Investigamos o aprisionamento (localização), transporte e emaranhamento entre spin e posição da partícula quântica. Observamos que essas propriedades são fortemente dependentes da posição $j = \pm d$ dos defeitos. A inserção de defeitos em $|d| > 1$ mostrou uma melhora nas propriedades de transporte e no emaranhamento comparada a uma caminhada quântica dirigida por uma moeda Hadamard, enquanto que para $|d| = 1$ observamos uma localização parcial substancial do estado quântico próximo a sua posição inicial.

Palavras-chave: caminhadas quânticas; defeito de rede; localização; emaranhamento.

ABSTRACT

Barbosa, P. J. L.: *Quantum walks with symmetrical Fourier defects*. Master Thesis (Santa Catarina State University, 2022). 66 p.

In this work, we study the discrete-time quantum walk over a one-dimensional lattice with Fourier defects on symmetrical positions. Our initial state is a qubit starting from the origin. We investigate the trapping (localization), transport, and entanglement between spin and position of the quantum particle. We observe that these properties are strongly dependent on the position $j = \pm d$ of defects. The insertion of defects on $|d| > 1$ shows a improvement in the transport properties and quantum entanglement compared to a quantum walk driven by a Hadamard coin, while for $|d| = 1$ we observe a substantial partial localization of the quantum state close to its initial position.

Key-words: quantum walks; lattice defect; localization; entanglement.

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de uma caminhada aleatória clássica com o caminhante partindo da posição inicial $j = 0$. Após 5 passos ($t = 5$) o caminhante encontra-se na posição $j = -1$. Retirado de [13].	21
1.2	Distribuição Gaussiana de probabilidades para os valores de $\sigma = \sqrt{t}$ e $\mu = 0$. Retirado de [13].	23
1.3	Representação de um (a) caminhante clássico e (b) caminhante quântico e suas respectivas dinâmicas sobre a rede unidimensional. Retirado de [18]. .	24
1.4	(a) Interferômetro de Mach-Zehnder. (b) Esquema em séries de interferômetros de Mach-Zehnder que simulam uma CQ para três passos. Para cada posição no espaço em determinado passo são explicitados as probabilidades. Neste arranjo, cada BS atua como o operador moeda quântica e o operador de translação condicional ao mesmo tempo. Retirado de [15]. . .	25
1.5	Uma partícula quântica com <i>spin up</i> (azul) em $j = 0$ sofre uma rotação devido ao operador moeda quântica, na qual o seu estado de <i>spin</i> irá entrar em uma superposição (roxo) entre os <i>spin up</i> e <i>down</i> (vermelho). Logo em seguida, as amplitudes de probabilidade <i>up</i> e <i>down</i> da partícula serão transladas para as posições $j = 1$ e $j = -1$ respectivamente, ou seja, com base em seu grau de liberdade interno (<i>spin</i>). Este procedimento é repetido para os demais passos da caminhada. Retirado de [15].	27
2.1	Esfera de Bloch. Retirado de [15].	31
2.2	Representações das atuações dos operadores moedas Hadamard \hat{H} , Fourier \hat{F} e NOT \hat{X} , sobre o estado $ \uparrow\rangle$ na esfera de Bloch. Retirado de [22]. . . .	35
2.3	Distribuição de probabilidades $P(j)$ para uma caminhada quântica Hadamard após 100 passos de tempo, iniciando da posição $j = 0$ com os <i>qubits</i> $ \uparrow\rangle$ (círculo preto), $ \downarrow\rangle$ (quadrado vermelho) e $(\uparrow\rangle + i \downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ (triângulo verde) com as respectivas dispersões $\sigma(t)$ no detalhe.	41
3.1	Probabilidade acumulada (P_{ac}) para uma caminhada Hadamard para valores de $d = 1$ (preto), 2 (vermelho), 3 (azul), 4 (verde) e 5 (rosa) para os primeiros 100 passos. No detalhe: em escala logarítmica comparando com a lei de potência t^{-1} (cinza).	50
3.2	Coeficiente σ_H^2/t^2 em função do tempo para uma caminhada Hadamard com 500 passos. Os <i>qubits</i> iniciais utilizados são $ \uparrow\rangle$ (preto), $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\rangle \pm i \downarrow\rangle)$ (vermelho) e $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\rangle \pm \downarrow\rangle)$ (azul).	51

3.3	Curvas de contorno dos coeficientes da variância σ^2/t^2 no limite de longa duração numa caminhada Hadamard para $\alpha \in [0, \pi]$ e $\beta \in [0, 2\pi]$ com valores entre 0,1213 e 0,2929.	52
3.4	Emaranhamento S_E no tempo para uma caminhada Hadamard de 100 passos. Os <i>qubits</i> iniciais utilizados são $ \uparrow\rangle$ (preto), $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\rangle \pm i \downarrow\rangle)$ (vermelho) e $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\rangle \pm \downarrow\rangle)$ (azul). No detalhe: emaranhamento entre os passos 9.900 até 10.000.	53
3.5	Emaranhamento assintótico \bar{S}_E em função dos ângulos polar α e azimutal β do <i>qubit</i> inicial para uma caminhada Hadamard. Temos $\alpha \in [0, \pi]$ e $\beta \in [-\pi, \pi]$. O emaranhamento varia entre $\approx 0,736$ e 1, com valor médio $\langle \bar{S}_E \rangle = 0,872$ [15].	53
3.6	Probabilidade acumulada e coeficiente de variância para caminhadas quânticas com defeitos Fourier simétricos para $j = \pm d$ tal que $d = 1$ (preto), $d = 2$ (vermelho), $d = 3$ (azul), $d = 4$ (verde) e $d = 5$ (rosa) até $t = 10000$ passos partindo dos <i>qubits</i> iniciais (a)-(b) $ \uparrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\rangle \pm \downarrow\rangle)$, (c)-(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\rangle + i \downarrow\rangle)$ e (e)-(f) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\rangle - i \downarrow\rangle)$. Ambos os eixos dos gráficos da probabilidade acumulada em (a), (c) e (e) estão em escala logarítmica, enquanto os eixos do coeficiente de variância em (b), (d) e (f) são lineares.	54
3.7	Curvas de contorno para a probabilidade acumulada e a razão entre a variância de uma caminhada com defeitos Fourier simétricos e a variância correspondente para uma caminhada Hadamard em função do <i>qubit</i> inicial, para $d = 1$ em (a) e (b) e para $d = 2$ em (c) e (d), considerando $t = 10000$ passos. O ângulo polar α varia entre $[0, \pi]$ e o ângulo azimutal β varia entre $[0, 2\pi]$ em incrementos independentes de 0,1 totalizando 2016 <i>qubits</i> iniciais.	57
3.8	Distribuição de probabilidade comparando a caminhada Hadamard (preto) com a caminhada quântica com defeitos Fourier simétricos para $j = \pm d$ tal que $d = 2$ (vermelho) partindo do <i>qubit</i> inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\rangle + \downarrow\rangle)$. Neste caso, $\sigma^2/\sigma_H^2 \approx 2,6$	58
3.9	Emaranhamento em função do tempo com defeitos Fourier simétricos com (a) $d = 1$, (b) $d = 2$, (c) $d = 3$, (d) $d = 4$ e (e) $d = 5$ para uma caminhada de 100 passos. Os <i>qubits</i> iniciais utilizados são $ \uparrow\rangle$ (preto), $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\rangle + i \downarrow\rangle)$ (vermelho), $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\rangle - i \downarrow\rangle)$ (azul), $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\rangle + \downarrow\rangle)$ (verde) e $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\rangle - \downarrow\rangle)$ (rosa). No detalhe: emaranhamento entre os passos 9.900 até 10.000.	59
3.10	Superfície de emaranhamento de uma caminhada com defeitos Fourier simétricos com $d = 5$ em função do <i>qubit</i> inicial, considerando $t = 10000$ passos. O ângulo polar α varia entre $[0, \pi]$ e o ângulo azimutal β varia entre $[0, 2\pi]$ em incrementos independentes de 0,1 totalizando 2016 <i>qubits</i> iniciais.	60

Lista de Tabelas

1.1	Valores para a distribuição de probabilidade de uma caminhada aleatória clássica com uma moeda justa obtida a partir da Eq. 1.1 para os 5 primeiros passos.	22
1.2	Valores para a distribuição de probabilidade para uma caminhada quântica feita a partir de um arranjo do experimento de Mach-Zehnder para os cinco primeiros passos.	26
2.1	Distribuição de probabilidades para os três primeiros passos em uma caminhada quântica Hadamard com uma partícula no estado inicial $ \Psi(0)\rangle = \uparrow\rangle \otimes 0\rangle$ (Exemplo 4).	40

Sumário

1	Introdução	19
1.1	Caminhada aleatória clássica	20
1.2	Caminhada aleatória quântica	23
1.2.1	Interferômetro de Mach-Zehnder	24
1.3	Organização da dissertação	27
2	Teoria	29
2.1	Formalismo matemático das caminhadas quânticas	29
2.1.1	Operador evolução temporal	31
2.1.2	Operador moeda	32
2.1.3	Operador de translação condicional	35
2.1.4	Probabilidade e dispersão	40
2.1.5	Emaranhamento quântico	41
3	Resultados	47
3.1	Defeitos de rede	47
3.2	Caminhada Hadamard	49
3.3	Defeitos Fourier simétricos	54
4	Conclusões	63
	Bibliografia	65

Introdução

Na virada do século XX, uma série de revoluções estava para ocorrer nas teorias físicas, que estavam tendo problemas para explicar previsões absurdas como a “catástrofe do ultravioleta” [1]. Isto mostrou que as teorias da física da época (atualmente denominada de física clássica) eram insuficientes para explicar fenômenos em escala atômica. No primeiro quarto daquele século, a mecânica quântica surge como alternativa teórica, revolucionando a maneira como alguns fenômenos naturais eram descritos e entendidos.

Na década de 30, outra revolução ocorria em paralelo: o conceito da máquina de Turing era desenvolvido. Alan Turing (1912-1954) criava um modelo computacional abstrato operando através de sequências lógicas de unidades de informação conhecidas como *bits* [2], representados por “0” e “1” (a menor unidade de informação possível). Este modelo forneceu uma base matemática para provar que toda a informação poderia ser representada através deste sistema binário e qualquer algoritmo pode ser simulado de forma eficiente usando tal máquina [1].

Os *bits* são representados fisicamente através da teoria clássica, tendo como base o determinismo clássico. Nos computadores atuais, os transistores atuam como o processo físico binário, que contidos nos processadores, possibilitam maior eficiência do processamento de informações em tamanhos cada vez menores, atingindo atualmente valores atômicos. Nesta escala de tamanho, entretanto, o determinismo clássico dá lugar à interpretação probabilística quântica da natureza, induzindo uma mudança de paradigma na computação: os *bits* agora serão representados pelos seus análogos quânticos, denominados de bits quânticos, em inglês *quantum bits* ou *qubits* [3].

O computador clássico opera em um sistema binário de dois níveis (“0” e “1”) como

em um jogo de cara ou coroa. Na computação quântica teremos estados quânticos $|0\rangle$ e $|1\rangle$ que podem estar superpostos, ou seja, na sequência lógica de um computador quântico, poderíamos operar com os dois níveis ao mesmo tempo, e o resultado dependeria da probabilidade associada à sistemas quânticos [2]. Um sistema de dois níveis na mecânica quântica é determinado como um sistema de dois estados distinguíveis entre si, tais como o *spin* do elétron (*up* $|\uparrow\rangle$ e *down* $|\downarrow\rangle$), a polarização circular da luz (horário $|\odot\rangle$ e anti-horário $|\oslash\rangle$) ou linear (horizontal $|\leftrightarrow\rangle$ e vertical $|\updownarrow\rangle$), entre outros [1].

A pesquisa na área de informação e computação quântica pode ser definida como interdisciplinar, sendo dedicada desde a construção de computadores quânticos e de sistemas quânticos de processamento de informação, assim como a construção e utilização de algoritmos que exploram tais propriedades quânticas. Denominados de algoritmos quânticos, estes têm a difícil tarefa de, além de executarem aquilo para que foram planejados, executarem de forma mais eficiente que os algoritmos clássicos. A caminhada aleatória quântica, a contraparte da caminhada aleatória clássica, se mostra como uma ferramenta avançada para o estudo de algoritmos quânticos [4]. Nesta introdução abordaremos a descrição e as implicações físicas da caminhada aleatória clássica para, em seguida, compará-la a caminhada aleatória quântica, observando como os fenômenos quânticos interferem nesta descrição e em seus resultados físicos.

1.1 Caminhada aleatória clássica

A caminhada aleatória clássica, em inglês *classical random walk*, trata da descrição do movimento não determinístico (aleatório) de uma partícula através de uma análise probabilística de seu movimento¹. Foi proposto pela primeira vez na literatura por Karl Pearson em 1905 [5], e também é popularmente conhecida como “o andar do bêbado” [6]. A caminhada clássica descreve a probabilidade de encontrar o caminhante em uma rede unidimensional de posições discretas, onde a sua caminhada é influenciada pelo resultado obtido no lançamento de uma moeda.

A abordagem matemática de tais caminhadas tem sido implementada em algoritmos para a resolução de inúmeros problemas na física e matemática. Como, por exemplo,

¹Em 1827 o botânico escocês Robert Brown observou e descreveu o movimento aleatório de grãos de pólen em água. Muitos anos mais tarde, o movimento Browniano foi interpretado por Albert Einstein como colisões aleatórias de moléculas de água em partículas macroscópicas como a causa desse movimento errático e serviu como uma evidência da existência de átomos e moléculas.

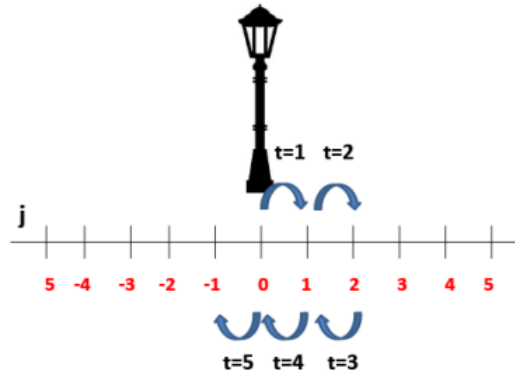


Figura 1.1: Exemplo de uma caminhada aleatória clássica com o caminhante partindo da posição inicial $j = 0$. Após 5 passos ($t = 5$) o caminhante encontra-se na posição $j = -1$. Retirado de [13].

encontrar soluções de equações diferenciais [7], implementar o método de Monte Carlo para a solução da equação de Schrödinger para muitos corpos [8], resolver problemas de otimização [9], clusterização e sua classificação [10] e teoria dos fractais [11].

Para entender a descrição matemática da caminhada clássica vamos considerar um caminhante (podendo ser uma partícula clássica ou mesmo um "bêbado") partindo da origem ($j = 0$) de uma rede unidimensional. A partícula possui uma probabilidade p de dar um passo para a direita e uma probabilidade $q = 1 - p$ de dar um passo para a esquerda, ambos os passos com um tamanho fixo l . Ou seja, temos um problema binário de tomada de decisões que pode ser associado ao lançamento de uma moeda com probabilidades p e q , para os resultados de cara e coroa, respectivamente. Considerando $p = 1/2$, teremos igual probabilidade do caminhante ir para a direita ou para a esquerda, sendo esta a definição de uma moeda justa ou equilibrada (com mesma probabilidade de obter cada uma das faces) [12].

Na Fig. 1.1, temos uma ilustração que exemplifica a descrição do movimento do nosso caminhante. Nela, o caminhante, que se encontra inicialmente na origem, realiza dois passos de tamanho fixo para a direita (devido a dois lançamentos de moedas resultantes em cara), seguido de três passos de tamanho fixo para a esquerda (devido a três lançamentos de moedas resultantes em coroa). Logo, sua posição final será $j = -1$ após esses 5 lançamentos. O número total de passos, dado pela variável N , estará atrelada ao lançamento da moeda, neste exemplo N será igual a 5.

Neste problema, podemos supor que cada passo será dado em sequência, em um determinado intervalo de tempo τ . Podemos definir uma relação entre o instante de tempo

t do caminhante e o número de passos realizado em sua dinâmica, onde $t = N\tau$ [14].

Como a caminhada clássica é um processo Markoviano no qual cada passo da caminhada é probabilisticamente independente do anterior [12], podemos determinar a probabilidade de encontrar o caminhante em uma posição j após um determinado número de passos através de uma análise combinatória resultando em uma distribuição binomial [15], dado por

$$P(j, t) = \frac{t!}{[(t+j)/2]![(t-j)/2]!} p^{(t+j)/2} (1-p)^{(t-j)/2}. \quad (1.1)$$

A Tab. 1.1 mostra a distribuição de probabilidades para os 5 primeiros passos do caminhante do exemplo anterior. Nela estamos considerando $p = q = 1/2$.

t/j	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

Tabela 1.1: Valores para a distribuição de probabilidade de uma caminhada aleatória clássica com uma moeda justa obtida a partir da Eq. 1.1 para os 5 primeiros passos.

No limite de muitos passos, ou seja, para $t \rightarrow \infty$, podemos aproximar a distribuição de probabilidades para uma distribuição Gaussiana [16], onde a probabilidade $P(x)dx$ de encontrar o caminhante no intervalo entre x e $x + dx$ após t passos é

$$P(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx, \quad (1.2)$$

na qual a dispersão na posição estará associada ao tamanho fixo do passo l e será dada pelo desvio padrão $\sigma = 2l\sqrt{tpq}$ e a posição média é $\mu = (p - q)tl$. Ao considerarmos o caso justo e $l = 1$, teremos que $\sigma = \sqrt{t}$ e $\mu = 0$, ou seja, o valor esperado médio é zero e a variância σ^2 será proporcional a t .

Portanto, não podemos afirmar com certeza em qual posição o caminhante se encontrará após um tempo t , pois não é possível prever os resultados das moedas. Desta forma, a função de densidade tem como finalidade nos fornecer a probabilidade de encontrar o caminhante em uma dada posição. Por exemplo, a partir da Fig. 1.2, pode-se verificar que existe uma probabilidade de 68,2% de encontrar o caminhante entre $\mu \pm \sigma$ (verde).

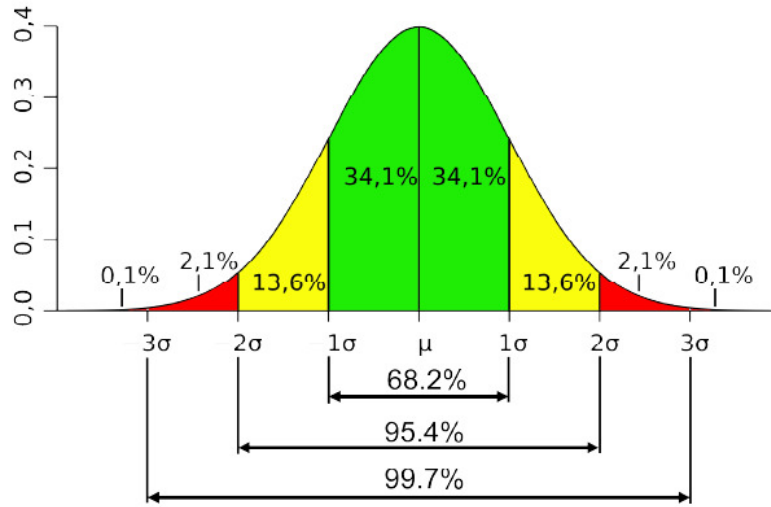


Figura 1.2: Distribuição Gaussiana de probabilidades para os valores de $\sigma = \sqrt{t}$ e $\mu = 0$. Retirado de [13].

Se considerarmos, por exemplo, a região entre $\mu \pm 2\sigma$ (verde e amarelo), a chance de encontrar o caminhante aumenta para 95,4% e chega até 99,7% ao considerarmos 3σ (verde, amarelo e vermelho).

1.2 Caminhada aleatória quântica

Em 1993, Aharonov, Davidovich e Zagury propuseram um análogo quântico ao problema da caminhada aleatória clássica, introduzindo um grau de liberdade quântico extra correlacionado ao sentido (direita ou esquerda) no qual a partícula se move [17]. Esta nova formulação foi denominada de caminhada aleatória quântica, em inglês *Quantum Random Walk*, ou simplesmente caminhada quântica.

O caminhante, agora uma partícula quântica com um grau de liberdade interno (como o *spin* do elétron), é representada como um *qubit*. Essa partícula é colocada em uma rede regularmente espaçada na qual cada sítio representa uma posição no espaço e, o grau de liberdade externo da partícula é determinado pela sua posição nessa rede. Agora, em vez do lançamento da moeda determinar a dinâmica da partícula, a dinâmica quântica do *qubit* irá depender de dois operadores: a moeda quântica e o operador de translação condicional. Ao serem aplicados ao estado quântico do caminhante, o primeiro irá levar o estado interno do caminhante a uma nova superposição de estados, enquanto o segundo irá condicionar a translação das amplitudes deste novo estado com base em seu grau de

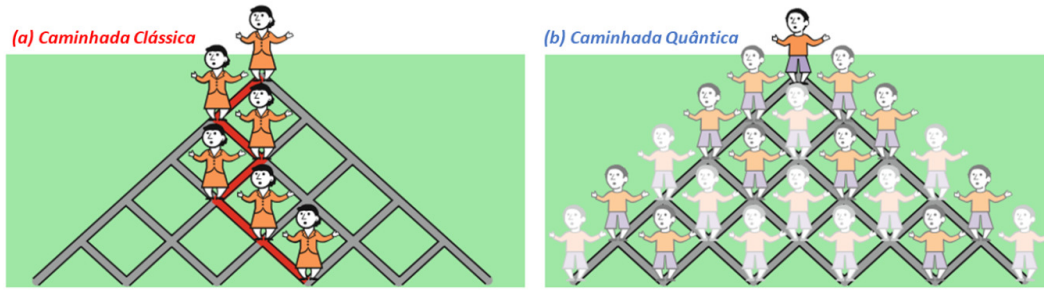


Figura 1.3: Representação de um (a) caminhante clássico e (b) caminhante quântico e suas respectivas dinâmicas sobre a rede unidimensional. Retirado de [18].

liberdade interno.

Na Fig. 1.3, o caminhante clássico em (a) pode ir para a direita ou para a esquerda dependendo do resultado da moeda, portanto, irá caminhar sobre um caminho específico. Entretanto, o caminhante quântico em (b) pode ter suas amplitudes de probabilidade colocadas em superposição abrangendo todas as possibilidades de caminho. A partícula irá se propagar como um pacote de onda viajando por todos os caminhos possíveis. Como o comportamento será ondulatório, as amplitudes de probabilidade sofrerão interferências construtivas e destrutivas, alterando de forma drástica a distribuição de probabilidade do análogo quântico com relação ao caso clássico.

1.2.1 Interferômetro de Mach-Zehnder

Para facilitar a compreensão dos fenômenos de interferência construtiva e destrutiva que ocorre com as amplitudes de probabilidade ao longo de uma caminhada quântica podemos fazer uma analogia com o interferômetro de Mach-Zehnder [19]. Na Fig. 1.4 (a), a montagem experimental consiste em dois divisores de feixe *BS* (*beam splitter*, em inglês), dois espelhos refletor E_1 e E_2 e dois detectores D_1 e D_{-1} , nas posições 1 e -1 em nossa rede, que serão utilizados para medir a intensidade da luz.

Ao passar pelo *BS*, a luz será dividida em dois feixes, uma transmitida e outra refletida ganhando $\pi/2$ de fase. Assumindo uma divisão igualitária dos feixes pelo *BS*, teremos que cada metade terá uma amplitude de $1/\sqrt{2}$ do feixe original.

Uma observação importante a ser destacada é que podemos partir de um ponto de vista clássico para uma visão quântica neste experimento. Caso o feixe fosse restrito a somente uma partícula de luz (fóton) nesta configuração, observaríamos os mesmos fenômenos de interferência e obteríamos os mesmos resultados. Desta forma, os conceitos da

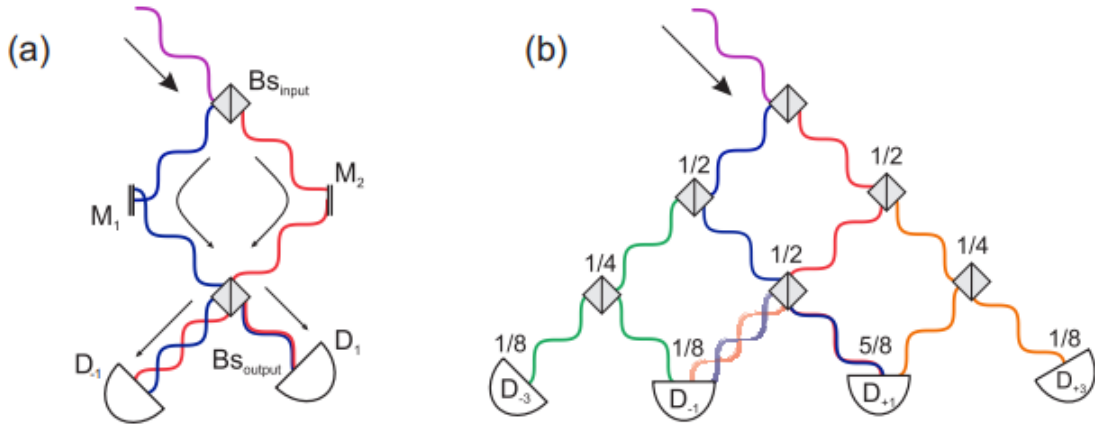


Figura 1.4: (a) Interferômetro de Mach-Zehnder. (b) Esquema em séries de interferômetros de Mach-Zehnder que simulam uma CQ para três passos. Para cada posição no espaço em determinado passo são explicitados as probabilidades. Neste arranjo, cada BS atua como o operador moeda quântica e o operador de translação condicional ao mesmo tempo. Retirado de [15].

mecânica quântica do princípio da complementariedade na interpretação de Copenhague são utilizados para descrever os resultados observados [20].

Na Fig. 1.4 (a), o feixe inicial é dividido em dois feixes com amplitudes de $1/\sqrt{2}$, enquanto que o feixe em azul é refletido e ganha uma fase de $\pi/2$, o feixe transmitido (em vermelho) irá manter a mesma fase. Ambos os feixes serão refletidos pelos espelhos M_1 e M_2 ganhando uma adição de $\pi/2$ na fase. Antes de atingirem o segundo BS , o feixe em azul terá uma fase de π e o feixe em vermelho terá uma fase de $\pi/2$ em relação ao feixe original. Após atingir o segundo BS , os feixes serão novamente divididos, formando quatro feixes com amplitudes de $1/2$ do feixe original. No detector D_1 , a metade do feixe azul será transmitida, continuando com sua fase π , entretanto, a metade do feixe vermelho será refletido obtendo uma fase resultante π , portanto teremos uma interferência construtiva neste detector. No detector D_{-1} , metade do feixe vermelho será transmitido mantendo sua fase $\pi/2$, enquanto metade do feixe azul será refletido obtendo uma fase resultante de $3\pi/2$, acarretando em uma interferência destrutiva neste detector.

Um arranjo experimental que pode nos ajudar a entender uma caminhada quântica está na Fig. 1.4 (b), onde os espelhos serão substituídos por outros BS sucessivos. Após uma série de sucessivas reflexões e transmissões, as amplitudes dos feixes resultantes serão medidas nos detectores em $t = 3$. Neste arranjo iremos definir cada coluna como uma posição em uma rede unidimensional, onde no BS central, ao qual o feixe original está incidindo, será definido como $j = 0$. O feixe é incidido vindo da esquerda para a direita em $j = 0$ e irá se dividir em dois feixes no primeiro BS , o feixe transmitido manterá a

mesma fase indo para a posição $j = 1$, enquanto o feixe refletido ganhará uma fase de $\pi/2$ e irá para $j = -1$, ambos com amplitude de $1/\sqrt{2}$ em relação ao feixe original. Como a intensidade do feixe é igual ao módulo da amplitude ao quadrado, podemos calcular a probabilidade através de sua amplitude e determinar, assim, a densidade de probabilidade. Em $t = 3$, o detector D_{-1} irá registrar uma intensidade de $1/8$ da original, enquanto o detector D_1 irá registrar $5/8$ da intensidade original. Isto ocorre devido aos processos de interferência, em $j = -1$ a onda azul chegando pela direita sofreu 3 reflexões sucessivas, assumindo uma fase de $3\pi/2$ em relação ao original, enquanto a onda vermelha está com uma fase de $\pi/2$ devido a uma única reflexão. Teremos o caso de uma interferência totalmente destrutiva, sobrando somente o feixe em verde sendo registrado neste detector. Já no detector D_1 ocorre uma interferência construtiva, pois ambas as ondas que vem da esquerda sofreram duas reflexões, possuindo a mesma fase.

Utilizando os dados das intensidades calculadas para cada posição em nossa rede unidimensional para cada passo de tempo, podemos obter a distribuição de probabilidades. A distribuição de probabilidades para este arranjo do interferômetro de Mach-Zehnder (Tab. 1.2) tem uma tendência para probabilidades maiores na região à direita, no entanto se o experimento fosse refeito com o feixe indo para a esquerda, observaríamos uma tendência de distribuição de probabilidades maiores na região à esquerda. E por último, poderíamos ainda ter uma distribuição simétrica considerando o feixe inicial como uma superposição de um feixe vindo da esquerda com vindo da direita. Portanto, a assimetria ou simetria da distribuição de probabilidade é devido à escolha do estado interno inicial da partícula (quântico), diferindo notavelmente da distribuição da caminhada clássica (Gaussiana).

t/j	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{17}{32}$		$\frac{1}{32}$

Tabela 1.2: Valores para a distribuição de probabilidade para uma caminhada quântica feita a partir de um arranjo do experimento de Mach-Zehnder para os cinco primeiros passos.

Vale lembrar que tal esquema do interferômetro utiliza a luz como o caminhante, onde o grau de liberdade interno do fóton é relacionado com a sua direção de propagação. Desta forma, o fóton que é transmitido (ou refletido) seguindo a direita é o equivalente ao *spin*

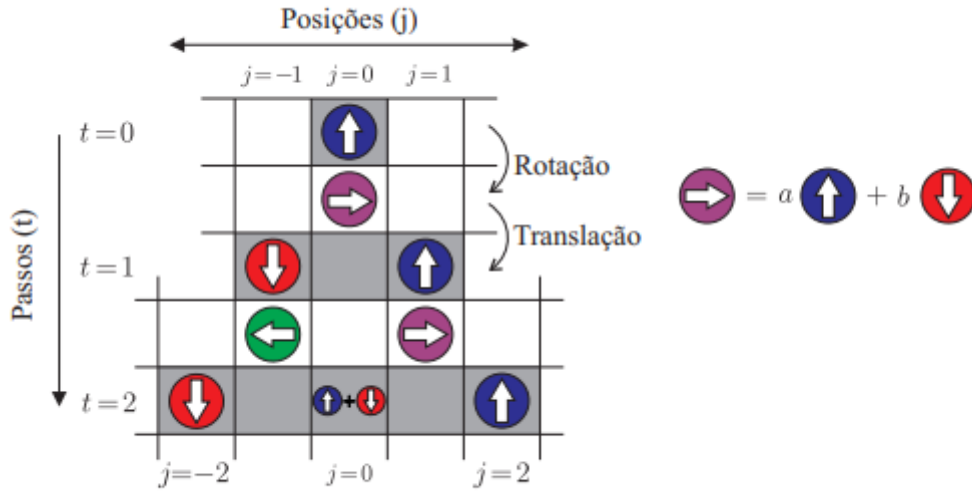


Figura 1.5: Uma partícula quântica com *spin up* (azul) em $j = 0$ sofre uma rotação devido ao operador moeda quântica, na qual o seu estado de *spin* irá entrar em uma superposição (roxo) entre os *spin up* e *down* (vermelho). Logo em seguida, as amplitudes de probabilidade *up* e *down* da partícula serão transladadas para as posições $j = 1$ e $j = -1$ respectivamente, ou seja, com base em seu grau de liberdade interno (*spin*). Este procedimento é repetido para os demais passos da caminhada. Retirado de [15].

up, enquanto o que segue a esquerda é *spin down*. Vemos então que o lado de entrada do fóton no primeiro *BS*, representa o seu estado inicial, logo se ele incide nesse *BS* a direita (esquerda) trata-se de um estado *up* (*down*), influenciando na assimetria da distribuição de probabilidade.

A Fig. 1.5 mostra esta dinâmica de uma forma simplificada. Vamos supor que numa posição $j = 0$, aplica-se o operador moeda a uma partícula quântica com *spin up*, resultando numa superposição dada por $a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$. Em seguida, a ação de outro operador realiza um deslocamento condicional movendo a componente de *spin up* para a posição vizinha à direita, enquanto a componente *down* para a posição vizinha à esquerda. Portanto, vemos que o processo dinâmico da caminhada da partícula, correlaciona o grau de liberdade externo (posição na rede unidimensional) com o grau de liberdade interno, neste caso o *spin*.

1.3 Organização da dissertação

Neste capítulo inicial foi apresentado de forma introdutória os conceitos relativos a caminhada quântica e sua contraparte clássica com o intuito de abordar de uma forma geral esse tópico de pesquisa. No capítulo 2 é apresentado a formalização matemática, descrevendo os operadores moeda e de translação condicional, assim como, os conceitos de

densidade de probabilidade, dispersão e entropia de emaranhamento.

No capítulo 3 é apresentado os resultados obtidos neste trabalho, introduzindo diferentes defeitos de rede até a caracterização da caminhada com defeitos Fourier simétricos, apresentando seus perfis de probabilidade, dispersão e emaranhamento. Por último, o capítulo 4 traz as conclusões do trabalho sendo apresentado os pontos mais importantes e perspectivas futuras para outras pesquisas sobre o tema.

Todas as figuras e gráficos presentes nesta dissertação que não possuem fonte indicada na legenda são de própria autoria.

Teoria

Neste capítulo será abordado os conceitos básicos das caminhadas quânticas, apresentando as ferramentas matemáticas necessárias para o entendimento da evolução temporal da caminhada, tais como os operadores moeda quântica e de translação condicional. Também iremos demonstrar as equações para determinação das amplitudes de probabilidade, dispersão e entropia de *von Neumann* (emaranhamento) em conjunto com sua conceituação. Tal formalismo será importante para o entendimento dos resultados obtidos no próximo capítulo.

2.1 Formalismo matemático das caminhadas quânticas

O estado geral de um caminhante quântico unidimensional $|\Psi\rangle$, denominado de vetor de estado, pertence ao espaço de Hilbert \mathcal{H} (espaço vetorial complexo e completo em relação à métrica interna) que será dado pelo produto tensorial entre o espaço de posição \mathcal{H}_P e o espaço de moeda \mathcal{H}_C , ou seja, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_P$. O espaço de posição \mathcal{H}_P (espaço infinito e contável), é o espaço de Hilbert que refere-se às posições discretas sobre a rede regular unidimensional, sendo sua base representada por $\{|j\rangle : j \in \mathbb{Z}\}$. Em relação ao espaço da moeda \mathcal{H}_C , a sua base é composta pelos estados quânticos ortonormais $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$, ou seja, nesse espaço, os estados podem assumir $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ ou qualquer superposição entre esses estados (*qubits*). Matricialmente, os estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ são representados por

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

O estado $|\Psi\rangle$, portanto, será composto pelo seu grau de liberdade externo, referente

à informação da posição $|\Psi_P\rangle \in \mathcal{H}_P$, e de seu grau de liberdade interno, referente à informação extra do sistema quântico. Este estado está atrelado ao espaço de Hilbert bidimensional, ou seja, $|\Psi_C\rangle \in \mathcal{H}_C$. O estado inicial de uma caminhada quântica é dado por,

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi_C\rangle \otimes |\Psi_P\rangle. \quad (2.2)$$

Neste trabalho, vamos considerar que o estado inicial da caminhada quântica na Eq. (2.2) é local, ou seja, o caminhante está localizado inicialmente na posição de origem $j = 0$, portanto $|\Psi_P\rangle = |0\rangle$. Além disso, podemos escrever $|\Psi_C\rangle$ como uma superposição dos estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, logo

$$|\Psi(0)\rangle = (a(0,0) |\uparrow\rangle + b(0,0) |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle, \quad (2.3)$$

onde iremos assumir uma representação da partícula de *spin* $\frac{1}{2}$ com orientação no eixo Z . Portanto, os coeficientes $a(j,t)$ e $b(j,t)$ representarão as amplitudes do *spin up* e *down* respectivamente. A condição de normalização para tal estado inicial, é dada por:

$$\begin{aligned} \langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle &= (a^*(0,0) \langle\uparrow| + b^*(0,0) \langle\downarrow|)(a(0,0) |\uparrow\rangle + b(0,0) |\downarrow\rangle) \otimes \langle 0|0\rangle \\ &= a^*(0,0)a(0,0) \langle\uparrow|\uparrow\rangle + a^*(0,0)b(0,0) \langle\uparrow|\downarrow\rangle + \\ &\quad b^*(0,0)a(0,0) \langle\downarrow|\uparrow\rangle + b^*(0,0)b(0,0) \langle\downarrow|\downarrow\rangle \\ &= |a(0,0)|^2 + |b(0,0)|^2 = 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como as amplitudes de *spin* são números complexos, estes podem ser expressos em coordenadas polares preservando a condição de normalização da Eq. (2.4), desta forma, o *qubit* que pertence ao espaço de Hilbert da moeda pode ser escrito na forma geral como

$$|\Psi_C\rangle = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) |\uparrow\rangle + e^{i\beta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) |\downarrow\rangle, \quad (2.5)$$

com $\alpha \in [0, \pi]$ e $\beta \in [0, 2\pi]$, sendo representado através da esfera de Bloch (Fig. 2.1). Como exemplo, podemos observar que no polo norte ($\alpha = 0$) teremos somente o *spin up* e no polo sul ($\alpha = \pi$) teremos o *spin down*. No equador da esfera de Bloch teremos uma superposição equilibrada (ou balanceada) de *spin up* e *spin down*, sendo que os diferentes

pontos ao longo do equador determinam a fase relativa entre estados de spin, como pode ser visto na Fig. 2.1. Já nos hemisférios teremos uma superposição não-equilibrada entre *spin up* e *spin down*, com maior probabilidade de medir *spin up* nos *qubits* do hemisfério norte e *spin down* nos *qubits* do hemisfério sul da esfera.

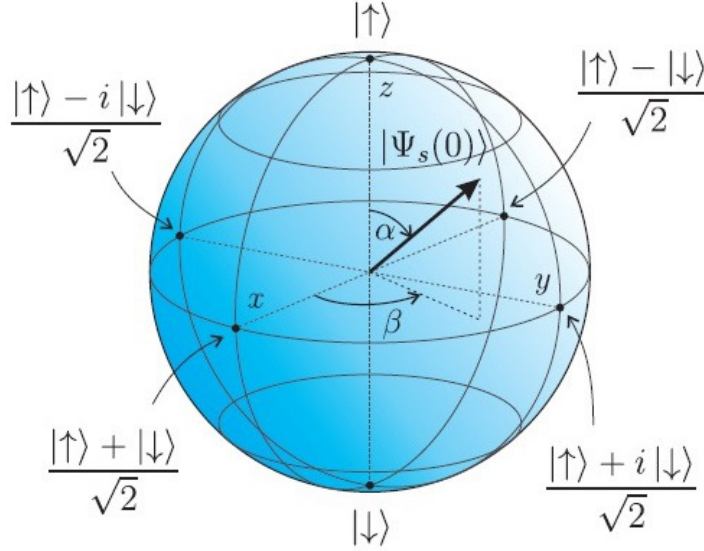


Figura 2.1: Esfera de Bloch. Retirado de [15].

2.1.1 Operador evolução temporal

A evolução no tempo do estado de uma caminhada quântica discreta ocorre através da aplicação de um operador \hat{U} , denominado operador de evolução temporal. Dado um estado quântico $|\Psi(t)\rangle$ geral, ao aplicar o operador \hat{U} , temos

$$|\Psi(t+1)\rangle = \hat{U} |\Psi(t)\rangle. \quad (2.6)$$

Para encontrar um estado $|\Psi(t)\rangle$ a partir de um estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ é necessário a aplicação de \hat{U} por t vezes, resultando em

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) \hat{U}(t-1) \dots \hat{U}(1) |\Psi(0)\rangle = \mathcal{T} \prod_{t=1}^n \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle, \quad (2.7)$$

sendo \mathcal{T} um operador para explicitar o ordenamento temporal do produtório. O operador de evolução temporal é dado então por

$$\hat{U} = \hat{S}(\hat{C} \otimes \hat{\mathbb{I}}_P), \quad (2.8)$$

onde \hat{C} é o operador moeda, que irá atuar no espaço de Hilbert da moeda \mathcal{H}_C , $\hat{\mathbb{I}}_P$ é o operador identidade no espaço de posição e \hat{S} é o operador de translação condicional. Em um primeiro momento, o operador moeda irá atuar no caminhante mudando o estado da moeda $|\Psi_C\rangle$ (*qubit*) para uma nova superposição de estados. Em seguida, o operador de translação condicional move a partícula para as posições vizinhas na rede condicionada pelas amplitudes de *spin* [21]. Desta forma, um estado geral pode ser escrito como,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (a(j, t) |\uparrow\rangle + b(j, t) |\downarrow\rangle) \otimes |j\rangle, \quad (2.9)$$

tal que $a(j, t)$ e $b(j, t)$ correspondem respectivamente as amplitudes de probabilidade de *spin up* e *spin down* numa certa posição j no tempo t .

2.1.2 Operador moeda

Todas as infinitas possibilidades de superposição das amplitudes de probabilidade do *spin up* e *spin down* que determinam o estado interno inicial do caminhante (*qubit*) podem ser representadas geometricamente pela esfera de Bloch como discutido anteriormente. A função do operador moeda \hat{C} é rotacionar o estado interno do caminhante nesta esfera [3], portanto, colocando o estado interno em uma nova superposição preservando a condição de normalização [22]. Como exemplo de moedas quânticas, podemos observar que as matrizes de Pauli σ_x , σ_y e σ_z que representamos pelos operadores \hat{X} , \hat{Y} e \hat{Z} [1], levam a uma rotação na esfera de Bloch de 180° sobre os respectivos eixos x , y e z ,

$$\hat{X} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Y} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Z} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Utilizando esses operadores, podemos equacionar rotações arbitrárias por um ângulo

θ em torno dos eixos x , y e z da seguinte forma,

$$\begin{aligned} R_x(\theta) &\equiv e^{-i\theta\hat{X}/2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{X} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ R_y(\theta) &\equiv e^{-i\theta\hat{Y}/2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{Y} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ R_z(\theta) &\equiv e^{-i\theta\hat{Z}/2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{Z} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

É possível mostrar que um operador moeda arbitrário, pode ser escrito como

$$\hat{C} = e^{i\alpha_u} R_z(\beta_u) R_y(\gamma_u) R_z(\delta_u), \quad (2.12)$$

que partir das Eqs. 2.11 nos fornece,

$$\hat{C} = e^{i\alpha_u} \begin{pmatrix} e^{-i\beta_u/2} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_u/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\gamma_u/2) & -\sin(\gamma_u/2) \\ \sin(\gamma_u/2) & \cos(\gamma_u/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta_u/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_u/2} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

onde os parâmetros α_u , β_u , γ_u e δ_u possuem valores reais [1]. Ao realizar as substituições: $\alpha_u = \pi$ (fase global da moeda), $\beta_u = 2\theta$, $\cos(\gamma_u/2) = \sqrt{q}$ e $\delta_u = 2\varphi + \pi$, obtemos uma moeda quântica \hat{C} geral pertencente ao grupo especial $SU(2)$ das matrizes complexas unitárias de grau 2,

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} c_{\uparrow\uparrow} & c_{\uparrow\downarrow} \\ c_{\downarrow\uparrow} & c_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{q} & \sqrt{1-q}e^{i\theta} \\ \sqrt{1-q}e^{i\varphi} & -\sqrt{q}e^{i(\theta+\varphi)} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

tais que $0 \leq q \leq 1$ e $0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi$. O parâmetro q , também conhecido como tendência (*bias*) da moeda, nos informa se a moeda é justa ou não, podendo variar entre 0 e 1. Por exemplo, se definirmos $q = \frac{1}{2}$ na Eq. 2.14, a aplicação da moeda irá gerar um estado de superposição igualitária entre as amplitudes de *spin up* e *spin down*, portanto, será uma moeda justa (ou balanceada). Para o caso onde $q \neq \frac{1}{2}$, a moeda é denominada tendenciosa. Os parâmetros θ e φ definem as fases relativas entre os estados de *spin* superpostos. Até então, estamos considerando esses parâmetros fixos no tempo e na posição, mas eles podem variar somente no tempo, na posição ou em ambos [3, 23, 24]. Neste trabalho, a fim de

introduzirmos os defeitos Fourier em certas posições da rede (simétricas) consideraremos os parâmetros θ e φ como dependentes da posição como mostraremos no próximo capítulo.

Duas moedas justas ($q = 1/2$) que são amplamente utilizadas na literatura são a Hadamard \hat{H} e Fourier \hat{F} (ou Kempe) e são dadas por

$$\hat{H} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{F} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

que podem ser obtidas, respectivamente, tomando $\theta = \phi$ ambos nulos ou iguais a $\pi/2$ na Eq. (2.14). Ou ainda, em termos de rotações do estado na esfera de Bloch (Eq. (2.12)), podemos escrever $\hat{H} = e^{3\pi i/2} R_z(0) R_y(\pi/2) R_z(-\pi)$ enquanto $\hat{F} = R_z(\pi/2) R_y(\pi/2) R_z(-\pi/2)$. Podemos observar no Exemplo 1 e na Fig. 2.2 que, embora ambas moedas sejam justas, ao aplicá-las no *qubit* $|\uparrow\rangle$, ambas levam a uma nova superposição no equador da esfera de Bloch, no entanto com fases relativas entre estados de *spins* distintas.

Exemplo 1. Partindo de um *qubit* $|\Psi_C\rangle = |\uparrow\rangle$, ao aplicar o operador moeda Hadamard e Fourier obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{H} |\uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \hat{F} |\uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + i |\downarrow\rangle). \end{aligned} \quad (2.17)$$

A moeda \hat{X} de Pauli também é conhecida como porta NOT. Na computação clássica, o operador NOT tem como objetivo inverter o valor de entrada da operação, ou seja, se o valor inicial é 1, o valor gerado após a operação será 0 (em notação binária) e vice-versa.

Ao aplicar o operador moeda \hat{X} ao estado inicial *spin up* obtemos:

$$\hat{X} |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle. \quad (2.18)$$

A moeda \hat{X} irá inverter a base do estado do *qubit*, pois realiza uma rotação de 180° em torno do eixo x da esfera de Bloch.

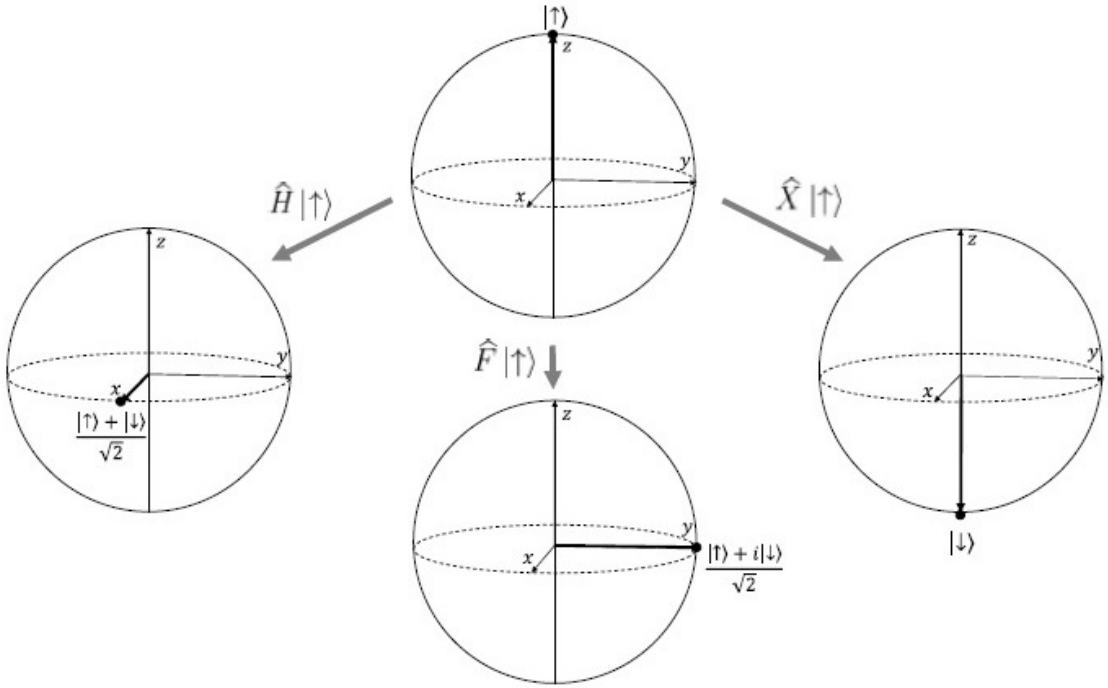


Figura 2.2: Representações das atuações dos operadores moedas Hadamard \hat{H} , Fourier \hat{F} e NOT \hat{X} , sobre o estado $|\uparrow\rangle$ na esfera de Bloch. Retirado de [22].

2.1.3 Operador de translação condicional

O operador de translação condicional \hat{S} é escrito matematicamente como

$$\hat{S} = \sum_j |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes |j+1\rangle \langle j| + |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes |j-1\rangle \langle j|. \quad (2.19)$$

Ao ser aplicado ao estado da caminhada, esse operador irá transladar a posição dos estados condicionado pelo grau de liberdade interno, ou seja, o estado $|\uparrow\rangle \otimes |j\rangle$ vai para a posição a direita $|j+1\rangle$ e $|\downarrow\rangle \otimes |j\rangle$ para a posição a esquerda $|j-1\rangle$, emaranhando o *spin* com a posição. Portanto, após o operador \hat{C} atuar sobre o *qubit* rotacionando-o para um novo

estado de superposição, o operador de translação condicional \hat{S} faz a translação desse novo estado, separando as componentes de *spin* nas duas posições vizinhas.

Exemplo 2. Assumindo um estado local na origem dado por $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$, ao aplicarmos o operador de translação condicional ao estado, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{S} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle \right) &= (|\uparrow\rangle \langle\uparrow| \otimes |1\rangle \langle 0| + |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \otimes |-1\rangle \langle 0|) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \langle\uparrow| \otimes |1\rangle \langle 0| + |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \otimes |-1\rangle \langle 0|) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Se o estado inicial for dado por $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$, a atuação do operador de translação condicional irá resultar em

$$\begin{aligned} \hat{S} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle \right) &= (|\uparrow\rangle \langle\uparrow| \otimes |1\rangle \langle 0| + |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \otimes |-1\rangle \langle 0|) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \langle\uparrow| \otimes |1\rangle \langle 0| + i|\downarrow\rangle \langle\downarrow| \otimes |0\rangle \langle 0|) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + i|\downarrow\rangle \otimes |0\rangle). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Note que adotamos acima como estados iniciais, os estados obtidos no Exemplo 1.

Como o operador de evolução temporal \hat{U} (Eq. (2.8)) é composto pelos operadores moeda quântica, de translação condicional e identidade em relação ao espaço de posição, agora é possível verificar matematicamente como este operador evolui temporalmente um estado partindo de um dado estado inicial $|\Psi(0)\rangle$.

Exemplo 3. Assumindo um estado inicial local $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$. Podemos obter o estado $|\Psi(1)\rangle$ a partir do operador evolução temporal, considerando uma moeda quântica

Hadamard \hat{H} , fazendo

$$\begin{aligned} |\Psi(1)\rangle &= \hat{U} |\Psi(0)\rangle \\ &= \hat{S}(\hat{C} \otimes \hat{\mathbb{I}}_P)(|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle) \\ &= \hat{S}(\hat{H} |\uparrow\rangle \otimes \hat{\mathbb{I}}_P |0\rangle). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como $\hat{\mathbb{I}}_P |0\rangle = |0\rangle$, e já tendo realizado a operação da moeda quântica \hat{H} sobre o ket $|\uparrow\rangle$ no Exemplo 1, temos que

$$|\Psi(1)\rangle = \hat{S} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle \right),$$

a atuação do operador \hat{S} no estado acima foi demonstrada no Exemplo 2, nos resultando em

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle). \quad (2.23)$$

Já a evolução temporal do estado $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ com uma moeda Fourier \hat{F} , usando o Exemplo 1 e a Eq. 2.21, resulta em

$$|\Psi(1)\rangle = \hat{S}(\hat{F} \otimes \hat{\mathbb{I}}_P) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + i |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle). \quad (2.24)$$

Portanto, para um estado inicial $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$, tanto a aplicação do operador de evolução temporal com uma moeda Hadamard quanto a Fourier resultam em um estado com 50% de probabilidade de medir $|\uparrow\rangle$ na posição $j = 1$ e 50% de probabilidade de medir $|\downarrow\rangle$ na posição $j = -1$, mas com a fase relativa entre $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ diferentes, sendo nula para a Hadamard (Eq. (2.23)) e $\pi/2$ (Eq. (2.24)) para a Fourier. Fisicamente, podemos associar a atuação da moeda Hadamard com o papel do campo magnético não-uniforme no experimento de Stern-Gerlach¹ que faz com que o feixe inicial fique numa nova superposição de estados de *spin*. Por outro lado, a moeda Fourier pode ser entendida fisicamente como um divisor de feixes num experimento de Mach-Zehnder, considerando as duas direções

¹O experimento de Stern-Gerlach, proposto por Otto Stern e realizado com o auxílio de Walther Gerlach entre 1921 e 1922, é composto por um feixe de átomos de prata aquecidos por um forno e, em seguida, colimados, então submetidos a um campo magnético não-homogêneo perpendicular ao feixe.

perpendiculares de propagação como o sistema de dois níveis. Então, por exemplo, se um fóton chega numa direção, metade de sua intensidade é transmitida sem fase nenhuma, enquanto a outra metade é refletida com uma fase de $\pi/2$ [13, 15].

Exemplo 4. A partir do estado $|\Psi(1)\rangle$ é possível calcular $|\Psi(2)\rangle$ para a caminhada Hadamard, assim

$$\begin{aligned}
 |\Psi(2)\rangle &= \hat{U} |\Psi(1)\rangle \\
 &= \hat{S}(\hat{H} \otimes \hat{\mathbb{I}}_P) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle) \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{S} \left(\hat{H} |\uparrow\rangle \otimes \hat{\mathbb{I}}_P |1\rangle + \hat{H} |\downarrow\rangle \otimes \hat{\mathbb{I}}_P |-1\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{S} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes |-1\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{2} \hat{S} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes |1\rangle + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes |-1\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{2} \hat{S}((|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |1\rangle + (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \otimes |-1\rangle). \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

Para o passo $t = 2$, o operador \hat{S} será escrito levando em conta as posições $j = 1$ e -1 , resultando em

$$\hat{S} = |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes (|2\rangle \langle 1| + |0\rangle \langle -1|) + |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes (|0\rangle \langle 1| + |-2\rangle \langle -1|). \tag{2.26}$$

Substituindo na Eq. 2.25 temos

$$\begin{aligned}
 |\Psi(2)\rangle &= \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes (|2\rangle \langle 1| + |0\rangle \langle -1|) + |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes (|0\rangle \langle 1| + |-2\rangle \langle -1|)) \cdot \\
 &\quad ((|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |1\rangle + (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \otimes |-1\rangle), \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

e escrevendo somente os termos dos produtos internos não-nulos, resulta em

$$\begin{aligned}
 |\Psi(2)\rangle &= \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes |2\rangle \langle 1| + |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes |0\rangle \langle -1| \\
 &\quad + |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes |0\rangle \langle 1| - |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes |-2\rangle \langle -1|) \\
 |\Psi(2)\rangle &= \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle \otimes |2\rangle + (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |-2\rangle). \tag{2.28}
 \end{aligned}$$

Podemos obter o estado $|\Psi(3)\rangle$ a partir de $|\Psi(2)\rangle$:

$$\begin{aligned} |\Psi(3)\rangle &= \hat{U} |\Psi(2)\rangle \\ &= \frac{1}{2} \hat{S} (\hat{H} |\uparrow\rangle \otimes \hat{\mathbb{I}}_P |2\rangle + \hat{H} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes \hat{\mathbb{I}}_P |0\rangle - \hat{H} |\downarrow\rangle \otimes \hat{\mathbb{I}}_P |-2\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \hat{S} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |2\rangle + \frac{2}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |-2\rangle \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

O \hat{S} será determinado pelas posições $j = 2, 0$ e -2 ,

$$\hat{S} = |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes (|3\rangle \langle 2| + |1\rangle \langle 0| + |-1\rangle \langle -2|) + |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes (|1\rangle \langle 2| + |-1\rangle \langle 0| + |-3\rangle \langle -2|), \quad (2.30)$$

cujas substituição na Eq. 2.29, resulta em

$$\begin{aligned} |\Psi(3)\rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle \otimes |3\rangle + \frac{2}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle \otimes |1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle \otimes |-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle \otimes |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle \otimes |-3\rangle \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (|\uparrow\rangle \otimes |3\rangle + (2|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |1\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |-1\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |-3\rangle). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Esse processo pode ser repetido n vezes para obter qualquer estado $|\Psi(n)\rangle$.

Observamos através dos exemplos acima, que o cálculo das amplitudes de *spin* em cada posição ao longo do tempo é um procedimento recursivo, no qual repete-se o processo de calcular as amplitudes no tempo t a partir das amplitudes obtidas anteriormente no tempo $t - 1$ pelo mesmo processo. Logo, reescrevendo a Eq. (2.6) usando a Eq. (2.8) tal que $|\Psi(t)\rangle = \hat{S}(\hat{C}(j, t) \otimes \hat{\mathbb{I}}_P) |\Psi(t - 1)\rangle$, mas agora considerando um operador moeda $C(j, t)$ (Eq. (2.14)) que pode variar no tempo e posição, as amplitudes de probabilidade $a(j, t)$ e $b(j, t)$ do estado podem ser escritas através das seguintes equações de recorrência [24],

$$\begin{aligned} a(j, t) &= c_{\uparrow\uparrow}(j - 1, t) a(j - 1, t - 1) + c_{\uparrow\downarrow}(j - 1, t) b(j - 1, t - 1), \\ b(j, t) &= c_{\downarrow\uparrow}(j + 1, t) a(j + 1, t - 1) + c_{\downarrow\downarrow}(j + 1, t) b(j + 1, t - 1), \end{aligned} \quad (2.32)$$

portanto, vemos que partindo de um estado local em $t = 0$, calculamos as amplitudes do passo $t = 1$ variando j de -1 a 1 , em seguida de -2 a 2 , ou seja, para cada passo de tempo t calculamos as posições variando de $j = -t$ até $j = t$.

2.1.4 Probabilidade e dispersão

Devido à esse caráter probabilístico intrínseco ao processo de medida em sistemas quânticos, a probabilidade tem grande importância em caminhadas quânticas, sendo imprescindível para várias análises relevantes. A distribuição das probabilidades sobre as posições para um estado $|\Psi(t)\rangle$ está atrelada às amplitudes $a(j, t)$ e $b(j, t)$, e elas podem ser obtidas a partir da projeção da função de onda do estado na base do espaço de Hilbert de posição \mathcal{H}_P , ou seja,

$$P(j, t) = |(\langle \uparrow | \otimes \langle j |) |\Psi(t)\rangle|^2 + |(\langle \downarrow | \otimes \langle j |) |\Psi(t)\rangle|^2 = |a(j, t)|^2 + |b(j, t)|^2, \quad (2.33)$$

onde vemos que o primeiro e segundo termos acima nos fornecem respectivamente as probabilidades de encontrar a partícula no estado $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ na posição j e tempo t , ou seja,

$$P_{\uparrow}(j, t) = |(\langle \uparrow | \otimes \langle j |) |\Psi(t)\rangle|^2, \quad P_{\downarrow}(j, t) = |(\langle \downarrow | \otimes \langle j |) |\Psi(t)\rangle|^2. \quad (2.34)$$

Na Tabela 2.1 obtemos a distribuição de probabilidades de uma caminhada quântica Hadamard a partir do estado $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ (Exemplo 4) usando a Eq. 2.33.

t/j	-3	-2	-1	0	1	2	3
0				1			
1			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		
2		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$	
3	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$

Tabela 2.1: Distribuição de probabilidades para os três primeiros passos em uma caminhada quântica Hadamard com uma partícula no estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ (Exemplo 4).

As informações obtidas na Tabela 2.1 nos indicam uma distribuição assimétrica de probabilidades. A Fig. 2.3 nos mostra a distribuição de probabilidades para 100 passos de uma caminhada quântica Hadamard iniciando de diferentes estados iniciais e respectivas dispersões ao longo do tempo obtidas através de simulação computacional. A partir dos estados $|\uparrow\rangle$ ou $|\downarrow\rangle$ a evolução temporal leva a uma distribuição assimétrica para direita ou para esquerda, respectivamente, diferindo do caso clássico. Entretanto, com o *qubit* inicial $|\Psi_C\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$, a distribuição será simétrica. Na caminhada quântica temos uma maior concentração de probabilidades nas regiões laterais devidos aos efeitos quânticos de interferência destrutiva, que ocorrem com maior intensidade próximo a origem. Portanto,

na caminhada quântica, em particular no caso de uma moeda fixa (que não varia no tempo e nem nas posições), a distribuição de probabilidade tem uma forte dependência com o estado inicial e moeda quântica utilizada na caminhada [3].

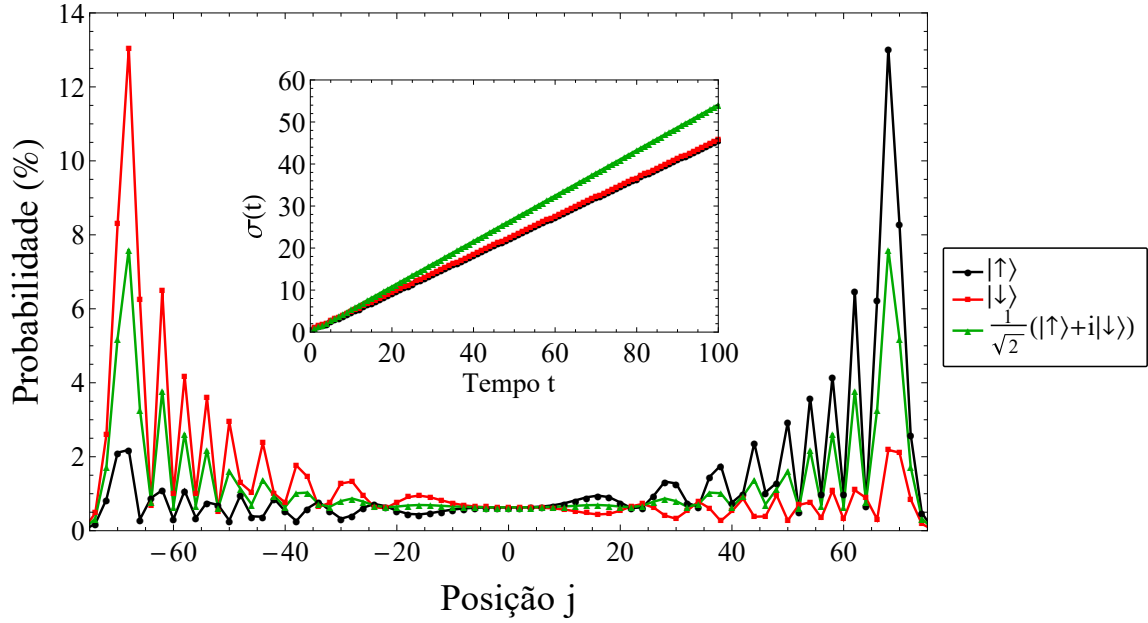


Figura 2.3: Distribuição de probabilidades $P(j)$ para uma caminhada quântica Hadamard após 100 passos de tempo, iniciando da posição $j = 0$ com os *qubits* $|\uparrow\rangle$ (círculo preto), $|\downarrow\rangle$ (quadrado vermelho) e $(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ (triângulo verde) com as respectivas dispersões $\sigma(t)$ no detalhe.

Outra característica que podemos observar através da Fig. 2.3 é a dispersão $\sigma(t)$, colocada em detalhe. Esta pode ser calculada a partir da variância, sendo escrita como a diferença entre os valores médios $\langle j^2 \rangle$ e $\langle j \rangle^2$, resultando em

$$\sigma^2(t) = \sum_j j^2 (|a(j, t)|^2 + |b(j, t)|^2) - \left(\sum_j j (|a(j, t)|^2 + |b(j, t)|^2) \right)^2. \quad (2.35)$$

Portanto, esta dispersão irá depender do passo t da caminhada e, assim como a probabilidade é calculada a partir das amplitudes de probabilidades $a(j, t)$ e $b(j, t)$.

No caso da caminhada clássica, a dispersão é dita difusiva, pois tem uma dependência dada por $\sigma(t) \propto \sqrt{t}$. No caso quântico, a dispersão será dita balística, devido a dependência $\sigma(t) \propto t$, isto é, terá um fator quadraticamente superior.

2.1.5 Emaranhamento quântico

O emaranhamento quântico (ou entrelaçamento quântico) é um tipo de correlação quântica que surge entre os graus de liberdade interno (*spin*) e externo (posição) do caminhante

quântico devido a própria dinâmica da caminhada quântica. Para determinar tal correlação em termos matemáticos, é necessário a introdução do operador densidade.

Os *estados puros* são dados pelo operador densidade $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. Quando o sistema for descrito por um *ensemble* de estados puros $|\Psi_i\rangle$ o estado é definido agora como *estado misto*, cujo operador densidade é

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|, \quad (2.36)$$

onde p_i é a probabilidade de se encontrar o sistema em um dado estado $|\Psi_i\rangle$.

Para uma caminhada quântica, os estados iniciais são puros e bipartidos, ou seja, são descritos como o produto tensorial de dois subestados $|\Psi_A\rangle$ e $|\Psi_B\rangle$ de dois subsistemas A e B , que correspondem respectivamente aos espaços de *spin* (moeda) e posição. Temos que a generalização de um estado emaranhado é descrito na forma bi-ortogonal [25]

$$|\Psi(A, B)\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle, \quad (2.37)$$

onde $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_k\rangle$ e $|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, \dots, |\beta_k\rangle$ são estados ortogonais dos subsistemas A e B respectivamente, tal que c_i são coeficientes reais e positivos.

Devido ao estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ da caminhada quântica ser puro e a evolução temporal ser unitária, ou seja, não há efeito de decoerência no sistema, o estado $|\Psi(t)\rangle$ permanecerá puro. Então, o emaranhamento será quantificado entre os dois subsistemas através da entropia de *von Neumann*, sendo definida como [25],

$$S_E = -Tr[\rho \log_2 \rho], \quad (2.38)$$

onde Tr é a função matricial *traço* que corresponde a soma dos elementos da diagonal de uma matriz. Como o estado geral da caminhada quântica é dada pela Eq. 2.9, o operador

densidade será,

$$\begin{aligned}
 \rho(t) &= |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)| \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (a(j,t) |\uparrow\rangle + b(j,t) |\downarrow\rangle) (a^*(j,t) \langle\uparrow| + b^*(j,t) \langle\downarrow|) \otimes |j\rangle \langle j| \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [|a(j,t)|^2 |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + a(j,t)b^*(j,t) |\uparrow\rangle \langle\downarrow| + a^*(j,t)b(j,t) |\downarrow\rangle \langle\uparrow| + \\
 &\quad |b(j,t)|^2 |\downarrow\rangle \langle\downarrow|] \otimes |j\rangle \langle j|. \tag{2.39}
 \end{aligned}$$

A representação matricial pode ser usada para obter os produtos entre os bras e kets, assim,

$$|\uparrow\rangle \langle\uparrow| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

$$|\uparrow\rangle \langle\downarrow| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

$$|\downarrow\rangle \langle\downarrow| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.42}$$

$$|\downarrow\rangle \langle\uparrow| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

Desta forma, a Eq. 2.39 pode ser reescrita como,

$$\rho = \begin{pmatrix} \sum_j |a(j,t)|^2 & \sum_j a(j,t)b^*(j,t) \\ \sum_j a^*(j,t)b(j,t) & \sum_j |b(j,t)|^2 \end{pmatrix} \otimes |j\rangle \langle j|. \tag{2.44}$$

O operador densidade ρ_{AB} descreve o estado para um sistema bipartido composto pelos subsistemas A e B , mas podemos obter o operador densidade reduzido em relação a A , $\rho_A \equiv Tr_B(\rho_{AB})$, sendo que Tr_B é denominado traço parcial sobre B . Por sua vez, a aplicação do traço parcial em um operador é definido por [1]

$$Tr_B(|\alpha_1\rangle \langle\alpha_2| \otimes |\beta_1\rangle \langle\beta_2|) = |\alpha_1\rangle \langle\alpha_2| Tr_B(|\beta_1\rangle \langle\beta_2|) = |\alpha_1\rangle \langle\alpha_2| \langle\beta_2|\beta_1\rangle, \tag{2.45}$$

tal que $|\alpha_1\rangle$ e $|\alpha_2\rangle$ são dois vetores quaisquer do espaço A e $|\beta_1\rangle$ e $|\beta_2\rangle$ são dois vetores

quaisquer do espaço B .

Portanto, ao realizarmos a operação do traço parcial sobre o espaço de posição no operador densidade da Eq. 2.44, obtemos o operador densidade reduzido no espaço da moeda, sendo escrito como

$$\rho_C(t) = \begin{pmatrix} \sum_j |a(j, t)|^2 & \sum_j a(j, t)b^*(j, t) \\ \sum_j a^*(j, t)b(j, t) & \sum_j |b(j, t)|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & \Gamma(t) \\ \Gamma^*(t) & B(t) \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

com $A(t) = \sum_j |a(j, t)|^2$, $B(t) = \sum_j |b(j, t)|^2$, $\Gamma(t) = \sum_j a(j, t)b^*(j, t)$ e $\Gamma^*(t) = \sum_j a^*(j, t)b(j, t)$.

Ao diagonalizarmos a matriz $\rho_C(t)$ (Eq. (2.46)),

$$\det \left[\begin{pmatrix} A(t) & \Gamma(t) \\ \Gamma^*(t) & B(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda(t) & 0 \\ 0 & \lambda(t) \end{pmatrix} \right] = 0, \quad (2.47)$$

lembrando que $A(t) + B(t) = 1$, teremos,

$$\lambda^2(t) - \lambda(t) + A(t)(1 - A(t)) - |\Gamma(t)|^2 = 0, \quad (2.48)$$

cujas soluções nos fornece os seguintes autovalores,

$$\lambda_{\pm}(t) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - A(t)(1 - A(t)) + |\Gamma(t)|^2}. \quad (2.49)$$

Por fim, a Eq. 2.38, referente à entropia de *von Neumann*, pode ser reescrita como

$$S_E(t) = -\text{Tr}[\rho_C(t) \log_2 \rho_C(t)] = -\lambda_+(t) \log_2 \lambda_+(t) - \lambda_-(t) \log_2 \lambda_-(t). \quad (2.50)$$

Desta forma, pode-se obter em qualquer instante de tempo a entropia de emaranhamento S_E do estado de uma caminhada quântica. Portanto, se o estado é dado por um produto de estados, é não-emaranhado o que implica que $S_E = 0$, se tem alguma correlação entre spin e posição, o estado é parcialmente emaranhado ($0 < S_E < 1$) ou totalmente emaranhado quando a entropia assumir o valor máximo $S_E = 1$.

Exemplo 5. Calcular o emaranhamento do estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$. Para este estado tem-se que $\sum_j |a(j, t)|^2 = 1$ e $\sum_j |b(j, t)|^2 = 0$, desta forma $A(0) = 1$ e $|\Gamma(0)|^2 = 0$,

assim, usando a Eq. 2.46 temos

$$\rho_C(0) = \begin{pmatrix} A(0) & \Gamma(0) \\ \Gamma^*(0) & B(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

que nos fornece os autovalores $\lambda_+(0) = 1$ e $\lambda_-(0) = 0$, e usando a Eq. 2.50, obtemos

$$S_E(0) = -1 \log_2(1) - 0 \log_2(0) = 0, \quad (2.52)$$

ou seja, o estado é não-emaranhado.

No Exemplo 5 vemos que as informações estão completamente definidas: o estado de *spin* é *up* e a posição é a origem ($j = 0$). Portanto, a medição de qualquer informação de um espaço de Hilbert não nos permite obter nenhuma informação do outro espaço.

Exemplo 6. Calcular o emaranhamento do estado inicial deslocalizado $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{2}[|\downarrow\rangle \otimes |-2\rangle + (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |2\rangle]$. Para este estado tem-se que $\sum_j |a(j, t)|^2 = \frac{1}{2}$, $\sum_j |b(j, t)|^2 = \frac{1}{2}$ e $\sum_j a(j, t)b^*(j, t) = \sum_j a^*(j, t)b(j, t) = \frac{1}{4}$, assim,

$$\rho_C(0) = \begin{pmatrix} A(0) & \Gamma(0) \\ \Gamma^*(0) & B(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

que nos fornece os autovalores $\lambda_+(0) = 3/4$ e $\lambda_-(0) = 1/4$, e usando a Eq. (2.50), obtemos

$$S_E(0) = -0,75 \log_2(0,75) - 0,25 \log_2(0,25) \approx 0,811278, \quad (2.54)$$

que nos indica um estado parcialmente emaranhado.

No Exemplo 6, parte do estado possui alguma correlação entre o estado interno e externo. Pode-se, por exemplo, afirmar que se medirmos $|\uparrow\rangle$ no estado de posição $j = 2$, para $j = -2$ o *spin* será $|\downarrow\rangle$. No entanto, ao medirmos na posição $j = 0$ poderemos ter ambos os estados de *spin*. Da mesma forma, se medirmos o estado $|\uparrow\rangle$ sabemos que sua posição será $j = 0$ ou 2 excluindo a posição $j = -2$ e da mesma forma, se medirmos $|\downarrow\rangle$ podemos excluir a posição $j = 2$.

Exemplo 7. Calcular o emaranhamento do estado inicial deslocalizado $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |1\rangle]$. Para este estado tem-se que $\sum_j |a(j, t)|^2 = \sum_j |b(j, t)|^2 = \frac{1}{2}$ resultando

$$\rho_C(0) = \begin{pmatrix} A(0) & \Gamma(0) \\ \Gamma^*(0) & B(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

que nos fornece os autovalores $\lambda_+(0) = \lambda_-(0) = 1/2$, e usando a Eq. (2.50), obtemos

$$S_E(0) = -0,5 \log_2(0,5) - 0,5 \log_2(0,5) = 1, \quad (2.56)$$

que nos indica um estado totalmente emaranhado.

No estado totalmente emaranhado do Exemplo 7, vemos que o estado de um espaço de Hilbert está totalmente correlacionado com o estado do outro espaço, por exemplo, se medirmos numa certa posição, saberemos qual é o *spin* do estado, e o mesmo ocorrerá caso o *spin* seja medido, saberemos qual é a posição do estado.

Resultados

O objetivo deste capítulo é estudar caminhadas quânticas com defeitos de rede tipo Fourier introduzidos em posições simétricas via simulações numéricas. Esses defeitos consistem em moedas quânticas que introduzem uma fase de $\pi/2$ entre estados de *spin* em posições simétricas da rede, enquanto todas as demais moedas são Hadamard. Primeiramente, faremos uma revisão de alguns trabalhos da literatura para abordar algumas possibilidades de defeitos de rede. Em seguida, investigaremos o acúmulo de probabilidade entre as posições dos defeitos e como esses defeitos modificam as propriedades de transporte e emaranhamento de tais caminhadas em comparação às caminhadas quânticas dirigidas por uma moeda Hadamard (caminhada Hadamard).

3.1 Defeitos de rede

Na literatura, existem alguns trabalhos que estudam caminhadas quânticas com um único defeito de rede na posição de origem ($j = 0$) do caminhante [21, 22, 26]. Nesses estudos pôde-se observar que a inserção de um único defeito de rede nessa posição pode gerar uma série de interferências construtivas, localizando parte da probabilidade da partícula na origem, no entanto, sem impedir que parte do estado não-localizado disperse balisticamente [22]. Já numa caminhada Hadamard, a probabilidade de retorno da partícula a origem, ou seja, a probabilidade de encontrá-la na posição de origem cai exponencialmente ao longo do tempo [26].

Norio Konno, por exemplo, estudou o perfil de localização de uma partícula na origem em função de um parâmetro ω da moeda, por meio de um método combinatório de contagem de caminho [26]. Ele estudou uma caminhada Hadamard com um defeito de

rede em $j = 0$ dado pela seguinte moeda,

$$\hat{C}_K = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\omega} \\ e^{-i\omega} & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

onde $\omega \in [0, 2\pi)$. Considerando que numa caminhada quântica partindo de um estado local, o caminhante só ocupará posições pares em passos de tempo também pares, pelo método combinatório do Konno, ele mostrou analiticamente tomando o tempo $t = 2n$ que o limite da probabilidade da partícula quântica retornar a origem é dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0(2n) = \left(\frac{2 - 2 \cos \omega}{3 - 2 \cos \omega} \right)^2, \quad (3.2)$$

localizando até 64% do estado na origem para $\omega = \pi$. Um dos aspectos mais interessantes do perfil de localização observado por esse tipo de defeito é que independe do *qubit* inicial. Em contrapartida, Wójcik *et al.* introduziram um outro tipo de defeito cujo perfil de localização é dependente do *qubit* inicial. Os autores introduziram uma fase global $e^{i\omega}$ a uma moeda Hadamard em $j = 0$,

$$\hat{C}_W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\omega} & e^{i\omega} \\ e^{i\omega} & -e^{i\omega} \end{pmatrix} = e^{i\omega} \hat{H}, \quad (3.3)$$

e observando a evolução da localização da partícula para estados estacionários em passos duplos, eles obtiveram tais estados a partir da resolução das equações de recorrência e analisaram a sobreposição desses estados com diferentes *qubits* iniciais. A partir de uma descrição analítica, eles obtiveram três diferentes perfis de localização determinado pelos *qubits* $|\uparrow\rangle$ e $(|\uparrow\rangle \pm i|\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$.

Por último, recentemente Teles *et al.* propuseram como defeito de fase uma moeda com características semelhantes a proposta de Wójcik *et al.*, com ambas possuindo o mesmo determinante, entretanto com a nova moeda possuindo uma fase relativa ω extra,

$$\hat{C}_T = \frac{e^{i\omega}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega} & 1 \\ 1 & -e^{i\omega} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

resultando em uma nova translação de β por ω após \hat{C}_T atuar no *qubit* [22]. No estudo comparativo, Teles *et al.* reproduziram os resultados de Konno e Wójcik e mostraram que

os resultados via simulações numéricas coincidem com os resultados analíticos de ambos autores, já na ordem de 1000 passos [22]. Devido a fase extra utilizando a moeda \hat{C}_T , os autores obtiveram cinco diferentes perfis de localização determinados pelos *qubits* $|\uparrow\rangle$, $(|\uparrow\rangle \pm i|\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ e $(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$. Entretanto, de maneira distinta das moedas abordadas anteriormente, é interessante notar que \hat{C}_T é a única moeda que permite introduzir um defeito de rede Fourier ao tomar $\omega = \pi/2$, uma vez que esse defeito não pode ser descrito por \hat{C}_K , nem pela adição de uma fase global como em \hat{C}_W [22].

Nesse trabalho, introduziremos defeitos de rede simétricos reescrevendo a moeda na Eq. 2.14, considerando $\theta(j) = \varphi(j) = \omega\delta(|j| - d)$ como,

$$\hat{C}(j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\omega\delta(|j|-d)} \\ e^{i\omega\delta(|j|-d)} & -e^{i2\omega\delta(|j|-d)} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

ou seja, se a posição da moeda for $j = \pm d$, temos que $\delta(|j| - d) = 1$ resultando em moedas \hat{C}_T nessas posições, mas se $j \neq \pm d$ implica que $\delta(|j| - d) = 0$ obtendo Hadamard nas demais posições. Portanto, vemos que utilizando essa moeda com $\omega = \pi/2$, estabelecemos caminhadas quânticas Hadamard com defeitos Fourier simétricos nas posições $j = \pm d$.

3.2 Caminhada Hadamard

Antes de iniciar o estudo com defeitos simétricos, é importante caracterizarmos alguns aspectos da caminhada Hadamard, a fim de compará-la posteriormente com as caminhadas com defeitos. Diferentemente do caso de um único defeito na origem, para defeitos simétricos devemos analisar a probabilidade acumulada ao longo do tempo para a região entre os defeitos dada por $-d \leq j \leq d$, ou seja, a presença de localização do estado para $|j| \leq d$. Para obter este perfil de probabilidade podemos reescrever a Eq. 2.33 para abranger todas estas posições,

$$\begin{aligned} P_{ac}(|j| \leq d, t) &= \sum_{j=-d}^d |(\langle \uparrow | \otimes \langle j |) |\Psi(t)\rangle|^2 + |(\langle \downarrow | \otimes \langle j |) |\Psi(t)\rangle|^2 \\ &= \sum_{j=-d}^d |a(j, t)|^2 + |b(j, t)|^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde P_{ac} é denominado probabilidade acumulada.

A Fig. 3.1 mostra o decaimento da probabilidade acumulada para os valores $d=1$ até

5. Devido a dispersão balística na caminhada Hadamard, as probabilidades acumuladas próximas a origem caem rapidamente segundo $P_{ac}(t) \sim t^{-1}$ (no detalhe) e não possuem dependência com o *qubit* inicial. No detalhe ainda é possível observar que para os diferentes valores de d , a lei de decaimento será a mesma, mudando somente o coeficiente linear entre elas.

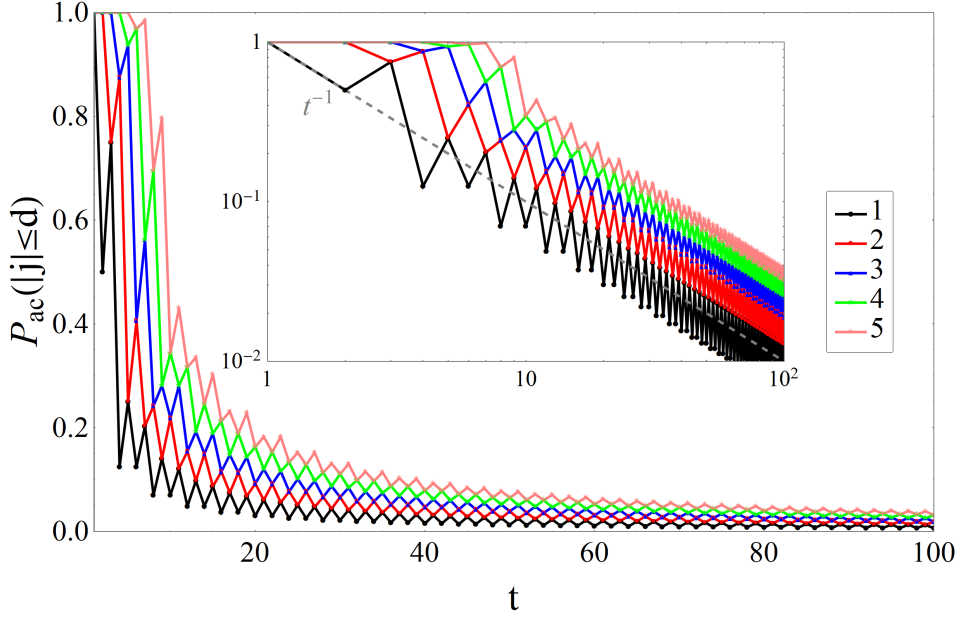


Figura 3.1: Probabilidade acumulada (P_{ac}) para uma caminhada Hadamard para valores de $d = 1$ (preto), 2 (vermelho), 3 (azul), 4 (verde) e 5 (rosa) para os primeiros 100 passos. No detalhe: em escala logarítmica comparando com a lei de potência t^{-1} (cinza).

Observamos também que entre passos de tempo adjacentes, existe uma aparente descontinuidade entre as probabilidades. Isso acontece devido a própria dinâmica da partícula quântica que partindo da posição de origem $j = 0$, ocupa posições ímpares em passos de tempo ímpares e posições pares em passos de tempo pares. Quando considerada a probabilidade acumulada entre as posições $\pm d$, o número de posições nas quais se calcula a probabilidade pode variar a cada passo. Por exemplo, assumindo que $d = 1$, a probabilidade acumulada em passos de tempo pares refere-se somente a probabilidade na posição $j = 0$ e em passos de tempo ímpares é considerada a soma das probabilidades em $j = -1$ e 1 , levando a saltos na probabilidade acumulada semelhante a um comportamento dente-de-serra.

Uma forma de avaliar o transporte da partícula em uma caminhada quântica é por meio da variância da posição. Ao considerar o efeito de localização da probabilidade ocasionada pela introdução de um defeito, pode-se esperar que o estado dispersaria menos, portanto

terá uma variância com valores inferiores ao de uma caminhada Hadamard. Sabendo que numa caminhada quântica a variância é proporcional $\sigma^2 \propto t^2$, pode-se quantificar o coeficiente de proporcionalidade a partir da razão σ^2/t^2 . A Fig. 3.2 mostra a evolução do coeficiente σ_H^2/t^2 ao longo do tempo obtido para uma caminhada Hadamard partindo de diferentes *qubits* iniciais. É possível observar que, após uma flutuação inicial, σ_H^2/t^2 tende para um valor constante alcançado um regime de longa duração em algumas centenas de passos.

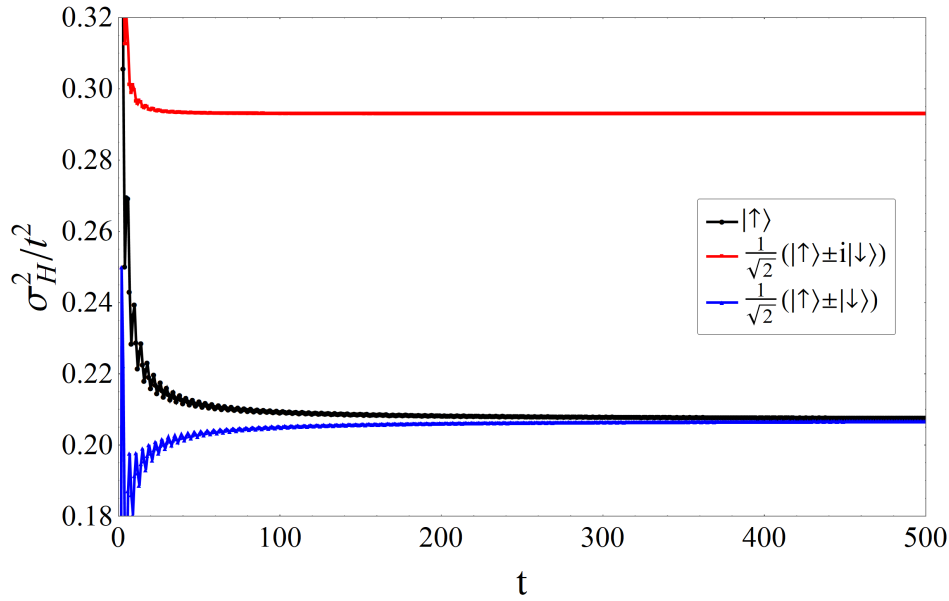


Figura 3.2: Coeficiente σ_H^2/t^2 em função do tempo para uma caminhada Hadamard com 500 passos. Os *qubits* iniciais utilizados são $|\uparrow\rangle$ (preto), $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm i|\downarrow\rangle)$ (vermelho) e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)$ (azul).

Ao observarmos a Fig. 3.2, podemos verificar que algumas curvas se superpõem, resultando em apenas dois valores para o coeficiente da variância no regime de longa duração para os cinco *qubits* diferentes analisados. Orthey *et al.* mostraram que no regime de longa duração, o coeficiente da variância irá depender somente dos ângulos polar α e azimutal β do *qubit* inicial [27], tal que, para uma moeda Hadamard

$$\sigma_H^2/t^2 = \left\{ \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) [\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\beta)]^2 \right\}, \quad (3.7)$$

Ao aplicarmos os valores de α e β de cada *qubit* na Eq. 3.7, o resultado obtido será $\sigma_H^2/t^2 \approx 0,2071$ para $|\uparrow\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$ e no valor de $\sigma_H^2/t^2 \approx 0,2929$ para $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$ conforme pode ser visto na Fig. 3.2. A partir da Eq. 3.7 é possível obter o perfil das curvas de contorno do coeficiente da variância para todos os

valores de α e β , conforme Fig. 3.3.

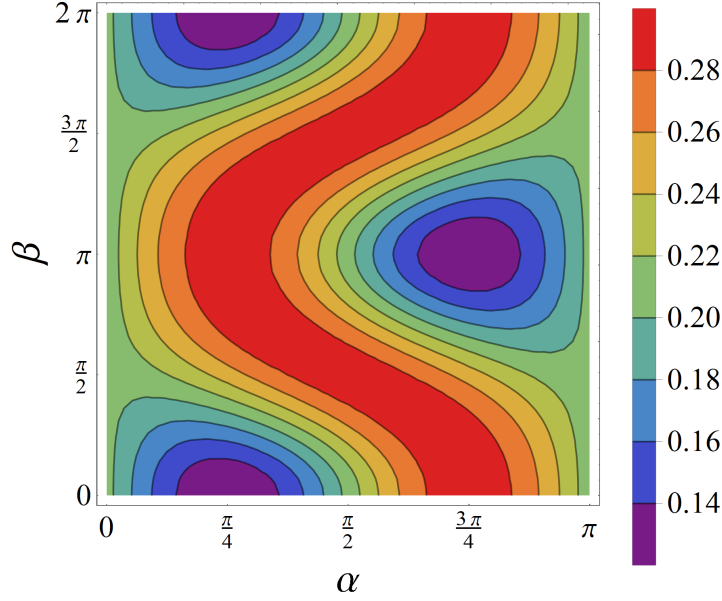


Figura 3.3: Curvas de contorno dos coeficientes da variância σ^2/t^2 no limite de longa duração numa caminhada Hadamard para $\alpha \in [0, \pi]$ e $\beta \in [0, 2\pi]$ com valores entre 0, 1213 e 0, 2929.

A evolução do emaranhamento quântico em função do *qubit* inicial para uma caminhada Hadamard é mostrado na Fig. 3.4, para os estados iniciais $|\uparrow\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm i|\downarrow\rangle)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)$, já que os *qubits* $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$, assim como, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$ possuem a mesma evolução. A Fig. 3.4 nos mostra que o emaranhamento é dependente do estado inicial do caminhante e os valores de entropia para os estados $|\uparrow\rangle$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)$ parecem não tender a um valor mesmo quando analisados para 10.000 passos. A partir disso, pode-se inferir erroneamente que para alguns *qubit* iniciais o valor do emaranhamento não irá possuir um limite assintótico para a caminhada Hadamard.

A dependência do emaranhamento em caminhadas quânticas em função do estado inicial local no limite assintótico foi analisada analiticamente no trabalho de Orthey *et al.* [28]. Neste trabalho, os autores obtiveram a equação da entropia no limite assintótico \bar{S}_E quando $t \rightarrow \infty$, em função dos ângulos polar α e azimutal β do *qubit* (tal como para a Eq. 3.7). A partir desse resultado, os autores obtiveram a superfície de emaranhamento em função dos ângulos α e β , como mostra a Fig. 3.5, cujos valores de α e β para o emaranhamento máximo ($\bar{S}_E = 1$) correspondem a $(\pi/4, \pi)$ e $(3\pi/4, 0)$ e para o emaranhamento mínimo ($\bar{S}_E \approx 0,736$) correspondem a $(3\pi/4, \pi)$ e $(\pi/4, 0)$. Para os estados em questão da Fig. 3.4, vemos que $\bar{S}_E \approx 0,872$. Desta forma, os valores oscilantes de emaranhamento observados no detalhe da Fig. 3.4 para os estados $|\uparrow\rangle$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)$ nos mostram que em

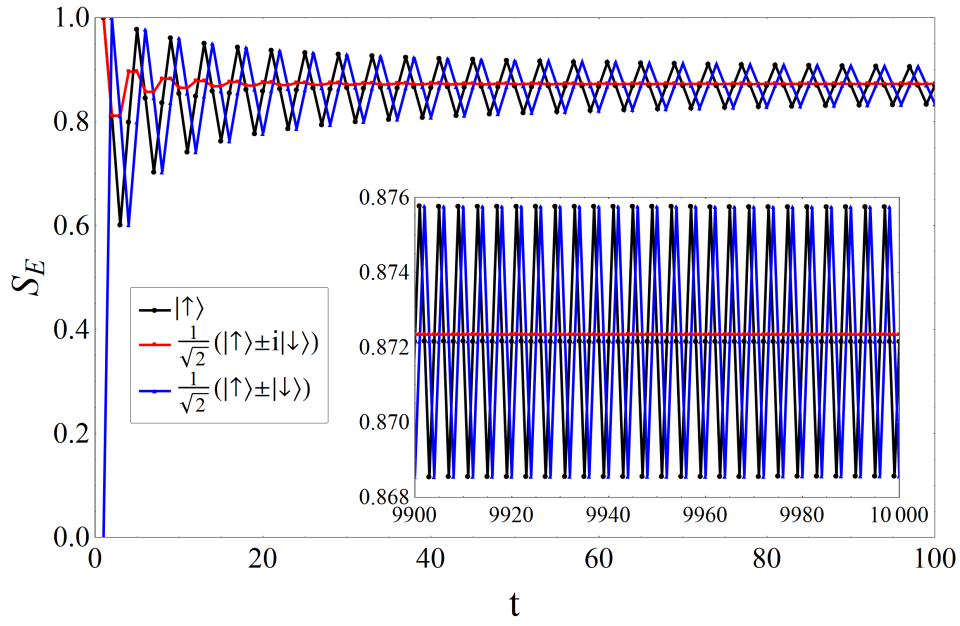


Figura 3.4: Emaranhamento S_E no tempo para uma caminhada Hadamard de 100 passos. Os *qubits* iniciais utilizados são $|\uparrow\rangle$ (preto), $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm i|\downarrow\rangle)$ (vermelho) e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)$ (azul). No detalhe: emaranhamento entre os passos 9.900 até 10.000.

10.000 obtemos uma tendência de convergência ao limite assintótico, para o qual todas as três curvas estão confluindo.

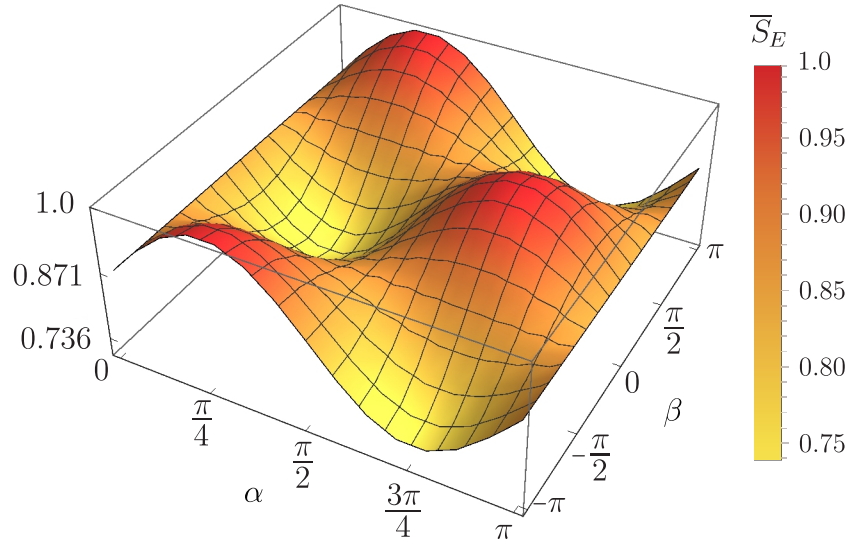


Figura 3.5: Emaranhamento assintótico \bar{S}_E em função dos ângulos polar α e azimutal β do *qubit* inicial para uma caminhada Hadamard. Temos $\alpha \in [0, \pi]$ e $\beta \in [-\pi, \pi]$. O emaranhamento varia entre $\approx 0,736$ e 1, com valor médio $\langle \bar{S}_E \rangle = 0,872$ [15].

3.3 Defeitos Fourier simétricos

Na última seção caracterizamos a caminhada Hadamard com respeito a probabilidade acumulada para $|j| \leq d$, o coeficiente de variância σ_H^2/t^2 e emaranhamento ao longo do tempo para diferentes *qubits*. Para a introdução de defeitos Fourier simétricos na caminhada quântica, definimos $\omega = \frac{\pi}{2}$ na moeda dependente da posição (Eq. 3.5). A Fig. 3.6 mostra os gráficos dos valores obtidos de probabilidade acumulada e coeficiente de variância em caminhadas com defeitos simétricos Fourier até 10000 passos, tal que $j = \pm d$ corresponde as posições dos defeitos Fourier variando de $d = 1$ até 5.

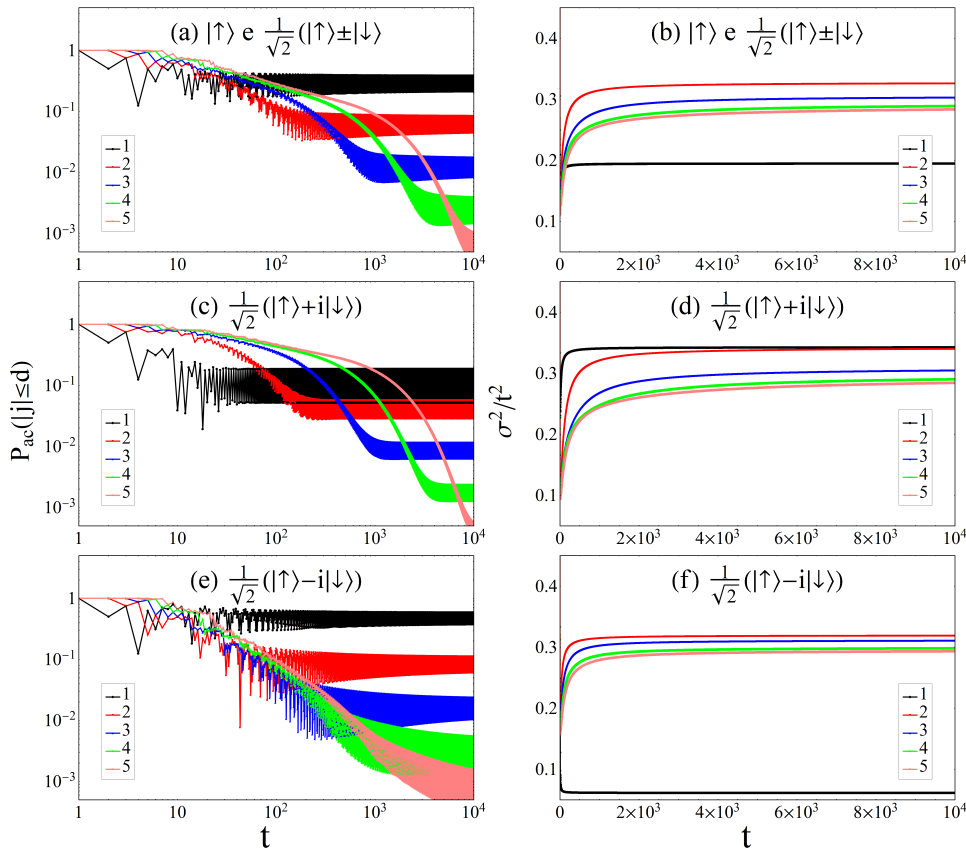


Figura 3.6: Probabilidade acumulada e coeficiente de variância para caminhadas quânticas com defeitos Fourier simétricos para $j = \pm d$ tal que $d = 1$ (preto), $d = 2$ (vermelho), $d = 3$ (azul), $d = 4$ (verde) e $d = 5$ (rosa) até $t = 10000$ passos partindo dos *qubits* iniciais (a)-(b) $|\uparrow\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)$, (c)-(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ e (e)-(f) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$. Ambos os eixos dos gráficos da probabilidade acumulada em (a), (c) e (e) estão em escala logarítmica, enquanto os eixos do coeficiente de variância em (b), (d) e (f) são lineares.

A partir da Fig. 3.6 vemos que parte do estado permanece na região entre os defeitos ($-d \leq j \leq d$) ao longo do tempo, ou seja, a probabilidade acumulada tende a um valor constante, diferindo do caso Hadamard que segue uma lei de potência dada por t^{-1} , conforme mostrado na Fig. 3.1. No entanto, vemos que quanto maior o valor de d , menor é a probabilidade acumulada. Para $d = 1$, uma parte expressiva do estado cuja

probabilidade oscila entre 5% a quase 60% (dependendo do *qubit*), permanece localizado próximo a origem, enquanto que a medida que d aumenta, a probabilidade acumulada tende para valores exponencialmente menores. Dessa forma, podemos observar que a probabilidade acumulada tem uma dependência inversamente exponencial com a posição d , logo seu valor é consideravelmente maior quanto mais próximos os defeitos Fourier simétricos encontram-se da origem. Além disso, podemos notar que o número de passos para convergência de P_{ac} também tem uma dependência com o parâmetro d , já que para $d = 1$ a probabilidade acumulada pára de cair e permanece oscilando em torno de um valor constante na ordem de dezenas de passos e, conforme d aumenta, esse comportamento ocorre em um número de passos exponencialmente maior. Portanto, mais passos são necessários para alcançar esse comportamento quanto mais distante esses defeitos se encontrarem da origem. Na caminhada Hadamard a probabilidade acumulada é independente do *qubit* inicial, já para uma caminhada com defeitos Fourier simétricos essa mesma probabilidade depende fortemente do estado inicial.

No que diz respeito ao coeficiente de variância σ_H^2/t^2 na caminhada Hadamard, como visto na Fig. 3.2, os cinco *qubits* analisados convergem ao longo do tempo para somente dois σ_H^2/t^2 distintos. Observamos um comportamento semelhante para a caminhada com defeitos Fourier: as curvas para os *qubits* $|\uparrow\rangle$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)$ se sobrepõem tanto para a probabilidade acumulada (Fig. 3.6 (a)) quanto para o coeficiente de variância (Fig. 3.6 (b)). No entanto, para os demais *qubits* $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm i|\downarrow\rangle)$, enquanto que no caso Hadamard ambos possuem o mesmo comportamento, com defeitos Fourier tanto a probabilidade acumulada quanto o coeficiente de variância bifurcam-se em dois comportamentos distintos. Em particular, quando consideramos defeitos simétricos em $d = 1$, observamos comportamentos opostos para esses dois *qubits*: para $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ temos uma pequena localização do estado entre os defeitos com alto coeficiente de variância, enquanto para $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$ temos uma localização significativa e baixa variância. A atuação da moeda Fourier nas posições $j = \pm 1$ em caminhadas partindo desses dois *qubits* com tais fases relativas, gera uma interferência destrutiva (construtiva) para a fase $\pi/2$ ($-\pi/2$) entre os defeitos ($-1 \leq j \leq 1$), enquanto que na atuação da moeda Hadamard há somente interferências destrutivas.

Um comportamento similar foi observado por Teles *et al.* ao estudar os perfis de localização da probabilidade em $j = 0$ em função do parâmetro ω (Eq. (3.4)) de um defeito

nessa mesma posição [22]. Os autores observaram que para $\omega = \pi/2$, o que implica um defeito Fourier na origem, os *qubits* $|\uparrow\rangle$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm i|\downarrow\rangle)$ possuem a mesma probabilidade na origem, enquanto o *qubit* $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ evolui para uma pequena localização e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$ para a maior localização entre todos os *qubits* considerados [22]. Neste trabalho, os autores observaram ainda que embora grande parte da probabilidade do estado esteja presa na origem para este último *qubit*, isso não impediu o restante do estado não-aprisionado de dispersar balisticamente. Isso, claramente se opõe ao comportamento de uma localização de Anderson, que ocorre quando uma partícula quântica se propaga em um meio desordenado e é caracterizado pela ausência de difusão [22], ou seja, sua variância tende para um valor constante no tempo [3, 24]. Segundo os autores, uma forma de interpretar tal defeito na origem é entendê-lo como uma barreira absorvedora, já que o que não é absorvido por tal barreira ainda se dispersa balisticamente [22].

Este raciocínio de interpretar o defeito na origem como uma barreira absorvedora, pode ser empregado no contexto de defeitos simétricos, uma vez que todos esses defeitos levam a uma localização em $|j| \leq d$, no entanto, sem impedir que parte do estado disperse balisticamente (Fig. 3.6). Entretanto, podemos distinguir dois comportamentos entre as caminhadas com tais defeitos. Para $d = 1$, temos um comportamento muito dependente do *qubit*, variando de uma pequena localização com alto coeficiente de variância até uma expressiva localização com baixa variância, como já mencionado. Já para $d > 1$ não observamos tal variação já que tanto localização quanto variância apresentam aproximadamente o mesmo comportamento para os *qubits* analisados. Para entender se essa diferença no comportamento é algo geral ou está atrelada a escolha particular de *qubits* e, a fim de comparar a variância de tais caminhadas com a caminhada Hadamard correspondente, na Fig. 3.7 mostramos as curvas de contorno para a probabilidade acumulada e a razão σ^2/σ_H^2 em função do *qubit* inicial (α e β) para o caso $d = 1$ e também, para $d = 2$ ambas calculadas após uma caminhada de 10000 passos. Note que $d = 2$ pode ser tomado como referência para $d > 1$, uma vez que as demais curvas de contorno seguem comportamentos qualitativamente similares ao caso $d = 2$ mostrado, tendo como única diferença o valor da escala na legenda na probabilidade acumulada, que são ordens de grandeza menores para os demais defeitos.

O primeiro aspecto interessante na Fig. 3.7 é que embora a intensidade da localização seja diferente ao comparar os casos (a) $d = 1$ e (c) $d = 2$, as curvas são qualitativamente

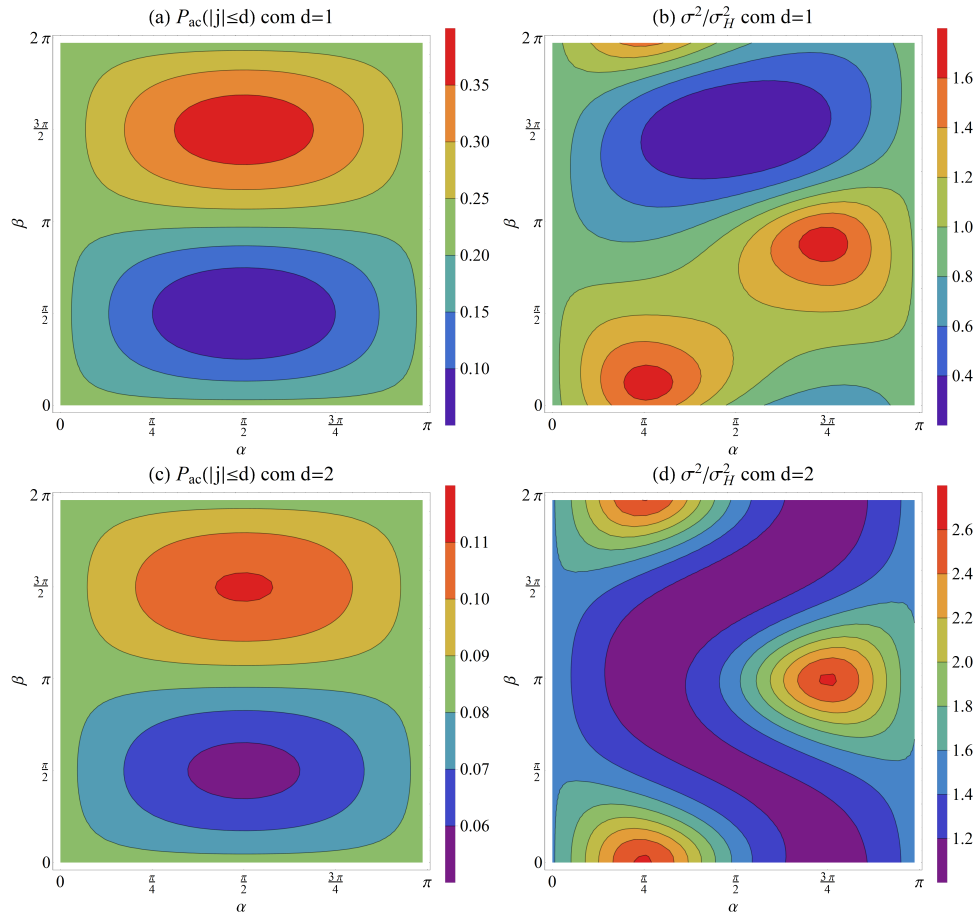


Figura 3.7: Curvas de contorno para a probabilidade acumulada e a razão entre a variância de uma caminhada com defeitos Fourier simétricos e a variância correspondente para uma caminhada Hadamard em função do *qubit* inicial, para $d = 1$ em (a) e (b) e para $d = 2$ em (c) e (d), considerando $t = 10000$ passos. O ângulo polar α varia entre $[0, \pi]$ e o ângulo azimutal β varia entre $[0, 2\pi]$ em incrementos independentes de 0,1 totalizando 2016 *qubits* iniciais.

semelhantes. Isso mostra que embora o valor da probabilidade acumulada varie conforme o *qubit* inicial, a mudança dos defeitos para posições mais afastadas da origem só reescala a intensidade dessa localização. O mesmo não dá para ser dito da razão entre as variâncias, já que as curvas para (b) $d = 1$ e (d) $d = 2$ são bem distintas. No entanto, salta aos olhos o fato de que mesmo com uma localização significativa para $d = 1$ ainda há *qubits* iniciais cuja variância é superior a da Hadamard ($\sigma^2/\sigma_H^2 > 1$) e, mais impressionante ainda, é que para $d = 2$ todos os *qubits* iniciais possuem uma variância superior a Hadamard, sendo até quase três vezes superior para alguns casos (veja exemplo na Fig. 3.8). Isso ocorre porque como o coeficiente de variância para $d = 2$ é bem elevado e aproximadamente o mesmo para qualquer *qubit*, ao confrontar os pontos de mínimo do coeficiente de variância na caminhada Hadamard na Fig. 3.3, vemos que são exatamente esses pontos que apresentaram maior aumento relativo na Fig 3.7, enquanto aqueles que correspondiam ao

máximo na Fig. 3.3, correspondem ao mínimo na Fig. 3.7 já que tiveram menor aumento relativo.

É importante salientar ainda que, na Fig. 3.7, a probabilidade acumulada oscila abruptamente de um passo para o outro, pelo mesmo motivo que leva ao comportamento dente-de-serra discutido na Fig. 3.1 referente a caminhada Hadamard. Então, por exemplo, para o *qubit* $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ que corresponde ao ponto de mínimo $(\alpha, \beta) = (\pi/2, \pi/2)$ para $d = 1$, no passo $t = 10000$ sua intensidade é de $\approx 5\%$, enquanto no passo anterior era $\approx 19\%$. A mesma coisa vale para o máximo em $(\alpha, \beta) = (\pi/2, 3\pi/2)$, correspondendo ao *qubit* $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$, tal que a intensidade é $\approx 38\%$ em $t = 10000$ e no anterior era $\approx 58\%$. Por último, cabe mencionar que embora a razão σ^2/σ_H^2 para o caso $d = 2$ seja qualitativamente similar aos demais defeitos com $d > 2$, esse caso ainda possui em média uma variância 14% superior ao caso $d = 5$, portanto a caminhada com defeitos simétricos em $j = \pm 2$ trata-se do melhor caso em termos de propriedades de transporte, porque embora localize uma fração considerável do estado, a parte não-localizada dispersa notavelmente melhor que os demais casos, sendo superior inclusive à caminhada Hadamard.

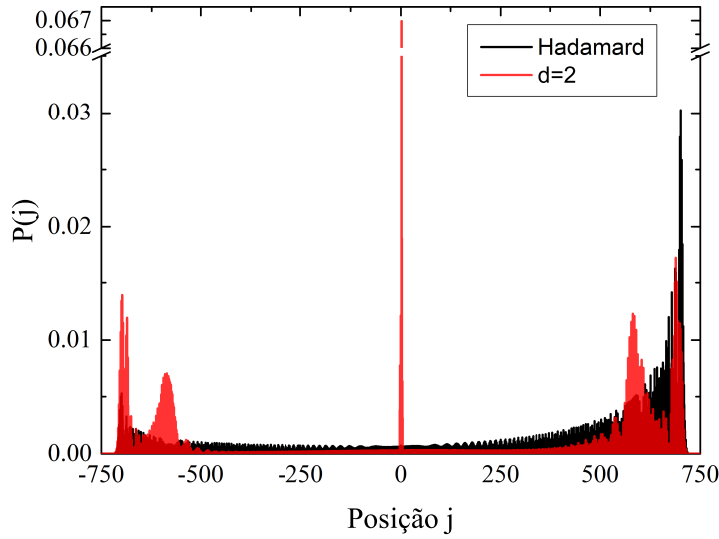


Figura 3.8: Distribuição de probabilidade comparando a caminhada Hadamard (preto) com a caminhada quântica com defeitos Fourier simétricos para $j = \pm d$ tal que $d = 2$ (vermelho) partindo do *qubit* inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$. Neste caso, $\sigma^2/\sigma_H^2 \approx 2,6$.

A Fig. 3.9 mostra o emaranhamento em função do tempo para caminhadas quânticas com defeitos Fourier simétricos, respectivamente, com $d = 1$ até 5. Podemos observar que o emaranhamento também irá depender do *qubit* inicial e que, a medida que d aumenta, vemos oscilações cada vez menores em torno dos seus respectivos prováveis limites assintóticos \bar{S}_E . Repare que, para o caso $d = 1$, o *qubit* $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ que corresponde ao

maior coeficiente de variância e menor localização (Fig. 3.6 (c) e (d)) é também o mesmo *qubit* que leva à entropia de emaranhamento mais expressiva com menor oscilação. Por outro lado, o *qubit* $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$ que corresponde ao menor coeficiente de variância e maior localização (Fig. 3.6 (e) e (f)), é o que tem menor emaranhamento e evolui com uma alta amplitude de oscilação. Para os demais casos $d > 1$, observamos que os *qubits* $|\uparrow\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$ exibem comportamento similar e parecem convergir para o mesmo valor (ou valores bem próximos) com $\bar{S}_E > 0,98$, enquanto os *qubits* $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$ também exibem o mesmo comportamento, sobretudo na medida que d aumenta, e parecem convergir para $\bar{S}_E \approx 0,87$ como é possível ver nos detalhes da Fig. 3.9. Isto indica que existe um limite assintótico \bar{S}_E tal como no caso Hadamard para esses *qubits*, mas com valores de entropia de emaranhamento superiores aos da caminhada Hadamard apresentados na Fig. 3.4 em pelo menos três deles.

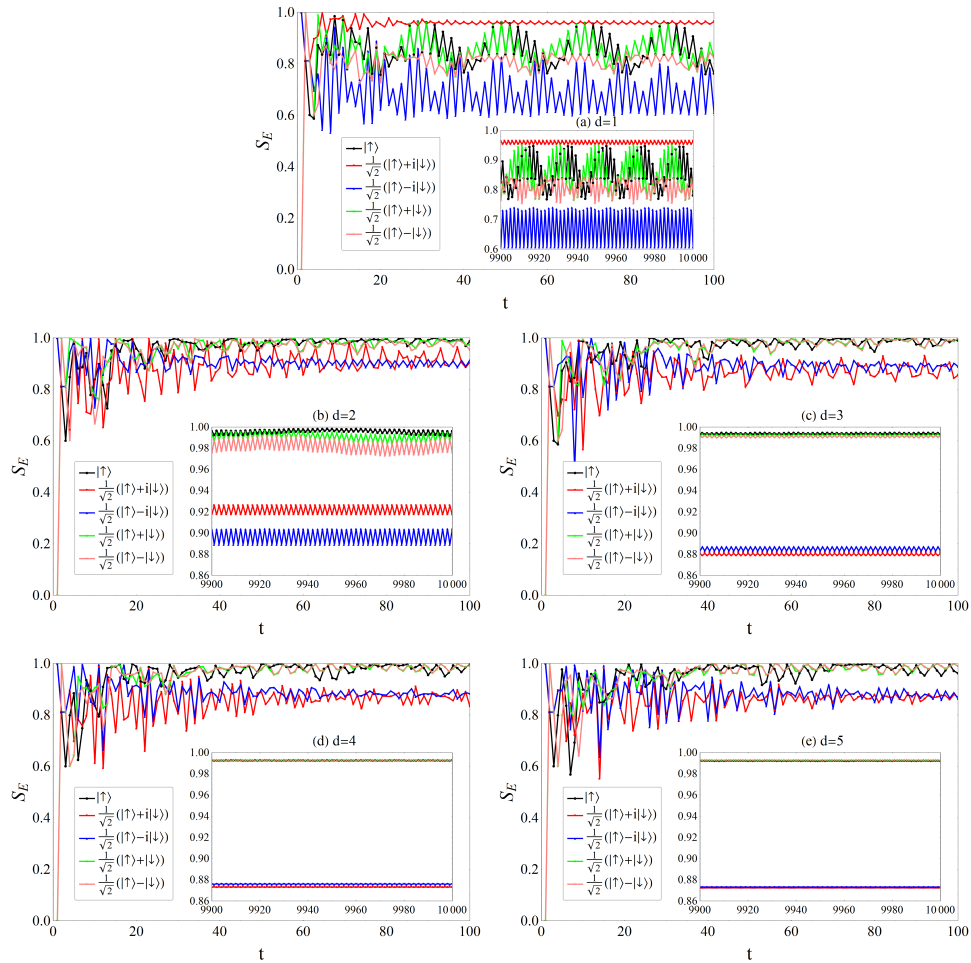


Figura 3.9: Emaranhamento em função do tempo com defeitos Fourier simétricos com (a) $d = 1$, (b) $d = 2$, (c) $d = 3$, (d) $d = 4$ e (e) $d = 5$ para uma caminhada de 100 passos. Os *qubits* iniciais utilizados são $|\uparrow\rangle$ (preto), $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ (vermelho), $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$ (azul), $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ (verde) e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$ (rosa). No detalhe: emaranhamento entre os passos 9.900 até 10.000.

Quando comparamos o emaranhamento da caminhada com defeitos Fourier simétricos (Fig. 3.9) ao emaranhamento da caminhada Hadamard partindo dos mesmos *qubits*, observamos que em pelo menos três deles, há uma expressiva melhora no emaranhamento. No entanto, é preciso verificar se isso é uma coincidência com relação aos *qubits* analisados, ou se é de fato, um comportamento geral. Para tanto, na Fig. 3.10, apresentamos a curva de superfície de emaranhamento após uma caminhada de 10000 passos para o caso $d = 5$, já que esse foi o caso que mostrou a menor oscilação em torno do provável limite assintótico \bar{S}_E . O valor mínimo do emaranhamento nesse caso $S_E \approx 0,873$ e a média entre todos os *qubits* analisados, $\langle S_E \rangle = 0,963$ são ambos muito superiores ao valor mínimo assintótico $\bar{S}_E = 0,736$ e a respectiva média $\langle \bar{S}_E \rangle = 0,872$ da caminhada Hadamard (Fig. 3.5) e também de uma caminhada dirigida por uma moeda Fourier [28]. É importante mencionar

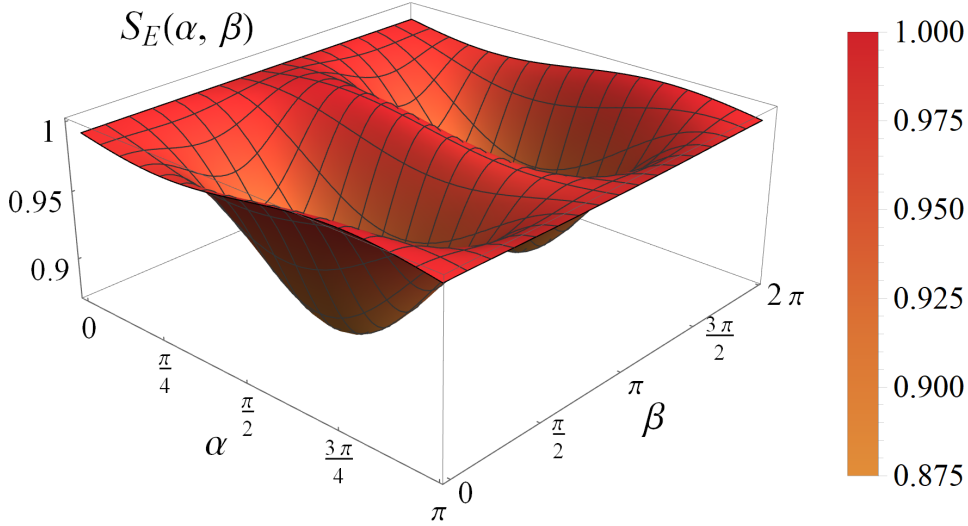


Figura 3.10: Superfície de emaranhamento de uma caminhada com defeitos Fourier simétricos com $d = 5$ em função do *qubit* inicial, considerando $t = 10000$ passos. O ângulo polar α varia entre $[0, \pi]$ e o ângulo azimutal β varia entre $[0, 2\pi]$ em incrementos independentes de 0,1 totalizando 2016 *qubits* iniciais.

que é possível controlar o coeficiente de variância e o emaranhamento de uma caminhada quântica através do parâmetro q de enviesamento da moeda. A moeda justa com $q = 1/2$ comporta-se em cada posição j , como um centro espalhador transmitindo $|\uparrow\rangle$ para $j + 1$ e refletindo $|\downarrow\rangle$ com mesma probabilidade [27]. Agora, por exemplo, ao tomarmos $q = 0$, temos que a moeda quântica será uma σ_x (porta NOT) que faz com que a amplitude $|\uparrow\rangle$ indo para direita seja totalmente refletida para à esquerda como amplitude $|\downarrow\rangle$ e vice-versa, causando a localização do estado. Já para $q = 1$, temos que a moeda quântica será uma σ_z que faz com que a amplitude $|\uparrow\rangle$ seja totalmente transmitida para a direita e a amplitude $|\downarrow\rangle$ para a esquerda, separando espacialmente $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, conseqüentemente,

levando a ausência de superposição entre estados de moeda. Logo, numa caminhada cujo *qubit* inicial é $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ (por exemplo), a medida que consideramos q cada vez mais próximo de 1, tanto o coeficiente de variância quanto emaranhamento aumentam, mas às custas da diminuição da superposição entre estados de moeda.

Portanto, como vimos, a presença dos defeitos Fourier simétricos numa caminhada quântica para $d > 1$ aumenta tanto o coeficiente de variância quanto emaranhamento em comparação com a caminhada Hadamard para o mesmo *qubit* inicial, no entanto, sem abirmos mão de manter uma superposição igualitária entre estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, uma vez que tanto a moeda Hadamard quanto Fourier são ambas moedas justas.

Conclusões

A proposta inicial deste trabalho era realizar caminhadas quânticas com defeitos Fourier simétricos em cinco posições próximas à origem ($j = \pm d$, tal que $d = 1$ até 5), com o intuito de estudar três propriedades de tais caminhadas: a probabilidade acumulada P_{ac} entre os defeitos, coeficiente σ^2/t^2 da variância de posição e emaranhamento S_E entre *spin* e posição do estado, confrontando-as com uma caminhada dirigida por uma moeda Hadamard (caminhada Hadamard). A fim de verificar como essas propriedades evoluem ao longo do tempo, foram estudados cinco *qubits* iniciais partindo da posição $j = 0$: $|\uparrow\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm i|\downarrow\rangle)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)$. Como essas propriedades atingem um regime de longa duração (estável) após um número considerável de passos, para determinar a dependência com o *qubit* inicial, elas foram calculadas neste limite para 2016 *qubits* iniciais e comparadas com os respectivos valores de uma caminhada Hadamard no limite assintótico obtidos a partir da literatura [15, 27, 28].

A partir da probabilidade acumulada P_{ac} observamos que parte do estado do caminhante localizava-se na região entre os defeitos e, para $d = 1$ essa localização mostrou possuir uma forte dependência em relação ao *qubit* inicial. Para esse caso, enquanto o *qubit* $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ exibia uma fraca localização e alto coeficiente de variância, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$ mostrava uma forte localização e baixo coeficiente de variância, enquanto que para os demais *qubits* tínhamos uma situação intermediária entre esses dois casos. Para $d > 1$, essa dependência em relação ao *qubit* inicial mostrou-se menos significativa. Em todos os casos analisados, observamos que após um determinado número de passos, a P_{ac} evolui para um valor constante (regime estável). Tanto o valor da P_{ac} quanto o número de passos para atingir tal regime possuíam dependência exponencial com a posição d do defeito,

portanto, quanto mais próximos os defeitos estavam da origem, maior parte do estado era aprisionado e mais rapidamente a P_{ac} convergia para um valor constante.

Em relação ao transporte da partícula quântica, a comparação entre a caminhada com defeitos simétricos e a caminhada Hadamard foi realizada através da razão entre os coeficientes de variância de ambas caminhadas σ^2/σ_H^2 . Para $d = 1$, observou-se que somente para poucos *qubits* iniciais obtivemos valores do coeficiente de variância superior à caminhada Hadamard. Já a caminhada com $d = 2$ se mostrou a mais relevante, resultando em $\sigma^2/\sigma_H^2 \geq 2,6$ para alguns *qubits* iniciais. Para $d > 2$, vemos comportamento similar embora com coeficientes menos expressivos do que os obtidos para $d = 2$, porém, vale ressaltar que os valores de P_{ac} , são menores quanto mais distante os defeitos se encontram da origem. Ao comparar esses resultados de transporte com a P_{ac} , podemos através de uma escolha apropriada do *qubit* inicial, otimizar o transporte da partícula minimizando a parte do estado que permanece aprisionado (localizado), logo ao escolher α , β e d é possível controlar tanto a localização quanto o transporte da partícula quântica.

Quanto ao emaranhamento, vimos que de uma maneira geral para $d > 1$ todos os cinco *qubits* analisados obtiveram resultados próximos ou bem superiores ao emaranhamento no limite assintótico $\bar{S}_E = 0,872$ de uma caminhada Hadamard. Ao mapear numa superfície o emaranhamento de todos os *qubits* para o caso que apresentou menor oscilação no regime de longa duração ($d = 5$) obtivemos que o valor mínimo do emaranhamento nesse caso $S_E \approx 0,873$ e a média entre todos os *qubits* analisados, $\langle S_E \rangle = 0,963$ são bem superiores ao valor mínimo assintótico $\bar{S}_E = 0,736$ e a respectiva média $\langle \bar{S}_E \rangle = 0,872$ numa caminhada Hadamard. Cabe enfatizar que embora seja possível controlar as propriedades de transporte e emaranhamento de uma partícula quântica através de uma caminhada cujo parâmetro de enviesamento da moeda quântica seja $q > 1/2$, isso ocorre às custas de uma menor superposição entre os estados de moeda $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$. Portanto essa estratégia de melhorar o transporte e emaranhamento através da inserção de defeitos simétricos, preserva uma superposição igualitária entre esses estados, uma vez que tanto a moeda Hadamard quanto a Fourier (defeitos) são moedas justas.

Por último, considerando todos os resultados alcançados, uma possível extensão desse trabalho seria analisar as mesmas propriedades para outros tipos de defeitos simétricos, em particular para entender com mais profundidade qual o papel desempenhado pela fase relativa imposta pela moeda dos defeitos em tais caminhadas.

Bibliografia

- ¹M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2010).
- ²I. S. Oliveira et al., «Computação quântica», *Ciência Hoje* **193**, 22–29 (2013).
- ³R. Vieira et al., «Emaranhamento em caminhadas quânticas desordenadas», (2014).
- ⁴S. E. Venegas-Andraca, «Quantum walks: a comprehensive review», *Quantum Information Processing* **11**, 1015–1106 (2012).
- ⁵K. Pearson, «The problem of the random walk», *Nature* **72**, 295 (1905).
- ⁶L. Mlodinow, *O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas* (Zahar, 2009).
- ⁷S. Hoshino e K. Ichida, «Solution of partial differential equations by a modified random walk», *Numerische Mathematik* **18**, 61–72 (1971).
- ⁸D. Ceperley e B. Alder, «Quantum monte carlo», *Science* **231** (1971).
- ⁹A. B. Berg, «Locating global minima in optimization problems by a random-cost approach», *Nature* **361**, 708–710 (1993).
- ¹⁰J. Scholl e E. Scholl-Paschinger, «Classification by restricted random walks», *Pattern Recognition* **36**, 1279–1290 (2003).
- ¹¹C. Anteneodo e W. Morgado, «Critical scaling in standard biased random walks», *Phys. Rev. Lett.* **99**, 180602 (2007).
- ¹²J. Kempe, «Quantum random walks: an introductory overview», *Contemporary Physics* **44**, 307–327 (2003).
- ¹³H. S. Ghizoni, «Caminhadas quânticas troianas», (2019).
- ¹⁴S. R. Salinas, *Introdução a física estatística vol. 09* (Edusp, 1997).
- ¹⁵A. C. Orthey Jr, «Caminhadas quânticas a partir de estados deslocalizados», (2018).
- ¹⁶F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics* (Waveland Press, 2009).
- ¹⁷Y. Aharonov, L. Davidovich e N. Zagury, «Quantum random walks», *Physical Review A* **48**, 1687 (1993).
- ¹⁸A. Maciel de S, «Localização e emaranhamento em caminhadas quânticas com defeito de fase», (2020).
- ¹⁹G. E. M. Cabral, A. F. d. Lima e B. Lula Jr, «Interpretando o algoritmo de Deutsch no interferômetro de Mach-Zehnder», *Revista Brasileira de Ensino de Física* **26**, 109–116 (2004).

- ²⁰W. Heisenberg, *Physics and philosophy: the revolution in modern science* (Penguin Books, 1958).
- ²¹A. Wójcik et al., «Trapping a particle of a quantum walk on the line», *Physical Review A* **85**, 012329 (2012).
- ²²L. I. d. S. Teles, «Localização em caminhadas quânticas com um unico defeito em rede», (2021).
- ²³R. Vieira, E. P. Amorim e G. Rigolin, «Dynamically disordered quantum walk as a maximal entanglement generator», *Physical review letters* **111**, 180503 (2013).
- ²⁴R. Vieira, E. P. Amorim e G. Rigolin, «Entangling power of disordered quantum walks», *Physical Review A* **89**, 042307 (2014).
- ²⁵C. H. Bennett et al., «Concentrating partial entanglement by local operations», *Physical Review A* **53**, 2046 (1996).
- ²⁶N. Konno, «Localization of an inhomogeneous discrete-time quantum walk on the line», arXiv preprint arXiv:0908.2213 (2009).
- ²⁷A. C. Orthey Jr e E. P. Amorim, «Connecting velocity and entanglement in quantum walks», *Physical Review A* **99**, 032320 (2019).
- ²⁸A. C. Orthey Jr e E. P. Amorim, «Assumptotic entanglement in quantum walks from delocalized initial states», 224 (2017).