

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIA TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – PPGF**

REINALDO FRANCENER

**FOTOPRODUÇÃO DE ESTADOS LIGADOS DE LÉPTONS EM COLISORES
HADRÔNICOS**

JOINVILLE

2022

REINALDO FRANCENER

**FOTOPRODUÇÃO DE ESTADOS LIGADOS DE LÉPTONS EM COLISORES
HADRÔNICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Bruno Duarte da Silva Moreira

**JOINVILLE
2022**

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Francener, Reinaldo
Fotoprodução de estados ligados de léptons em colisões
hadrônicas / Reinaldo Francener. -- 2022.
117 p.

Orientador: Bruno Duarte da Silva Moreira
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Física, Joinville, 2022.

1. Estados Ligados de Léptons. 2. Colisões Ultraperiféricas. 3.
Fotoprodução. 4. Eletrodinâmica Quântica. 5. Correção
Coulombiana. I. Moreira, Bruno Duarte da Silva. II. Universidade
do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,
Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

REINALDO FRANCENER

**FOTOPRODUÇÃO DE ESTADOS LIGADOS DE LÉPTONS EM COLISORES
HADRÔNICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Bruno Duarte da Silva Moreira

BANCA EXAMINADORA:

Bruno Duarte da Silva Moreira, Dr.
Universidade do Estado de Santa Catarina (presidente/orientador)

Membros:

Julio César Sagás, Dr.
Universidade do Estado de Santa Catarina

Mauricio Thiel, Dr.
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Joinville, 11 de fevereiro de 2022

Dedico este trabalho a todos que de alguma forma contribuíram em sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Bruno Duarte da Silva Moreira, por aceitar me orientar, pelo conhecimento compartilhado durante o curso, pela paciência, pela disciplina ministrada, por me permitir fazer o estágio obrigatório em suas aulas, por me proporcionar todo o suporte necessário para o desenvolvimento deste trabalho e por sempre se colocar à disposição para ajudar e tirar dúvidas.

Agradeço ao professor Victor Paulo Barros Gonçalves, pelas contribuições e colaboração neste trabalho, pelas preciosas dicas dadas e por todo o conhecimento compartilhado.

Agradeço ao meu amigo e colega de curso Fabiano Severino Gomes Júnior, por ter sofrido junto comigo nas disciplinas, por ter sido minha fonte de consulta em muitos momentos e pelo companheirismo de sempre.

Agradeço também aos meus professores de graduação, pela motivação e inspiração para proseguir nos estudos. Sobretudo ao professor Antônio João Fidélis, pelo apartamento emprestado, embora a estadia em Joinville tenha durado apenas um mês, em virtude da pandemia de COVID-19.

Quero também deixar os meus agradecimentos aos professores Paulo César Rech, Holokx Abreu Albuquerque, Julio César Sagás e Edgard Pacheco Moreira Amorim, por ensinarem com grande empenho mesmo com os desafios de aulas virtuais.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Física da Udesc, por proporcionar ótimas condições aos alunos. Sobretudo ao coordenador Julio César Sagás e ao Sidnei Otero, pelo suporte prestado sempre que precisei.

Agradeço à minha família, por estar presente durante todo este processo.

Por fim, agradeço à FAPESC pelo suporte financeiro.

“Sem saber que era impossível, foi lá e
soube.” (Autor desconhecido)

RESUMO

Estados ligados de léptons podem ser um excelente teste de propriedades fundamentais da Eletrodinâmica Quântica, além de apresentar-se como uma alternativa à busca de física além do Modelo Padrão. Neste trabalho analisamos a fotoprodução de estados ligados de léptons em colisões de hadrons em altas energias. Nosso interesse são as colisões ultraperiféricas, caracterizadas por ter o parâmetro de impacto maior que a soma dos raios dos hadrons colidentes. Nesta classe de colisões as interações fortes são suprimidas, logo, os *backgrounds* são reduzidos. Para a análise das colisões hadrônicas, utilizamos o formalismo da aproximação de fótons equivalentes e as seções de choque mais elementares: fóton-fóton e fóton-hádron. Utilizamos o fluxo de fótons equivalentes com fatores de forma mais acurados, e mostramos que são indispensáveis para previsões realistas. Em colisões que envolvem núcleos pesados, estimamos os efeitos de mais altas ordens da QED na produção de estados singletos de positrônio. Estes efeitos, chamados de correções coulombianas, mostram-se de impacto significativo. Construímos diferentes distribuições para a produção destes estados nos principais colisores, em especial, distribuições de rapidez. Também estimamos as taxas de produção totais e com cortes em rapidez. Atualizamos as previsões para produção de positrônio e muônio presentes na literatura e construímos, de forma inédita, previsões para o tauônio.

Palavras-chave: Estados Ligados de Léptons; Colisões Ultraperiféricas; Fotoprodução; Eletrodinâmica Quântica; Correção Coulombiana.

ABSTRACT

Lepton bound states can be an excellent test of fundamental properties of Quantum Electrodynamics, in addition to presenting itself as an alternative to the search for Beyond the Standard Model Physics. In this work we analyze the photoproduction of lepton bound states in high energy hadron collisions. We are interested in ultraperipheral collisions, characterized to have the impact parameter greater than the sum of the radii of colliding hadrons. In this class of collisions the strong interactions are suppressed, so the backgrounds are reduced. For the analysis of hadronic collisions, we used the formalism of the equivalent photon approximation and the most elementary cross sections: photon-photon and photon-hadron. We use the equivalent photon flux with more accurate form factors, and we have shown that they are indispensable for realistic predictions. In collisions that involve heavy ions, we estimate the effects of higher orders of QED the production of singlet states of positronium. These effects, called Coulomb corrections, show themselves of significant impact. We build different distributions to production of these states in the main colliders, in particular, rapidity distributions. We also estimate the total production rates and rapidity cuts. We update predictions for the production of positronium and muonium present in the literature and we build, in an unprecedented way, predictions for tauonium.

Keywords: Lepton Bound States; Ultraperipheral Collisions; Photoproduction; Quantum Electrodynamics; Coulomb Corrections.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Modelo Padrão da Física de Partículas.	21
Figura 2.2 – Estados de spin possíveis para estados ligados de léptons. (a) Estado singuleto, (b) estado triplo.	25
Figura 2.3 – Aniquilação de estados ligados de léptons em dois fótons.	26
Figura 2.4 – Produção de estado ligado de léptons pela fusão de dois fótons.	28
Figura 2.5 – Comportamento da seção de choque de Breit-Wigner para a produção de parapositrônio.	32
Figura 2.6 – Fotoprodução de estados ligados de léptons em núcleos.	33
Figura 3.1 – Classes de colisões de hadrons.	36
Figura 3.2 – Aproximação de fótons equivalentes.	37
Figura 3.3 – Movimento relativo de dois referenciais inerciais.	38
Figura 3.4 – Campo eletromagnético de uma carga pontual q na origem do referencial S' visto de S	40
Figura 3.5 – Pulses de radiação devido ao movimento da carga q ao longo do eixo z	41
Figura 3.6 – Interação de uma partícula com quadrimomento inicial q com uma partícula de quadrimomento inicial p	45
Figura 3.7 – Interação de uma partícula com quadrimomento inicial q com um fóton real de quadrimomento k	45
Figura 3.8 – Comportamento dos fatores de forma com o quadrimomento transferido.	55
Figura 3.9 – Fluxo de fótons em função das distâncias dos centros dos hadrons para diferentes fatores de forma.	55
Figura 3.10–Fluxo de fótons em função da energia para diferentes fatores de forma nuclear.	56
Figura 3.11–Comparação entre os fluxos de dipolo e pontual para prótons em função da distância do centro do próton.	57
Figura 3.12–Diagrama da colisão de dois hadrons.	58
Figura 3.13–Correção de absorção da função degrau em função do parâmetro de impacto para colisões de chumbo.	58
Figura 4.1 – Diagrama para a produção de estados ligados singletos de léptons pela fusão de dois fótons.	61
Figura 4.2 – Diagrama para a produção de estados ligados tripletos de léptons pela fusão de três fótons.	61
Figura 4.3 – Diagrama para a produção de estados ligados singletos de léptons em colisões de hadrons pela interação de muitos fótons.	68
Figura 5.1 – Distribuições de rapidez para a produção de (a) parapositrônio, (b) paramuônio e (c) paratauônio em colisões PbPb com energia do LHC utilizando diferentes seções de choque fóton-fóton.	72

Figura 5.2 – Distribuições de rapidez para a produção de (a) parapositrônio, (b) paramuônio e (c) paratauônio em colisões PbPb com energia do LHC e utilizando diferentes fatores de forma nuclear.	73
Figura 5.3 – Distribuições de rapidez para a produção de (a) parapositrônio, (b) paramuônio e (c) paratauônio em colisões PbPb com energia do LHC, com e sem o fator de supressão da função degrau.	74
Figura 5.4 – Distribuições na energia de um dos fôtons para a produção de (a) parapositrônio, (b) paramuônio e (c) paratauônio em colisões PbPb com energia do LHC e do FCC.	75
Figura 5.5 – Distribuições espaciais para a produção de diferentes sabores de estados ligados de léptons em colisões PbPb com energia do LHC.	76
Figura 5.6 – Distribuições no parâmetro de impacto para a produção de (a) parapositrônio, (b) paramuônio e (c) paratauônio em colisões PbPb com energia do LHC.	78
Figura 5.7 – Distribuições de rapidez para a produção de estados ligados singletos de léptons por dois fôtons em colisões AA (linha superior), pPb (linha intermediária) e pp (linha inferior).	79
Figura 5.8 – Distribuições de rapidez (a, c) a nível de Born, (b, d) com correções coulombianas e (e, f) comparações entre Nível de Born e com correções coulombianas.	81
Figura 5.9 – Cortes experimentais em rapidez adotados no (a) RHIC e no (b) LHC para detecção de elétrons, pósitrons e fôtons.	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Seção de choque total em fb (Taxa de eventos por ano) para a produção de estados ligados de léptons singletos e tripletos em colisões pp, pA e AA.	83
Tabela 5.2 – Luminosidades utilizadas para obtenção das taxas de produção (integradas por tempo de execução do experimento).	84
Tabela 5.3 – Seção de choque (em fb) para a produção de estados ligados de léptons singletos a nível de Born em colisões pp, pA e AA considerando ranges de rapidez central e frontal.	85
Tabela 5.4 – Seção de choque em fb (Taxa de eventos por ano) para a produção de parapositrônio incluindo estimativas de correções coulombianas.	85

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ATLAS	<i>A Toroidal LHC ApparatuS</i>
CERN	<i>Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire</i>
CCT	Centro de Ciências Tecnológicas
CMS	<i>The Compact Muon Solenoid</i>
FCC	<i>Future Circular Collider</i>
LHC	<i>Large Hadron Collider</i>
LHCb	<i>Large Hadron Collider beauty</i>
MIT	<i>Massachusetts Institute of Technology</i>
MP	Modelo Padrão
QCD	<i>Quantum Chromodynamics</i>
QED	<i>Quantum Eletrodynamics</i>
QFD	<i>Quantum Flavourdynamics</i>
RHIC	<i>Relativistic Heavy Ion Collider</i>
Udesc	Universidade do Estado de Santa Catarina

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{L}	Lagrangiana
i	Imaginário puro
γ^μ	Matriz de Dirac
∂_μ	Derivada quadridimensional
ψ	Função de onda
$F^{\mu\nu}$	Tensor de campo eletromagnético
t	Tempo
S_{fi}	Elemento de matriz de espalhamento
$\delta(\dots)$	Função delta de Dirac
\mathcal{M}_{fi}	Elemento de matriz de amplitude de espalhamento
Σ	Somatório
Π	Produtório
E	Energia
p	Quadrimomento de partículas com massa
π	Número pi
σ	Seção de choque
m	Massa
$u(p), v(p)$	Spinores de partícula e antipartícula
$\bar{u}(p), \bar{v}(p)$	Spinores adjuntos de partícula e de antipartícula
$\varepsilon_\mu(p)$	Quadripolarização de bósons
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico do espaço de Minkowski
q	Carga, Quadrimomento de fótons
l	Lépton
e	Elétron, carga elementar
μ	Múon
τ	Tau, tempo de vida
C	Conjugação de carga
P	Paridade
s	Spin
Γ_{fi}	Largura de decaimento

ω	Energia de fótons
\vec{k}	Momento de fótons
k	Quadrimomento de fótons
M	Massa de estado ligados de léptons
γ	Fóton
c	Velocidade da luz no vácuo
$\Theta(\dots)$	Função degrau
W	Massa invariante
b	Parâmetro de impacto
z	Eixo de colisão
R	Raio
Λ_{ν}^{μ}	Matriz de transformação de Lorentz
\vec{E}	Campo elétrico
\vec{B}	Campo magnético
$n(\omega)$	Fluxo de fótons independente da distância transversa
\vec{r}	distância
v	Velocidade
$I(\omega, r), P_n$	Pulsos de radiação
$N(\omega, r)$	Fluxo de fótons dependente da distância transversa
K_0, K_1	Funções de Bessel modificadas
Q^2	Virtualidade de fótons
j^{μ}	Quadricorrente
$Tr(\dots)$	Traço de uma matriz
α	Constante de estrutura fina
$F(q^2)$	Fator de forma hadrônico
$\rho(\vec{r})$	Densidade espacial de cargas
Z	Número atômico
ϕ	Ângulo polar
h	Hádron
A	Núcleo, número de massa
S_{abs}^2	Fator de supressão de interações fortes

Y	Rapidez
x	Fração de momento transferido em colisão
β	Velocidade em unidades da velocidade da luz
$\zeta(3)$	Zeta de Riemann
N	Taxa de produção

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
2	ELETRODINÂMICA QUÂNTICA	20
2.1	TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	21
2.2	REGRAS DE FEYNMAN DA QED	23
2.3	ANIQUILAÇÃO DE ESTADOS LIGADOS EM DOIS FÓTONS	24
2.4	CRIAÇÃO DE ESTADOS LIGADOS POR DOIS FÓTONS REAIS	27
2.4.1	Fórmula de Low	27
2.4.2	Fórmula de Breit-Wigner	30
2.5	FOTOPRODUÇÃO DE ESTADOS LIGADOS DE LÉPTONS EM NÚCLEOS	33
2.5.1	Fotoprodução de estados singletos em núcleos	33
2.5.2	Fotoprodução de estados tripletos em núcleos	34
2.6	CONCLUSÃO	35
3	APROXIMAÇÃO DE FÓTONS EQUIVALENTES	36
3.1	COLISÕES ULTRAPERIFÉRICAS DE HÁDRONS	36
3.2	DERIVAÇÃO CLÁSSICA DO ESPECTRO DE FÓTONS EQUIVALENTES	37
3.2.1	Transformação dos Campos Eletromagnéticos	37
3.2.2	Campo de uma Carga Pontual	39
3.2.3	Espectro de fótons Equivalentes	41
3.3	DERIVAÇÃO QUÂNTICA DO ESPECTRO DE FÓTONS EQUIVALENTES	44
3.4	FATORES DE FORMA NUCLEAR	53
3.5	CORREÇÃO DE ABSORÇÃO	57
3.6	CONCLUSÃO	59
4	FOTOPRODUÇÃO DE ESTADOS LIGADOS	60
4.1	SEÇÃO DE CHOQUE COM A APROXIMAÇÃO DE FÓTONS EQUIVALENTES	60
4.2	CINEMÁTICA DO PROCESSO NO CENTRO DE MASSA	62
4.3	CINEMÁTICA DO PROCESSO NO LABORATÓRIO	65
4.4	CORREÇÕES COULOMBIANAS	67
4.5	CONCLUSÃO	69
5	RESULTADOS	70
5.1	FÓRMULA DE LOW <i>VERSUS</i> FÓRMULA DE BREIT-WIGNER	71
5.2	USO DE DIFERENTES FATORES DE FORMA NUCLEAR	72

5.3	IMPACTO DAS CORREÇÕES DE ABSORÇÃO	73
5.4	DISTRIBUIÇÕES ESPACIAIS E NA ENERGIA	74
5.5	DISTRIBUIÇÕES DE RAPIDEZ	78
5.6	IMPACTO DAS CORREÇÕES COULOMBIANAS	79
5.7	TAXAS DE PRODUÇÃO	82
5.8	CONCLUSÃO	86
6	CONCLUSÃO	87
	REFERÊNCIAS	88
	APÊNDICE A – EQUIVALÊNCIA ENTRE AS FÓRMULAS DE LOW E BREIT-WIGNER	95
	APÊNDICE B – EQUIVALÊNCIA ENTRE AS SEÇÕES DE CHO- QUE FÓTON-FÓTON E FÓTON-NÚCLEO	97
	APÊNDICE C – INTEGRAIS IMPRÓPRIAS PARA OBTENÇÃO DOS PULSOS DE ENERGIA	100
	APÊNDICE D – FLUXO DE FÓTONS NA APROXIMAÇÃO DE LOGARÍTMO DOMINANTE	102
	APÊNDICE E – FLUXO DE FÓTONS EQUIVALENTES DEPEN- DENTE DA DISTÂNCIA TRANSVERSA	104
	APÊNDICE F – FATOR DE FORMA NUCLEAR	107
F.1	FATOR DE FORMA PONTUAL	107
F.2	FATOR DE FORMA DE MONOPOLÓ	108
F.3	FATOR DE FORMA REALÍSTICO	109
F.4	FATOR DE FORMA DE DIPÓLO	109
	APÊNDICE G – FLUXO PONTUAL DEPENDENTE DA DISTÂN- CIA TRANSVERSA	112
	APÊNDICE H – FLUXO DE MONOPOLÓ DEPENDENTE DA DIS- TÂNCIA TRANSVERSA	113
	APÊNDICE I – FLUXO DE DIPÓLO DEPENDENTE DA DISTÂN- CIA TRANSVERSA	115

1 INTRODUÇÃO

O estudo de estados ligados de léptons pode ser de grande interesse nos dias atuais. Enquanto que na Química pode-se estudar as propriedades químicas destes átomos exóticos e a formação de moléculas [1, 2, 3, 4]; na Física podemos testar importantes propriedades do Modelo Padrão da Física de Partículas quando confrontados dados experimentais com predições teóricas. Estes estados, por serem constituídos de partícula e antipartícula, são instáveis e dentre seus canais de decaimento está o decaimento em fótons. Os estados ligados de léptons podem ter spin zero e spin um, que são conhecidos como para e orto estados, respectivamente. A aniquilação em fótons é governada pelas regras de seleção da conjugação de carga e paridade, que permitem que paraestados decaiam apenas em número par de fótons, enquanto ortoestados decaem apenas em número ímpar de fótons. Por serem sensíveis a estas propriedades do Modelo Padrão, estados ligados de léptons podem ser um bom laboratório na busca de nova física.

Dentre os estados ligados de léptons, o mais conhecido é o positrônio. Ele foi observado experimentalmente pela primeira vez em 1951, no *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) [5], contudo, sua proposição teórica é datada de quase duas décadas antes de sua observação [6]. Os estados ligados entre mûon e antimûon e tau e antitau, são comumente denominados verdadeiro muônia ou dimuônia e verdadeiro tauônia ou ditauônia, respectivamente [7]. Mas aqui nos referiremos a eles apenas como muônia e tauônia, embora haja convergência na literatura com a nomenclatura dos estados ligados entre antimûon e elétron, e antitau e elétron, respectivamente. O muônia e o tauônia ainda não foram observados experimentalmente, mas há a expectativa de medida (para o muônia) nos grandes colisores em operação atualmente e em colisores do futuro [7, 8].

Atualmente há dois colisores de hadrons de altas energias em operação, são eles o *Large Hadron Collider* (LHC) [9] e o *Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC) [10]. Há ainda projetos de construção de novos colisores para as próximas décadas, destaque para o *Future Circular Collider* (FCC), que poderá ser construído no *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire* (CERN), tendo o LHC como um pré-acelerador [11, 12]. Estes colisores têm sido uma boa alternativa para o estudo de processos induzidos por fótons [13, 14, 15], devido aos intensos campos eletromagnéticos de hadrons ultrarelativísticos, sobretudo de núcleos pesados, que aumentam com o número atômico do núcleo.

Com o advento dos grandes colisores de hadrons citados, a produção de estados ligados de léptons mais leves (elétron e mûon) em colisões ultraperiféricas tem sido objeto de estudo de diversos autores nos últimos anos [16, 17, 18, 19, 20]. O interesse pelas colisões ultraperiféricas justifica-se pela supressão das interações fortes, logo, os processos induzidos por fótons são dominantes na interação hadrônica. O objetivo desta dissertação é analisar a produção de todos os estados ligados de léptons em processos induzidos por fótons em colisões hadrônicas. Apresentamos predições mais acuradas que as presentes

na literatura, considerando a distribuição de cargas nos núcleos de forma mais realista, e estimamos correções de mais alta ordem da QED para processos em que esta é significativa em relação à produção a nível de Born.

A dissertação está organizada como segue: no capítulo 2 apresentamos brevemente os aspectos gerais da teoria quântica de campo das interações eletromagnéticas, a Eletrodinâmica Quântica. Apresentamos sua densidade lagrangiana e enunciamos suas regras de Feynman. Com as regras de Feynman e a definição de seção de choque para espalhamentos quânticos, estudamos os processos eletromagnéticos elementares de interesse nesta dissertação: a aniquilação de estados ligados de léptons em dois fótons e a criação de estados ligados de léptons pela fusão de fótons e em espalhamentos fóton-núcleo.

O capítulo 3 aborda a aproximação de fótons equivalentes. Nele apresentamos desde suas origens históricas, passando por suas derivações clássica e quântica, até a análise da inserção de diferentes fatores de forma nuclear. Investigamos as consequências de uma análise mais acurada no que se refere aos tratamentos realísticos da distribuição de carga nuclear, e apresentamos os fluxos de fótons dependentes da distância transversa do centro dos hadrons, o qual é indispensável para o tratamento de colisões ultraperiféricas.

No capítulo 4 apresentamos a metodologia da aproximação de fótons equivalentes para descrição de espalhamentos eletromagnéticos. Apresentamos o formalismo de altas energias utilizado para obtenção de distribuições de rapidez, tanto para produção a nível de Born, quanto para correções coulombianas para a produção de parapositrônio em colisões que envolvem ao menos um núcleo pesado.

O capítulo 5 traz nossos resultados. Analisamos a produção de diferentes sabores de estados ligados de léptons (positrônio, muônio e tauônio) a nível de Born em colisões de núcleos pesados em energia do LHC para distintos fatores de forma nuclear. Também analisamos a necessidade da inserção de um fator de supressão de interações fortes, e mostramos o quanto importante são estas correções, sobretudo para a produção de estados ligados de léptons mais pesados. Discutimos diferentes distribuições diferenciais da seção de choque hadrônica do processo em questão. Estimamos os impactos das correções coulombianas em colisões de núcleos pesados e em colisões próton-núcleo para a produção de parapositrônio, e mostramos que seu impacto é muito significativo mesmo no regime de altas energias dos colisores atuais e do futuro. Por fim, estimamos as seções de choque e taxas de produção totais e com cortes em rapidez de acordo com as características dos detectores dos colisores de hadrons atuais.

Por fim, no capítulo 6 apresentamos nossas conclusões e perspectivas para futuros trabalhos. Os resultados obtidos e apresentados nesta dissertação foram apresentados no *XV Workshop in Hadron Physics 2020*, no *XLI Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos* e são objetos de um artigo submetido à um periódico científico internacional, intitulado *Photoproduction of relativistic QED bound states in hadronic collisions* e que já está disponível no *arXiv* [21].

2 ELETRODINÂMICA QUÂNTICA

A teoria da física que caracteriza e agrupa as partículas elementares (sem estrutura interna) é o Modelo Padrão da Física de Partículas [22], representado na Figura 2.1. Podemos agrupar todas as partículas elementares em dois grupos: férmions, que possuem spin semi-inteiro, e bósons, que possuem spin inteiro.

Férmions podem ainda ser divididos em quarks e léptons. Quarks possuem carga elétrica fracionária, e têm como característica marcante a carga de cor. Logo, interagem fortemente agrupando-se em hadrons, que são neutros de cor e subdividem-se em bárions (formados com três quarks), e mésons (formados com par quark-antiquark). Os léptons são as partículas da família do elétron. Podem ser carregados eletricamente: elétron, múon e tau; ou sem carga elétrica: os neutrinos correspondentes aos léptons carregados.

Os bósons conhecidos atualmente se dividem em dois grupos: escalares e vetoriais. Os bósons vetoriais possuem spin 1, e são os mediadores de força já detectados. No grupo de bósons escalares temos apenas um já detectado experimentalmente: o bóson de Higgs, proposto na década de 1960 [23, 24, 25] e observado experimentalmente pela primeira vez em 2012 nos experimentos CMS [26] e ATLAS [27] do LHC. Existem outros bósons previstos em algumas teorias, como o próprio gráviton [28], que espera-se não ter massa e spin 2, mas até o momento não foi detectado.

O Modelo Padrão também é responsável por descrever as interações fundamentais da natureza. De acordo com este modelo, existem quatro tipos de interações (forças) fundamentais: força forte, que é mediada por glúons e ocorre devido à propriedade de carga de cor que quarks e glúons possuem; força eletromagnética, mediada por fótons e que atua em partículas com a propriedade de carga elétrica; força fraca, mediada pelos bósons W^\pm e Z , que atua em partículas que possuem a propriedade de isospin fraco; e, por fim, a força gravitacional, que atua sobre corpos com a propriedade de massa, tendo como partícula mediadora o gráviton, o qual ainda não foi observado experimentalmente [29].

As quatro interações se manifestam com intensidades e em situações específicas. Se adotarmos a intensidade da força forte como sendo 1, as intensidades das forças eletromagnética, fraca e gravitacional serão, respectivamente, 10^{-3} , 10^{-8} e 10^{-37} . As interações eletromagnética e gravitacional possuem alcance infinito, contrariamente às forças forte e fraca, que se restringem a alcances de 10^{-15} m e 10^{-17} m, respectivamente [30].

Figura 2.1 – Modelo Padrão da Física de Partículas.

Três gerações de matéria fermiônica			Bósons mensageiros	
	1 ^a	2 ^a	3 ^a	
QUARKS	Massa 2,2 MeV Carga 2/3 Spin 1/2 Cor R,G,B T, T ₃ Up	1,28 GeV 2/3 1/2 R,G,B 1/2,1/2 Charm	173,1 GeV 2/3 1/2 R,G,B 1/2,1/2 Top	0 0 1 cc̄ 0 Glúon
	4,7 MeV -1/3 1/2 R,G,B 1/2,-1/2 Down	96 MeV -1/3 1/2 R,G,B 1/2,-1/2 Strange	4,18 GeV -1/3 1/2 R,G,B 1/2,-1/2 Bottom	0 0 1 0 0 Fóton
	0,511 MeV -1 1/2 0 1/2,-1/2 Elétron	105,7 MeV -1 1/2 0 1/2,-1/2 Múon	1,777 GeV -1 1/2 0 1/2,-1/2 Tau	91,19 GeV 0 1 0 1, 0 Bóson Z
	<1,0 eV 0 1/2 0 1/2,1/2 Neutrino do eletron	<0,17 MeV 0 1/2 0 1/2,1/2 Neutrino do múon	<18,2 MeV 0 1/2 0 1/2,1/2 Neutrino do tau	80,37 GeV ±1 1 0 1, ±1 Bóson W
	LÉPTONS			
	BÓSONS DE GAUGE			
	BÓSONS DE ESCALARES			

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

2.1 TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

Quando estudamos fenômenos físicos macroscópicos e em baixas velocidades (velocidades muito menores que a velocidade da luz) basta utilizarmos a mecânica newtoniana para obtermos resultados satisfatórios. Para descrever fenômenos ainda macroscópicos, porém com velocidades próximas a da luz, a mecânica newtoniana falha e precisamos recorrer à teoria da relatividade. A mecânica newtoniana também falha em descrições microscópicas, ainda que em baixas velocidades. Para estes fenômenos é necessário utilizar a mecânica quântica. Já em fenômenos microscópicos e em altas velocidades, é necessário conciliar a mecânica quântica e a teoria da relatividade, assim emergiu a teoria quântica de campos. Como seu próprio nome sugere, teorias quânticas de campos quantizam os campos clássicos utilizados para descrever as interações.

Para cada interação descrita atualmente pelo Modelo Padrão, temos uma teoria quântica de campos correspondente. A teoria quântica de campos da interação forte é a cromodinâmica quântica (QCD, sigla utilizada para *quantum chromodynamics*) [31]. Da mesma forma, as interações fracas também são descritas por uma teoria quântica de

campos, a flavourdinâmica quântica (QFD) [32]. E, para as interações eletromagnéticas, temos a eletrodinâmica quântica (QED) [33], que é o principal interesse deste capítulo.

A eletrodinâmica quântica foi desenvolvida na década de 1940 por Feynman [34], Tomonga [35] e Schwinger [36]. É considerada uma das teorias físicas mais bem testadas e bem estabelecida. A interação ocorre entre partículas eletricamente carregadas via troca de fótons.

Em teoria de campos, descrevemos as interações com densidades lagrangianas. Para a QED, temos a seguinte densidade lagrangiana [37, 38]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{Int.}, \quad (2.1)$$

onde \mathcal{L}_{Dirac} descreve o campo dos férmions, \mathcal{L}_{EM} descreve o campo de fótons e $\mathcal{L}_{Int.}$ descreve a interação do campo de Dirac com o campo de fótons.

As três densidades lagrangianas do lado direito da Equação (2.1) são definidas por

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_{Int.} = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu. \quad (2.4)$$

Temos que ψ e $\bar{\psi}$ são, respectivamente, o spinor e spinor adjunto de Dirac, γ^μ são as matrizes de Dirac, ∂_μ são as derivadas quadridimensionais, $F^{\mu\nu}$ o tensor do campo eletromagnético ($F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$) e A^μ o quadripotencial. É através da lagrangiana da QED que podemos derivar as regras de Feynman, que serão apresentadas na próxima seção.

Em mecânica quântica, um espalhamento de partículas pode ser descrito por uma matriz de espalhamento, que leva um estado inicial i em um tempo $t \rightarrow -\infty$ a um estado final f em $t \rightarrow \infty$. Esta matriz de espalhamento é chamada de matriz S , e atua no ket de estado da seguinte forma

$$S|i\rangle = |f\rangle. \quad (2.5)$$

Podemos definir os elementos desta matriz para um espalhamento de duas partículas no estado inicial com quadrimomentos p_1 e p_2 , indo a n partículas no estado final com quadrimomentos p'_1, p'_2, \dots, p'_n como [39]

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle \quad (2.6)$$

$$S_{fi} = i(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n p'_i\right) \mathcal{M}_{fi} \prod_{i=1}^2 \sqrt{\frac{N_i}{2E_i(2\pi)^3}} \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{N'_j}{2E'_j(2\pi)^3}}, \quad (2.7)$$

onde N_i e N'_j são fatores de normalização, e \mathcal{M}_{fi} é o elemento de matriz invariante, também chamado de amplitude invariante de espalhamento, que é responsável por descrever a dinâmica do processo.

A seção de choque para o processo de espalhamento pode ser obtida com a definição teórica de seção de choque e com a regra de ouro de Fermi, que a escreve em termos do módulo quadrado da matriz S [38]. Deste modo, a seção de choque diferencial para o processo de espalhamento descrito acima pode ser escrito como o produto do módulo quadrado da amplitude invariante, com o espaço de fase das partículas de estado final, com a delta de conservação do quadrimomento e um termo relativo ao fluxo de partículas incidentes:

$$d\sigma = \frac{\Lambda}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1 m_2}} N_1 N_2 (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n p'_i \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \prod_{i=1}^n \frac{N_i d^3 \vec{p}'_i}{2E'_i (2\pi)^3}, \quad (2.8)$$

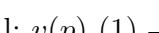
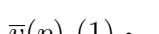
onde Λ é um fator de degenerescência para o caso de um estado final que contém partículas idênticas ($\Lambda = \prod_k \frac{1}{(g_k!)}$, com g_k sendo a multiplicidade de partículas k).

2.2 REGRAS DE FEYNMAN DA QED

As regras de Feynman da QED são um conjunto de regras que nos permitem escrever de forma prática os elementos de matriz da amplitude invariante de espalhamento \mathcal{M} , a partir de diagramas de Feynman para o espalhamento em questão [22, 37, 38].

Diagramas de Feynman são representações esquemáticas de processos quânticos. Não devemos pensar no diagrama como partículas se propagando no espaço, e sim no tempo. Aqui adotaremos o tempo evoluindo no diagrama da esquerda para a direita. Tais diagramas possuem três elementos fundamentais:

(i) Linhas externas, que representam as partículas iniciais e finais do processo. São as partículas detectáveis, e na amplitude invariante são representadas por seus spinores, $u(p)$ e $v(p)$, para o caso de fermions; e estados de polarização, $\varepsilon_\mu(p)$ e $\varepsilon_\mu^*(p)$, para os bósons de spin 1 da seguinte forma

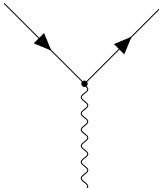
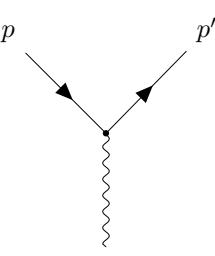
- Férnion (Bóson de spin 0) inicial: $u(p)$ (1) 
- Férnion (Bóson de spin 0) final: $\bar{u}(p)$ (1) 
- Antiférnion (Antibóson de spin 0) inicial: $v(p)$ (1) 
- Antiférnion (Antibóson de spin 0) final: $\bar{v}(p)$ (1) 
- Fóton inicial: $\varepsilon_\mu(p)$ 

- Fóton final: $\varepsilon_\mu^*(p)$

(ii) Linhas internas, que conectam os vértices de interação. São as partículas não detectáveis, chamadas de propagadores. Temos quatro tipos de propagadores:

- Fóton propagador: $-\frac{ig_{\mu\nu}}{p^2}$
- Férmion propagador: $-\frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2}$
- Bóson de spin 0 propagador: $-\frac{i}{p^2 - m^2}$
- Bóson de spin 1 propagador: $-\frac{i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu/m)}{p^2 - m^2}$

(iii) E por fim, o terceiro componente dos diagramas são os vértices de interação. São neles que partículas são trocadas e os quadrimomentos das partículas das linhas externas são alterados. Os vértices da QED contribuem no elemento de matriz invariante e são representados da seguinte forma

- 
- Vértice com férmion: $-iQe\gamma^\mu$
 - Vértice com bóson de spin 0: $-iQe(p + p')^\mu$

com Q sendo o número de carga elétrica da partícula em questão no vértice.

2.3 ANIQUILAÇÃO DE ESTADOS LIGADOS EM DOIS FÓTONS

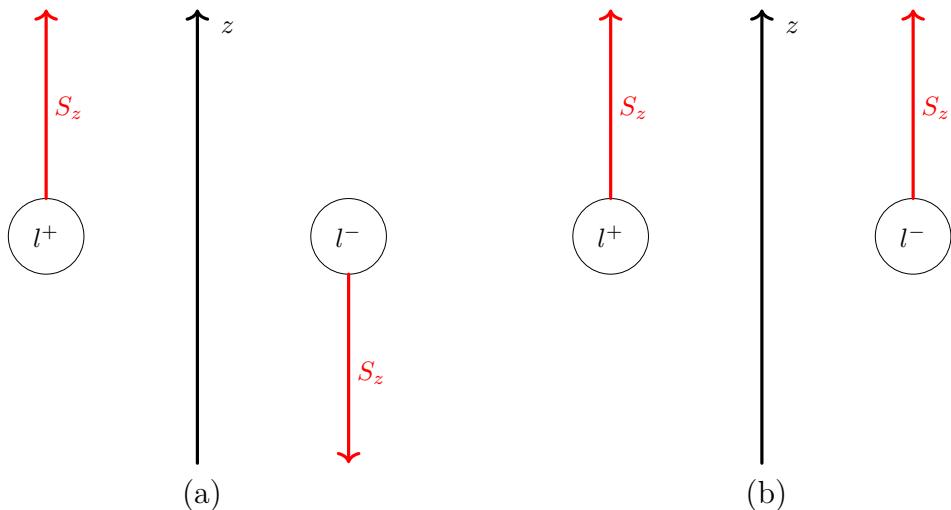
Estados ligados de léptons, denotados por (l^+l^-) , com $l = e, \mu, \tau$, são átomos exóticos com tempo de vida finito. Em alguns aspectos são mais simples que o hidrogênio, já que trata-se da interação eletromagnética de duas partículas elementares, um lépton e seu antilépton correspondente. Por tratar-se de duas partículas de mesma massa, orbitam o centro de massa do sistema, que é a metade da distância entre as duas partículas.

Sabemos que tais estados são instáveis, e um importante canal de aniquilação leva a fótons, sobretudo o positrônio, (e^+e^-) , já que seus constituintes são estáveis [20]. O

muônio ($\mu^+\mu^-$), apesar de ter constituintes instáveis, é considerado um genuíno estado ligado da QED, juntamente com o positrônio, pois seu tempo de vida é muito menor que o tempo de vida do lepton μ , fazendo com que seu decaimento seja majoritariamente por canais eletromagnéticos. Diferentemente dos estados mencionados, o tauônio não é considerado um genuíno estado ligado da QED, por ter seu tempo de vida compatível com o tempo de vida do lepton τ . Assim, seu decaimento por canais de interação fraca compete com os decaimentos pelo canal eletromagnético [40].

Os estados ligados de leptons podem existir em duas configurações de spin distintas: com spin $s = 0$ e com spin $s = 1$ (ver Figura 2.2). O estado com spin zero é chamado de singuleto ou paraestado, e é representado por $(l^+l^-)_S$. Possui, no estado fundamental (1^1S_0) conjugação de carga $C = +1$ e paridade $P = -1$. Para o estado com spin 1, chamado de triplete ou ortoestado, $(l^+l^-)_T$, temos $C = -1$ e $P = -1$ [22], também no estado fundamental (1^3S_1).

Figura 2.2 – Estados de spin possíveis para estados ligados de leptons. (a) Estado singuleto, (b) estado triplete.

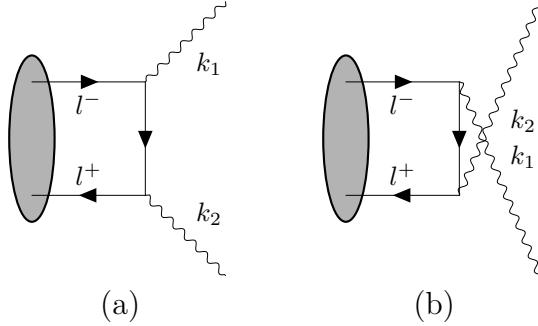


Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Processos eletromagnéticos conservam paridade e conjugação de carga, logo, existem processos que são permitidos e processos que são proibidos para o decaimento de estados ligados em fótons. Como a conjugação de carga para fótons é $C = -1$ e é um número quântico multiplicativo, só é permitido que estados singletos decaiam em número par de fótons. Do mesmo modo, estados tripletos decaem em número ímpar de fótons (sendo necessário, obviamente, que o número seja um ímpar maior ou igual a 3 para conservação do momento.).

Nosso principal interesse nesta dissertação serão os estados singletos. Vamos agora determinar a largura de decaimento de um estado singuleto em dois fótons em termos do módulo quadrado da amplitude invariante deste processo. Iniciamos desenhandos os diagramas de Feynman de mais baixa ordem para o referido processo.

Figura 2.3 – Aniquilação de estados ligados de léptons em dois fótons.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Embora os dois diagramas da Figura 2.3 apresentem o mesmo processo de decaimento do estado ligado em dois fótons, são topologicamente distintos por tratar-se de partículas idênticas no estado final.

Faremos o cálculo para a largura de decaimento do estado ligado em seu referencial de repouso. Iniciamos definindo a largura de decaimento diferencial do processo ($d\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}$) em termos de sua seção de choque diferencial ($d\sigma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}$) [38]

$$d\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma} = (v_1 + v_2) d\sigma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}, \quad (2.9)$$

onde $(v_1 + v_2)$ é a velocidade relativa entre as partículas do estado inicial. Então, ao utilizar a definição de seção de choque diferencial da Equação (2.8), obtemos

$$\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{4M} \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d^3 \vec{k}_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \sum_{\lambda} |\mathcal{M}[(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma]|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2), \quad (2.10)$$

onde M é a energia do estado ligado, que em unidades naturais é igual a soma das massas de seus componentes; \vec{k}_1 (\vec{k}_2), ω_1 (ω_2) e k_1 (k_2) são, respectivamente, o momento, a energia e o quadrimomento do primeiro (segundo) fóton; e p é o quadrimomento do estado ligado. A amplitude invariante é referente aos processos da Figura 2.3. A somatória em λ é a somatória nos estados possíveis para a polarização dos dois fótons. Fazendo algumas simplificações na Equação (2.10), obtemos

$$\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{4M} \int \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3 \vec{k}_1}{2\omega_1} \frac{d^3 \vec{k}_2}{2\omega_2} \sum_{\lambda} |\mathcal{M}[(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma]|^2 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2). \quad (2.11)$$

A delta de Dirac de conservação do quadrimomento pode ser dividida em duas funções delta de Dirac: uma para a energia, e outra para o momento. Com isso, obtemos

$$\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{4M} \int \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3 \vec{k}_1}{2\omega_1} \frac{d^3 \vec{k}_2}{2\omega_2} \sum_{\lambda} |\mathcal{M}[(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma]|^2 \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \delta(M - \omega_1 - \omega_2). \quad (2.12)$$

Agora, podemos utilizar as propriedades da função delta de Dirac para resolver a integral no momento de um dos fótons. Como já mencionado anteriormente, estamos fazendo esta análise do referencial de repouso do estado ligado. Assim, pela conservação da energia e do momento, são válidas as relações $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ e $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Então

$$\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{4M} \int \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3\vec{k}_1}{(2\omega)^2} \sum_{\lambda} |\mathcal{M}[(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma]|^2 \delta(M - 2\omega). \quad (2.13)$$

A integral em $d^3\vec{k}_1$ pode ser resolvida facilmente utilizando coordenadas esféricas, fazendo $d^3\vec{k}_1 = \omega^2 d\omega d\Omega$, com $d\Omega$ sendo o elemento de ângulo sólido. Então

$$\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{16M} \int \frac{1}{(2\pi)^2} d\omega d\Omega \sum_{\lambda} |\mathcal{M}[(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma]|^2 \delta(M - 2\omega). \quad (2.14)$$

Ao alterar o argumento da função delta com suas propriedades, obtém-se

$$\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{32M} \int \frac{1}{(2\pi)^2} d\omega d\Omega \sum_{\lambda} |\mathcal{M}[(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma]|^2 \delta\left(\frac{M}{2} - \omega\right). \quad (2.15)$$

A integração em ω pode ser avaliada com auxílio das propriedades da função delta de Dirac, enquanto a integral no ângulo sólido é resolvida trivialmente considerando-se que não há dependência angular na amplitude invariante. Logo

$$\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{32\pi M} \sum_{\lambda} |\mathcal{M}[(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma]|^2. \quad (2.16)$$

Esta é a largura de decaimento de um estado ligado de léptons em dois fótons em termos da amplitude invariante do processo.

2.4 CRIAÇÃO DE ESTADOS LIGADOS POR DOIS FÓTONS REAIS

Nesta seção analisaremos a criação de estados ligados singletos de léptons a partir da fusão de dois fótons com dois métodos diferentes, a fim de obter a seção de choque de tal processo.

2.4.1 Fórmula de Low

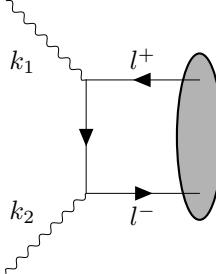
O processo de decaimento de estados ligados de léptons em dois fótons (Figura 2.3) possui amplitude invariante proporcional ao processo de fusão de dois fótons que dão origem a um estado ligado (Figura 2.4), diferindo apenas nos termos de média sobre spin e polarizações, pois os componentes do diagrama de Feynman são essencialmente os mesmos, apenas rotacionados.

A média do módulo quadrado da amplitude invariante referente à Figura 2.4 é dada por

$$\langle |\mathcal{M}[\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S]|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}[\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S]|^2, \quad (2.17)$$

onde o termo $1/4$ no lado direito é referente à média nas polarizações iniciais dos fótons, e o somatório em spins é nos spins das partículas finais.

Figura 2.4 – Produção de estado ligado de léptons pela fusão de dois fótons.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Deste modo, podemos escrever a seção de choque para a produção de estados ligados de léptons a partir de dois fótons em termos da largura de decaimento da Equação (2.16). Este procedimento foi feito por Low [41], quando estudou a produção de píons neutros por dois fótons. Por este feito, nos referimos à seção de choque para a produção de estados ligados a partir de dois fótons, que deduziremos nesta subseção, como Fórmula de Low.

A seção de choque diferencial para a produção do estado ligado de léptons pode ser escrita utilizando sua definição apresentada na Equação (2.8), como

$$d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = \frac{1}{2\omega_1 2\omega_2 (v_1 + v_2)} \langle |\mathcal{M}[\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S]|^2 \rangle \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) \quad (2.18)$$

como fótons tem velocidade $c = 1$ e com ajuda da Equação (2.17), podemos reescrever esta equação da seguinte forma

$$d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = \frac{1}{32\omega_1 \omega_2} \sum_{spins} |\mathcal{M}[\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S]|^2 \frac{d^3 \vec{p}}{2E} (2\pi) \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2). \quad (2.19)$$

Podemos reescrever o termo do espaço de fase do estado ligado como [38]

$$\frac{d^3 \vec{p}}{2E} = \int d^4 p \delta(p_0^2 - M^2) \Theta(p_0) \quad (2.20)$$

$$\frac{d^3 \vec{p}}{2E} = \int d^4 p \delta[(p_0 + M)(p_0 - M)] \Theta(p_0), \quad (2.21)$$

com $\Theta(p_0)$ sendo a função degrau, que possui imagem zero quando seu argumento for negativo e imagem um quando seu argumento for positivo. Ou seja, impõe que a energia do estado ligado seja positiva. Vamos demonstrar a validade desta equação da seguinte forma: reescreveremos a delta de Dirac da Equação (2.20) com auxílio da propriedade [42]

$$\delta[f(p_0)] = \sum_i \frac{\delta(p_0 - p_{0i})}{\left| \frac{\partial f}{\partial p_0} \right|_{p_0=p_{0i}}}. \quad (2.22)$$

Da Equação (2.21), vê-se claramente que as raízes da delta são $p_0 = \pm M$, então

$$\begin{aligned} \delta(p_0^2 - M^2) &= \sum_i \frac{\delta(p_0 - p_{0i})}{2p_{0i}} \\ \delta(p_0^2 - M^2) &= \frac{\delta(p_0 - M)}{2M} - \frac{\delta(p_0 + M)}{2M}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Voltando para a Equação (2.20),

$$\frac{d^3 \vec{p}}{2E} = \int d^4 p \Theta(p_0) \left[\frac{\delta(p_0 - M)}{2M} - \frac{\delta(p_0 + M)}{2M} \right]. \quad (2.24)$$

Ao utilizar a definição da função Θ , podemos desconsiderar a segunda delta de Dirac da equação acima. Deste modo

$$\frac{d^3 \vec{p}}{2E} = \int d^3 \vec{p} dp_0 \Theta(p_0) \frac{\delta(p_0 - M)}{2M}. \quad (2.25)$$

Ao integrar em p_0 com a delta de Dirac, prova-se a validade da Equação (2.20). Agora estamos em condições de substituir a Equação (2.20) na Equação (2.19), e integrar em ambos lados

$$\int d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = \frac{1}{32\omega_1\omega_2} \int \sum_{spins} |\mathcal{M}[\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S]|^2 (2\pi)\delta^{(4)}(p-k_1-k_2)d^4p \delta(p_0^2 - M^2)\Theta(p_0). \quad (2.26)$$

Podemos executar a integração em d^4p com auxílio da primeira delta de Dirac do lado direito

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} &= \frac{2\pi}{32\omega_1\omega_2} \sum_{spins} |\mathcal{M}[\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S]|^2 \delta[(k_1 + k_2)^2 - M^2]\Theta(p_0) \\ \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} &= \frac{2\pi}{32\omega_1\omega_2} \sum_{spins} |\mathcal{M}[\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S]|^2 \delta(k_1^2 + k_2^2 + 4\omega_1\omega_2 - M^2). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como estamos considerando o processo com fótons reais, portanto, fótons em sua camada de massa, $k_1^2 = k_2^2 = 0$, assim

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = \frac{\pi}{4M^2} \delta(4\omega_1\omega_2 - M^2) \sum_{spins} |\mathcal{M}[\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S]|^2. \quad (2.28)$$

Como discutido anteriormente, o módulo quadrado da amplitude invariante para a aniquilação de um estado ligado de léptons em dois fótons difere do módulo quadrado da amplitude invariante para a criação de um estado ligado de léptons por dois fótons por termos cinemáticos. Como estes termos entraram na seção de choque e na largura de decaimento da Equações (2.16) e (2.19), respectivamente, podemos fazer

$$\sum_{\lambda} |\mathcal{M}[(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma]|^2 \rightarrow \sum_{spins} |\mathcal{M}[\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S]|^2. \quad (2.29)$$

Deste modo, a Equação (2.27) torna-se

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = \frac{\pi}{4M^2} \delta(4\omega_1\omega_2 - M^2) \sum_{\lambda} |\mathcal{M}[(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma]|^2. \quad (2.30)$$

Substituindo a Equação (2.16) aqui na Equação (2.31),

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = \frac{8\pi^2}{M} \Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma} \delta(4\omega_1\omega_2 - M^2). \quad (2.31)$$

Esta equação é conhecida como fórmula de Low para a produção de estados ligados a partir de dois fótons reais. Ela é escrita em termos da largura de decaimento de estados ligados em dois fótons, que é uma quantidade muito bem conhecida [43]. Em uma aproximação não relativística é possível mostrar que a largura de decaimento de estados singletos é dada por $\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}(n^1S_0) = \alpha^5 M / 4n^3$. Logo, a fórmula de Low para a produção de estados singletos no estado fundamental torna-se

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = 2\pi^2 \alpha^5 \delta(4\omega_1\omega_2 - M^2). \quad (2.32)$$

2.4.2 Fórmula de Breit-Wigner

Estados ligados que possuem largura de decaimento e tempo de vida finitos, e que podem ser formados por colisões entre as partículas nas quais estes estados decaem, são comumente denominados por ressonâncias. A função de onda que descreve um estado de decaimento estacionário com frequência angular $\omega_R = E_R$, onde E_R é a energia da ressonância, pode ser escrita como [44]

$$\psi(t) = \psi(0) e^{-i\omega_R t} e^{-\frac{t}{2\tau}}, \quad (2.33)$$

onde τ é o tempo de vida da ressonância, que é igual ao inverso de sua largura de decaimento. A Equação (2.33) pode ser escrita como

$$\psi(t) = \psi(0) e^{-t(i\omega_R + \Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}/2)} \quad (2.34)$$

Facilmente podemos mostrar que a equação acima obedece lei de decaimento radioativo de probabilidade:

$$\psi(t)\psi^*(t) = \psi(0)\psi^*(0)e^{-t(i\omega_R + \Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}/2)}e^{-t(-i\omega_R + \Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}/2)}$$

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 e^{-\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma} t}. \quad (2.35)$$

Em vez de trabalharmos no espaço de tempo, podemos obter a função de onda no espaço de energia através de uma transformada de Fourier da seguinte forma

$$\chi(W) = \int_0^\infty \psi(t) e^{iWt} dt \quad (2.36)$$

onde W é a energia de centro de massa da ressonância (estado ligado), também chamada de massa invariante. Podemos resolver a integral de maneira direta, como segue

$$\chi(W) = \psi(0) \int_0^\infty e^{-t(i\omega_R + \Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}/2)} e^{iWt} dt$$

$$\chi(W) = \psi(0) \int_0^\infty e^{-t[i(E_R - W) + \Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}/2]} dt$$

$$\begin{aligned} \chi(W) &= -\psi(0) \frac{1}{\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}/2 + i(E_R - W)} e^{-t[i(E_R - W) + \Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}/2]} \Big|_0^\infty \\ \chi(W) &= -\psi(0) \frac{i}{(E_R - W) + i\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}/2}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

A seção de choque para a produção de estados ligados a partir de dois fótons pode ser obtida de uma constante multiplicada pelo módulo quadrado da função de onda no espaço de energia, obtida na equação anterior.

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}(W) = C \chi(W) \chi^*(W)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}(W) &= C |\psi(0)|^2 \frac{i}{(E_R - W) + i\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}/2} \frac{-i}{(E_R - W) - i\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}/2} \\ \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}(W) &= \frac{|k|^2}{(E_R - W)^2 + \Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}/4} \end{aligned} \quad (2.38)$$

com $|k|^2 = C|\psi(0)|^2$. Ou fazendo $|k|^2 = \sigma_{max} \Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}^2 / 4$, podemos escrever a Equação (2.38) como

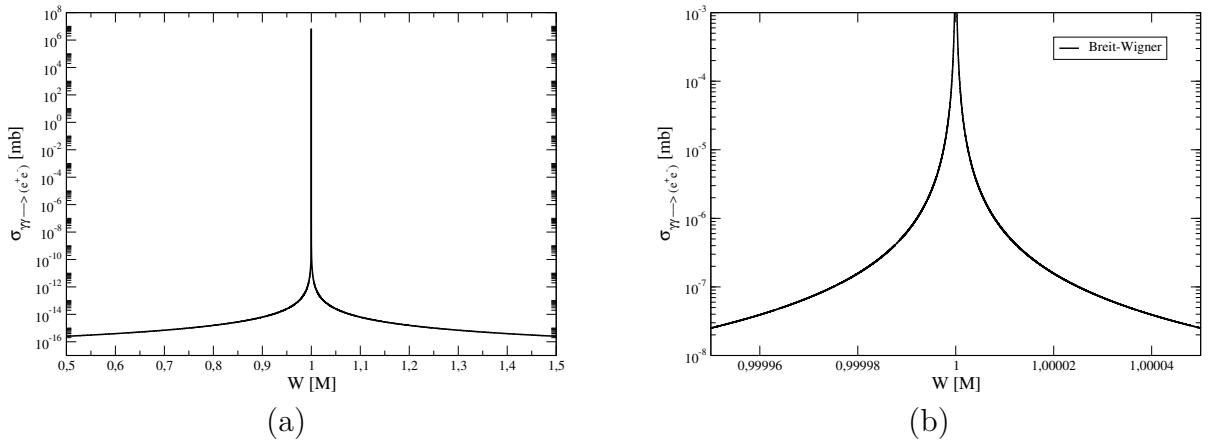
$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}(W) = \sigma_{max} \frac{\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}^2}{4(E_R - W)^2 + \Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}^2}. \quad (2.39)$$

A partir daqui utilizaremos E_R como sendo a soma das massas de repouso das partículas que compõem o estado ligado. Existem diferentes caminhos para a obtenção de σ_{max} , aqui utilizamos o resultado obtido por Godunov [45]

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}(W) = \frac{8\pi}{M^2} \frac{\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}^2}{4(M-W)^2 + \Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}^2}. \quad (2.40)$$

Esta equação é a fórmula de Breit-Wigner para a produção de estados ligados a partir de dois fôtons reais. O comportamento da Equação (2.40) para a produção de parapositrônio a partir de dois fôtons é apresentado na Figura 2.5.

Figura 2.5 – Comportamento da seção de choque de Breit-Wigner para a produção de parapositrônio.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Esta seção de choque possui dependência na massa invariante, diferentemente da fórmula de Low, que tem distribuição do tipo delta de Dirac em W . Embora a distribuição da fórmula de Breit-Wigner não seja uma delta de Dirac, seu comportamento é sugestivo para tal, já que a seção de choque possui um pico muito acentuado em $W = M$, e cai muito rapidamente com uma pequena variação de W em torno de M . Embora exista esse comportamento análogo, a função de Breit-Wigner possui uma estrutura (Veja a Figura 2.5b). Devido à estreita faixa considerável na massa invariante, é inviável a construção de distribuições da seção de choque na massa invariante.

Este comportamento apresentado nas Figuras 2.5 ocorre devido ao positrônio possuir baixa energia de ligação entre pósitron e elétron, logo, sua energia no referencial de repouso se limita a variações muito menores do que a energia de repouso de seus constituintes.

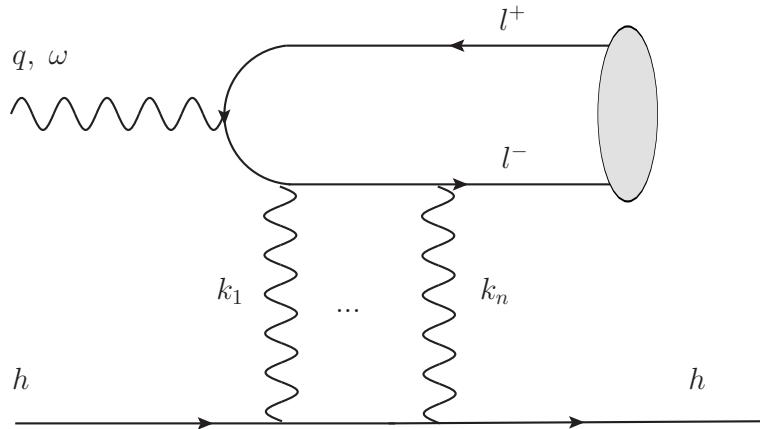
A equivalência entre as Equações de Breit-Wigner e Low, Equações (2.40) e (2.32), respectivamente, pode ser mostrada ao integrar ambas equações em W . Tais integrações são apresentadas no Apêndice A e mostram que

$$\int_0^\infty \sigma_{BW} dW = \int_0^\infty \sigma_{Low} dW = \frac{4\pi^2 \Gamma}{M^2}. \quad (2.41)$$

2.5 FOTOPRODUÇÃO DE ESTADOS LIGADOS DE LÉPTONS EM NÚCLEOS

Nesta seção analisamos a produção de estados ligados de léptons em processos fóton-núcleo, ilustrados na Figura 2.6, em que o fóton pode ser tanto real, quanto virtual. A figura ilustra a produção por um fóton de quadrimomento q , que ao interagir com n fótons do núcleo, de quadrimomentos k_1, \dots, k_n , dão origem ao estado ligado de léptons.

Figura 2.6 – Fotoprodução de estados ligados de léptons em núcleos.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

2.5.1 Fotoprodução de estados singletos em núcleos

Nesta subseção estamos interessados no processo $\gamma^* + h \rightarrow (l^+ l^-)_S + h$, onde γ^* é um fóton virtual de quadrimomento q , virtualidade $-q^2 > 0$ e energia ω . O estudo deste processo foi desenvolvido na referência [18], onde Gevorkyan e colaboradores consideraram a multiemissão de fótons pelo núcleo alvo de número atômico Z . Como nosso interesse nesta subseção são os estados singletos, o núcleo contribui com 1, 3, 5, ... fótons para a produção de estados ligados de léptons, ou seja, consideramos os efeitos de correções coulombianas. A seção de choque obtida para o processo descrito é dada por

$$\sigma_{\gamma^* + h \rightarrow (l^+ l^-)_S + h} = \frac{\pi Z^2 \alpha^6}{\left(m_l + \frac{Q^2}{4m_l}\right)^2} \zeta(3) \left[\ln\left(\frac{\omega}{m_l}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{Q^2}{4m_l^2}\right) - 1 - C(Z) \right], \quad (2.42)$$

com

$$C(Z) = \frac{1}{4} \int_0^1 \left\{ 1 - \left[F(i\alpha Z, -i\alpha Z; 1; z) \frac{\pi \alpha Z}{\operatorname{senh}(\pi \alpha Z)} \right]^2 \right\} \frac{(1+z)dz}{(1-z)\sqrt{z}}, \quad (2.43)$$

onde F é a função hipergeométrica de Gauss, $\zeta(3)$ é a zeta de Rieman ($\sum_1^\infty 1/n$), m_l é a massa do lepton produzido, e a variável z é definida como

$$z = \left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^2; \quad \tau = \frac{p_T^2}{4m_l^2 + Q^2}, \quad (2.44)$$

onde p_T é o momento transverso do fóton que dá origem ao estado ligado.

O termo $C(Z)$ na Equação (2.42) é referente à interação multifóton por parte do núcleo, enquanto os demais termos são relativos à produção a nível de Born. Este termo de correção coulombiana será de grande utilidade para obtenção de nossos resultados, pois nos permitirá estimar o impacto das correções de mais alta ordem da QED mesmo em análises de fotoprodução no referencial de centro de massa.

Com a Equação (2.42) podemos obter uma estimativa de fotoprodução em um núcleo por um fóton real a nível de Born, basta ignorarmos o termo $C(Z)$ e fazer $Q^2 = 0$. Com estas considerações, a seção de choque obtida é equivalente à seção de choque fóton-núcleo estimada com a fórmula de Low e com o formalismo da aproximação de fótons equivalentes, que será discutida no capítulo seguinte e demonstrada no Apêndice B. Uma outra alternativa para estudo deste processo a nível de Born é com os desenvolvimentos de Babette Döbrich *et al* [46], onde estudou-se a fotoprodução de Axion em núcleos. Adaptando o estudo citado para a produção de paraestados ligados de leptons, obtemos a seção de choque

$$\sigma_{\gamma+h \rightarrow (l^+l^-)_S+h} = \frac{\pi Z^2 \alpha^6}{4m_l^2} \frac{(-4\omega^2 t - 16m_l^4)}{t^2} F(|t|)^2 \text{sen}(\theta), \quad (2.45)$$

onde

$$t = -\frac{4m_l^4}{\omega^2} - p_T^2 + 2\omega p_T \theta \cos(\phi) - \omega^2 \theta^2, \quad (2.46)$$

com θ sendo o ângulo entre o momento do fóton e o eixo z (eixo de incidência da partícula emissora do fóton), e ϕ o ângulo entre o momento transverso do fóton e o momento transverso do estado ligado produzido. F é o fator de forma nuclear do núcleo alvo e sua variável, $|t|$, é o quadrado do quadrimomento do fóton emitido pelo núcleo alvo. Discutiremos em mais detalhes o fator de forma nuclear no próximo capítulo.

2.5.2 Fotoprodução de estados tripletos em núcleos

Vamos analisar nesta subseção o processo $\gamma^* + h \rightarrow (l^+l^-)_T + h$. Este processo foi estudado na referência [18]. O diagrama neste caso continua sendo o mesmo da Figura 2.6, mas para a produção de estados tripletos o núcleo alvo contribui com um número par de fótons. A seção de choque para este processo é dada por

$$\sigma_{\gamma^*+h \rightarrow (l^+l^-)_T+h} = \frac{4\pi Z^4 \alpha^8}{\left(m_l^{2/3} + \frac{Q^2}{4m_l^{2/3}}\right)^3} \zeta(3) B(Z), \quad (2.47)$$

com

$$B(Z) = \left[\frac{\pi Z \alpha}{\operatorname{senh}(\pi Z \alpha)} \right]^2 \frac{1}{8} \int_0^1 [F(i\alpha Z, -i\alpha Z; 1; z)]^2 \sqrt{z}(1+z) dz. \quad (2.48)$$

Os parâmetros e as funções aqui utilizados são os mesmo definidos na subseção anterior. A Equação (2.47) também leva em conta a interação multifóton, sendo o número de fôtons emitidos pelo núcleo alvo 2, 4, 6, A correção coulombiana que não é abordada, tanto na Equação (2.47) quanto na Equação (2.42), é o caso em que o núcleo alvo interage emitindo mais de um fóton com mais de um fóton incidente, dando origem ao estado ligado. Este tipo de correção coulombiana é desprezível para produção de estados singletos e tripletos de léptons, já que sua contribuição é menor que 0,4% da seção de choque a nível de Born [17].

2.6 CONCLUSÃO

Neste capítulo abordamos de modo geral a Eletrodinâmica Quântica e a sua aplicação em processos de fotoprodução. Obtivemos a seção de choque para a produção de estados ligados de léptons a partir de dois fôtons de duas maneiras distintas. Também obtivemos seções de choque para a produção de estados ligados de léptons na interação de fôtons com núcleos. Os resultados aqui obtidos serão de grande utilidade nos capítulos posteriores para obtenção da seção de choque hadrônica. No próximo capítulo apresentamos a aproximação de fôtons equivalentes.

3 APROXIMAÇÃO DE FÓTONS EQUIVALENTES

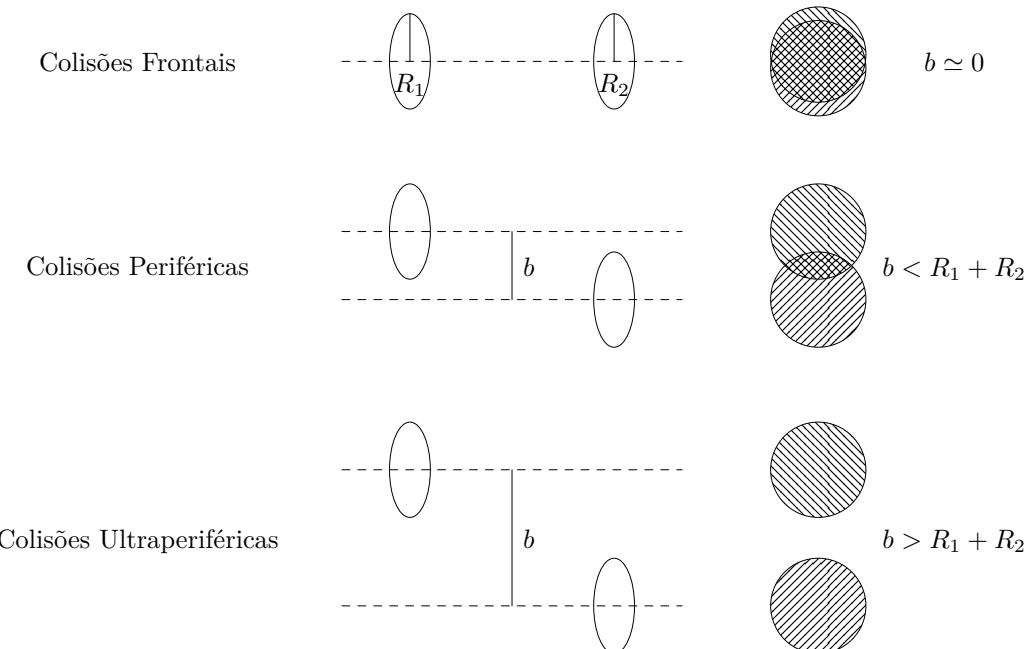
Neste capítulo apresentamos a aproximação de fótons equivalentes, que consiste em um método semiclássico de substituir os campos eletromagnéticos de uma partícula carregada por um pulso de radiação equivalente [47] e dele obter o fluxo de fótons. Sua aplicabilidade se dá em processos que são mediados por fótons. Basta conhecermos as seções de choque fóton-fóton ou fóton-hádron e a densidade de fótons equivalentes. Fatoramos a seção de choque hadrônica multiplicando as seções de choque mais elementares pelos fluxo de fóton e integramos sobre todo seu espectro.

3.1 COLISÕES ULTRAPERIFÉRICAS DE HÁDRONS

Colisões hadrônicas podem ser classificadas em três grupos, como apresentado na Figura 3.1. As colisões frontais são aquelas caracterizadas por ter o parâmetro de impacto aproximadamente zero. Colisões periféricas se caracterizam por um parâmetro de impacto menor do que a soma dos raios dos hádrons incidentes. Nestas duas classes de colisões, quando acontecem em altas energias, os hádrons chegam muito próximos de tal modo que a interação predominante na colisão é a interação forte. Nestes casos os hádrons incidentes acabam se rompendo e o produto da colisão se rearranjando em novos hádrons.

A terceira classe de colisões é denominada ultraperiférica, sendo esta caracterizada pelo parâmetro de impacto maior que a soma dos raios dos hádrons que estão colidindo. Nossa interesse neste trabalho está nesta classe de colisões, já que nelas os hádrons ficam

Figura 3.1 – Classes de colisões de hádrons.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

razoavelmente distantes durante a colisão, de tal modo que a interação forte é suprimida [48], e podemos analisar a colisão via QED.

3.2 DERIVAÇÃO CLÁSSICA DO ESPECTRO DE FÓTONS EQUIVALENTES

A aproximação de fótons equivalentes, também conhecida como aproximação de Weizäcker-Williams ou método dos *quanta* virtuais, é um método semiclássico desenvolvido no início dos anos 1930 [47]. Os primórdios do referido método surgiu em estudos de colisões de partículas carregadas com a matéria, desenvolvidos por Niels Bohr [49, 50], Enrico Fermi [51] e outros. Weizäcker e Williams partiram destes estudos prévios e, concomitantemente, desenvolveram o método [52, 53, 54, 55] aplicando algumas correções quânticas e relativísticas.

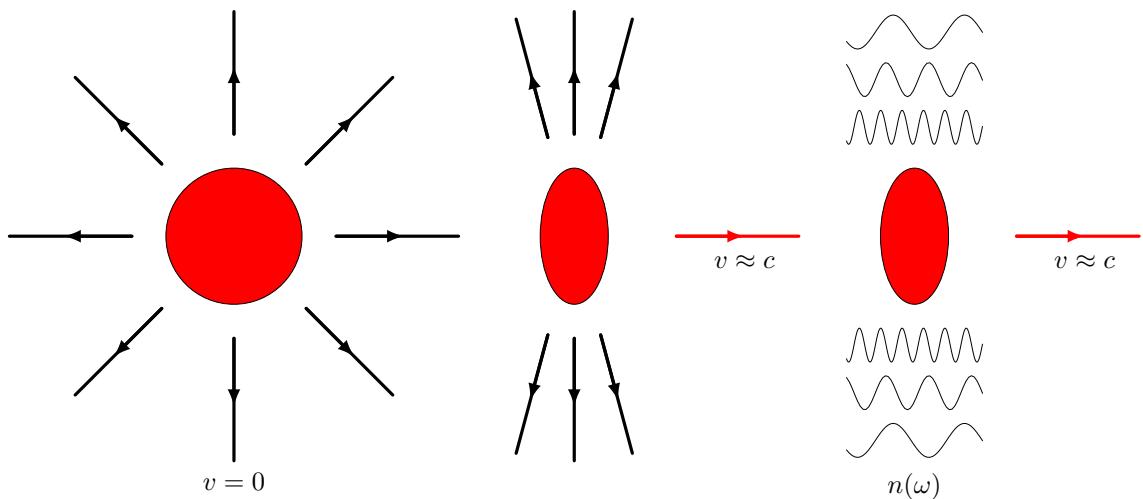
Este método baseia-se nas transformações relativísticas do campo eletromagnético de uma partícula carregada, que no limite ultrarrelativístico assemelha-se a um pulso de onda plana polarizada, como ilustrado na Figura 3.2. Devido à esta semelhança mencionada, substituímos o campo eletromagnético da partícula por um fluxo de fótons equivalentes.

3.2.1 Transformação dos Campos Eletromagnéticos

Para compreender como os campos eletromagnéticos se transformam devido ao movimento relativístico, vamos analisar o movimento de uma partícula carregada de dois referenciais inerciais distintos, S e S' (Figura 3.3). Consideramos que o movimento do referencial S' se dá no sentido positivo do eixo z do referencial S , e que as origens dos dois referenciais coincidem em $t = 0$.

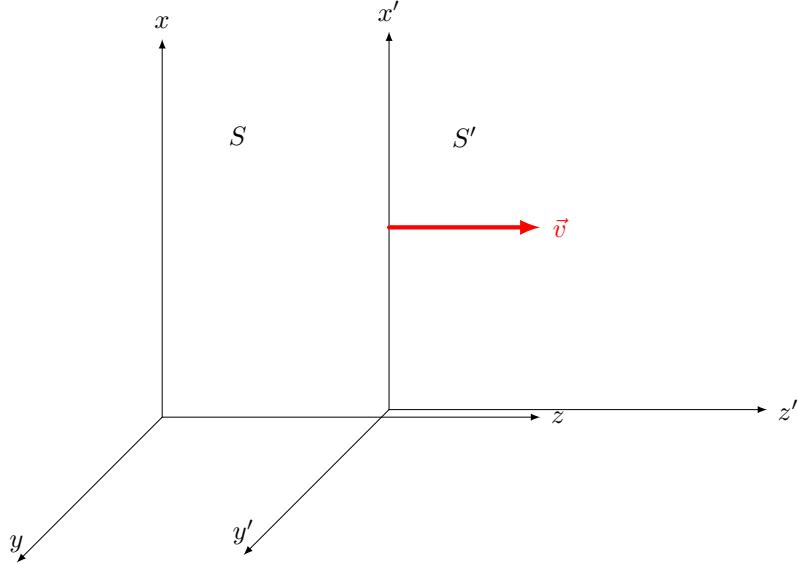
As coordenadas dos dois referenciais se relacionam através das transformações de

Figura 3.2 – Aproximação de fótons equivalentes.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Figura 3.3 – Movimento relativo de dois referenciais inerciais.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Lorentz [42, 56]

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad (3.1)$$

onde Λ_{ν}^{μ} é a matriz de transformação de Lorentz, definida por

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $\beta = v/c$ é a velocidade entre os dois referenciais em unidades naturais, e γ o fator de Lorentz ($\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$) .

Fazendo uso do formalismo de quadrvetores da relatividade restrita [56], é possível escrever os campos elétrico e magnético com uma única equação, a equação do tensor do campo eletromagnético

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}, \quad (3.2)$$

onde A é o quadripotencial e ∂ a derivada quadridimensional.

A transformação de Lorentz do tensor campo eletromagnético da Equação (3.2) é dada pela equação

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} F^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta}^{\nu} \quad (3.3)$$

onde $F'^{\mu\nu}$ são as componentes do tensor campo eletromagnético no referencial com linha da Figura 3.3.

Utilizando as Equações (3.2) e (3.3) é possível obter as seguintes transformações para as componentes do campo elétrico e do campo magnético

$$\begin{aligned} E'_x &= \gamma(E_x - \beta B_y); & B'_x &= \gamma(B_x + \beta E_y); \\ E'_y &= \gamma(E_y + \beta B_x); & B'_y &= \gamma(B_y - \beta E_x); \\ E'_z &= E_z; & B'_z &= B_z. \end{aligned} \quad (3.4)$$

As transformações inversas podem ser obtidas de duas maneiras distintas: fazendo $\beta \rightarrow -\beta$ e trocando os campos com linha por sem linha e vice-versa; ou trocando as matrizes por suas inversas e os campos com linha por sem linha e vice-versa. Ambos métodos levam ao mesmo conjunto de equações, apresentadas a seguir

$$\begin{aligned} E_x &= \gamma(E'_x + \beta B'_y); & B_x &= \gamma(B'_x - \beta E'_y); \\ E_y &= \gamma(E'_y - \beta B'_x); & B_y &= \gamma(B'_y + \beta E'_x); \\ E_z &= E'_z; & B_z &= B'_z. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2.2 Campo de uma Carga Pontual

Vamos analisar uma carga pontual q fixa na origem do Referencial com linha da Figura 3.4. Consideramos que a origem dos dois referenciais coincidem em $t = 0$. Quando a velocidade entre os dois referenciais torna-se muito grande, próxima à velocidade da luz, os efeitos relativísticos tornam-se evidentes.

Iniciamos obtendo as componentes do campo eletromagnético em S' , mais precisamente no ponto $P = (r, 0, 0)$ em S e $P' = (r, 0, -vt')$ em S' (ver a Figura 3.4). Como a carga q está em repouso em relação ao referencial S' , no ponto P' haverá apenas campo elétrico, com componentes em unidades gaussianas dadas por

$$E'_x = \frac{qr}{r'^3}.$$

e

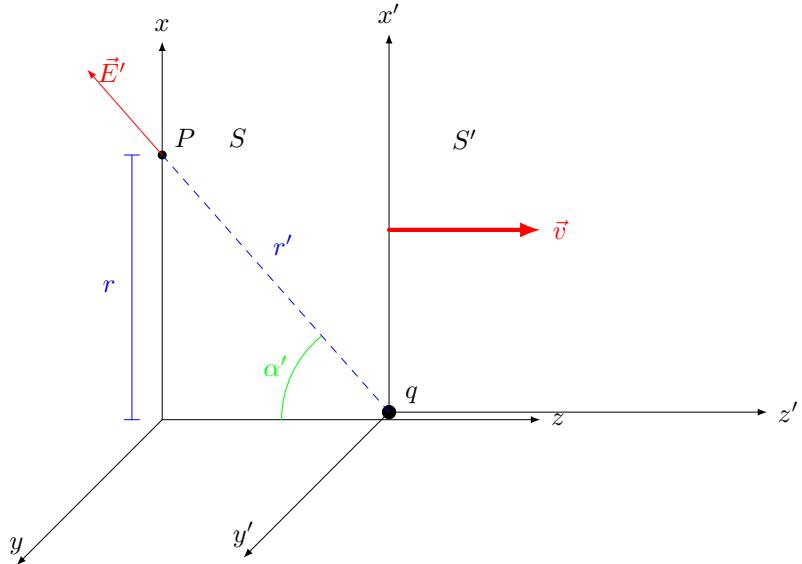
$$E'_z = -\frac{qvt'}{r'^3}$$

Escrevendo estas equações em termos das coordenadas do referencial S , e utilizando as transformações de Lorentz da Equação (3.1), obtemos para os campos em S'

$$E'_x = \frac{qr}{(r^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.6)$$

$$E'_y = B'_x = B'_y = B'_z = 0. \quad (3.7)$$

Figura 3.4 – Campo eletromagnético de uma carga pontual q na origem do referencial S' visto de S .



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

e

$$E'_z = -\frac{q\gamma vt}{(r^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.8)$$

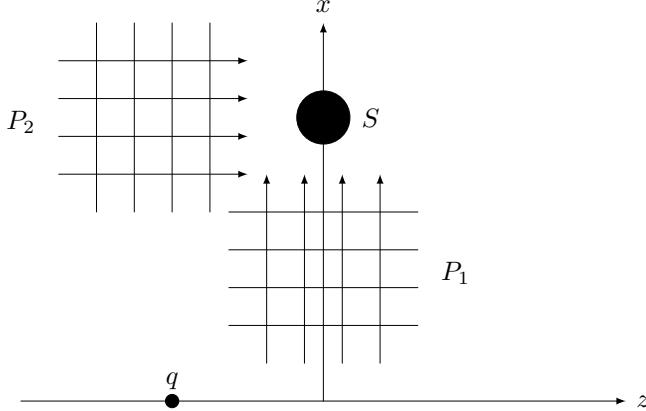
E, substituindo as Equações (3.6), (3.7) e (3.8) nas Equações (3.5), obtemos os campos transformados, que são dados por

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma qr}{(r^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}; & B_x &= 0; \\ E_y &= 0; & B_y &= \beta E_z; \\ E_z &= -\frac{q\gamma vt}{(r^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}; & B_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

No limite ultrarrelativístico, em que $\gamma \gg 1$ e $\beta \approx 1$, a componente em y do campo magnético é igual à componente z do campo elétrico. Os campos elétricos não nulos variam no tempo de forma muito peculiar. A componente em z tem máximos e mínimos bem definidos e alternam muito rapidamente em $t = 0$ entre valores positivos e negativos, já que trata-se de uma função ímpar.

A componente em x do campo elétrico no limite em que $v \rightarrow c$ é uma delta de Dirac. Seus valores tendem a zero para $t \neq 0$ e tem um pico em $t = 0$, que tende ao infinito. Seu comportamento evidencia a semelhança do campo elétrico transformado com um pulso de onda plana polarizada, justificando a substituição por um fluxo de fótons.

Figura 3.5 – Pulsos de radiação devido ao movimento da carga q ao longo do eixo z .



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

3.2.3 Espectro de fótons Equivalentes

A cada componente não nula de campo elétrico discutida anteriormente (E_x, E_z), podemos associar um pulso de radiação equivalente, como ilustrado na Figura 3.5.

Para obter o espectro de radiação equivalente da partícula carregada relativística, precisamos obter o espectro de frequência $I(\omega, r)$ (energia por unidade de área por intervalo unitário de frequência) dos pulsos de radiação P_1 e P_2 .

Via eletrodinâmica clássica [42], é possível mostrar que

$$I(\omega, r) = \frac{c}{2\pi} |E(\omega)|^2 \quad (3.10)$$

onde $E(\omega)$ é a transformada de Fourier do campo elétrico do pulso de radiação, definida por

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt. \quad (3.11)$$

Portanto, para o pulso P_1 temos que o espectro de frequência I_1 é

$$I_1(\omega, r) = \frac{c}{2\pi} |E_x(\omega)|^2, \quad (3.12)$$

onde, ao substituir a primeira equação do conjunto (3.10) na Equação (3.11) obtemos

$$\begin{aligned} E_x(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\gamma r}{(r^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} e^{i\omega t} dt \\ E_x(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q\gamma}{r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} dt}{\left(1 + \frac{\gamma^2 v^2 t^2}{r^2}\right)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

fazendo a troca de variáveis $\xi = \frac{\gamma v t}{r}$, obtemos

$$E_x(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{rv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega b\xi/\gamma v} d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}}. \quad (3.14)$$

No Apêndice C demonstramos que a solução desta integral imprópria nos leva a

$$E_x(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q}{rv} \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right) K_1 \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right) \quad (3.15)$$

onde K_1 é uma função de Bessel modificada de segundo tipo. Então, substituindo a Equação (3.15) na Equação (3.12), encontramos o espectro de frequência para o Pulso P_1 , dado por

$$I_1(\omega, r) = c \left(\frac{q}{\pi v r} \right)^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right)^2 K_1^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right). \quad (3.16)$$

Agora, de maneira análoga, obteremos o espectro de frequência para o Pulso P_2

$$I_2(\omega, r) = \frac{c}{2\pi} |E_z(\omega)|^2, \quad (3.17)$$

onde $E_z(\omega)$ é obtido ao substituir a quinta equação do conjunto de Equações (3.9) na Equação (3.11):

$$E_z(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q\gamma v}{r^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{i\omega t} dt}{\left(1 + \frac{\gamma^2 v^2 t^2}{r^2}\right)^{3/2}}. \quad (3.18)$$

Como $\xi = \frac{\gamma v t}{r}$,

$$E_z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{rv\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{i\omega r\xi/\gamma v} d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}}. \quad (3.19)$$

A solução desta integral é feita no Apêndice C, e nos fornece o resultado

$$E_z(\omega) = -\frac{q}{rv\gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right) K_0 \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right), \quad (3.20)$$

com K_0 sendo a função de Bessel modificada de primeiro tipo. Ao substituir este resultado na Equação (3.17), obtemos

$$I_2(\omega, r) = c \left(\frac{q}{\pi v r \gamma} \right)^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right)^2 K_0^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right). \quad (3.21)$$

Podemos associar a probabilidade $P(r)$ de um determinado evento eletromagnético com o espectro de frequência total do projétil (soma dos espectros de frequência de cada pulso de energia) e com a seção de choque da interação do fóton da seguinte forma [42, 47, 57]

$$P(r) = \int I(\omega, r) \sigma_{\gamma}(\omega) \frac{d\omega}{\hbar\omega} = \int N(\omega, r) \sigma_{\gamma}(\omega) d\omega, \quad (3.22)$$

onde $\sigma_{\gamma}(\omega)$ é a seção de choque de interação de um fóton que dá origem ao evento eletromagnético de nosso interesse. Do lado direito da equação acima temos $N(\omega, r)$, que é interpretado como fluxo de fótons equivalentes do projétil (número de fótons por unidade

de área por unidade de energia), e que é igual ao espectro de frequência dividido pela energia do fóton e dividido pela constante de Planck. Então

$$\begin{aligned} N(\omega, r) &= \frac{c}{\hbar\omega} \left(\frac{q}{\pi vr} \right)^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right)^2 K_1^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right) + \frac{c}{\hbar\omega} \left(\frac{q}{\pi vr\gamma} \right)^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right)^2 K_0^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right) \\ N(\omega, r) &= \frac{c}{\hbar\omega} \left(\frac{q}{\pi vr} \right)^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right)^2 \left[K_1^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right) + \frac{1}{\gamma^2} K_0^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma v} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Podemos simplificar esta equação ao escrevê-la em unidades naturais, onde $\hbar = c = 1$. É comum escrever a carga elétrica em termos da constante de estrutura fina, logo temos que $q^2 = Z^2 e^2 = Z^2 \alpha$ (em unidades Gaussianas). Como nosso interesse é o limite ultrarrelativístico, podemos fazer $v \approx c = 1$. Com estas modificações, a Equação (3.23) torna-se

$$N(\omega, r) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 \omega r^2} \left(\frac{\omega r}{\gamma} \right)^2 \left[K_1^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma^2} K_0^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma} \right) \right]. \quad (3.24)$$

A seção de choque total de uma colisão hadrônica mediada por fótons pode ser fatorada no produto da seção de choque fóton-alvo (σ_γ) pelo fluxo de fótons do projétil integrado no espaço de fótons equivalentes e na energia dos fótons [47], da seguinte forma

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma h} &= \int N(\omega, r) \sigma_\gamma d\omega d^2\vec{r} \\ \sigma_{\gamma h} &= 2\pi \int r N(\omega, r) \sigma_\gamma d\omega dr. \end{aligned} \quad (3.25)$$

O intervalo de integração em r é definido como $r_{min} \leq r \leq \infty$, onde r_{min} é obtido com a relação de incerteza $r_{min} \geq 1/p_{max}$ [42]. Logo, é comum adotar o limite inferior como $r_{min} = 1/\gamma mv$ ou $r_{min} = R$, com R sendo o raio do hadrôn fonte de fótons.

No caso de eventos mediados apenas por fótons em colisões de dois hadrons, podemos fatorar a seção de choque total (σ_{hh}) no produto da seção de choque fóton-fóton com os fluxo de fótons dos hadrons integrado no espaço de fótons equivalentes e nas energias dos fótons:

$$\sigma_{h_1 h_2} = \int N(\omega_1, r_1) N(\omega_2, r_2) \sigma_{\gamma\gamma} d\omega_1 d^2\vec{r}_1 d\omega_2 d^2\vec{r}_2. \quad (3.26)$$

Podemos ainda definir o fluxo de fótons em função apenas da energia dos fótons como

$$n(\omega) = \omega \int N(\omega, r) d^2\vec{r} \quad (3.27)$$

então, ao substituir a Equação (3.24) e executar a integração na distância transversa [42, 47] no intervalo $R \leq r \leq \infty$, obtemos

$$n(\omega) = \frac{2Z^2\alpha}{\pi} \left\{ \left(\frac{\omega R}{\gamma} \right) K_0 \left(\frac{\omega R}{\gamma} \right) K_1 \left(\frac{\omega R}{\gamma} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega R}{\gamma} \right)^2 \left[K_1^2 \left(\frac{\omega R}{\gamma} \right) - K_0^2 \left(\frac{\omega R}{\gamma} \right) \right] \right\}. \quad (3.28)$$

3.3 DERIVAÇÃO QUÂNTICA DO ESPECTRO DE FÓTONS EQUIVALENTES

Nesta seção apresentaremos a derivação da aproximação de fótons equivalentes por métodos quânticos, seguindo a referência [58]. Como já mencionado anteriormente, tal aproximação visa substituir o campo eletromagnético por um fluxo de fótons que seja equivalente a ele. Então uma partícula carregada de quadrimomento inicial q , ao interagir com uma partícula de quadrimomento inicial p , troca energia e momento não mais por estarem imersas uma no campo eletromagnético da outra, e sim por trocarem fótons virtuais, como ilustrado no diagrama da Figura 3.6.

Sabemos que um fóton virtual é caracterizado por ter sua virtualidade Q^2 diferente de zero [33],

$$k^2 = \omega^2 - \vec{k}^2 = -Q^2 \neq 0. \quad (3.29)$$

Para deduzirmos tal aproximação, precisamos relacionar o processo descrito acima com o processo em que a partícula de quadrimomento q interage com um fóton real k (Figura 3.7).

Como uma das características dos fótons reais é possuir virtualidade nula

$$k^2 = \omega^2 - \vec{k}^2 = -Q^2 = 0, \quad (3.30)$$

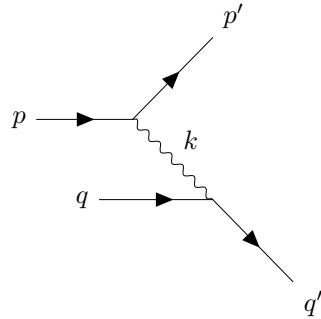
só poderemos relacionar as interações por troca de fóton virtual, da Figura 3.6, com a troca de fóton real, da Figura 3.7, no regime de baixas virtualidade de fótons, ou seja, quando sua virtualidade for desprezível. Quando trata-se de elétrons como fonte de fótons, é necessário que a virtualidade seja inferior ao quadrado da massa do elétron

$$Q_{máx}^2 = m_e^2.$$

Já para o caso de hadrons como fonte de fótons, que é o interesse nesta dissertação, necessita-se que a virtualidade seja ao máximo igual ao inverso do quadrado do raio do hadrôn em questão:

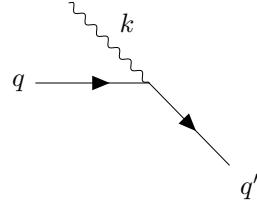
$$Q_{máx}^2 = \frac{1}{R^2}.$$

Figura 3.6 – Interação de uma partícula com quadrimomento inicial q com uma partícula de quadrimomento inicial p .



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Figura 3.7 – Interação de uma partícula com quadrimomento inicial q com um fóton real de quadrimomento k .



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Fazendo uso das regras de Feynman [37], as amplitudes invariantes dos processos das Figura 3.6 e 3.7 são, respectivamente,

$$\mathcal{M} = Z e^2 \frac{1}{k^2} j_\mu J^\mu \quad (3.31)$$

e

$$\mathcal{M}^r = -e \varepsilon_\mu J^\mu, \quad (3.32)$$

onde j_μ e J^μ são quadricorrentes de transição, definidas mais adiante com auxílio das regras de Feynman.

Estamos interessados no caso em que a partícula p é ultrarrelativística, e a partícula q está inicialmente em repouso. Consideraremos que o movimento da partícula ultrarrelativística se da no sentido positivo do eixo z . Sob estas condições, é válido que $q^2 = m^2$ e $p^2 = M^2 \ll E^2$, onde m é a massa da partícula de quadrimomento q e M é a massa da partícula de quadrimomento p e energia E . Vamos olhar com mais atenção para a quadricorrente j_μ da Equação (3.31), que escrita com a utilização das regras de Feynman torna-se

$$j^\mu = \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p). \quad (3.33)$$

Como, pela conservação do quadrimomento no vértice superior da Figura 3.6, $p' = p - k$, então

$$j^\mu = \bar{u}(p - k)\gamma^\mu u(p).$$

Para p ultrarrelativístico e baixo k , podemos aproximar para

$$j^\mu \approx \bar{u}(p)\gamma^\mu u(p).$$

Podemos reescrever esta equação em termos dos componentes da matriz, deixando as somas implícitas em α e β :

$$j^\mu \approx \bar{u}_\alpha(p)\gamma_{\alpha\beta}^\mu u_\beta(p)$$

$$j^\mu \approx \gamma_{\alpha\beta}^\mu \bar{u}_\alpha(p)u_\beta(p)$$

usando a relação de completeza dos spinores (com $\gamma^\mu p_\mu = \text{slashed } p$),

$$\bar{u}_\alpha(p)u_\beta(p) = \frac{1}{2}(\not{p} + m)_{\beta\alpha}, \quad (3.34)$$

obtemos

$$j^\mu \approx \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}^\mu (\not{p} + m)_{\beta\alpha}.$$

Por tratar-se do limite de altas energias, podemos considerar que a massa da partícula é muito menor que seu quadrimomento, e então desconsiderá-la.

$$j^\mu \approx \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}^\mu (\not{p})_{\beta\alpha}$$

$$j^\mu \approx \frac{1}{2}(\gamma^\mu \not{p})_{\alpha\alpha}$$

$$j^\mu \approx \frac{1}{2}Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu p_\nu)$$

usando $Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$, obtemos

$$j^\mu \approx 2p^\mu. \quad (3.35)$$

Vamos utilizar a condição de transversalidade da corrente j^μ

$$j^\mu k_\mu = 0, \quad (3.36)$$

ao substituir a Equação (3.35) na Equação (3.36), temos

$$j^\mu k_\mu = 2p^\mu k_\mu$$

$$j^\mu k_\mu = 2(E, 0, 0, p_z) \cdot (\omega, k_x, k_y, k_z)$$

$$j^\mu k_\mu = 2E\omega - 2p_z k_z = 0.$$

Utilizando $p_z = Mv\gamma$ e $E = M\gamma$, obtemos a relação

$$\omega = vk_z. \quad (3.37)$$

Agora vamos trabalhar com a virtualidade do fóton trocado,

$$Q^2 = -k^2 = -(\omega, k_x, k_y, k_z) \cdot (\omega, k_x, k_y, k_z) \quad (3.38)$$

$$Q^2 = -\omega^2 + \vec{k}_\perp^2 + k_z^2 \quad (3.39)$$

substituindo a Equação (3.37) na Equação (3.39)

$$\begin{aligned} Q^2 &= -\omega^2 + \vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \\ Q^2 &= \vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1 - v^2) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Como estamos utilizando o limite de altas energias, vamos aproximar a velocidade ao quadrado presente no denominador do lado direito da Equação (3.40) pela velocidade da luz ao quadrado, ou seja, por 1. Então

$$Q^2 = \vec{k}_\perp^2 + \omega^2(1 - v^2).$$

E, por fim, escrevendo em termos do γ de Lorentz

$$Q^2 = \vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}. \quad (3.41)$$

Outra grandeza que aparece nas amplitudes invariantes das Equações (3.31) e (3.32) é a quadricorrente J^μ . Vamos partir da sua condição de transversalidade para escrevê-la de maneira mais conveniente.

$$J^\mu k_\mu = 0 \quad (3.42)$$

$$J^\mu k_\mu = (J_0, \vec{J}_\perp, J_z) \cdot (\omega, \vec{k}_\perp, k_z)$$

$$J^\mu k_\mu = J_0\omega - \vec{J}_\perp \cdot \vec{k}_\perp - J_z k_z. \quad (3.43)$$

Isolando J_0 e substituindo a Equação (3.37)

$$J_0 = \frac{J_z}{v} + \frac{\vec{J}_\perp \cdot \vec{k}_\perp}{\omega}. \quad (3.44)$$

Com os resultados obtidos nas Equações (3.35) e (3.44), podemos realizar o produto interno entre as quadricorrentes que está presente na Equação (3.31):

$$j_\mu J^\mu = 2p_\mu \cdot (J_0, \vec{J}) \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} j_\mu J^\mu &= 2(E, 0, 0, p_z) \cdot \left(\frac{J_z}{v} + \frac{\vec{J}_\perp \cdot \vec{k}_\perp}{\omega}, \vec{J}_\perp, J_z \right) \\ j_\mu J^\mu &= \frac{2E}{\omega} \left(\vec{J}_\perp \cdot \vec{k}_\perp + \frac{\omega M^2}{E^2} J_z \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

O quadrivetor de polarização do fóton trocado será escrito com ajuda do calibre de Coulomb transverso em 3D, dado por

$$\epsilon^\mu = (0, \vec{\epsilon}). \quad (3.47)$$

Logo, seu produto com o quadrimomento do fóton trocado é

$$\epsilon^\mu \cdot k_\mu = (0, \vec{\epsilon}) \cdot (\omega, \vec{k}) \quad (3.48)$$

$$\epsilon^\mu \cdot k_\mu = -\vec{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$$

$$0 = -\vec{\epsilon}_\perp \cdot \vec{k}_\perp - \epsilon_z k_z$$

isolando ϵ_z , escrevemos

$$\epsilon_z = -\frac{\vec{\epsilon}_\perp \cdot \vec{k}_\perp}{\omega}. \quad (3.49)$$

Agora estamos em condições de desenvolver o produto escalar entre a quadricorrente J^μ e o quadrivetor polarização ϵ_μ que aparece na Equação (3.32).

$$J^\mu \cdot \epsilon_\mu = (J_0, \vec{J}) \cdot (0, \vec{\epsilon}) \quad (3.50)$$

$$J^\mu \cdot \epsilon_\mu = -\vec{J} \cdot \vec{\epsilon}$$

$$J^\mu \cdot \epsilon_\mu = -\vec{J}_\perp \cdot \vec{\epsilon}_\perp - J_z \epsilon_z. \quad (3.51)$$

Substituindo o resultado obtido na Equação (3.49) para a componente z do quadrivetor polarização, obtemos

$$\begin{aligned} J^\mu \cdot \epsilon_\mu &= -J_z \left(-\frac{\vec{\epsilon}_\perp \cdot \vec{k}_\perp}{\omega} \right) - \vec{J}_\perp \cdot \vec{\epsilon}_\perp \\ J^\mu \cdot \epsilon_\mu &= -\vec{\epsilon}_\perp \cdot \left(\vec{J}_\perp - \vec{k}_\perp \frac{J_z}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Como $\vec{\epsilon}$ é perpendicular a \vec{k} , podemos com uma boa aproximação escrever o momento transverso do fóton em termos de seu vetor polarização, já que o fóton possui a maior parte de seu momento na direção z . Neste caso,

$$\vec{\epsilon}^2 = \vec{\epsilon}_\perp^2 + \epsilon_z^2 \approx \vec{\epsilon}_\perp^2. \quad (3.53)$$

Como o vetor polarização é unitário,

$$\vec{\epsilon}_\perp^2 \approx 1,$$

logo,

$$\vec{\epsilon}_\perp \approx \frac{\vec{k}_\perp}{|\vec{k}_\perp|},$$

ou

$$\vec{k}_\perp \approx |\vec{k}_\perp| \vec{\epsilon}_\perp. \quad (3.54)$$

Ao substituir esta equação na Equação (3.46), obtemos

$$j_\mu J^\mu = \frac{2E}{\omega} \left(|\vec{k}_\perp| \vec{\epsilon}_\perp \cdot \vec{J}_\perp + \frac{\omega M^2}{E^2} J_z \right). \quad (3.55)$$

Agora que obtemos os produtos internos presentes nas Equações (3.31) e (3.32), podemos reescrevê-las com auxílio das Equações (3.52) e (3.55):

$$\mathcal{M} = Ze^2 \frac{1}{k^2} \frac{2E}{\omega} \left(|\vec{k}_\perp| \vec{\epsilon}_\perp \cdot \vec{J}_\perp + \frac{\omega M^2}{E^2} J_z \right). \quad (3.56)$$

e

$$\mathcal{M}^r = e \vec{\epsilon}_\perp \cdot \left(\vec{J}_\perp - \vec{k}_\perp \frac{J_z}{\omega} \right). \quad (3.57)$$

Podemos desprezar os segundos termos entre parênteses nas duas expressões das amplitudes invariantes dos dois processos, já que no limite ultrarrelativístico

$$\frac{\omega M^2}{E^2} \ll |\vec{k}_\perp|$$

e

$$\vec{\epsilon}_\perp \cdot \vec{J}_\perp \gg \vec{\epsilon}_\perp \cdot \vec{k}_\perp \frac{J_z}{\omega}.$$

Então, temos

$$\mathcal{M} = Ze^2 \frac{1}{k^2} \frac{2E}{\omega} |\vec{k}_\perp| \vec{\epsilon}_\perp \cdot \vec{J}_\perp \quad (3.58)$$

e

$$\mathcal{M}^r = e \vec{\epsilon}_\perp \cdot \vec{J}_\perp. \quad (3.59)$$

Assim, podemos escrever a amplitude invariante da Equação (3.58) em termos da amplitude invariante da Equação (3.59):

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^r \frac{Ze}{k^2} \frac{2E}{\omega} |\vec{k}_\perp|. \quad (3.60)$$

Utilizando a definição de seção de choque apresentada no Capítulo 2 (Equação (2.8)), é fácil mostrar que as seções de choque diferenciais dos processos das Figuras 3.7 e 3.6 são [59], respectivamente.

$$d\sigma^r = |\mathcal{M}^r|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) \frac{1}{4m\omega} d\rho_{q'} \quad (3.61)$$

e

$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) \frac{1}{4mE} \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} d\rho_{q'}. \quad (3.62)$$

Substituindo a Equação (3.60) na Equação (3.62), obtemos

$$d\sigma = |\mathcal{M}^r|^2 \frac{Z^2 e^2}{k^4} \left(\frac{2E}{\omega} \right)^2 |\vec{k}_\perp|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) \frac{1}{4mE} \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} d\rho_{q'}. \quad (3.63)$$

Como as duas seções de choque diferenciais estão escritas em termos da mesma amplitude invariante, e possuem outros termos em comum, podemos substituir a Equação (3.61) na Equação (3.63) e escrever a seção de choque diferencial do processo da Figura 3.6 em termos da seção de choque diferencial da interação com um fóton real, ilustrado na Figura 3.7:

$$d\sigma = d\sigma^r Z^2 e^2 \frac{|\vec{k}_\perp|^2}{4\pi^3} \frac{d^3 \vec{p}'}{\omega k^4} \quad (3.64)$$

como $e^2 = 4\pi\alpha$ (em unidades naturais), obtemos

$$d\sigma = \frac{d\sigma^r}{\omega} \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2} \frac{|\vec{k}_\perp|^2}{k^4} d^3 \vec{p}'. \quad (3.65)$$

Ao fazer uso da relação obtida na Equação (3.41), $-k^2 = \vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}$, encontramos

$$d\sigma = \frac{d\sigma^r}{\omega} \left[\frac{Z^2 \alpha}{\pi^2} \frac{|\vec{k}_\perp|^2}{\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2} \right)^2} \right] d^3 \vec{p}'. \quad (3.66)$$

Sendo que, da conservação do momento no vértice da Figura 3.7, temos $\vec{k} = \vec{p} - \vec{p}'$. Então a integração em $d^3\vec{p}'$ é equivalente à integração em $d^3\vec{k}$. Logo, podemos reescrever a equação acima como

$$d\sigma = \frac{d\sigma^r}{\omega} \left[\frac{Z^2\alpha}{\pi^2} \frac{|\vec{k}_\perp|^2}{\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)^2} \right] d^3\vec{k}. \quad (3.67)$$

Como a seção de choque total da interação eletromagnética pode ser fatorada na seção de choque de interação do fóton-partícula somada sobre todos os fótons, podemos escrever

$$d\sigma = d\sigma^r \frac{n(\vec{k})}{\omega} d^3\vec{k}. \quad (3.68)$$

Comparando as Equações (3.67) e (3.68), facilmente vemos que

$$n(\vec{k}) = \frac{Z^2\alpha}{\pi^2} \frac{|\vec{k}_\perp|^2}{\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)^2}. \quad (3.69)$$

Este é o fluxo de fótons em função do momento dos fótons. Com esta definição, podemos voltar à Equação (3.68) e utilizar $d^3\vec{k} = dk_z d^2\vec{k}_\perp = d\omega d^2\vec{k}_\perp$, então

$$d\sigma = d\sigma^r \frac{n(\vec{k})}{\omega} d\omega d^2\vec{k}_\perp \quad (3.70)$$

sendo que $d^2\vec{k}_\perp = |\vec{k}_\perp| d|\vec{k}_\perp| d\phi$, temos

$$d\sigma = d\sigma^r \frac{n(\vec{k})}{\omega} d\omega |\vec{k}_\perp| d|\vec{k}_\perp| d\phi. \quad (3.71)$$

Podemos agora integrar em $d|\vec{k}_\perp|$ e em ϕ . O limite de integração em $|\vec{k}_\perp|$ é definido de maneira similar à integração em r na seção anterior. Como $r_{min} = R$, e do princípio da incerteza $r_{min} = 1/p_{max}$, temos que $|\vec{k}_\perp| \leq 1/R$.

$$d\sigma = d\sigma^r \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{R}} \frac{Z^2\alpha}{\pi^2} \frac{|\vec{k}_\perp|^2}{\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)^2} |\vec{k}_\perp| d|\vec{k}_\perp| d\phi. \quad (3.72)$$

A integral em ϕ pode ser resolvida trivialmente, obtendo-se

$$d\sigma = d\sigma^r \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{\frac{1}{R}} \frac{2Z^2\alpha}{\pi} \frac{|\vec{k}_\perp|^2}{\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)^2} |\vec{k}_\perp| d|\vec{k}_\perp| \quad (3.73)$$

$$d\sigma = d\sigma^r \frac{d\omega}{\omega} n(\omega), \quad (3.74)$$

onde

$$n(\omega) = \int_0^{\frac{1}{R}} \frac{2Z^2\alpha}{\pi} \frac{|\vec{k}_\perp|^2}{\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)^2} |\vec{k}_\perp| d|\vec{k}_\perp|. \quad (3.75)$$

Podemos realizar a integração na variável $|\vec{k}_\perp|$, e como demonstrado no Apêndice D, obter um fluxo de fótons extremamente simples com algumas simplificações, dado por

$$n(\omega) = \frac{2Z^2\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma}{\omega R}\right). \quad (3.76)$$

Voltando para a Equação (3.75), e dividindo os dois lados por ω , temos

$$\frac{n(\omega)}{\omega} = \frac{4Z^2\alpha}{\omega} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{\vec{k}_\perp^2}{\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)^2}. \quad (3.77)$$

Podemos inserir manualmente o fator de forma nuclear aqui, de modo que a equação acima torna-se

$$\frac{n(\omega)}{\omega} = \frac{4Z^2\alpha}{\omega} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \left[\frac{F\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \right]^2 \vec{k}_\perp^2. \quad (3.78)$$

A inserção do fator de forma nuclear ao quadrado justifica-se pelo fato de que o elemento de amplitude invariante de um processo pode ser interpretado como o potencial entre as partículas no espaço de momento, ou seja, a transformada de Fourier do potencial no espaço de posição. Então, se ao invés de considerarmos uma carga pontual, utilizar uma distribuição de cargas no potencial, no elemento de amplitude invariante surgirá a transformada de Fourier da distribuição espacial de cargas, ou seja, o fator de forma eletromagnético. Já o quadrado no fator de forma aparece na equação acima devido ao fato de que é o módulo quadrado da amplitude invariante que entra no cálculo da seção de choque do processo em questão.

Sabendo que o fluxo de fótons em função da distância transversa do centro dos hadrons pode ser obtido de

$$\frac{n(\omega)}{\omega} = \int d^2\vec{r} N(\omega, r), \quad (3.79)$$

logo,

$$\int d^2\vec{r} N(\omega, r) = \frac{4Z^2\alpha}{\omega} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \left[\frac{F\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \right]^2 \vec{k}_\perp^2. \quad (3.80)$$

Daí, é possível mostrar que (ver Apêndice E)

$$N(\omega, r) = \frac{4Z^2\alpha}{\omega} \left| \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \vec{k}_\perp \frac{F\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} e^{-i\vec{r}\cdot\vec{k}_\perp} \right|^2. \quad (3.81)$$

Este é o fluxo de fótons dependente da energia ω dos fótons e da distância transversa r do centro do hadron que o produz. Este fluxo será de grande utilidade, pois nos permitirá, dentre outras coisas, implementar os cortes no parâmetro de impacto referentes às colisões frontais e periféricas.

3.4 FATORES DE FORMA NUCLEAR

Na seção anterior citamos o fator de forma nuclear sem dar muitos detalhes do que se trata. O fator de forma é a transformada de Fourier da distribuição espacial de cargas, normalizado pela carga total [60, 61]. Podemos interpretá-lo como a distribuição de cargas no espaço de momento transferido pelo núcleo:

$$F(q) = \frac{1}{N} \int \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r}, \quad (3.82)$$

com

$$N = \int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r},$$

onde $\rho(\vec{r})$ é a densidade espacial de cargas, e \vec{q} é o momento transferido pelo núcleo na colisão.

Existem diversos fatores de forma presentes na literatura, mas nessa dissertação focaremos em apenas três para núcleos pesados e dois para prótons. Estes fatores de forma e suas distribuições de cargas são discutidos em maiores detalhes no Apêndice F.

Ao assumirmos que a partícula associada ao fluxo de fótons não possui estrutura interna, ou seja, que trata-se de uma partícula pontual, obtemos trivialmente com a Equação (3.82) o fator de forma pontual, dado por

$$F(q^2) = 1. \quad (3.83)$$

Utilizando este fator de forma na Equação (3.81), pode-se mostrar (Apêndice G) que o fluxo de fótons associados à partícula é dado por

$$N(\omega, r) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 \omega r^2} \left(\frac{\omega r}{\gamma} \right)^2 K_1^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma} \right), \quad (3.84)$$

onde K_1 é uma função de Bessel modificada. Esta equação recupera o resultado obtido para o fluxo de fótons dependente da distância transversa pelo método clássico, na Equação (3.24), pois no limite ultrarrelativístico ($\gamma \gg 1$) o segundo termo da Equação (3.24) torna-se desprezível.

Outro fator de forma muito utilizado na literatura para núcleos pesados é o fator de forma de monopolo [61, 62, 63]. Este considera uma distribuição espacial de cargas, de modo que a densidade de cargas diminui exponencialmente e com o inverso da distância do centro do hadrôn. Com estas considerações obtém-se

$$F(q^2) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2}, \quad (3.85)$$

onde Λ é uma constante que pode ser obtida experimentalmente ao avaliar o raio do núcleo, já que é escrita em termos de seu raio médio: $\Lambda = \sqrt{6/\langle r^2 \rangle}$ [64]. Naturalmente, Λ assume

diferentes valores para diferentes núcleos. Para hadrons de interesse nesta dissertação, temos: $\Lambda = 0.088$ GeV para núcleos de chumbo e $\Lambda = 0.091$ GeV para núcleos de ouro [61].

Com este fator de forma mostramos no Apêndice H que é possível obter o fluxo de monopolo, dado por

$$N(\omega, r) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 \omega} \left[\frac{\omega}{\gamma} K_1 \left(\frac{\omega r}{\gamma} \right) + \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \Lambda^2 \right)} K_1 \left(r \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \Lambda^2 \right)} \right) \right]^2. \quad (3.86)$$

Os modelos para fatores de forma nucleares apresentados até aqui são simplificados. Uma visão mais realista da distribuição espacial de cargas pode ser obtida com a parametrização de dados de espalhamento elástico de elétrons em núcleos. Para o modelo de Fermi de densidade espacial de carga nuclear [64],

$$\rho(r) = \rho_0 \left[1 + \exp \left(\frac{r - R}{a} \right) \right]^{-1}, \quad (3.87)$$

os parâmetros obtidos são $a = 0,549$ ($0,535$) fm, $R = 6,63$ ($6,38$) fm e $\rho_0 = 0,1604/A$ ($0,1694/A$) fm $^{-3}$ para núcleos de chumbo (ouro) [61, 65], onde A é o número de massa do núcleo. Com a Equação (3.87) não é possível obter um fator de forma analítico, mas pode-se estimá-lo para esta distribuição com o procedimento realizado no Apêndice F. Então, o fator de forma realístico é dado por

$$F(q^2) = \frac{4\pi\rho_0}{Aq^3} [\sin(qR) - qR \cos(qR)] \left[\frac{1}{1 + q^2 a^2} \right]. \quad (3.88)$$

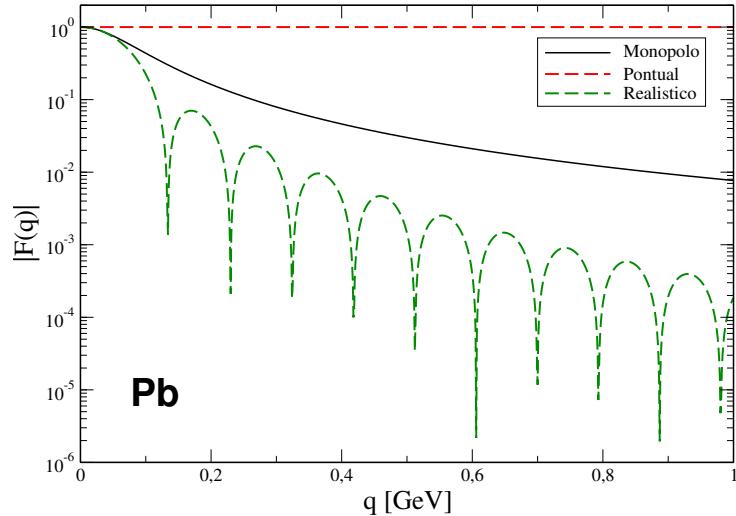
Estes três fatores de forma apresentados para núcleos pesados tem seu comportamento ilustrado na Figura 3.8. Como o evento de nosso interesse está no regime de fôtons de baixa virtualidade ($Q^2 = -q^2 \approx 0$), e nesta região os três fatores de forma tem comportamento similar, não esperamos resultados extremamente distintos ao usar os diferentes fatores de forma, mas suficientemente distintos para nos motivar a usar o fator de forma realístico.

Diferentemente dos fluxos obtidos com fatores de forma pontual e de monopolo, o fluxo de fôtons realístico não possui solução analítica. Então, todo o tratamento feito aqui será em análises numéricas.

A virtualidade do fóton está relacionada com a distância do centro do hadron através de um princípio de incerteza ($r |\vec{q}| \sim 1$, pois podemos fazer $|\vec{q}|^2 \approx Q^2$) [42], então a grande diferença no uso dos fatores de forma estará em regiões de pequeno r , ou seja, regiões mais próximas e internas aos hadrons, pois ali encontram-se os fôtons de maior virtualidade. Tal diferença nesta região pode ser observada ao compararmos o comportamento dos fluxos de fôtons em função da distância do centro do núcleo (no caso, de chumbo), na Figura 3.9.

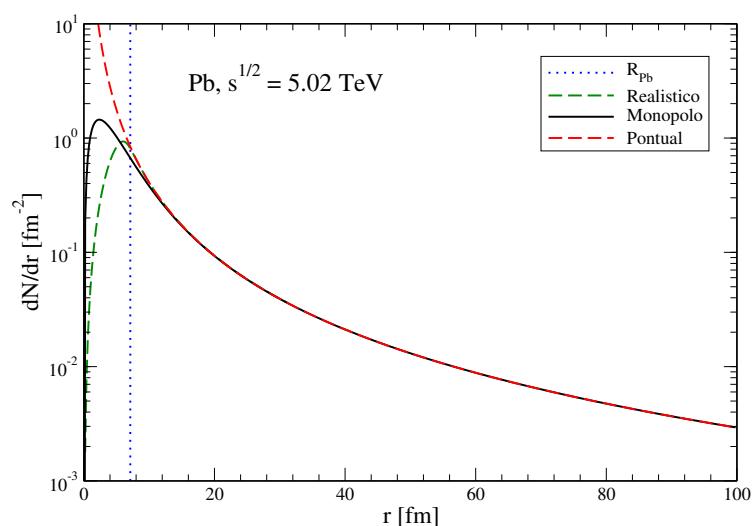
Nas regiões externas aos hadrons os três fluxos da Figura 3.9 praticamente coincidem. O fluxo pontual diverge em $r \rightarrow 0$, logo, para obter $n(\omega)$ não devemos considerar as regiões

Figura 3.8 – Comportamento dos fatores de forma com o quadrimomento transferido.



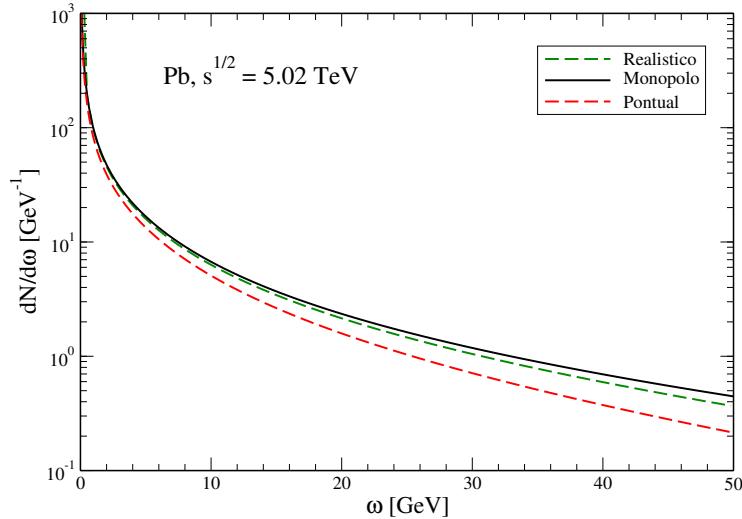
Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Figura 3.9 – Fluxo de fótons em função das distâncias dos centros dos hadrões para diferentes fatores de forma.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Figura 3.10 – Fluxo de fótons em função da energia para diferentes fatores de forma nuclear.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

internas dos hadrons, como já discutido na derivação clássica do espectro de fótons equivalentes,

$$\frac{n(\omega)}{\omega} = 2\pi \int_R^\infty dr N(\omega, r). \quad (3.89)$$

Diferentemente do fluxo pontual, os fluxos de monopolo e realístico não apresentam tal divergência nas regiões internas dos hadrons, sendo assim podemos obter $n(\omega)$ integrando a partir de zero e considerar também os fótons equivalentes da referida região.

$$\frac{n(\omega)}{\omega} = 2\pi \int_0^\infty dr N(\omega, r). \quad (3.90)$$

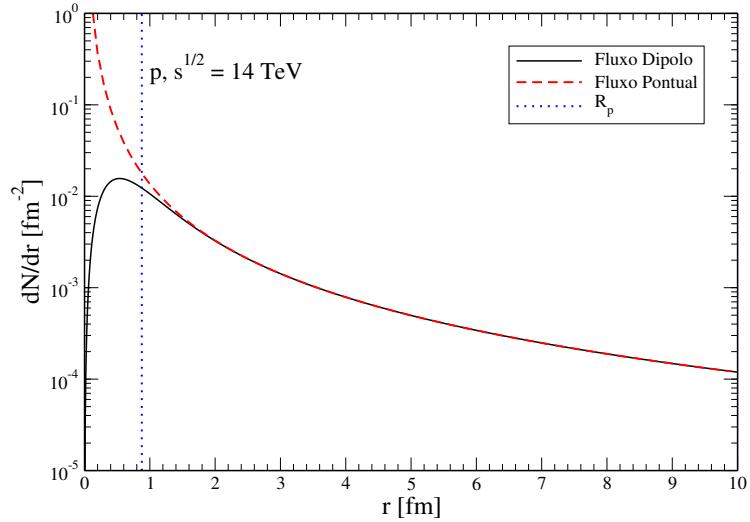
Ao fazermos uso dos fluxos de monopolo e realístico, poderemos considerar uma pequena região a mais para o fluxo de fótons. Deste modo, todo o espectro de fótons será alavancado dado a quantidade de fótons virtuais presentes dentro dos hadrons, como pode-se observar na Figura 3.10.

Para os prótons, além de podermos considerá-los em uma boa aproximação como partículas pontuais para a produção do fluxo de fótons, também temos o fator de forma de dipolo, amplamente utilizado na literatura. Como sugerido por seu nome, este fator de forma é construído considerando o próton um dipolo elétrico e tem a forma

$$F(q^2) = \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + q^2)^2}, \quad (3.91)$$

onde $\Lambda^2 = 0,71 \text{ GeV}^2$ [66, 67]. Com este fator de forma é possível obter o fluxo de dipolo,

Figura 3.11 – Comparaçāo entre os fluxos de dipolo e pontual para prótons em função da distância do centro do próton.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

como demonstrado no Apêndice I, que tem a forma

$$N(\omega, r) = \frac{\alpha}{\pi^2 \omega} \left[\frac{\omega}{\gamma} K_1 \left(\frac{\omega r}{\gamma} \right) - \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \Lambda^2 \right)} K_1 \left(r \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \Lambda^2 \right)} \right) + \left(-\frac{r \Lambda^2}{2} K_0 \left(r \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \Lambda^2 \right)} \right) \right)^2 \right]. \quad (3.92)$$

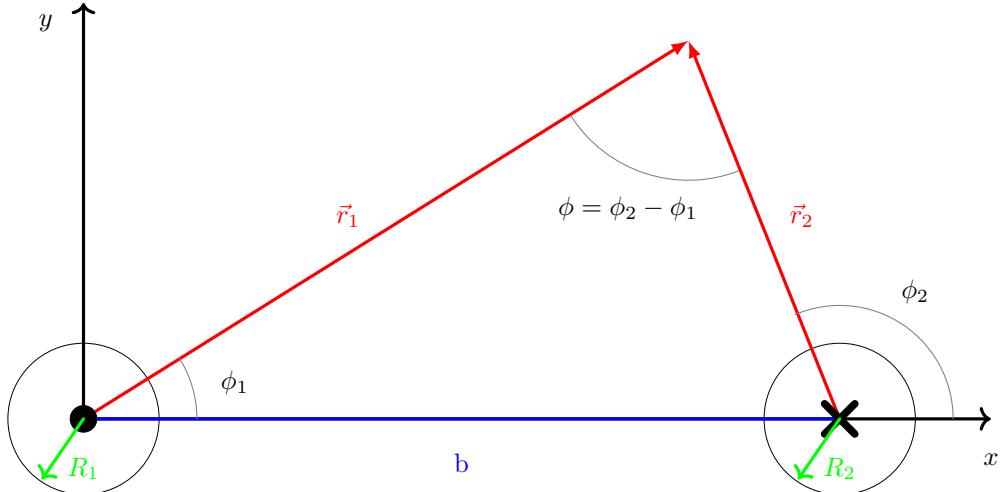
Este fluxo também não diverge para pequeno r , e seu comportamento em função da distância transversa do centro dos prótons é ilustrado na Figura 3.11. Neste caso, ao fazer uso do fluxo de dipolo também podemos considerar os fótons equivalentes do interior dos prótons.

3.5 CORREÇÃO DE ABSORÇÃO

Mencionamos anteriormente que neste trabalho o nosso interesse está na análise de colisões ultraperiféricas, pois nestas colisões a interação forte é suprimida, e o espalhamento entre o hadrons pode ser analisado considerando apenas a interação eletromagnética. Para que o modelo utilizado nos cálculos desconsidere as colisões frontais e periféricas, fazemos uso de uma correção de absorção. O modelo geométrico da colisão entre os dois hadrons é ilustrado na Figura 3.12.

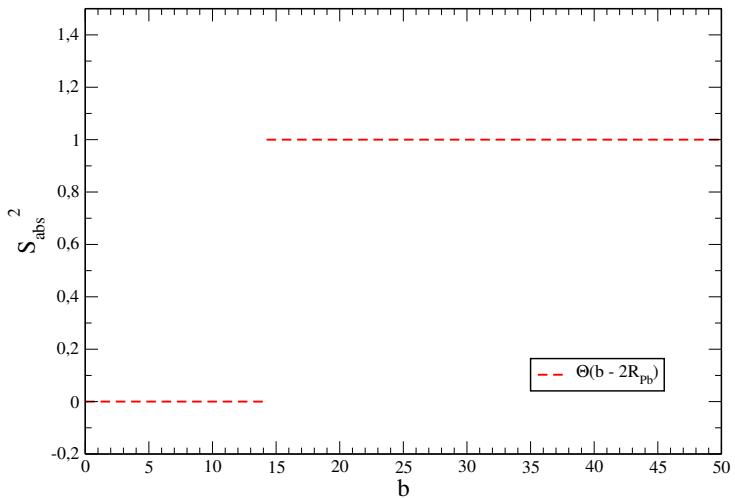
Como nosso interesse são as colisões ultraperiféricas, precisamos desconsiderar os casos em que há sobreposição entre os hadrons da Figura 3.12. A correção que estamos utilizando é a função degrau [68]. Esta função tem imagem nula quando seu argumento é negativo, e imagem um para seu argumento maior ou igual a zero (Figura 3.13). Nosso

Figura 3.12 – Diagrama da colisão de dois hadrons.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Figura 3.13 – Correção de absorção da função degrau em função do parâmetro de impacto para colisões de chumbo.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

interesse são as colisões em que o parâmetro de impacto é maior que a soma dos raios dos hadrons que estão colidindo, logo

$$S_{abs}^2(\vec{b}) = \Theta(|\vec{b}| - R_{h_1} - R_{h_2}). \quad (3.93)$$

A correção de absorção também pode ser estimada com o modelo de Glauber [69, 70], mas para produção de estados de baixa massa, como o caso de estados ligados de lepton, o resultado é muito similar ao obtido com a função degrau, como verificado em [70].

Para que finalmente possamos inserir a correção de absorção da Equação (3.93) na seção de choque total do evento estudado, precisamos escrevê-la em termos das variáveis do

fluxo de fótons equivalente, ou seja, das distâncias dos centros dos hadrons e dos ângulos em relação a um eixo fixo. Observando com atenção a Figura 3.12, vemos que o parâmetro de impacto pode ser escrito em termos das variáveis mencionadas com ajuda da lei dos cossenos:

$$|\vec{b}| = \sqrt{|\vec{r}_1|^2 + |\vec{r}_2|^2 - 2|\vec{r}_1||\vec{r}_2| \cos(\phi_1 - \phi_2)}, \quad (3.94)$$

então, a correção de absorção será dada por

$$S_{abs}^2(\vec{b}) = \Theta(\sqrt{|\vec{r}_1|^2 + |\vec{r}_2|^2 - 2|\vec{r}_1||\vec{r}_2|\cos(\phi_1 - \phi_2)} - R_{h_1} - R_{h_2}). \quad (3.95)$$

A magnitude dos raios de núcleos pesados é obtida de $R = 1,2A^{1/3}$ fm, com A sendo o número de massa [71, 72]. Já para prótons, utilizamos $R = 0,8768$ fm [73, 74]. Estes valores de raios hadrônicos também foram usados no limite inferior de integração da distância transversa do centro dos hadrons no fluxo pontual de fótons equivalentes.

3.6 CONCLUSÃO

Apresentamos neste capítulo a aproximação de fótons equivalentes em diferentes representações e a deduzimos de duas formas distintas. Trabalhamos com fluxos de fótons obtidos com diferentes fatores de forma nucleares, e analisamos a importância de fator de forma realístico e de dipolo nas regiões internas aos hadrons. No próximo capítulo aplicaremos a aproximação de fótons equivalentes aos processos de fotoprodução em colisão de hadrons.

4 FOTOPRODUÇÃO DE ESTADOS LIGADOS

Neste capítulo daremos ênfase ao estudo de processos de fotoprodução de estados ligados de léptons com o formalismo da aproximação de fótons equivalentes.

4.1 SEÇÃO DE CHOQUE COM A APROXIMAÇÃO DE FÓTONS EQUIVALENTES

Nesta seção discutiremos o uso da aproximação de fótons equivalentes para a produção de paraestados e ortoestados ligados de léptons. A seção de choque total para o processo $h_1 + h_2 \rightarrow h_1 + (l^+l^-)_S + h_2$, da Figura 4.1, pode ser fatorada com auxílio da aproximação de fótons equivalentes [57, 61, 75, 76] da seguinte forma

$$\sigma_{h_1+h_2 \rightarrow h_1 + (l^+l^-)_S + h_2} = \int \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} S_{abs}^2 N(\omega_1, \vec{r}_1) N(\omega_2, \vec{r}_2) d^2\vec{r}_1 d^2\vec{r}_2 d\omega_1 d\omega_2, \quad (4.1)$$

onde $\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}$ é a seção de choque para a produção do estado ligado singuleto a partir de dois fótons (fórmulas de Low e de Breit-Wigner), S_{abs}^2 é o termo referente à correção de absorção e $N(\omega_i, \vec{r}_i)$ é o fluxo de fótons referente ao hadrôn i . Esta equação é muito útil para analisarmos o processo no referencial de centro de massa, visto que consideramos a interação dos núcleos pela interação de seus fótons equivalentes.

Podemos também analisar o processo de produção de estados singletos no referencial de laboratório, onde consideramos um dos núcleos em repouso (alvo), e este irá interagir com um fóton virtual do núcleo incidente (projétil). Para que esta análise esteja completa, precisamos somar as duas contribuições: o primeiro núcleo sendo o projétil e o segundo sendo o alvo, mais o processo em que o primeiro núcleo é o alvo e o segundo é o projétil, da seguinte forma:

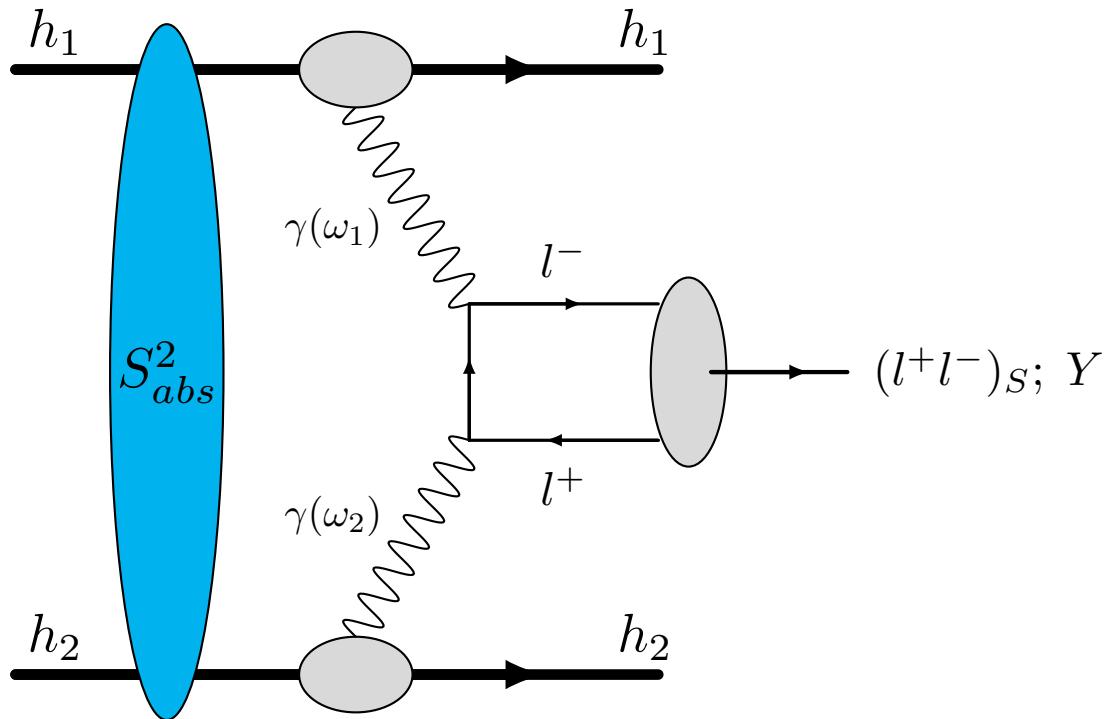
$$\begin{aligned} \sigma_{h_1+h_2 \rightarrow h_1 + (l^+l^-)_S + h_2} &= \int \sigma_{\gamma h_1 \rightarrow (l^+l^-)_S + h_1} N(\omega_2, \vec{r}_2) d^2\vec{r}_2 d\omega_2 + \\ &+ \int \sigma_{\gamma h_2 \rightarrow (l^+l^-)_S + h_2} N(\omega_1, \vec{r}_1) d^2\vec{r}_1 d\omega_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $\sigma_{\gamma h \rightarrow (l^+l^-)_S + h}$ é a seção de choque fóton-núcleo que dá origem ao estado singuleto.

Para considerar a produção de estados tripletos, faremos uso da seção de choque $\sigma_{\gamma h \rightarrow (l^+l^-)_T + h}$, que foi desenvolvida nas referências [18, 20]. Neste caso, a seção de choque total do processo da Figura 4.2 é fatorada com o fluxo do primeiro hadrôn considerando a produção com o segundo hadrôn, mais o processo inverso, como feito para o caso do estudo da produção de estado singletos no referencial de laboratório (Equação 4.2).

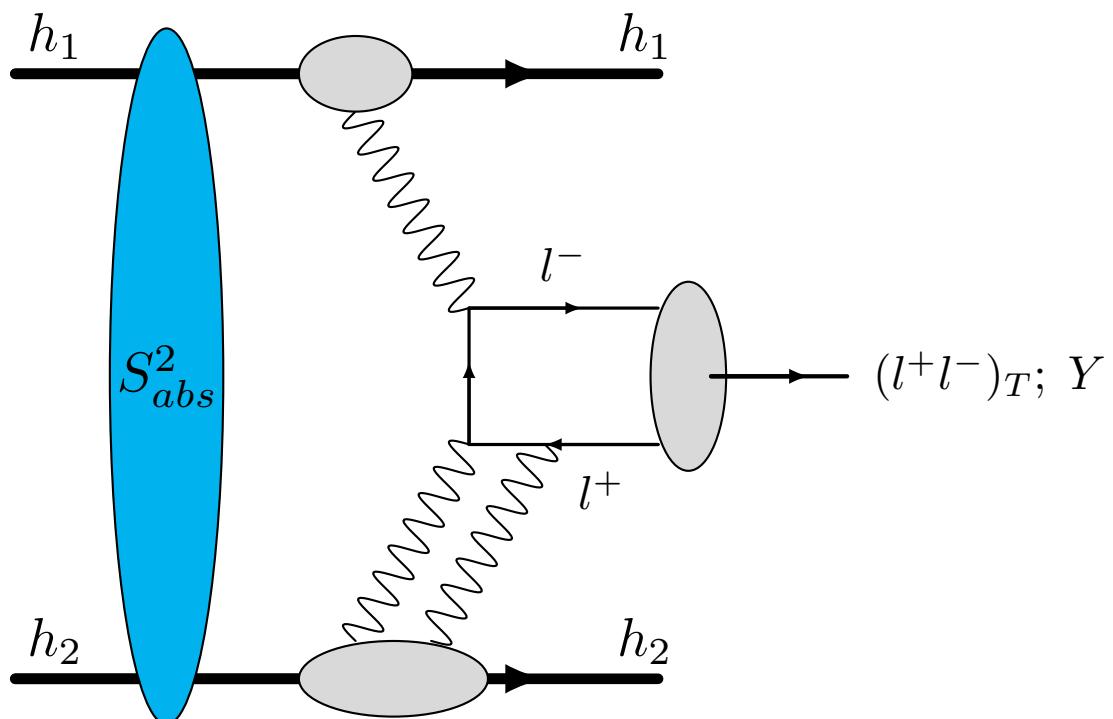
$$\begin{aligned} \sigma_{h_1+h_2 \rightarrow h_1 + (l^+l^-)_T + h_2} &= \int \sigma_{\gamma h_1 \rightarrow (l^+l^-)_T + h_1} N(\omega_2, \vec{r}_2) d^2\vec{r}_2 d\omega_2 + \\ &+ \int \sigma_{\gamma h_2 \rightarrow (l^+l^-)_T + h_2} N(\omega_1, \vec{r}_1) d^2\vec{r}_1 d\omega_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Figura 4.1 – Diagrama para a produção de estados ligados singletos de léptons pela fusão de dois fótons.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Figura 4.2 – Diagrama para a produção de estados ligados tripletos de léptons pela fusão de três fótons.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

4.2 CINEMÁTICA DO PROCESSO NO CENTRO DE MASSA

Nesta seção estudaremos a cinemática do processo em questão no referencial de centro de massa da colisão dos hadrons h_1 e h_2 . Tomaremos o eixo z como sendo o eixo de incidência dos hadrons. Sob estas condições, os quadrimomentos dos hadrons no limite ultrarrelativístico serão

$$p_{h_1} = (E, 0, 0, E) \quad (4.4)$$

e

$$p_{h_2} = (E, 0, 0, -E). \quad (4.5)$$

A variável s de Mandelstam [77] para o sistema de dois hadrons torna-se

$$\begin{aligned} s &= (p_{h_1} + p_{h_2})^2 \\ s &= [(E, 0, 0, E) + (E, 0, 0, -E)]^2 \\ s &= 4E^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Logo, $E = \sqrt{s}/2$, e então a raiz quadrada da variável de Mandelstam s é interpretada como a energia de centro de massa da colisão no limite de altas energias.

Na interação entre os hadrons, cada um emitirá um fóton, que se fundirão dando origem ao estado ligado $(l^+l^-)_S$ (Figura 4.1). Estes fótons possuem uma fração x da energia dos hadrons, definidas por

$$x_1 = \frac{\omega_1}{E_1} \quad (4.7)$$

e

$$x_2 = \frac{\omega_2}{E_2}, \quad (4.8)$$

sendo ω_1 (ω_2) a energia do fóton emitido pelo hadron 1 (2), e $E_1 = E_2 = E$ a energia dos hadrons no referencial adotado. Logo, podemos escrever o quadrimomento dos fótons em termos da energias dos hadrons que os emitiram

$$p_{\gamma_1} = (\omega_1, 0, 0, \omega_1) = x_1 p_{h_1} = x_1 E(1, 0, 0, 1) \quad (4.9)$$

e

$$p_{\gamma_2} = (\omega_2, 0, 0, -\omega_2) = x_2 p_{h_2} = x_2 E(1, 0, 0, -1). \quad (4.10)$$

Conhecendo o quadrimomento dos fótons, podemos definir a variável de Mandelstam s para o sistema fóton-fóton, que denotaremos por $W_{\gamma\gamma}^2$:

$$W_{\gamma\gamma}^2 = W^2 = (p_{\gamma_1} + p_{\gamma_2})^2 \quad (4.11)$$

$$W^2 = [x_1 E(1, 0, 0, 1) + x_2 E(1, 0, 0, -1)]^2$$

$$W^2 = [E(x_1 + x_2), 0, 0, E(x_1 + x_2)]^2$$

$$W^2 = E^2[(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2]^2$$

$$W^2 = E^2(4x_1 x_2). \quad (4.12)$$

Substituindo as Equações (4.7) e (4.8), obtém-se

$$W^2 = E^2 \left(4 \frac{\omega_1}{E} \frac{\omega_2}{E} \right)$$

$$W^2 = 4\omega_1 \omega_2. \quad (4.13)$$

W é a energia do sistema $\gamma\gamma$ no referencial de centro de momento dos dois fótons, comumente denominada por massa invariante.

O quadrimomento p do estado criado pode ser obtido em termos de x_i e E com ajuda das Equações (4.9) e (4.10).

$$p = p_{\gamma_1} + p_{\gamma_2} \quad (4.14)$$

$$p = E(x_1, 0, 0, x_1) + E(x_2, 0, 0, -x_2)$$

$$p = E(x_1 + x_2, 0, 0, x_1 - x_2). \quad (4.15)$$

Agora estamos em condições de calcular a rapidez Y do estado criado pelos dois fótons. A rapidez é uma variável cinemática de grande interesse do ponto de vista experimental, visto que expressa uma medida de velocidade relativística de uma partícula em um determinado referencial [78, 79, 80]. Matematicamente, a rapidez Y é definida como

$$Y = \frac{1}{2} \left(\frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z} \right), \quad (4.16)$$

então, ao substituir a Equação (4.15), obtemos

$$Y = \frac{1}{2} \left[\frac{E(x_1 + x_2) + E(x_1 - x_2)}{E(x_1 + x_2) - E(x_1 - x_2)} \right] \quad (4.17)$$

$$Y = \frac{1}{2} \left[\frac{E x_1 + x_2 + x_1 - x_2}{E x_1 + x_2 - x_1 + x_2} \right]$$

$$Y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right). \quad (4.18)$$

E, ao usar as Equações (4.7) e (4.8)

$$Y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\omega_1/E}{\omega_2/E} \right)$$

$$Y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right). \quad (4.19)$$

Podemos ainda escrever a rapidez em termos da massa invariante do estado criado ao isolar ω_2 na Equação (4.13) e substituir na Equação (4.19).

$$Y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\omega_1}{\frac{W^2}{4\omega_1}} \right) \quad (4.20)$$

$$Y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4\omega_1^2}{W^2} \right)$$

$$Y = \ln \left[\left(\frac{4\omega_1^2}{W^2} \right)^{1/2} \right]$$

$$Y = \ln \left(\frac{2\omega_1}{W} \right). \quad (4.21)$$

Isolando ω_1 , podemos obter

$$\frac{2\omega_1}{W} = e^Y$$

$$\omega_1 = \frac{W}{2} e^Y. \quad (4.22)$$

E, finalmente, levando este resultado na Equação (4.13) e isolando ω_2

$$W^2 = 4 \frac{W}{2} e^Y \omega_2 \quad (4.23)$$

$$2e^Y \omega_2 = W$$

$$\omega_2 = \frac{W}{2} e^{-Y}. \quad (4.24)$$

Substituindo as Equações (4.22) e (4.24) na Equação (4.1), podemos obter distribuições de rapidez para o estado criado. Para isto basta obter o jacobiano J da transformação de coordenadas $(\omega_1, \omega_2) \rightarrow (W, Y)$.

$$\begin{aligned}
 J &= \left\| \frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(W, Y)} \right\| \quad (4.25) \\
 J &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial\omega_1}{\partial W} & \frac{\partial\omega_1}{\partial Y} \\ \frac{\partial\omega_2}{\partial W} & \frac{\partial\omega_2}{\partial Y} \end{array} \right\| \\
 J &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{e^Y}{2} & \frac{W e^Y}{2} \\ \frac{e^{-Y}}{2} & -\frac{W e^{-Y}}{2} \end{array} \right\| \\
 J &= \left| -\frac{e^Y}{2} \frac{W e^{-Y}}{2} - \left(\frac{W e^Y}{2} \frac{e^{-Y}}{2} \right) \right| \\
 J &= \frac{W}{4} + \frac{W}{4} \\
 J &= \frac{W}{2}. \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

Deste modo, a seção de choque total da Equação (4.1) em termos das variáveis de massa invariante W e rapidez Y é

$$\sigma_{h_1+h_2 \rightarrow h_1+(l^+l^-)_S+h_2} = \int \frac{W}{2} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} S_{abs}^2 N(\omega_1, \vec{r}_1) N(\omega_2, \vec{r}_2) d^2\vec{r}_1 d^2\vec{r}_2 dW dY. \quad (4.27)$$

A distribuição de rapidez é obtida de maneira direta da Equação (4.27), sendo

$$\frac{d\sigma_{h_1+h_2 \rightarrow h_1+(l^+l^-)_S+h_2}}{dY} = \int \frac{W}{2} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} S_{abs}^2 N(\omega_1, \vec{r}_1) N(\omega_2, \vec{r}_2) d^2\vec{r}_1 d^2\vec{r}_2 dW. \quad (4.28)$$

De forma análoga à distribuição de rapidez, pode ser obtida a distribuição de massa invariante. Porém não há motivação para estudá-la, já que o processo de nosso interesse, como visto ao estudar a Equação de Breit-Wigner, tem um pico muito grande para um valor central de massa invariante, e para pequenas variações neste pico a distribuição cai abruptamente, sendo assim inviável a construção de distribuições de massa invariante.

4.3 CINEMÁTICA DO PROCESSO NO LABORATÓRIO

A seção de choque total para a produção de (para e orto) estados ligados de léptons podem ser estudadas também no referencial de laboratório, como discutido na primeira

seção deste capítulo. Vamos analisar em mais detalhes o caso geral das Equações (4.2) e (4.3):

$$\begin{aligned}\sigma_{h_1+h_2 \rightarrow h_1+(l^+l^-)+h_2} = & \int \sigma_{\gamma h_1 \rightarrow (l^+l^-)+h_1} N(\omega_2, \vec{r}_2) d^2 \vec{r}_2 d\omega_2 + \\ & + \int \sigma_{\gamma h_2 \rightarrow (l^+l^-)+h_2} N(\omega_1, \vec{r}_1) d^2 \vec{r}_1 d\omega_1.\end{aligned}\quad (4.29)$$

Como os estados ligados de nosso interesse tratam-se de ressonâncias, sua massa invariante pode ser aproximada por um valor fixo, tal como feito na fórmula de Low. Então, utilizando as Equações (4.22) e (4.24) obtidas na seção anterior, e fixando a massa invariante em duas vezes a massa de repouso do lépton que compõe o estado ligado (M), obtemos

$$\omega_1 = \frac{M}{2} e^{Y_2} \quad (4.30)$$

e

$$\omega_2 = \frac{M}{2} e^{Y_1}, \quad (4.31)$$

sendo Y_2 (Y_1) a rapidez do estado criado no núcleo 2 (1) em seu referencial de repouso.

Deste modo, podemos facilmente trocar as variáveis ω_1 e ω_2 da Equação (4.29) para as variáveis Y_2 e Y_1 , pois

$$d\omega_1 = \frac{M}{2} e^{Y_2} dY_2 \quad (4.32)$$

e

$$d\omega_2 = \frac{M}{2} e^{Y_1} dY_1. \quad (4.33)$$

Logo, a Equação (4.29) torna-se

$$\begin{aligned}\sigma_{h_1+h_2 \rightarrow h_1+(l^+l^-)+h_2} = & \int \sigma_{\gamma h_1 \rightarrow (l^+l^-)+h_1} N(\omega_2, \vec{r}_2) d^2 \vec{r}_2 \frac{M}{2} e^{Y_1} dY_1 + \\ & + \int \sigma_{\gamma h_2 \rightarrow (l^+l^-)+h_2} N(\omega_1, \vec{r}_1) d^2 \vec{r}_1 \frac{M}{2} e^{Y_2} dY_2.\end{aligned}\quad (4.34)$$

Para que possamos obter uma distribuição de rapidez mensurável, precisamos avaliá-la em um mesmo referencial. A transformação na rapidez de um referencial para outro se dá pela adição de uma constante [14]. Então vamos converter Y_2 e Y_1 para Y , que é a rapidez no referencial de centro de massa da colisão. A constante de transformação de referencial da rapidez é dada por

$$Y_\beta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right), \quad (4.35)$$

com β sendo a velocidade do referencial de laboratório em relação ao referencial de centro de massa em termos da velocidade da luz.

Assim, a rapidez no referencial de centro de massa é dada por

$$Y = Y_2 - Y_\beta = Y_1 + Y_\beta, \quad (4.36)$$

e a Equação (4.34) torna-se

$$\begin{aligned} \sigma_{h_1+h_2 \rightarrow h_1+(l^+l^-)+h_2} &= \int \sigma_{\gamma h_1 \rightarrow (l^+l^-)+h_1} N(\omega_2, \vec{r}_2) d^2 \vec{r}_2 \frac{M}{2} e^{Y-Y_\beta} dY + \\ &+ \int \sigma_{\gamma h_2 \rightarrow (l^+l^-)+h_2} N(\omega_1, \vec{r}_1) d^2 \vec{r}_1 \frac{M}{2} e^{Y+Y_\beta} dY, \end{aligned} \quad (4.37)$$

deste modo, a distribuição de rapidez no referencial de centro de massa é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{h_1+h_2 \rightarrow h_1+(l^+l^-)+h_2}}{dY} &= \int \sigma_{\gamma h_1 \rightarrow (l^+l^-)+h_1} N(\omega_2, \vec{r}_2) d^2 \vec{r}_2 \frac{M}{2} e^{Y-Y_\beta} + \\ &+ \int \sigma_{\gamma h_2 \rightarrow (l^+l^-)+h_2} N(\omega_1, \vec{r}_1) d^2 \vec{r}_1 \frac{M}{2} e^{Y+Y_\beta}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

4.4 CORREÇÕES COULOMBIANAS

Nesta seção analisaremos as correções de mais alta ordem da QED para a produção de estados ligados singletos de léptons, conhecidas como correções coulombianas. Tal correção permite considerar a interação entre mais de dois fótons (4, 6, 8, ...) para a produção de estados ligados singletos. Um diagrama típico deste processo está representado na Figura 4.3, em que um fóton do núcleo superior interage com mais de um fóton emitido pelo núcleo inferior.

As correções coulombianas tornam-se relevantes em interações de fótons com núcleos com $Z \gg 1$, pois o parâmetro de expansão perturbativa torna-se próximo a 1 ($Z\alpha \approx 1$), e as interações multifótons tornam-se significativas.

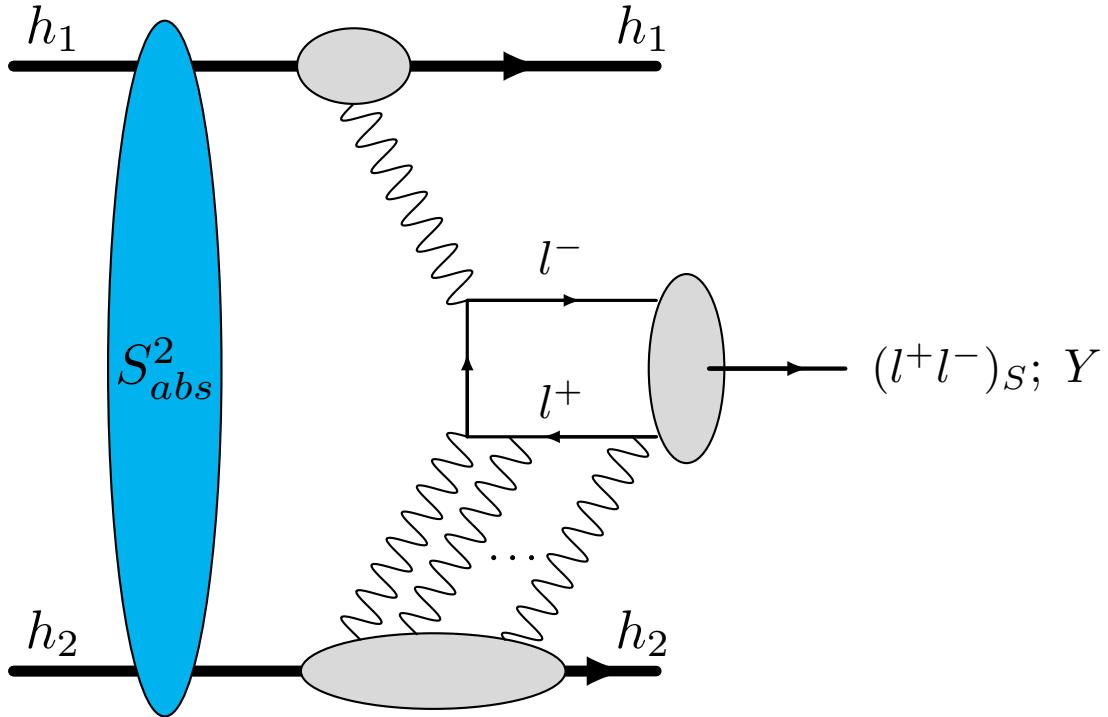
Vamos analisar aqui as correções coulombianas desenvolvidas nas Referências [17, 18], em que considerou-se, no referencial de laboratório, a interação de um fóton com um núcleo. A seção de choque diferencial da correção coulombiana é dada por

$$d\sigma_{CC} = d\sigma_1 + d\sigma_2, \quad (4.39)$$

com $d\sigma_1$ ($d\sigma_2$) sendo a contribuição da produção no primeiro (segundo) núcleo. Conforme visto no capítulo 2, segundo a referência [17], estas contribuições são estimadas com a aproximação de fótons equivalentes para o núcleo projétil, e com uma seção de choque fóton-núcleo em que o núcleo alvo interage emitindo mais de um fóton

$$\begin{aligned} d\sigma_{CC} &= \sigma_{\gamma A_1 \rightarrow (l^+l^-)_S} \frac{n(\omega_2)}{\omega_2} d\omega_2 + \sigma_{\gamma A_2 \rightarrow (l^+l^-)_S} \frac{n(\omega_1)}{\omega_1} d\omega_1 \\ d\sigma_{CC} &= -\zeta(3) \frac{Z^2 \alpha^6}{m_l^2} C(Z_1) \frac{n(\omega_2)}{\omega_2} d\omega_2 - \zeta(3) \frac{Z^2 \alpha^6}{m_l^2} C(Z_2) \frac{n(\omega_1)}{\omega_1} d\omega_1 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Figura 4.3 – Diagrama para a produção de estados ligados singletos de léptons em colisões de hadrons pela interação de muitos fótons.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Vamos definir as funções presentes na Equação (4.40):

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1,202\dots , \quad (4.41)$$

é a zeta de Riemann, necessária para considerar a produção de estados singletos em todos os estados quânticos possíveis para o número quântico principal. E a função $C(Z)$ caracteriza o núcleo responsável pela multiemissão de fótons, dada por

$$C(Z) = \int_0^{\infty} F(\tau, Z) d\tau \quad (4.42)$$

com

$$F(\tau, Z) = \frac{1}{2\tau(1+\tau)^2} \left\{ 1 - \left[F(iZ\alpha, -iZ\alpha; 1; z) \frac{\pi Z\alpha}{\operatorname{senh}(\pi Z\alpha)} \right]^2 \right\} \quad (4.43)$$

onde $F(iZ\alpha, -iZ\alpha; 1; z)$ é a função hipergeométrica de Gauss, e os parâmetros τ e z são definidos com

$$\tau = \left(\frac{p_T}{2m_l} \right)^2, \quad z = \left(\frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^2. \quad (4.44)$$

A função $C(Z)$ assume os valores 0,7080 e 0,6734 para os núcleos de chumbo e ouro, respectivamente.

Como observado na Equação (4.40), as correções coulombianas são negativas, pois ao considerar que dois ou mais fótons do núcleo alvo interagem com um fótons da partícula incidente, se reduz a probabilidade de interação envolvendo apenas um fótons de cada partícula emissora.

Podemos ainda construir uma distribuição de rapidez para a correção coulombiana, pois

$$\omega_1 = \frac{M}{2} e^{Y_1} \quad (4.45)$$

e

$$\omega_2 = \frac{M}{2} e^{Y_2}, \quad (4.46)$$

logo, utilizando a Equação (4.36), temos

$$\frac{d\sigma_{CC}}{dY} = -\zeta(3) \frac{Z^2 \alpha^6}{m_l^2} C(Z_1) n(\omega_2) - \zeta(3) \frac{Z^2 \alpha^6}{m_l^2} C(Z_2) n(\omega_1). \quad (4.47)$$

Esta distribuição de rapidez da correção coulombiana será muito útil no próximo capítulo, pois nos permitirá analisar seu impacto nas seções de choque total e com cortes em rapidez para produção de parapositrônio.

4.5 CONCLUSÃO

Neste capítulo apresentamos a aplicação da aproximação de fótons equivalentes ao processo de nosso interesse, que é a produção de estados ligados de léptons. Construímos distribuições de rapidez para análises tanto no referencial de centro de massa, quanto no referencial de laboratório da colisão. Estimamos também a distribuição de rapidez para correções de mais alta ordem da QED para a produção de estados singletos. No próximo capítulo apresentamos nossos resultados obtidos na análise de fotoprodução de estados ligados de léptons em colisões de hadrons.

5 RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos nossas predições para a fotoprodução de estados ligados de léptons, singletos e tripletos, em colisões hadrônicas ultraperiféricas de altas energias. Colisões ultraperiféricas podem ser tratadas como colisões entre fótons ou entre fótons e alvos nucleares, pois a interação forte é suprimida e predominam os processos induzidos por fótons.

Nosso estudo se consistiu na análise da produção de estados ligados de léptons em processos de fusão de fótons, e em colisões fóton-núcleo. A motivação deste estudo é podermos considerar os hadrons ultrarrelativísticos dos colisores como fontes de fótons, e estes fótons que irão interagir e dar origem ao estado de nosso interesse, o estado ligados de léptons. Os núcleos como fontes de fótons são objeto de análise da aproximação de fótons equivalentes, estudada em detalhes no Capítulo 3. Apresentaremos nossas análises utilizando diferentes fluxos de fótons, com os fatores de forma pontual, monopolo e realístico, a fim de justificar a importância da utilização do fator de forma mais acurado presente na literatura, o fator de forma realístico. Como nosso interesse está nas colisões ultraperiféricas, faremos uma análise da importância do fator de supressão das interações fortes, e mostraremos sua significativa importância, sobretudo para a produção de estados de maior massa invariante.

Com a justificativa da necessidade de um tratamento acurado no fluxo de fótons e em correções de absorção, construímos nossos principais resultados na forma de distribuições espaciais, de energia e de rapidez. Estas distribuições serão analisadas e comparadas para estados ligados de léptons de diferentes gerações, em colisões de diferentes hadrons e com diferentes energias de centro de massa nas colisões. Para a produção de parapositrônio estimamos distribuições com correções de mais alta ordem da QED, que são bastante significativas neste processo [18].

O processo estudado consiste de núcleos intactos no estado final, mas o estado ligado de léptons. Dado que estes estados ligados são instáveis, pode-se buscar nos detectores os seus produtos de decaimento. Os estados singletos decaem majoritariamente em dois fótons, sendo o canal responsável pelo decaimento de mais de 99%/99%/80% do total de parapositrônio/paramuônio/paratauônio produzido [40, 81]. Já os estados tripletos têm canais de decaimento mais variados. O ortopositrônio tem mais de 99% de probabilidade de decair em três fótons [82]. O ortomuônio decai aproximadamente 98% e 1,7% em um par elétron-pósitron e três fótons, respectivamente [8]. Já o ortotauônio decai por canais eletromagnéticos em pares eletron-pósitron/múon-antimúon/quark-antiquark em aproximadamente 21%/21%/42% dos casos, e em aproximadamente 15% dos casos por canais de interação fraca [40].

5.1 FÓRMULA DE LOW VERSUS FÓRMULA DE BREIT-WIGNER

Estamos interessados nesta seção na análise de colisões de íons pesados em altas energias no referencial de centro de massa da colisão. Neste processo podemos fatorar a seção de choque total na seção de choque fóton-fóton multiplicada pelo número de fótons equivalentes de cada hadrôn, ou de forma equivalente, pelos fluxos de fótons de cada hadrôn, e integrar na energia e no espaço de fótons [61]. Para este processo descrito, construímos no capítulo anterior a distribuição de rapidez

$$\frac{d\sigma_{h_1+h_2 \rightarrow h_1+(l^+l^-)_S+h_2}}{dY} = \int \frac{W}{2} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} S_{abs}^2 N(\omega_1, \vec{r}_1) N(\omega_2, \vec{r}_2) d^2\vec{r}_1 d^2\vec{r}_2 dW. \quad (5.1)$$

onde S_{abs}^2 é o fator de absorção, $\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}$ é a seção de choque fóton-fóton que dá origem ao estado ligado de léptons e $N(\omega, \vec{r})$ é o fluxo de fótons equivalentes de cada hadrôn.

Como discutido no Capítulo 2, há duas seções de choque fóton-fóton para a produção de estados singletos de léptons: as fórmulas de Low e de Breit-Wigner, dadas, respectivamente, pelas equações

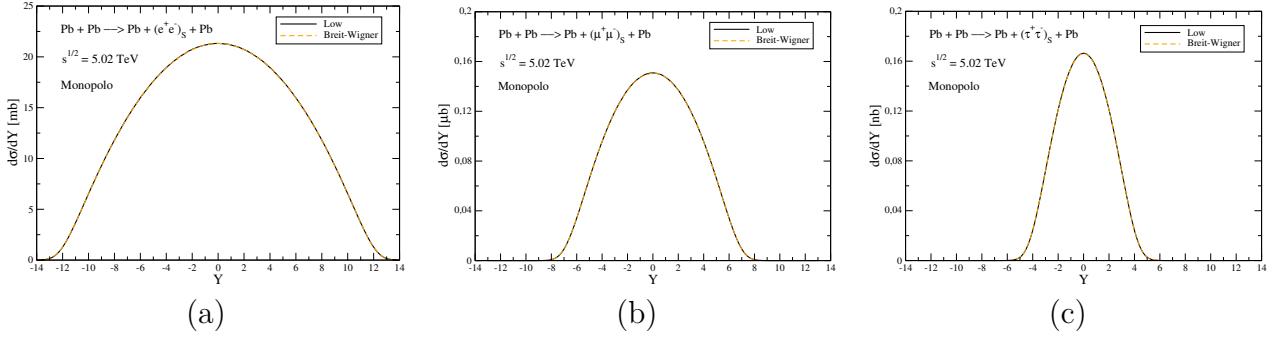
$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}(W) = 2\pi^2 \alpha^5 \delta(W^2 - M^2) \quad (5.2)$$

e

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}(W) = \frac{8\pi}{M^2} \frac{\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}^2}{4(M-W)^2 + \Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}^2}. \quad (5.3)$$

Na Figura 5.1 apresentamos a comparação entre distribuições de rapidez obtidas para diferentes gerações de estados ligados de léptons utilizando as fórmulas de Low e de Breit-Wigner em colisões de chumbo do LHC ($\sqrt{s} = 5,02$ TeV). Vemos, como discutido no Capítulo 2, que ambas levam ao mesmo resultado. Observa-se claramente que a produção de estados ligados mais pesados tem um range de rapidez efetivo menor para sua produção, pois como são mais massivos, com um mesmo momento no eixo de colisão, estes tornam-se menos relativísticos. Para obtenção deste resultado, utilizamos o fluxo de monopolo e a função degrau para supressão das interações fortes, que serão discutidos em mais detalhes nas próximas seções. Dada a equivalência entre estas duas seções de choque de fotoprodução, utilizaremos nas próximas seções a fórmula de Low para obtenção dos resultados. A escolha pela fórmula de Low se dá pela maior facilidade de sua implementação para obtenção de resultados numéricos, visto que a integração na massa invariante é avaliada com as propriedades da função delta de Dirac.

Figura 5.1 – Distribuições de rapidez para a produção de (a) parapositrônio, (b) paramuônio e (c) paratauônio em colisões PbPb com energia do LHC utilizando diferentes seções de choque fóton-fóton.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

5.2 USO DE DIFERENTES FATORES DE FORMA NUCLEAR

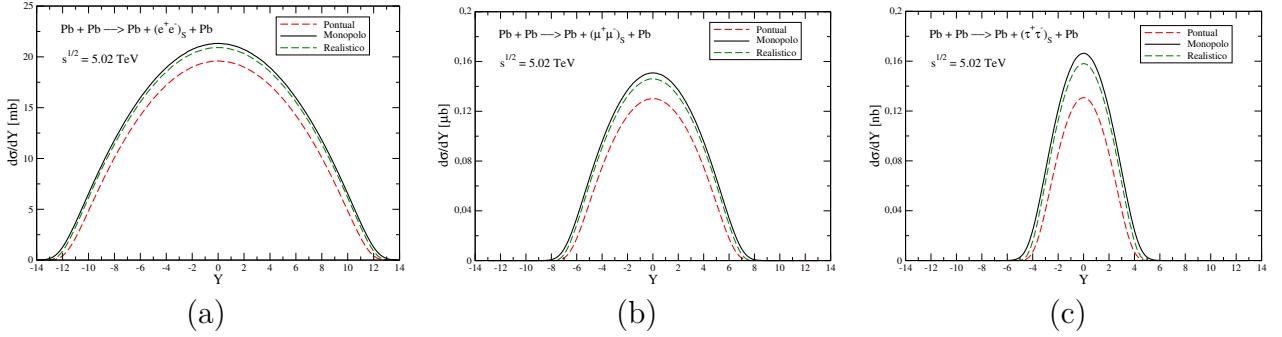
O fluxo de fótons dependente da distância transversa e da energia dos fótons, como discutido no Capítulo 3, tem forma geral dada por

$$N(\omega, r) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 r^2 \omega} \left| \int_0^\infty u^2 du \frac{F\left(\frac{u^2 + \frac{r^2 \omega^2}{\gamma^2}}{r^2}\right)}{u^2 + \frac{r^2 \omega^2}{\gamma^2}} J_1(u) \right|^2. \quad (5.4)$$

A função $F(q^2)$ é o de fator de forma nuclear, responsável por caracterizar a distribuição de cargas do núcleo fonte de fótons, pois trata-se da distribuição de cargas no espaço de momento. Uma visão muito simplificada, porém de amplo uso na literatura é considerar o núcleo como uma carga pontual, logo $F(q^2) = 1$. Com este modelo para a forma do núcleo não podemos realizar a integração nas distâncias transversas dos centros dos hadrons (r_1 e r_2) a partir de zero, pois o fluxo diverge quando $r \rightarrow 0$. Nesta modelagem utilizamos a distância mínima para os fótons como sendo o raio do núcleo em questão [42]. Uma outra visão, um pouco mais acurada da distribuição de cargas, é obtida ao considerar que a densidade de carga nuclear diminui exponencialmente de seu centro até sua borda, obtendo-se o fator de forma de monopolo [63], que não possui divergência no centro do hadron, logo podemos executar a integração nas distâncias transversas a partir de zero. Já uma visão mais realista do fator de forma nuclear pode ser obtida ao utilizar uma distribuição de cargas nuclear obtida pela parametrização de dados de espalhamentos de elétrons em núcleos. Assim obtém-se o fator de forma realístico [61], que também não apresenta divergência no centro dos hadrons.

A Figura 5.2 apresenta distribuições de rapidez para a produção de parapositrônio na esquerda, paramuônio no centro a paratauônio na direita, com o uso dos três diferentes fatores de forma nucleares descritos acima. As distribuições são obtidas para colisões PbPb em energias do *Run II* do LHC. Como pode-se ver na Figura 3.9, o fluxo de fótons com os

Figura 5.2 – Distribuições de rapidez para a produção de (a) parapositrônio, (b) paramuônio e (c) paratauônio em colisões PbPb com energia do LHC e utilizando diferentes fatores de forma nuclear.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

diferentes fatores de forma praticamente coincidem nas regiões externas aos núcleos, porém tem comportamentos notadamente distintos nas regiões internas. Como para utilizar o fluxo de fôtons pontual precisamos considerar apenas as regiões externas, as distribuições de rapidez ficam depreciadas pela quantidade de fôtons internos aos núcleos que podem dar origem aos estados ligados de léptons.

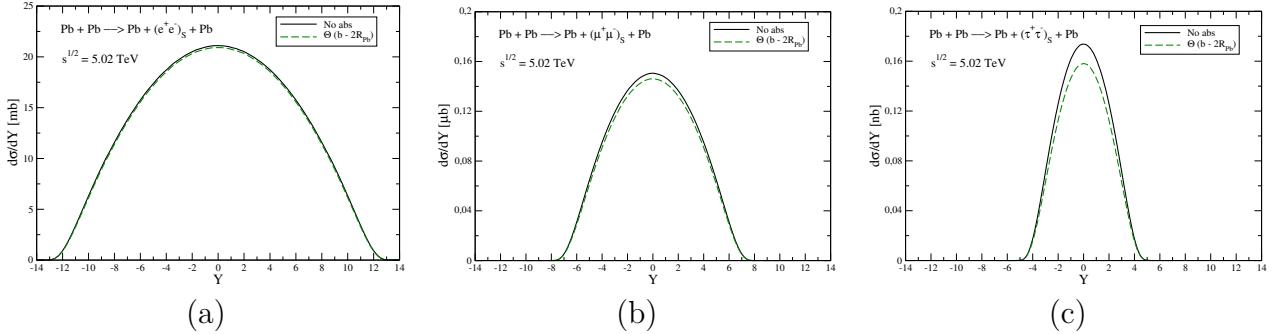
Nota-se claramente que o uso de fatores de forma mais acurados tem maior impacto na produção de estados ligados de léptons mais pesados. Podemos quantificar essa diferença integrando a área sob a curva da distribuição para obter a seção de choque total. A seção de choque total aumenta em aproximadamente 10%/18%/31% para a produção de parapositrônio/paramuônio/paratauônio quando utilizamos o fator de forma realístico em comparação com o uso do fator de forma pontual. Como será apresentado mais adiante, a produção de estados de maior massa invariante ficam restritas a regiões mais próximas aos núcleos, pois ali se encontram os fôtons equivalentes mais energéticos, os quais são os responsáveis pela produção de estados mais massivos.

5.3 IMPACTO DAS CORREÇÕES DE ABSORÇÃO

Para que possamos suprimir a interação forte das colisões, estamos utilizando a correção de absorção da função degrau [68]. Os resultados da comparação entre o uso do fator de absorção da função degrau e sem usar fator de absorção, são mostrados na Figura 5.3. Novamente analisamos colisões PbPb em energia do LHC, que dão origem a estados ligados de léptons de diferentes sabores.

Pode-se observar com clareza que, a exemplo da acurácia do fator de forma nuclear, a correção de absorção também ganha importância para a produção de léptons mais pesados. Podemos novamente quantificar essas diferenças obtendo as seções de choque totais. As seções de choque totais decrescem em aproximadamente 1,3%/3,8%/10% para a produção de parapositrônio/paramuônio/paratauônio com uso da correção de absorção da

Figura 5.3 – Distribuições de rapidez para a produção de (a) parapositrônio, (b) paramuônio e (c) paratauônia em colisões PbPb com energia do LHC, com e sem o fator de supressão da função degrau.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

função degrau. A explicação continua sendo a mesma, pois quando excluímos os eventos em que o parâmetro de impacto é menor do que a soma dos raios dos hadrons, estamos excluindo os casos em que há sobreposição dos núcleos colidentes da Figura 3.12, logo, estamos excluindo processos em que há sobreposição de duas regiões de fluxo de fótons de altas energias, fótons estes que tem energia suficiente para a produção de estados de maior massa invariante.

Os resultados apresentados até aqui reforçam a necessidade da análise destes processos com o fator de forma realístico, bem como a utilização de um fator de absorção para desconsiderar as colisões em que as interações fortes são predominantes no processo. Desta ponto em diante, usaremos apenas o fator de forma realístico e a função degrau como fator de supressão.

5.4 DISTRIBUIÇÕES ESPACIAIS E NA ENERGIA

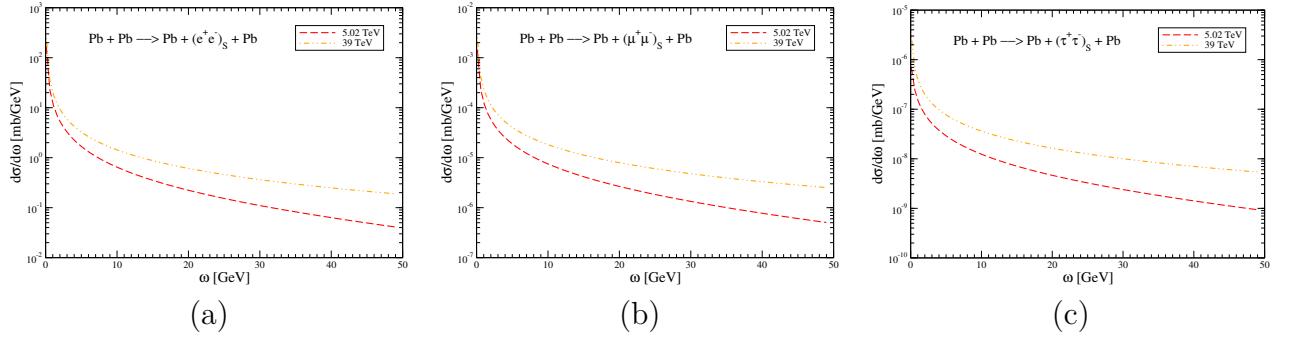
Diferentes distribuições diferenciais da seção de choque total de um processo são muito úteis no estudo de física de partículas. Algumas por serem mensuráveis nos grandes colisores, e outras simplesmente por facilitarem a compreensão e a análise dos processos. Nesta seção apresentamos algumas distribuições que podem não possuir análogo experimental (distribuições no parâmetro de impacto e nas distâncias transversas aos centros dos hadrons), mas que são muito úteis para a compreensão da física dos processos.

Com a seção de choque diferencial da Equação (5.1), podemos facilmente obter uma distribuição na energia de um dos fótons, basta regressar das variáveis de rapidez e massa invariante às variáveis ω_1 e ω_2 , obtendo então

$$\frac{d\sigma_{h_1+h_2 \rightarrow h_1+(l^+l^-)_S+h_2}}{d\omega_1} = \int \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} S_{abs}^2 N(\omega_1, \vec{r}_1) N(\omega_2, \vec{r}_2) d^2\vec{r}_1 d^2\vec{r}_2 d\omega_2. \quad (5.5)$$

A Figura 5.4 apresenta as distribuições da Equação (5.5) para as três gerações de leptons em energias do LHC ($\sqrt{s} = 5,02 \text{ TeV}$) e do FCC ($\sqrt{s} = 39 \text{ TeV}$). Observa-se o

Figura 5.4 – Distribuições na energia de um dos fótons para a produção de (a) parapositrônio, (b) paramuônio e (c) paratauônio em colisões PbPb com energia do LHC e do FCC.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

mesmo comportamento para todas as gerações de estados ligados, diferindo apenas na ordem de grandeza da seção de choque. No range de energia observado a distribuição diminui com o aumento da energia, o que enfatiza o decréscimo no número de fótons equivalentes com o aumento da energia, pois na fórmula de Low a dependência na energia dos fótons está apenas na delta de Dirac.

Utilizando a Equação (5.1) podemos obter uma distribuição dupla nas distâncias transversas dos centros dos hadrões. Ao fazer uso de coordenadas polares e integrando na rapidez, a Equação (5.1) torna-se

$$\frac{d\sigma_{h_1+h_2 \rightarrow h_1+(l^+l^-)_S+h_2}}{dr_1 dr_2} = \int \frac{W}{2} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} S_{abs}^2 N(\omega_1, \vec{r}_1) N(\omega_2, \vec{r}_2) r_1 r_2 d\phi_1 d\phi_2 dW dY. \quad (5.6)$$

As distribuições espaciais são apresentadas na Figura 5.5. Na coluna da esquerda temos as distribuições da seção de choque em r_1 e r_2 , e ao lado seus respectivos mapas de calor. Como já mencionado anteriormente, quando discutido a relevância do tratamento da seção de choque com fator de forma e correção de absorção, vemos claramente que a produção de estados ligados fica mais restrita a regiões mais próximas aos núcleos ao aumentar a massa dos leptões produzidos. É possível verificar também que a seção de choque continua muito significativa nas regiões próximas pelo menos de um dos núcleos, e cai de forma acentuada nas regiões distantes dos dois hadrões.

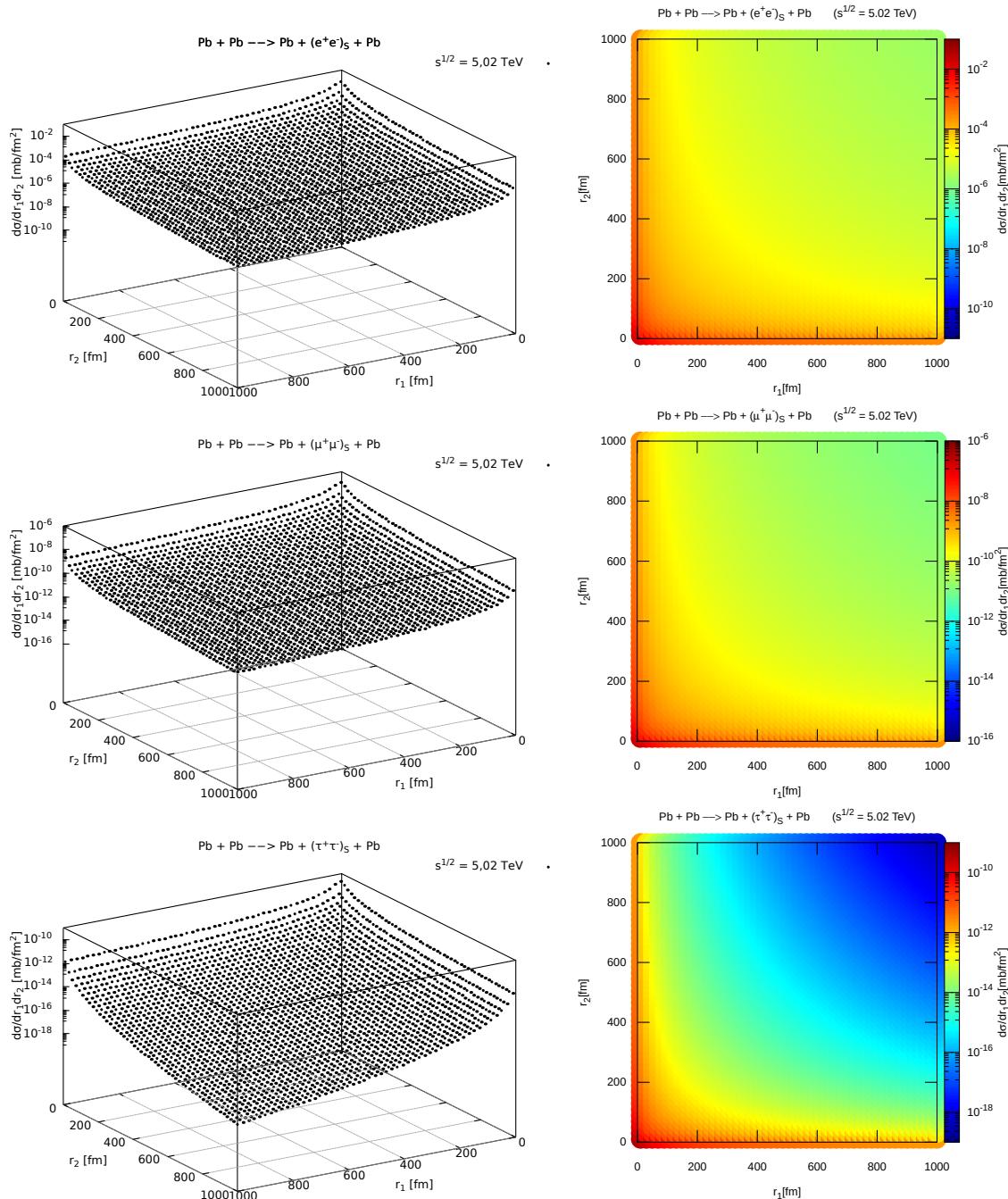
A Equação (5.6) nos permite também construir distribuições da seção de choque total no parâmetro de impacto da colisão. Para isso, definiremos duas novas variáveis em termos das distâncias transversas dos centros dos hadrões \vec{r}_1 e \vec{r}_2 :

$$\vec{b} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (5.7)$$

e

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}. \quad (5.8)$$

Figura 5.5 – Distribuições espaciais para a produção de diferentes sabores de estados ligados de léptons em colisões PbPb com energia do LHC.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Com uma análise geométrica da colisão (ver Figura 3.12), é trivial identificar \vec{b} como o parâmetro de impacto da colisão dos íons. Podemos escrever as novas variáveis, \vec{b} e \vec{B} , em termos das variáveis antigas, \vec{r}_1 e \vec{r}_2 ,

$$\vec{r}_1 = \frac{\vec{b}}{2} + \vec{B} \quad (5.9)$$

e

$$\vec{r}_2 = \vec{B} - \frac{\vec{b}}{2}. \quad (5.10)$$

Em termos de seus componentes em coordenadas cartesianas, as Equações (5.9) e (5.10) tornam-se

$$\begin{aligned} r_{1,x} &= B_x + \frac{b_x}{2} \\ r_{1,y} &= B_y + \frac{b_y}{2} \\ r_{2,x} &= B_x - \frac{b_x}{2} \\ r_{2,y} &= B_y + \frac{b_y}{2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Estas equações nos permitem obter o determinante da matriz jacobiana da transformação $(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow (\vec{b}, \vec{B})$, que nos permite transformar os elementos diferenciais de integração da seguinte forma

$$dr_{1,x} dr_{1,y} dr_{2,x} dr_{2,y} = J db_x db_y dB_x dB_y. \quad (5.12)$$

Com as Equações (5.11) é possível mostrar que

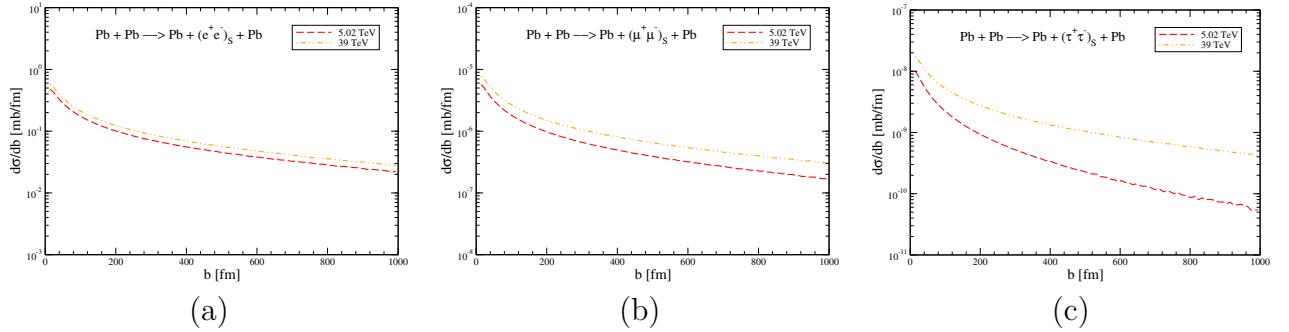
$$J = \left| \frac{\partial(r_{1,x}, r_{1,y}, r_{2,x}, r_{2,y})}{\partial(b_x, b_y, B_x, B_y)} \right| = 1. \quad (5.13)$$

Assim, podemos transformar a Equação (5.6) em uma distribuição de parâmetro de impacto ao utilizar as relações (5.9) e (5.10) e fazendo $db_x db_y = b db d\phi$:

$$\frac{d\sigma_{h_1+h_2 \rightarrow h_1+(l^+l^-)_S+h_2}}{db} = \int \frac{W}{2} b \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} S_{abs}^2 N(\omega_1, \vec{r}_1) N(\omega_2, \vec{r}_2) d\phi d^2 \vec{B} dW dY. \quad (5.14)$$

Aplicamos a Equação (5.14) à produção de $(e^+e^-)_S$, $(\mu^+\mu^-)_S$ e $(\tau^+\tau^-)_S$ em energias do LHC ($\sqrt{s} = 5,02$ TeV) e do FCC ($\sqrt{s} = 39$ TeV) em colisões de íons de chumbo. Os resultados são apresentados na Figura 5.6. Além da diferença na ordem de grandeza da seção de choque que há entre as diferentes gerações de léptons produzidos, vê-se claramente que a seção de choque decresce mais rapidamente com o aumento do parâmetro de impacto para léptons mais pesados. É possível observar também que o aumento da energia de colisão impulsiona a produção das diferentes gerações de estados ligados de maneira desproporcional, sendo menos significativa para a produção de parapositrônio.

Figura 5.6 – Distribuições no parâmetro de impacto para a produção de (a) parapositrônio, (b) paramuônio e (c) paratauônio em colisões PbPb com energia do LHC.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

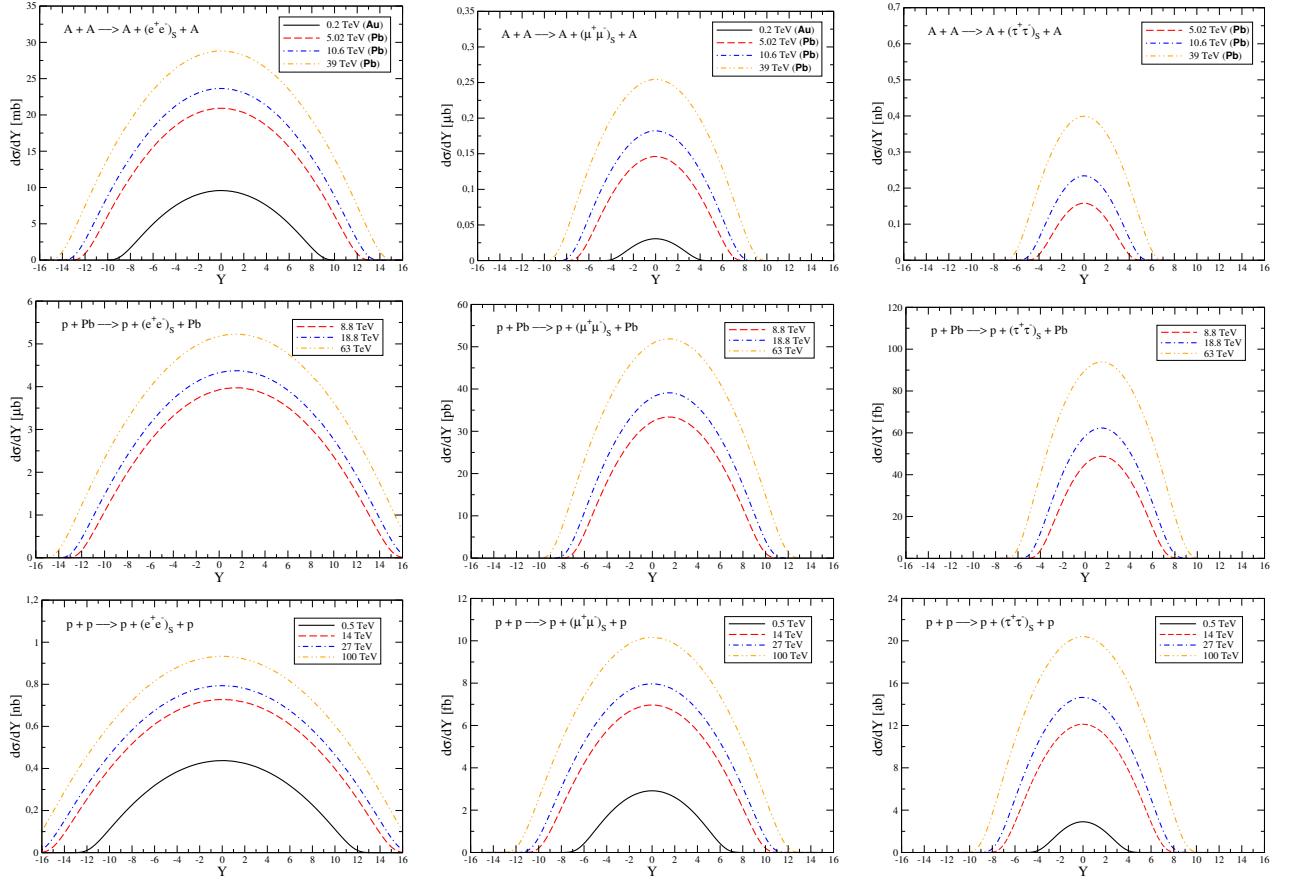
5.5 DISTRIBUIÇÕES DE RAPIDEZ

Nossos principais resultados, as distribuições de rapidez para a produção de paraeestados por dois fótons, são apresentadas na Figura 5.7 e serão discutidos nesta seção. Em cada coluna da figura citada temos as previsões para cada um dos três sabores de estados ligados de léptons, sendo da esquerda para a direita: parapositrônio, paramuônio e paratauônio. Na linha superior dos gráficos temos as previsões para colisões de núcleos pesados de acordo com os colisores RHIC (AuAu com $\sqrt{s} = 0,2$ TeV), LHC (PbPb com $\sqrt{s} = 5,02$ TeV e $\sqrt{s} = 10,6$ TeV) e FCC (PbPb com $\sqrt{s} = 39$ TeV) [12, 16, 83, 84, 85]. Na linha intermediária as distribuições para colisões pPb, com energias do LHC ($\sqrt{s} = 8,8$ TeV e $\sqrt{s} = 18,8$ TeV) e FCC ($\sqrt{s} = 63$ TeV) [12, 83, 84, 85]. Por fim, na linha inferior os resultados para colisões pp, com energias do RHIC ($\sqrt{s} = 0,5$ TeV), LHC ($\sqrt{s} = 14$ TeV e $\sqrt{s} = 29$ TeV) e FCC ($\sqrt{s} = 100$ TeV) [12, 83, 84, 85].

Observamos diferentes ordens de grandeza para a produção de diferentes sabores de estados ligados. Tal resultado é consequência da diferença de energia necessária para produzi-los. Também há diferenças expressivas nas ordens de grandeza das distribuições para diferentes tipos de colisões de hadrons. Esta diferença origina-se da diferença na ordem de grandeza do fluxo de fótons, pois o fluxo cresce com Z^2 para cada hadron, sendo então muito mais expressivo em colisões de núcleos pesados.

O range de rapidez efetivo também altera-se para diferentes tipos de colisões e diferentes tipos de resultados. Os limites inferior e superior de rapidez estendem-se aproximadamente ao limite em que toda a energia do íon é transferida ao fóton que dá origem ao estado ligado. Assim, é evidente o aumento no range de rapidez com o aumento da energia de colisão, como também o aumento no range de rapidez com o decréscimo da massa dos léptons produzidos. Também observa-se claramente que o range de rapidez é maior quando há prótons envolvidos na colisão. Embora o fluxo de fótons de prótons seja de menor magnitude que os fluxos de íons pesados, eles conseguem produzir fótons mais

Figura 5.7 – Distribuições de rapidez para a produção de estados ligados singletos de léptons por dois fótons em colisões AA (linha superior), pPb (linha intermediária) e pp (linha inferior).



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

energéticos, responsáveis por produzir os estados ligados com grande módulo de rapidez.

Em colisões simétricas (AA e pp), as distribuições são simétricas em relação ao eixo de rapidez. O mesmo não ocorre em colisões pPb, dado que os fluxos de fótons de prótons e núcleos são assimétricos.

Mais adiante, ainda neste capítulo, aplicaremos cortes experimentais na rapidez, e obteremos as seções de choque e taxas de eventos de acordo com rapidez central e frontal dos detectores em operação nos colisores de hadrons.

5.6 IMPACTO DAS CORREÇÕES COULOMBIANAS

Correções coulombianas são correções de mais alta ordem da QED, logo, no processo de nosso interesse nesta dissertação, visam a produção de estados ligados de léptons por interações de muitos fótons. Este tipo de correção torna-se significativo em altas energias quando há núcleos pesados envolvidos, pois o parâmetro de expansão deixa de ser α e torna-se $Z\alpha$.

Estimativas e discussões deste tipo de correções para a produção de pares de

léptons e antiléptons são muito debatidas na literatura [63, 86, 87, 88]. Também há contradições quanto a sua relevância para a produção de diferentes sabores de léptons. A referência [89] trata as correções coulombianas para a produção de léptons pesados como sendo significativamente relevantes, enquanto os autores da referência [90] afirmam que seus impactos são mais significativos para a produção de e^+e^- . Dadas estas controvérsias, analisaremos os impactos das correções de mais alta ordem da QED apenas para a produção de parapositrônio, pois não há menção na literatura para tais correções na produção de estados ligados de léptons pesados.

Como discutido na Capítulo 4, uma estimativa para obtermos a distribuição de rapidez da correção coulombiana para a produção de parapositrônio, de acordo com as referências [17, 20] é dada por

$$\frac{d\sigma_{CC}}{dY} = -\zeta(3) \frac{Z^2 \alpha^6}{m_l^2} C(Z_1) n(\omega_2) - \zeta(3) \frac{Z^2 \alpha^6}{m_l^2} C(Z_2) n(\omega_1). \quad (5.15)$$

A distribuição de rapidez total será a soma da distribuição de rapidez a nível de Born, obtida com a aproximação de fótons equivalentes, com a distribuição de rapidez da correção coulombiana:

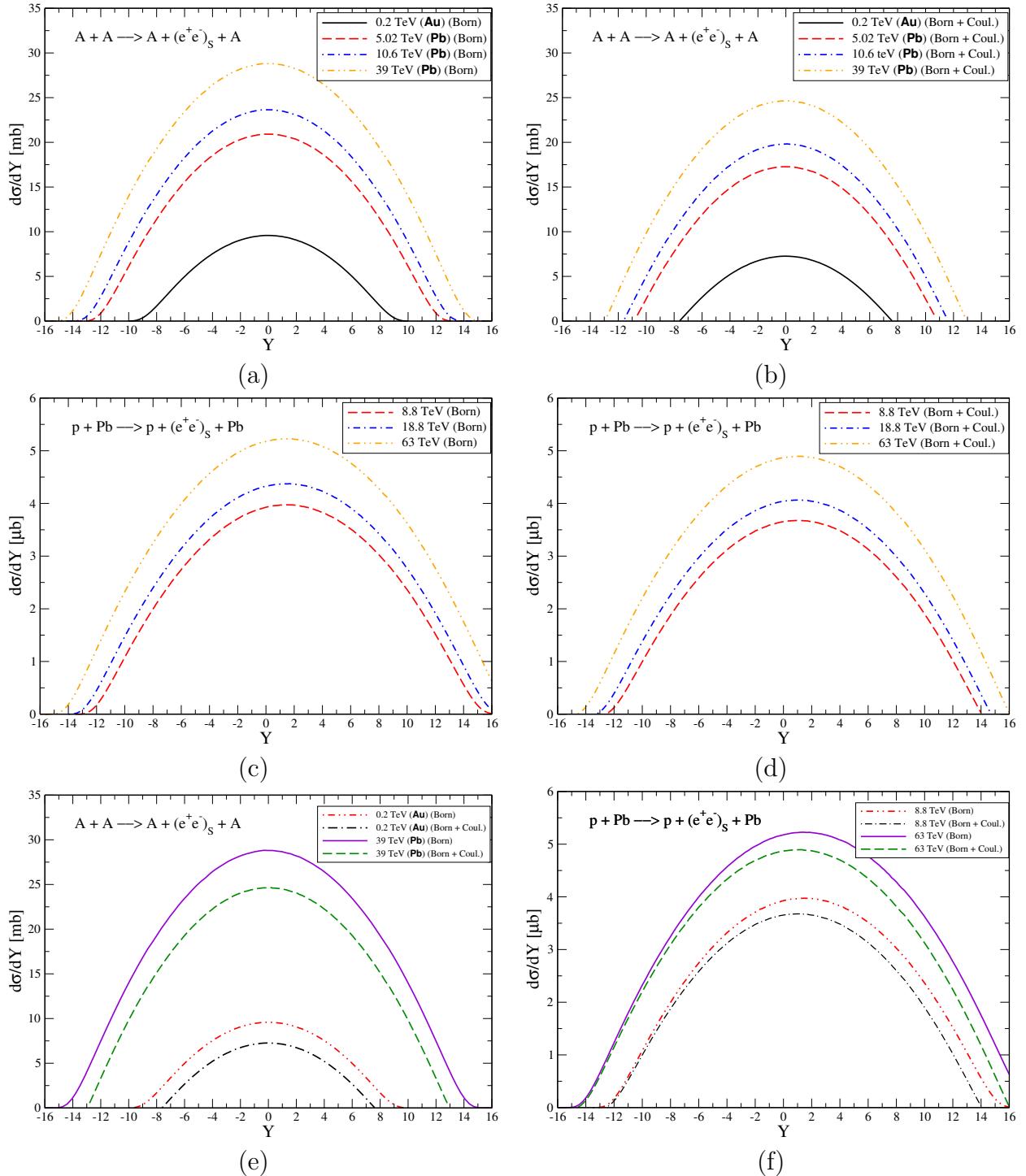
$$\frac{d\sigma_{total}}{dY} = \frac{d\sigma_{Born}}{dY} + \frac{d\sigma_{CC}}{dY} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{total}}{dY} = & \int \frac{W}{2} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} S_{abs}^2 N(\omega_1, \vec{r}_1) N(\omega_2, \vec{r}_2) d^2\vec{r}_1 d^2\vec{r}_2 dW + \\ & -\zeta(3) \frac{Z^2 \alpha^6}{m_l^2} C(Z_1) n(\omega_2) - \zeta(3) \frac{Z^2 \alpha^6}{m_l^2} C(Z_2) n(\omega_1). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Apresentamos as distribuições de rapidez corrigidas com as correções coulombianas na Figura 5.8, juntamente com resultados a nível de Born para comparação. Nos gráficos superiores da Figura 5.8 temos na esquerda as distribuições de rapidez a nível de Born para colisões de núcleos pesados, e na direita as mesmas distribuições com correções coulombianas. Do mesmo modo na segunda linha da figura, que trata-se de colisões pPb. Na terceira linha temos as comparações mais claras do impacto destas correções, tendo no mesmo gráfico resultados a nível de Born e com os efeitos de mais alta ordem.

Em colisões de dois núcleos pesados as correções coulombianas são significativas em todo o range de rapidez, pois a multitroca de fótons acontece com ambos os hadrons. Diferentemente das colisões pPb, em que a correção por multitroca de fótons por parte do próton é ignorável. Neste caso, a distribuições de rapidez é mais afetada no regime de baixas energias dos fótons emitidos pelo núcleo pesado.

Figura 5.8 – Distribuições de rapidez (a, c) a nível de Born, (b, d) com correções coulombianas e (e, f) comparações entre Nível de Born e com correções coulombianas.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

5.7 TAXAS DE PRODUÇÃO

Nesta seção vamos apresentar nossas previsões de seção de choque e taxas de produção de estados ligados de léptons de acordo com as características dos colisores RHIC, LHC e FCC [12, 84, 85].

As seções de choque a nível de Born e com correções coulombianas dos estados singletos (σ_S) podem ser obtidas integrando a área sobre a curva da distribuição de rapidez,

$$\sigma_S = \int \frac{d\sigma}{dY} dY. \quad (5.18)$$

Estimamos seções de choque totais a nível de Born para os estados tripletos (σ_T) também utilizando o formalismo da aproximação de fótons equivalentes, mas no referencial de laboratório da colisão de íons

$$\sigma_T = \int d\omega_1 d^2\vec{r}_1 N(\omega, \vec{r}_1) \sigma_{\gamma A \rightarrow (l^+ l^-)_T} \int d\omega_2 d^2\vec{r}_2 N(\omega, \vec{r}_2) \sigma_{\gamma A \rightarrow (l^+ l^-)_T} \quad (5.19)$$

onde a seção de choque fóton-núcleo que origina o estado triplo de léptons [18] é dada por

$$\sigma_{\gamma A \rightarrow (l^+ l^-)_T} = \frac{4\pi Z^4 \alpha^8}{m_l^2} \zeta(3) B(Z) \quad (5.20)$$

onde

$$B(Z) = \left[\frac{\pi Z \alpha}{\sinh(\pi Z \alpha)} \right]^2 \frac{1}{8} \int_0^1 dz \sqrt{z} (1+z) [F(1+iZ\alpha, 1-iZ\alpha; 2; z)^2]. \quad (5.21)$$

A variável z foi definida no Capítulo 4, quando apresentamos as correções de mais alta ordem da QED. A função $B(Z)$ assume os valores 0,3770 e 0,3654 para a produção de ortopositrônio em núcleos de ouro e chumbo, respectivamente [17]. Para a produção de ortomuônio, a função $B(Z)$ é aproximadamente 0,0932 para núcleos de ouro e de chumbo [20]. Já para a produção de ortotauônio, $B(Z)$ é aproximadamente $3,2975 \times 10^{-4}$ para núcleos de ouro e de chumbo [20]. A integração da Equação (5.19) em ω_i não pode ser executada a partir de zero, pois a seção de choque da Equação (5.20) não possui dependência na energia do fóton incidente. Uma integração a partir de zero resultaria em uma seção de choque que tende ao infinito, dado que a fluxo de fótons tende ao infinito quando a energia dos fótons tendem a zero. Logo, integramos a partir de $2m_e$ para a produção de ortopositrônio [17], $1,5m_\mu$ para a produção de ortomuônio e $25m_\tau$ para a produção de ortotauônio [20].

Na Equação (5.19) utilizamos o fluxo de fótons dependente da distância transversa, porém não há necessidade de utilizá-lo. A motivação para uso do fluxo de fótons dependente da distância transversa é a inserção de um fator de supressão das interações fortes, porém

Tabela 5.1 – Seção de choque total em fb (Taxa de eventos por ano) para a produção de estados ligados de léptons singletos e tripletos em colisões pp, pA e AA.

	Parapositrônio	Paramuônio	Paratauônio
pp ($\sqrt{s} = 0.5$ TeV)	6.8×10^6 (6.8×10^6)	24.7 (24.7)	14.3×10^{-3} (14.3×10^{-3})
pp ($\sqrt{s} = 14$ TeV)	14.5×10^6 (14.5×10^6)	89.6 (89.6)	110.9×10^{-3} (110.9×10^{-3})
pp ($\sqrt{s} = 27$ TeV)	16.5×10^6 (16.5×10^6)	109.4 (109.4)	146.6×10^{-3} (146.6×10^{-3})
pp ($\sqrt{s} = 100$ TeV)	21.0×10^6 (21.0×10^6)	157.1 (157.1)	239.3×10^{-3} (239.3×10^{-3})
pPb ($\sqrt{s} = 8.8$ TeV)	71.5×10^9 (71.5×10^6)	364.6×10^3 (363.6)	353.8 (353.8×10^{-3})
pPb ($\sqrt{s} = 18.8$ TeV)	82.5×10^9 (82.5×10^6)	461.1×10^3 (461.1)	504.4 (504.4×10^{-3})
pPb ($\sqrt{s} = 63.0$ TeV)	107.7×10^9 (3123.3×10^6)	700.8×10^3 (20323.2)	919.7 (26671.3×10^{-3})
AuAu ($\sqrt{s} = 0.2$ TeV)	112.1×10^{12} (11.2×10^8)	150.0×10^6 (1.5×10^3)	3.8×10^3 (0.04)
PbPb ($\sqrt{s} = 5.02$ TeV)	333.2×10^{12} (33.3×10^8)	1297.0×10^6 (12.9×10^3)	832.7×10^3 (8.3)
PbPb ($\sqrt{s} = 10.6$ TeV)	400.3×10^{12} (40.0×10^8)	1796.0×10^6 (17.9×10^3)	1450.0×10^3 (14.5)
PbPb ($\sqrt{s} = 39.0$ TeV)	537.6×10^{12} (59.1×10^9)	2945.0×10^6 (32.4×10^4)	3142.0×10^3 (345.6)
	Ortopositrônio	Ortomuônio	Orthotauônio
pPb ($\sqrt{s} = 8.8$ TeV)	3.3×10^9 (3.3×10^6)	19.9×10^3 (19.9)	0.16 (0.16×10^{-3})
pPb ($\sqrt{s} = 18.8$ TeV)	3.7×10^9 (3.7×10^6)	22.4×10^3 (22.4)	0.18 (0.18×10^{-3})
pPb ($\sqrt{s} = 63.0$ TeV)	4.6×10^9 (133.4×10^6)	27.6×10^3 (800.4)	0.24 (5.8×10^{-3})
AuAu ($\sqrt{s} = 0.2$ TeV)	6.0×10^{12} (0.60×10^8)	26.6×10^6 (0.27×10^3)	0.03×10^3 (0.26×10^{-3})
PbPb ($\sqrt{s} = 5.02$ TeV)	21.8×10^{12} (2.2×10^8)	111.4×10^6 (1.11×10^3)	0.51×10^3 (5.1×10^{-3})
PbPb ($\sqrt{s} = 10.6$ TeV)	26.3×10^{12} (2.6×10^8)	136.2×10^6 (1.4×10^3)	0.70×10^3 (7.0×10^{-3})
PbPb ($\sqrt{s} = 39.0$ TeV)	35.0×10^{12} (3.9×10^8)	185.3×10^6 (2.0×10^3)	1.11×10^3 (12.2×10^{-3})

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

no formalismo do referencial de laboratório não há como aplicar este tipo de correção, logo, pode-se utilizar o fluxo de fótons dependente apenas da energia dos fótons.

A Tabela 5.1 apresenta as seções de choque totais (em fb) para a produção de estados ligados de léptons nos principais colisores de hadrons, e entre parênteses uma estimativa das taxas de produção totais por ano, sendo utilizadas as luminosidades apresentadas na Tabela 5.2 (já integradas no tempo de execução anual dos colisores para cada tipo de colisão.) [83]. É importante mencionar que as luminosidades utilizadas são de acordo com estimativas prévias para os colisores, conforme os dados obtidos em [83]. Estas estimativas prévias têm valores um pouco subestimados em comparação com os valores alcançados atualmente nos colisores, conforme pode ser verificado, para o LHC em [91].

As taxas de produção foram obtidas com a relação

$$N = \sigma \mathcal{L} \quad (5.22)$$

sendo N o número de eventos dada uma luminosidade integrada no tempo, \mathcal{L} . A luminosidade de um colisor é definida como o número de partículas por unidade de área por unidade de tempo no eixo de colisão. Logo, quando integrada no tempo representa o número de partículas por unidade de área no período em que foi integrada.

Como temos distribuições de rapidez para os estados singletos, podemos obter as

Tabela 5.2 – Luminosidades utilizadas para obtenção das taxas de produção (integradas por tempo de execução do experimento).

Colisor	Colisão	\sqrt{s} (TeV)	E_1 (TeV)	E_2 (TeV)	\mathcal{L} (em um ano)
RHIC	pp	0,5	0,25	0,25	1 fb^{-1}
	AuAu	0,2	0,1	0,1	10 nb^{-1}
LHC	pp	14	7	7	1 fb^{-1}
	pPb	8,8	7	2,75	1 pb^{-1}
	PbPb	5,02	2,51	2,51	10 nb^{-1}
LHC-HE	pp	27	13,5	13,5	1 fb^{-1}
	pPb	18,8	13,5	5,3	1 pb^{-1}
	PbPb	10,6	5,3	5,3	10 nb^{-1}
FCC	pp	100	50	50	1 fb^{-1}
	pPb	63	50	19,5	29 pb^{-1}
	PbPb	39	19,5	19,5	110 nb^{-1}

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

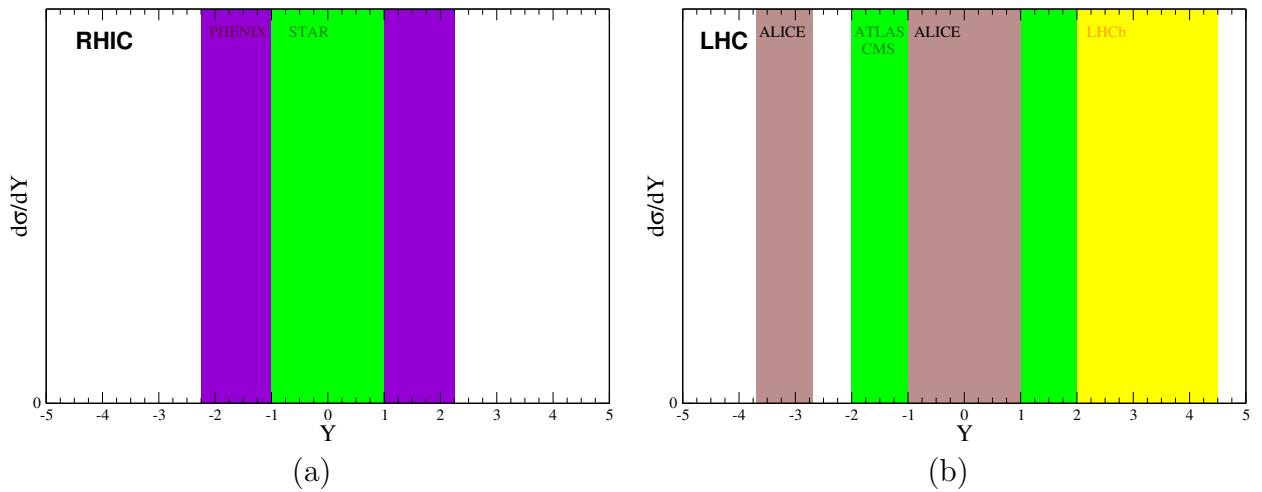
seções de choque com os cortes na rapidez de acordo com as especificações dos experimentos dos colisores de hadrons. No RHIC existem dois detectores principais, STAR e PHENIX, que possuem calorímetros eletromagnéticos que detectam eletrons, pósitrons e fótons com rapidez central entre $-1 < Y < 1$ e $-2,25 < Y < 2,25$, respectivamente, conforme a Figura 5.9a [14]. O LHC também possui calorímetros eletromagnéticos que detectam partículas em rapidez central nos detectores ATLAS, CMS e ALICE, com range de rapidez dado na Figura 5.9b. Além dos detectores em rapidez central, o LHC possui experimentos capazes de detectar partículas com rapidez frontal, o LHCb e o ALICE, que atuam em ranges de rapidez conforme a Figura 5.9b [14].

Dada a geometria dos detectores para rapidez descrita acima, podemos, a partir das distribuições de rapidez da Figura 5.7 estimar seções de choque em rapidez central e frontal, que adotaremos como sendo entre $-2,5 \leq Y \leq 2,5$ e $2,0 \leq Y \leq 4,5$, respectivamente. A Tabela 5.3 apresenta as seções de choque para a produção de estados singletos a nível de Born (em fb) com cortes de acordo com rapidez central e rapidez frontal. Verifica-se facilmente que as seções de choque em rapidez central é sempre dominante comparado com a rapidez frontal, pois além de a produção ser máxima em rapidez frontal para colisões simétricas, seu range analisado é maior.

As previsões apresentadas até aqui nesta seção são para produção a nível de Born. Pode-se obter estimativas para a produção de parapositrônio com correções de mais alta ordem, ao utilizar as distribuições da Figura 5.8. As seções de choque e taxas de produção com as correções da mais alta ordem da QED, considerando ranges de rapidez frontal e central para a produção de parapositrônio em colisões que envolvem ao menos um núcleo pesado são apresentadas na Tabela 5.4.

O impacto das correções coulombianas pode ser avaliado em comparação direta dos

Figura 5.9 – Cortes experimentais em rapidez adotados no (a) RHIC e no (b) LHC para detecção de elétrons, pósitrons e fótons.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Tabela 5.3 – Seção de choque (em fb) para a produção de estados ligados de léptons singletos a nível de Born em colisões pp, pA e AA considerando ranges de rapidez central e frontal.

	Parapositrônio		Paramuônio		Paratauônia	
	$-2.5 \leq Y \leq 2.5$	$2.0 \leq Y \leq 4.5$	$-2.5 \leq Y \leq 2.5$	$2.0 \leq Y \leq 4.5$	$-2.5 \leq Y \leq 2.5$	$2.0 \leq Y \leq 4.5$
pp ($\sqrt{s} = 0.5$ TeV)	2.2×10^6	1.0×10^6	13.7	5.2	11.9×10^{-3}	2.0×10^{-3}
pp ($\sqrt{s} = 14$ TeV)	3.6×10^6	1.7×10^6	34.0	15.3	57.7×10^{-3}	22.8×10^{-3}
pp ($\sqrt{s} = 27$ TeV)	3.9×10^6	1.9×10^6	39.0	17.8	70.4×10^{-3}	29.1×10^{-3}
pp ($\sqrt{s} = 100$ TeV)	4.6×10^6	2.2×10^6	50.0	23.3	99.1×10^{-3}	43.5×10^{-3}
pPb ($\sqrt{s} = 8.8$ TeV)	19.4×10^9	9.7×10^9	157.0×10^3	78.6×10^3	206.3	105.6
pPb ($\sqrt{s} = 18.8$ TeV)	21.4×10^9	10.7×10^9	184.7×10^3	92.9×10^3	273.4	139.0
pPb ($\sqrt{s} = 63$ TeV)	25.7×10^9	12.9×10^9	248.4×10^3	124.8×10^3	431.1	217.8
AuAu ($\sqrt{s} = 0.2$ TeV)	46.6×10^{12}	20.4×10^{12}	125.5×10^6	19.7×10^6	3.8×10^3	3.6
PbPb ($\sqrt{s} = 5.02$ TeV)	103.1×10^{12}	48.2×10^{12}	693.9×10^6	269.3×10^6	671.0×10^3	130.2×10^3
PbPb ($\sqrt{s} = 10.6$ TeV)	116.7×10^{12}	55.0×10^{12}	874.5×10^6	359.4×10^6	1044.0×10^3	280.0×10^3
PbPb ($\sqrt{s} = 39.0$ TeV)	142.5×10^{12}	67.9×10^{12}	1236.0×10^6	539.9×10^6	1867.0×10^3	663.1×10^3

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

Tabela 5.4 – Seção de choque em fb (Taxa de eventos por ano) para a produção de parapositrônio incluindo estimativas de correções coulombianas.

	$-2.5 \leq Y \leq 2.5$	$2.0 \leq Y \leq 4.5$	Total
AuAu ($\sqrt{s} = 0.2$ TeV)	36.2×10^{12} (3.6×10^8)	15.1×10^{12} (1.5×10^8)	73.0×10^{12} (7.0×10^8)
PbPb ($\sqrt{s} = 5.02$ TeV)	85.4×10^{12} (8.5×10^8)	39.4×10^{12} (3.9×10^8)	248.3×10^{12} (24.8×10^8)
PbPb ($\sqrt{s} = 10.6$ TeV)	99.4×10^{12} (9.9×10^8)	46.4×10^{12} (4.6×10^8)	305.3×10^{12} (30.5×10^8)
PbPb ($\sqrt{s} = 39$ TeV)	124.5×10^{12} (13.7×10^9)	55.5×10^{12} (6.0×10^9)	423.3×10^{12} (46.6×10^9)
pPb ($\sqrt{s} = 8.8$ TeV)	18.1×10^9 (18.1×10^6)	8.9×10^9 (8.9×10^6)	63.4×10^9 (63.4×10^6)
pPb ($\sqrt{s} = 18.8$ TeV)	19.8×10^9 (19.8×10^6)	9.8×10^9 (9.8×10^6)	73.7×10^9 (73.7×10^6)
pPb ($\sqrt{s} = 63$ TeV)	24.4×10^9 (7.1×10^8)	11.5×10^9 (3.3×10^8)	97.3×10^9 (28.2×10^8)

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

resultados das Tabelas 5.3 e 5.4. No range de rapidez central ($-2,5 \leq Y \leq 2,5$) a seção de choque é suprimida por $\approx 22\%$ e $\approx 13\%$ para colisões de núcleos pesados em energias do RHIC e FCC, respectivamente. Para as colisões pPb, no range de rapidez central, as seções de choque são reduzidas por $\approx 7\%$ e $\approx 5\%$ para energias $\sqrt{s} = 8,8$ TeV e $\sqrt{s} = 63$ TeV, respectivamente. Estes resultados indicam que uma futura análise experimental da produção de parapositrônio em colisões de núcleos pesados pode ser útil para validar o tratamento das correções coulombianas discutidas aqui.

5.8 CONCLUSÃO

Neste capítulo apresentamos e discutimos nossos resultados para fotoprodução de estados ligados de léptons em colisões hadrônicas. Discutimos a importância do tratamento das colisões ultraperiféricas de hadrons com o uso do fator de forma realístico, bem como a utilização de um fator de supressão. Estimamos o impacto das correções coulombianas em colisões de núcleos pesados nas distribuições de rapidez e taxas de produção. Nossos resultados apontam uma grande importância de efeitos de mais alta ordem da QED na produção de parapositrônio.

6 CONCLUSÃO

Apresentamos neste trabalho nossos estudos a respeito da produção de estados ligados de léptons em colisões hadrônicas ultraperiféricas. Utilizamos diferentes fatores de forma nuclear, e apontamos a necessidade de considerarmos uma visão realista da distribuição espacial de cargas. Analisamos colisões pp, pPb e PbPb em energias dos aceleradores de partículas RHIC, LHC e FCC. Para a produção de parapositrônio em colisões de núcleos pesados, verificamos a necessidade de considerar correções de mais alta ordem da QED.

Nossa principal motivação para o estudo da produção destes átomos exóticos são as altas seções de choque e suas taxas de evento associadas nos principais colisores de hadrons em operação atualmente, como demonstrado. Observamos que as seções de choque aumentam com a energia de centro de massa da colisão, bem como aumenta com o decréscimo da massa dos léptons produzidos.

Dadas as altas taxas de produção nos colisores, é possível novas observações de positrônio e, pela primeira vez, observações de muônio. Em contraste, devido às baixas taxas de produção de tauônio, e por seu tempo de vida ser compatível com o tempo de vida do lepton tau, a primeira medição do tauônio torna-se uma tarefa extremamente difícil.

Verificamos que em colisões de núcleos pesados a produção de paraestados é dominante em relação à produção de ortoestados. As seções de choque para produção de (para) positrônio/muônio/tauônio são aproximadamente 14/16/2500 vezes maior que a produção de (orto) positrônio/muônio/tauônio em energias do LHC. Verificamos que o impacto das correções coulombianas não são negligenciáveis em colisões que envolvem núcleos pesados, contrariamente às colisões pp, em que é muito improvável a interação multifóton. Deste modo, a análise de ortoestados também torna-se sem importância em colisões pp.

Para trabalhos futuros, pretendemos construir resultados para reforçar a motivação de medidas experimentais, como distribuições de momento transverso e de pseudorapidez. Devido ao baixo tempo de vida destes estados, a medição será majoritariamente dos produtos de decaimento, motivando também a construção de distribuições para os produtos de decaimento dos estados ligados.

REFERÊNCIAS

- 1 FROLOV, A. M. Annihilation, bound state properties and photodetachment of the positronium negatively charged ion. **Chemical Physics Letters**, Elsevier, v. 626, p. 49–54, 2015. Citado na página 18.
- 2 CASSIDY, D. B.; DENG, S. H. M.; JR, A. P. Mills. Evidence for positronium molecule formation at a metal surface. **Physical Review A**, APS, v. 76, n. 6, p. 062511, 2007. Citado na página 18.
- 3 KOZLOWSKI, P. M.; ADAMOWICZ, L. Nonadiabatic variational calculations for the ground state of the positronium molecule. **Physical Review A**, APS, v. 48, n. 3, p. 1903, 1993. Citado na página 18.
- 4 USUKURA, J.; VARGA, K.; SUZUKI, Y. Signature of the existence of the positronium molecule. **Physical Review A**, APS, v. 58, n. 3, p. 1918, 1998. Citado na página 18.
- 5 DEUTSCH, M. Evidence for the formation of positronium in gases. **Physical Review**, APS, v. 82, n. 3, p. 455, 1951. Citado na página 18.
- 6 MOHOROVICIC, S. Möglichkeit neuer Elemente und ihre Bedeutung für die Astrophysik. **Astronomische Nachrichten**, v. 253, p. 93, 1934. Citado na página 18.
- 7 LAMM, H.; JI, Y. Predicting and discovering true Muonium ($\mu^+ \mu^-$). In: EDP SCIENCES. **EPJ Web of Conferences**. [S.l.], 2018. v. 181, p. 01016. Citado na página 18.
- 8 VIDAL, X. C. et al. Discovering true muonium at LHCb. **Physical Review D**, APS, v. 100, n. 5, p. 053003, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 70.
- 9 CERN. **The Large Hadron Collider**. 2008. Disponível em: <<https://home.cern/science/accelerators/large-hadron-collider>>. Acesso em: 14/02/2022. Citado na página 18.
- 10 LABORATORY, Brookhaven National. **Relativistic Heavy Ion Collider**. 2000. Disponível em: <<https://www.bnl.gov/rhic/>>. Acesso em: 14/02/2022. Citado na página 18.
- 11 ABADA, A. et al. FCC-hh: The hadron collider. **The European Physical Journal Special Topics**, Springer, v. 228, n. 4, p. 755–1107, 2019. Citado na página 18.
- 12 ABADA, A. et al. HE-LHC: The high-energy large hadron collider. **The European Physical Journal Special Topics**, Springer, v. 228, n. 5, p. 1109–1382, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 18, 78 e 82.
- 13 MOREIRA, B. D. S. **Produção de Mésons Vetoriais em Processos Foto-Induzidos no LHC**. 150 p. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 105.
- 14 AZEVEDO, C. **Produção de Diléptons em Colisões de Íons Pesados no Grande Colisor de Hádrons**. 88 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 18, 66 e 84.

- 15 MOREIRA, B. D. S. **Fotoprodução de Pares de Léptons em Colisões Próton-Núcleo e Núcleo-Núcleo no Grande Colisor de Hádrons.** 69 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2012. Citado na página 18.
- 16 AZEVEDO, C.; GONÇALVES, V. P.; MOREIRA, B. D. True muonium production in ultraperipheral PbPb collisions. **Physical Review C**, APS, v. 101, n. 2, p. 024914, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 78.
- 17 KOTKIN, G. L. et al. Production of parapositronium and orthopositronium at relativistic heavy ion colliders. **Physical Review C**, APS, v. 59, n. 5, p. 2734, 1999. Citado 8 vezes nas páginas 18, 35, 67, 80, 82, 97, 98 e 99.
- 18 GEVORKYAN, S. R. et al. Production of relativistic positronium in collisions of photons and electrons with nuclei and atoms. **Physical Review A**, APS, v. 58, n. 6, p. 4556, 1998. Citado 9 vezes nas páginas 18, 33, 34, 60, 67, 70, 82, 97 e 98.
- 19 ARTEAGA-ROMERO, N.; CARIMALO, C.; SERBO, V. G. Production of the bound triplet $\mu^+ \mu^-$ system in collisions of electrons with atoms. **Physical Review A**, APS, v. 62, n. 3, p. 032501, 2000. Citado na página 18.
- 20 GINZBURG, I. F. et al. Production of bound $\mu^+ \mu^-$ systems in relativistic heavy ion collisions. **Physical Review C**, APS, v. 58, n. 6, p. 3565, 1998. Citado 5 vezes nas páginas 18, 24, 60, 80 e 82.
- 21 FRANCENER, R.; GONCALVES, V. P.; MOREIRA, B. D. Photoproduction of relativistic QED bound states in hadronic collisions. **arXiv preprint arXiv:2110.03466**, 2021. Citado na página 19.
- 22 GRIFFITHS, D. **Introduction to elementary particles.** [S.l.]: John Wiley & Sons, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 20, 23 e 25.
- 23 ENGLERT, F.; BROUT, R. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. **Physical Review Letters**, APS, v. 13, n. 9, p. 321, 1964. Citado na página 20.
- 24 HIGGS, P. W. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. **Physics Letters**, v. 12, n. 2, p. 132–133, 1964. ISSN 0031-9163. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031916364911369>>. Citado na página 20.
- 25 HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. **Physical Review Letters**, APS, v. 13, n. 16, p. 508, 1964. Citado na página 20.
- 26 CHATRCHYAN, S. et al. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. **Physics Letters B**, v. 716, n. 1, p. 30–61, 2012. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269312008581>>. Citado na página 20.
- 27 AAD, G. et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. **Physics Letters B**, v. 716, n. 1, p. 1–29, 2012. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931200857X>>. Citado na página 20.

- 28 STACHEL, J. The early history of quantum gravity (1916–1940). In: **Black holes, gravitational radiation and the universe**. [S.l.]: Springer, 1999. p. 525–534. Citado na página 20.
- 29 MOREIRA, M. A. O modelo padrão da física de partículas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 31, p. 1306–1, 2009. Citado na página 20.
- 30 OSTERMANN, F. Um texto para professores do ensino médio sobre partículas elementares. **Revista brasileira de ensino de física**. São Paulo. Vol. 21, n. 3 (set. 1999), p. 415-436, 1999. Citado na página 20.
- 31 GREINER, W.; SCHRAMM, S.; STEIN, E. **Quantum chromodynamics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. Citado na página 21.
- 32 GREINER, W.; MÜLLER, B. et al. **Gauge theory of weak interactions**. [S.l.]: Springer, 1996. v. 5. Citado na página 22.
- 33 GREINER, W.; REINHARDT, J. **Quantum electrodynamics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 44.
- 34 FEYNMAN, R. P. The theory of positrons. **Physical Review**, APS, v. 76, n. 6, p. 749, 1949. Citado na página 22.
- 35 TOMONAGA, S. On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. **Progress of Theoretical Physics**, THE PHYSICAL SOCIETY OF JAPAN, v. 1, n. 2, p. 27–42, 1946. Citado na página 22.
- 36 SCHWINGER, J. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. **Physical Review**, APS, v. 73, n. 4, p. 416, 1948. Citado na página 22.
- 37 HALZEN, F.; MARTIN, A. D. **Quark & Leptons: An Introductory Course In Modern Particle Physics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 45.
- 38 THOMSON, M. **Modern particle physics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 26 e 28.
- 39 GREINER, W.; REINHARDT, J. **Field quantization**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 22.
- 40 D'ENTERRIA, D.; SHAO, H. Discovering true tauonium via two-photon fusion at e^+e^- and hadron colliders. **arXiv preprint arXiv:2202.02316**, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 70.
- 41 LOW, F. E. Proposal for measuring the π^0 lifetime by π^0 production in electron-electron or electron-positron collisions. **Physical Review**, APS, v. 120, n. 2, p. 582, 1960. Citado na página 28.
- 42 JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999. Citado 8 vezes nas páginas 29, 38, 41, 42, 43, 44, 54 e 72.
- 43 STROSCIO, M. A. Positronium: A review of the theory. **Physics Reports**, Elsevier, v. 22, n. 5, p. 215–277, 1975. Citado na página 30.

- 44 PERKINS, D. H. **Introduction to high energy physics.** [S.l.]: CAMBRIDGE university press, 2000. Citado na página 30.
- 45 GODUNOV, S. I. et al. Lhc as a photon-photon collider: Bounds on $\gamma \rightarrow \gamma \gamma$. **Physical Review D**, APS, v. 103, n. 3, p. 035016, 2021. Citado na página 32.
- 46 DÖBRICH, B. et al. ALPtraum: ALP production in proton beam dump experiments. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2016, n. 2, p. 1–27, 2016. Citado na página 34.
- 47 CARUSO, F. Sobre o método de Weizsäcker-Williams e suas primeiras aplicações. **Monografia do CBPF, MO-001/09**, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 36, 37, 42, 43 e 44.
- 48 BALTZ, A. J. et al. The physics of ultraperipheral collisions at the LHC. **Physics Reports**, Elsevier, v. 458, n. 1-3, p. 1–171, 2008. Citado na página 37.
- 49 BOHR, N. II. on the theory of the decrease of velocity of moving electrified particles on passing through matter. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 25, n. 145, p. 10–31, 1913. Citado na página 37.
- 50 BOHR, N. LX. on the decrease of velocity of swiftly moving electrified particles in passing through matter. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 30, n. 178, p. 581–612, 1915. Citado na página 37.
- 51 FERMI, E. On the theory of collisions between atoms and electrically charged particles. **arXiv preprint hep-th/0205086**, 2002. Citado na página 37.
- 52 WILLIAMS, E. J. Applications of the method of impact parameter in collisions. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, The Royal Society London, v. 139, n. 837, p. 163–186, 1933. Citado na página 37.
- 53 WILLIAMS, E. J. Nature of the high energy particles of penetrating radiation and status of ionization and radiation formulae. **Physical Review**, APS, v. 45, n. 10, p. 729, 1934. Citado na página 37.
- 54 WEIZSACKER, C. F. von. Radiation emitted in collisions of very fast electrons. **Z. Phys.**, v. 88, p. 612–625, 1934. Citado na página 37.
- 55 WILLIAMS, E. J. **Correlation of certain collision problems with radiation theory.** [S.l.]: Levin & Munksgaard, 1935. Citado na página 37.
- 56 FRENKEL, J. **Princípios de eletrodinâmica clássica.** [S.l.]: Edusp, 1996. Citado na página 38.
- 57 BERTULANI, C. A; BAUR, G. Electromagnetic processes in relativistic heavy ion collisions. **Physics Reports**, Elsevier, v. 163, n. 5-6, p. 299–408, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 60.

- 58 BERESTETSKII, V. B.; LIFSHITZ, E. M.; PITAEVSKII, L. P. **Quantum Electrodynamics: Volume 4.** [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1982. v. 4. Citado na página 44.
- 59 BARONE, V.; PREDAZZI, E. **High-energy particle diffraction.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2002. Citado na página 50.
- 60 BARRETT, R. C.; JACKSON, D. F. Nuclear sizes and structure. 1977. Citado na página 53.
- 61 KŁUSEK-GAWENDA, M.; SZCZUREK, A. Exclusive muon-pair production in ultrarelativistic heavy-ion collisions: Realistic nucleus charge form factor and differential distributions. **Physical Review C**, APS, v. 82, n. 1, p. 014904, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 53, 54, 60, 71 e 72.
- 62 HENCKEN, K.; TRAUTMANN, D.; BAUR, G. Electromagnetic electron-positron pair production in heavy-ion collisions with impact parameter zero. **Physical Review A**, APS, v. 49, n. 3, p. 1584, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 108.
- 63 JENTSCHURA, U. D; SERBO, V. G. Nuclear form factor, validity of the equivalent photon approximation and Coulomb corrections to muon pair production in photon–nucleus and nucleus–nucleus collisions. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 64, n. 2, p. 309–317, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 53, 72, 80 e 107.
- 64 VRIES, H. De; JAGER, C. W. De; VRIES, C. De. Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering. **Atomic data and nuclear data tables**, Elsevier, v. 36, n. 3, p. 495–536, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.
- 65 BERTULANI, C. A.; NAVARRA, F. S. Two-and three-photon fusion in relativistic heavy-ion collisions. **Nuclear Physics A**, Elsevier, v. 703, n. 3-4, p. 861–875, 2002. Citado na página 54.
- 66 DREES, M.; ZEPPENFELD, D. Production of supersymmetric particles in elastic ep collisions. **Physical Review D**, APS, v. 39, n. 9, p. 2536, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 110.
- 67 BUDNEV, V. M. et al. The two-photon particle production mechanism. Physical problems. Applications. Equivalent photon approximation. **Physics Reports**, Elsevier, v. 15, n. 4, p. 181–282, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 110.
- 68 BAUR, G.; FILHO, L. G. Ferreira. Coherent particle production at relativistic heavy-ion colliders including strong absorption effects. **Nuclear Physics A**, Elsevier, v. 518, n. 4, p. 786–800, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 73.
- 69 BALTZ, A. J. et al. Two-photon interactions with nuclear breakup in relativistic heavy ion collisions. **Physical Review C**, APS, v. 80, n. 4, p. 044902, 2009. Citado na página 58.
- 70 AZEVEDO, C.; GONCALVES, V. P.; MOREIRA, B. D. Exclusive dilepton production in ultraperipheral PbPb collisions at the LHC. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 79, n. 5, p. 1–7, 2019. Citado na página 58.

- 71 BERTULANI, C. A. Probing two-photon decay widths of mesons at energies available at the CERN Large Hadron Collider (LHC). **Physical Review C**, APS, v. 79, n. 4, p. 047901, 2009. Citado na página 59.
- 72 MOREIRA, B. D. et al. Production of exotic charmonium in $\gamma \gamma$ interactions at hadron colliders. **Physical Review D**, APS, v. 94, n. 9, p. 094024, 2016. Citado na página 59.
- 73 FLEURBAEY, H. et al. New measurement of the 1 S- 3 S transition frequency of hydrogen: contribution to the proton charge radius puzzle. **Physical review letters**, APS, v. 120, n. 18, p. 183001, 2018. Citado na página 59.
- 74 SICK, I. On the rms-radius of the proton. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 576, n. 1-2, p. 62–67, 2003. Citado na página 59.
- 75 KRAUSS, F.; GREINER, M.; SOFF, G. Photon and gluon induced processes in relativistic heavy-ion collisions. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, Elsevier, v. 39, p. 503–564, 1997. Citado na página 60.
- 76 BERTULANI, C. A.; KLEIN, S. R.; NYSTRAND, J. Physics of ultra-peripheral nuclear collisions. **Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.**, Annual Reviews, v. 55, p. 271–310, 2005. Citado na página 60.
- 77 MANDELSTAM, S. Determination of the pion-nucleon scattering amplitude from dispersion relations and unitarity. General theory. In: **Memorial Volume for Stanley Mandelstam**. [S.l.]: World Scientific, 1958. p. 151–167. Citado na página 62.
- 78 VARICAK, V. Application of Lobachevskian Geometry in the Theory of Relativity. **Physikalische Zeitschrift**, v. 11, p. 93–96, 1910. Citado na página 63.
- 79 WHITTAKER, E. **A History of the Theories of Aether and Electricity: Vol. I: The Classical Theories; Vol. II: The Modern Theories, 1900-1926**. [S.l.]: Courier Dover Publications, 1989. v. 1. Citado na página 63.
- 80 ROBB, A. A. **Optical geometry of motion: A new view of the theory of relativity**. [S.l.]: W. Heffer, 1911. Citado na página 63.
- 81 KARSHENBOIM, Savel G. Precision study of positronium: Testing bound state qed theory. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 19, n. 23, p. 3879–3896, 2004. Citado na página 70.
- 82 CZARNECKI, Andrzej; KARSHENBOIM, Savel G. Decays of positronium. **arXiv preprint hep-ph/9911410**, 1999. Citado na página 70.
- 83 D'ENTERRIA, D.; MARTINS, D. E; TELES, P. R. Higgs boson production in photon-photon interactions with proton, light-ion, and heavy-ion beams at current and future colliders. **Physical Review D**, APS, v. 101, n. 3, p. 033009, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 83.
- 84 CITRON, Z. et al. Future physics opportunities for high-density QCD at the LHC with heavy-ion and proton beams. **arXiv preprint arXiv:1812.06772**, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 82.

- 85 DAINESE, A. et al. Heavy ions at the future circular collider. **arXiv preprint arXiv:1605.01389**, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 82.
- 86 TUCHIN, K. Multiphoton interactions in lepton photoproduction on nuclei at high energies. **Physical Review D**, APS, v. 80, n. 9, p. 093006, 2009. Citado na página 80.
- 87 IVANOV, D. Y.; SCHILLER, A.; SERBO, V. G. Large Coulomb corrections to the $e^+ e^-$ pair production at relativistic heavy ion colliders. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 454, n. 1-2, p. 155–160, 1999. Citado na página 80.
- 88 ZHA, W.; TANG, Z. Discovery of higher-order quantum electrodynamics effect for the vacuum pair production. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2021, n. 8, p. 1–18, 2021. Citado na página 80.
- 89 BALTZ, A. J. Higher-order QED calculation of ultrarelativistic heavy-ion production of $\mu^+ \mu^-$ pairs. **Physical Review C**, APS, v. 80, n. 3, p. 034901, 2009. Citado na página 80.
- 90 IVANOV, D.; MELNIKOV, K. Lepton pair production by a high energy photon in a strong electromagnetic field. **Physical Review D**, APS, v. 57, n. 7, p. 4025, 1998. Citado na página 80.
- 91 CERN. **CMS Luminosity - Public Results**. 2022. Disponível em: <<https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/CMSPublic/LumiPublicResults>>. Acesso em: 14/02/2022. Citado na página 83.
- 92 MAGNUS, W.; OBERHETTINGER, F.; SONI, R. P. **Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 52. Citado 2 vezes nas páginas 100 e 101.
- 93 ROGER, C. B.; JACKSON, D. F. **Nuclear Sizes and Structure**. [S.l.]: Clarendon Press, 1977. Citado na página 109.
- 94 KLEIN, S. R.; NYSTRAND, J. Exclusive vector meson production in relativistic heavy ion collisions. **Physical Review C**, APS, v. 60, n. 1, p. 014903, 1999. Citado na página 109.
- 95 ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables**. [S.l.]: US Government printing office, 1964. v. 55. Citado na página 112.

APÊNDICE A – EQUIVALÊNCIA ENTRE AS FÓRMULAS DE LOW E BREIT-WIGNER

No Capítulo 2 foram deduzidas as Equações (2.32) e (2.40), que são, respectivamente, as fórmulas de Low e de Breit-Wigner para a produção de estados ligados de léptons a partir da fusão de dois fótons. As duas equações mencionadas são funções da massa invariante do estado criado, e para provar a equivalência entre elas, vamos avaliar suas integrações sobre todo o espectro de massa invariante.

Vamos primeiramente integrar a fórmula de Low na massa invariante:

$$\int \sigma_{Low} dW = \int_0^\infty \frac{8\pi^2 \Gamma}{M} \delta(W^2 - M^2) dW \quad (\text{A.1})$$

com auxílio das propriedades da função delta, obtemos

$$\int \sigma_{Low} dW = \frac{8\pi^2 \Gamma}{M} \frac{1}{2M} \int_0^\infty \delta(W - M) dW. \quad (\text{A.2})$$

A integral também pode ser realizada com as propriedades da delta, e tem como resultado

$$\int \sigma_{Low} dW = \frac{4\pi^2 \Gamma}{M^2}. \quad (\text{A.3})$$

Agora, vamos realizar a integração na massa invariante da equação de Breit-Wigner:

$$\int \sigma_{BW} dW = \int_0^\infty \frac{8\pi}{M^2} \frac{\Gamma^2}{4(W - M)^2 + \Gamma^2} dW. \quad (\text{A.4})$$

Fazendo a troca de variáveis $x = W - M$, o limite superior de integração continua tendendo ao infinito, enquanto o limite inferior passa a ser $-M$:

$$\begin{aligned} \int \sigma_{BW} dW &= \int_{-M}^\infty \frac{8\pi}{M^2} \frac{\Gamma^2}{4x^2 + \Gamma^2} dx \\ \int \sigma_{BW} dW &= \frac{8\pi \Gamma^2}{M^2} \int_{-M}^\infty \frac{1}{4x^2 + \Gamma^2} dx \\ \int \sigma_{BW} dW &= \frac{8\pi \Gamma^2}{M^2} \int_{-M}^\infty \frac{1/\Gamma^2}{4x^2/\Gamma^2 + 1} dx \\ \int \sigma_{BW} dW &= \frac{8\pi}{M^2} \int_{-M}^\infty \frac{1}{(2x/\Gamma)^2 + 1} dx, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

agora, basta realizar mais uma mudança de variáveis: $y = \frac{2x}{\Gamma}$, assim, os limites inferior e superior de integração tornam-se, respectivamente, $-2M/\Gamma$ e ∞ :

$$\begin{aligned} \int \sigma_{BW} dW &= \frac{8\pi}{M^2} \int_{-\frac{2M}{\Gamma}}^\infty \frac{1}{y^2 + 1} \frac{\Gamma}{2} dy \\ \int \sigma_{BW} dW &= \frac{4\pi \Gamma}{M^2} \int_{-\frac{2M}{\Gamma}}^\infty \frac{1}{y^2 + 1} dy \end{aligned}$$

$$\int \sigma_{BW} dW = \frac{4\pi\Gamma}{M^2} \arctan(y) \Big|_{-\frac{2M}{\Gamma}}^{\infty}$$

$$\int \sigma_{BW} dW = \frac{4\pi\Gamma}{M^2} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} [\arctan(y)] - \arctan\left(\frac{-2M}{\Gamma}\right) \right\}. \quad (\text{A.6})$$

O limite da equação acima tem solução trivial, sendo $\pi/2$. O último termo do lado direito da equação acima pode ser obtido de forma aproximada, porém com muita precisão. Sabemos que os estados ligados de nosso interesse possuem largura de decaimento dada por $\frac{\alpha^5 M}{4}$, logo $\frac{2M}{\Gamma} = \frac{8}{\alpha^5} > 10^{11}$, então

$$\int \sigma_{BW} dW = \frac{4\pi\Gamma}{M^2} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right],$$

assim

$$\int \sigma_{BW} dW = \frac{4\pi^2\Gamma}{M^2}. \quad (\text{A.7})$$

Deste modo, vemos que as Equações (A.3) e (A.7) possuem mesma solução, logo as fórmulas de Low e Breit-Wigner são equivalentes.

APÊNDICE B – EQUIVALÊNCIA ENTRE AS SEÇÕES DE CHOQUE FÓTON-FÓTON E FÓTON-NÚCLEO

Neste Apêndice discutimos a equivalência entre a seção de choque fóton-núcleo obtida em [18], com a seção de choque fóton-núcleo que obteremos com a fórmula de Low, obtida no Capítulo 2, e com a aproximação de fótons equivalentes, discutida no capítulo 3.

A seção de choque fóton-núcleo, obtida em [18], para a produção de um estado ligado de léptons de massa $M = 2m_l$ por um fóton virtual de virtualidade Q^2 e energia ω em um núcleo de carga Z em repouso é dada por

$$\sigma_{\gamma^* + h \rightarrow (l^+ l^-)_S + h} = \frac{\pi Z^2 \alpha^6}{\left(m_l + \frac{Q^2}{4m_l}\right)^2} \zeta(3) \left[\ln\left(\frac{\omega}{m_l}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{Q^2}{4m_l^2}\right) - 1 - C(Z) \right]. \quad (\text{B.1})$$

Podemos adaptar esta equação para a produção do estado ligado a partir de um fóton real fazendo $Q^2 = 0$, e também considerar a produção por apenas um fóton do núcleo, excluindo o termo $C(Z)$, como discutido no Capítulo 2. Logo

$$\sigma_{\gamma + h \rightarrow (l^+ l^-)_S + h} = \frac{\pi Z^2 \alpha^6}{m_l^2} \zeta(3) \left[\ln\left(\frac{\omega}{m_l}\right) - 1 \right]. \quad (\text{B.2})$$

Esta equação pode ser adaptada para a fotoprodução em um núcleo em movimento em direção oposta ao fóton incidente, que possui massa m_N e energia $E = \gamma m_N$, da seguinte forma [17]

$$\sigma_{\gamma + h \rightarrow (l^+ l^-)_S + h} = \frac{\pi Z^2 \alpha^6}{m_l^2} \zeta(3) \left[\ln\left(\frac{2\gamma\omega}{m_l}\right) - 1 \right]. \quad (\text{B.3})$$

Podemos obter uma seção de choque fóton-núcleo para a produção de estados ligados com a fórmula de Low, ao fatorizarmos a seção de choque do nosso interesse com a aproximação de fótons equivalentes:

$$\sigma_{\gamma + h \rightarrow (l^+ l^-)_S + h} = \int \frac{n(\omega_N)}{\omega_N} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+ l^-)_S}(\omega_N) d\omega_N, \quad (\text{B.4})$$

onde $n(\omega_N)$ e ω_N são, respectivamente, o fluxo de fótons e a energia do fóton do núcleo alvo. Primeiramente, vamos obter o fluxo de fótons de acordo com o que precisamos. Vamos partir da Equação (3.77), expressa por

$$\frac{n(\omega_N)}{\omega_N} = \frac{4Z^2 \alpha}{\omega_N} \int \frac{d^2 \vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{\vec{k}_\perp^2}{\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega_N^2}{\gamma^2}\right)^2}. \quad (\text{B.5})$$

Podemos integrá-la na variável angular, ao utilizar coordenadas esféricas e obter

$$\frac{n(\omega_N)}{\omega_N} = \frac{2Z^2 \alpha}{\pi \omega_N} \int d|\vec{k}_\perp| \frac{\vec{k}_\perp^2}{\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega_N^2}{\gamma^2}\right)^2}. \quad (\text{B.6})$$

Também podemos trocar a variável de momento transverso para a virtualidade, pois $Q^2 = \vec{k}_\perp^2 + \omega^2/\gamma^2$, daí

$$\frac{n(\omega_N)}{\omega_N} = \frac{Z^2\alpha}{\pi\omega_N} \int \frac{Q^2 - \frac{\omega_N^2}{\gamma^2}}{Q^4} dQ^2. \quad (\text{B.7})$$

Agora estamos em condições de substituir a Equação (B.7) na Equação (B.4), logo

$$\sigma_{\gamma+h \rightarrow (l^+l^-)_S + h} = \int \frac{Z^2\alpha}{\pi\omega_N} \frac{Q^2 - \frac{\omega_N^2}{\gamma^2}}{Q^4} dQ^2 \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}(\omega_N) d\omega_N. \quad (\text{B.8})$$

Como a seção de choque fóton-fóton é para fótons reais, podemos executar a integração na virtualidade imediatamente. Para a produção de parapositrônio os limites adotados serão $\frac{\omega_N^2 m_A^2}{E^2} \leq Q^2 \leq (2m_e)^2$ [17, 18], logo

$$\sigma_{\gamma+h \rightarrow (l^+l^-)_S + h} = \frac{Z^2\alpha}{\pi} \int \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}(\omega_N) \frac{d\omega_N}{\omega_N} \left[\ln Q^2 + \frac{\omega_N^2 m_A^2}{E^2} \frac{1}{Q^2} \right] \Big|_{\frac{\omega_N^2 m_A^2}{E^2}}^{(2m_e)^2} \quad (\text{B.9})$$

$$\sigma_{\gamma+h \rightarrow (l^+l^-)_S + h} = \frac{Z^2\alpha}{\pi} \int \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}(\omega_N) \frac{d\omega_N}{\omega_N} \left[2\ln \left(\frac{2m_e\gamma}{\omega_N} \right) + \left(\frac{\omega_N}{2m_e\gamma} \right) - 1 \right]. \quad (\text{B.10})$$

Podemos inserir na equação acima a fórmula de Low para a produção de estados ligados de léptons, que foi discutida no Capítulo 2 (Equação (2.32)), assim

$$\sigma_{\gamma+h \rightarrow (l^+l^-)_S + h} = 2\pi Z^2 \alpha^6 \int \delta(4\omega_N \omega - M^2) \frac{d\omega_N}{\omega_N} \left[2\ln \left(\frac{2m_e\gamma}{\omega_N} \right) + \left(\frac{\omega_N}{2m_e\gamma} \right) - 1 \right], \quad (\text{B.11})$$

podemos alterar o argumento da função delta de Dirac com suas propriedades, logo

$$\sigma_{\gamma+h \rightarrow (l^+l^-)_S + h} = 2\pi Z^2 \alpha^6 \int \frac{1}{4\omega} \delta \left(\omega_N - \frac{M^2}{4\omega} \right) \frac{d\omega_N}{\omega_N} \left[2\ln \left(\frac{2m_e\gamma}{\omega_N} \right) + \left(\frac{\omega_N}{2m_e\gamma} \right) - 1 \right]. \quad (\text{B.12})$$

Integrando com as propriedades da delta de Dirac, obtemos

$$\sigma_{\gamma+h \rightarrow (l^+l^-)_S + h} = 2\pi Z^2 \alpha^6 \frac{1}{4\omega} \frac{1}{\frac{M^2}{4\omega}} \left[2\ln \left(\frac{2m_e\gamma}{\frac{M^2}{4\omega}} \right) + \left(\frac{\frac{M^2}{4\omega}}{2m_e\gamma} \right) - 1 \right] \quad (\text{B.13})$$

$$\sigma_{\gamma+h \rightarrow (l^+l^-)_S + h} = 2\pi Z^2 \alpha^6 \frac{1}{M^2} \left[2\ln \left(\frac{8m_e\omega\gamma}{M^2} \right) + \left(\frac{M^2}{8m_e\omega\gamma} \right) - 1 \right]. \quad (\text{B.14})$$

Como $M = 2m_e$, a equação acima torna-se

$$\sigma_{\gamma+h \rightarrow (l^+l^-)_S + h} = \frac{\pi Z^2 \alpha^6}{m_e^2} \left[\ln \left(\frac{2\omega\gamma}{m_e} \right) + \left(\frac{M^2}{8m_e\omega\gamma} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (\text{B.15})$$

Esta equação é equivalente à Equação (B.3), pois podemos negligenciar o segundo termo entre colchetes para fótons incidentes de altas energias, como feito em [17]. A função zeta de Riemann é utilizada na Equação (B.3) para considerar a produção de parapositrônio em todos os estados quânticos possíveis, logo podemos utilizá-la também com a fórmula de Low e obter o mesmo resultado.

APÊNDICE C – INTEGRAIS IMPRÓPRIAS PARA OBTENÇÃO DOS PULSOS DE ENERGIA

Nesta seção vamos resolver as integrais das Equações (3.14) e (3.19), para que possamos obter os pulsos de energia equivalente de cada componente do campo elétrico da partícula relativística carregada. Iniciamos com a solução da integral da Equação (3.14), a qual chamaremos de A .

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ia\xi} d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} \quad (\text{C.1})$$

onde $a = \omega b / \gamma v$.

Usando a equação de Euler ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$)

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\cos(a\xi) + i \sin(a\xi)] d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} \quad (\text{C.2})$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(a\xi) d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \sin(a\xi) d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}}. \quad (\text{C.3})$$

como o integrando da segunda integral é uma função ímpar, e os limites de integração são simétricos em relação à origem, a integral anula-se. Enquanto que a primeira integral por tratar-se de uma função par, podemos reescrevê-la como

$$A = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(a\xi) d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}}. \quad (\text{C.4})$$

Sabemos que uma função de Bessel modificada pode ser escrita como [92]

$$K_{\nu}(az) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2z}{a}\right)^{\nu} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right) \int_0^{\infty} (t^2 + z^2)^{-\nu - \frac{1}{2}} \cos(at) dt.$$

Assumindo $\nu = z = 1$ e $t = \xi$, podemos reescrever a função de bessel modificada como

$$K_1(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{a}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \int_0^{\infty} (\xi^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cos(a\xi),$$

como $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$,

$$aK_1(a) = \int_0^{\infty} (t^2 + z^2)^{-\nu - \frac{1}{2}} \cos(at). \quad (\text{C.5})$$

Substituindo este resultado na Equação (C.1)

$$A = 2aK_1(a) \quad (\text{C.6})$$

ou

$$A = 2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right). \quad (\text{C.7})$$

A integral da Equação (3.19) pode ser escrita como

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{i\omega b \xi / \gamma v} d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} b^2 \quad (\text{C.8})$$

ao fazer uso da equação de Euler e escrevendo $a = \omega b / \gamma v$,

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi [\cos(a\xi) + i \sin(a\xi)] d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} b^2 \quad (\text{C.9})$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \cos(a\xi) d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} b^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi i \sin(a\xi) d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} b^2 \quad (\text{C.10})$$

A primeira integral anula-se por se tratar de um integrando ímpar com limites de integração simétricos. Já a segunda integral, que possui integrando par, pode ser reescrita como

$$B = 2i \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin(a\xi) d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} b^2. \quad (\text{C.11})$$

Utilizando [92]

$$i \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin(a\xi) d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} b^2 = a K_0(a), \quad (\text{C.12})$$

obtemos

$$B = 2a K_0(a),$$

ou

$$B = 2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) K_0 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right). \quad (\text{C.13})$$

APÊNDICE D – FLUXO DE FÓTONS NA APROXIMAÇÃO DE LOGARÍTMO DOMINANTE

Aproximações de Logaritmo Dominante (LLA) são muito comuns e bastante úteis para simplificar cálculos em física de partículas. Neste apêndice resolveremos a Equação (3.75), dada por

$$n(\omega) = \int_0^{\frac{1}{R}} \frac{2Z^2\alpha}{\pi} \frac{|\vec{k}_\perp|^2}{\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)} |\vec{k}_\perp| d|\vec{k}_\perp|, \quad (\text{D.1})$$

com uma destas aproximações. Iniciamos com a troca de variável

$$x = \vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}, \quad (\text{D.2})$$

assim, o elemento infinitesimal torna-se

$$dx = 2|\vec{k}_\perp| d|\vec{k}_\perp|, \quad (\text{D.3})$$

e os limites de integração tornam-se

$$\frac{\omega^2}{\gamma^2} \leq x \leq \frac{\omega^2}{\gamma^2} + \frac{1}{R^2}. \quad (\text{D.4})$$

Logo, a Equação (D.1) torna-se

$$\begin{aligned} n(\omega) &= \frac{2Z^2\alpha}{\pi} \int_{\frac{\omega^2}{\gamma^2}}^{\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \frac{1}{R^2}} \frac{x - \omega^2/\gamma^2}{x^2} \frac{dx}{2} \\ n(\omega) &= \frac{Z^2\alpha}{\pi} \int_{\frac{\omega^2}{\gamma^2}}^{\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \frac{1}{R^2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{\omega^2}{\gamma^2 x^2} \right) dx \\ n(\omega) &= \frac{Z^2\alpha}{\pi} \left(\ln x + \frac{\omega^2}{\gamma^2 x} \right) \Big|_{\frac{\omega^2}{\gamma^2}}^{\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \frac{1}{R^2}} \\ n(\omega) &= \frac{Z^2\alpha}{\pi} \left[\ln \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \frac{1}{R^2} \right) + \frac{\omega^2}{\gamma^2 \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \frac{1}{R^2} \right)} - \ln \frac{\omega^2}{\gamma^2} - \frac{\omega^2}{\gamma^2 \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \right] \\ n(\omega) &= \frac{Z^2\alpha}{\pi} \left[\ln \left(\frac{\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \frac{1}{R^2}}{\frac{\omega^2}{\gamma^2}} \right) + \frac{\omega^2}{\omega^2 + \frac{\gamma^2}{R^2}} - 1 \right] \\ n(\omega) &= \frac{Z^2\alpha}{\pi} \left[\ln \left(\frac{\omega^2 R^2 + \gamma^2}{\omega^2 R^2} \right) + \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2 R^2}} - 1 \right] \\ n(\omega) &= \frac{Z^2\alpha}{\pi} \left[\ln \left(1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2 R^2} \right) + \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2 R^2}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

O argumento do logaritmo neperiano da equação acima pode ser aproximado por $\frac{\gamma^2}{\omega^2 R^2}$ no limite em que $\gamma^2 \gg \omega^2 R^2$. Esta aproximação também pode ser utilizada no segundo termo entre colchetes no lado direito da equação acima. Assim seu denominador será muito maior que seu numerador, e portanto, insignificante perante o logaritmo da equação. O último termo entre colchetes também pode ser desconsiderado, visto que é desprezível quando comparado ao logaritmo. Assim, temos

$$n(\omega) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi} \ln \left(\frac{\gamma^2}{\omega^2 R^2} \right) \quad (\text{D.7})$$

$$n(\omega) = \frac{2Z^2 \alpha}{\pi} \ln \left(\frac{\gamma}{\omega R} \right). \quad (\text{D.8})$$

Este é o fluxo de fótons em aproximação de logaritmo dominante.

APÊNDICE E – FLUXO DE FÓTONS EQUIVALENTES DEPENDENTE DA DISTÂNCIA TRANSVERSA

Na Equação (3.81), apresentada no Capítulo 3, vimos que o fluxo de fótons equivalentes dependente da distância transversa da partícula que o produz pode ser escrito como

$$N(\omega, r) = \frac{4Z^2\alpha}{\omega} \left| \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \vec{k}_\perp \frac{F\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} e^{-i\vec{r}\cdot\vec{k}_\perp} \right|^2. \quad (\text{E.1})$$

Podemos facilmente recuperar o fluxo de fótons independente da distância transversa da Equação (3.78), ao integrar a equação acima na distância transversa:

$$\begin{aligned} \frac{n(\omega)}{\omega} &= \int N(\omega, r) d^2\vec{r} \\ \frac{n(\omega)}{\omega} &= \int \frac{4Z^2\alpha}{\omega} \left| \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \vec{k}_\perp \frac{F\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} e^{-i\vec{r}\cdot\vec{k}_\perp} \right|^2 d^2\vec{r} \\ \frac{n(\omega)}{\omega} &= \int \frac{4Z^2\alpha}{\omega} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \vec{k}_\perp \frac{F\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} e^{-i\vec{r}\cdot\vec{k}_\perp} \int \frac{d^2\vec{k}'_\perp}{(2\pi)^2} \vec{k}'_\perp \frac{F\left(\vec{k}'_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}'_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} e^{-i\vec{r}\cdot\vec{k}'_\perp} d^2\vec{r} \\ \frac{n(\omega)}{\omega} &= \frac{4Z^2\alpha}{\omega} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \vec{k}_\perp \frac{F\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \int \frac{d^2\vec{k}'_\perp}{(2\pi)^2} \vec{k}'_\perp \frac{F\left(\vec{k}'_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}'_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \int e^{i\vec{r}\cdot(\vec{k}'_\perp - \vec{k}_\perp)} d^2\vec{r}. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

A integração na distância transversa pode ser resolvida diretamente com o conhecimento da transformada de Fourier inversa da delta de Dirac:

$$\delta(\vec{k}'_\perp - \vec{k}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\vec{r}\cdot(\vec{k}'_\perp - \vec{k}_\perp)} d^2\vec{r}. \quad (\text{E.3})$$

Ao substituir a equação acima na Equação (E.2), obtemos

$$\frac{n(\omega)}{\omega} = \frac{4Z^2\alpha}{\omega} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \vec{k}_\perp \frac{F\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \int \frac{d^2\vec{k}'_\perp}{(2\pi)^2} \vec{k}'_\perp \frac{F\left(\vec{k}'_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}'_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} (2\pi)^2 \delta(\vec{k}'_\perp - \vec{k}_\perp). \quad (\text{E.4})$$

A integração em \vec{k}'_\perp pode ser feita com a auxílio das propriedades da função delta. Logo

$$\frac{n(\omega)}{\omega} = \frac{4Z^2\alpha}{\omega} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \vec{k}_\perp \frac{F\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \vec{k}_\perp \frac{F\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}}. \quad (\text{E.5})$$

$$\frac{n(\omega)}{\omega} = \frac{4Z^2\alpha}{\omega} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \vec{k}_\perp^2 \left[\frac{F\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \right]^2. \quad (\text{E.6})$$

Logo, está demonstrada a validade da Equação (E.1)

É conveniente escrevermos a Equação (E.1) de outra maneira, que facilitará sua resolução quando inserido o fator de forma nuclear. Seguindo o que foi desenvolvido na Referência [13], vamos trabalhar apenas com a integral presente na Equação (E.1), a qual chamaremos de I :

$$I = \int \frac{d^2 \vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{F(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2})}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \vec{k}_\perp e^{-i\vec{r}\cdot\vec{k}_\perp}. \quad (\text{E.7})$$

Podemos notar que

$$\vec{k}_\perp e^{-i\vec{r}\cdot\vec{k}_\perp} = i \vec{\nabla} e^{-i\vec{r}\cdot\vec{k}_\perp}, \quad (\text{E.8})$$

assim, podemos reescrever a Equação (E.7) como

$$I = i \int \frac{d^2 \vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{F(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2})}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \vec{\nabla} e^{-i\vec{r}\cdot\vec{k}_\perp}. \quad (\text{E.9})$$

Ao utilizar coordenadas polares para a integração no momento transverso dos fótons, o elemento infinitesimal de integração torna-se $d^2 \vec{k}_\perp = |\vec{k}_\perp| d\phi d|\vec{k}_\perp|$, então

$$I = i \int \frac{|\vec{k}_\perp| d\phi d|\vec{k}_\perp|}{(2\pi)^2} \frac{F(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2})}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \vec{\nabla} e^{-i\vec{r}\cdot\vec{k}_\perp}. \quad (\text{E.10})$$

Vamos considerar que os fatores de forma são esfericamente simétricos, para que possa sair da integração em ϕ . Assim

$$I = i \int \frac{|\vec{k}_\perp| d|\vec{k}_\perp|}{(2\pi)^2} \frac{F(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2})}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \vec{\nabla} \int_0^{2\pi} e^{-ir|\vec{k}_\perp| \cos \phi} d\phi. \quad (\text{E.11})$$

A integração em ϕ não precisará ser realizada, apenas recordaremos a seguinte propriedade

$$\int_0^{2\pi} e^{-ir|\vec{k}_\perp| \cos \phi} d\phi = 2\pi J_0(r|\vec{k}_\perp|), \quad (\text{E.12})$$

sendo J_0 uma função de Bessel. Ao substituir o resultado da Equação (E.12) na Equação (E.11), tem-se

$$I = i \int \frac{|\vec{k}_\perp| d|\vec{k}_\perp|}{2\pi} \frac{F(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2})}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \vec{\nabla} J_0(r|\vec{k}_\perp|). \quad (\text{E.13})$$

Podemos agora aplicar o gradiente em coordenadas polares na função de Bessel

$$I = i \int \frac{|\vec{k}_\perp| d|\vec{k}_\perp|}{2\pi} \frac{F(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2})}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \left[\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} J_0(r|\vec{k}_\perp|) + \hat{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} J_0(r|\vec{k}_\perp|) \right]. \quad (\text{E.14})$$

A derivada em ϕ é, obviamente, zero, pois a função de Bessel não é função desta variável. Para a derivada em r utilizaremos o resultado

$$\frac{\partial}{\partial r} J_0(r|\vec{k}_\perp|) = -|\vec{k}_\perp| J_1(r|\vec{k}_\perp|), \quad (\text{E.15})$$

voltando para a Equação (E.14), temos

$$I = -i \hat{e}_r \int \frac{|\vec{k}_\perp|^2 d|\vec{k}_\perp|}{2\pi} \frac{F\left(\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\vec{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} J_1(r|\vec{k}_\perp|). \quad (\text{E.16})$$

Por fim, para que possamos escrever esta equação de maneira mais elegante, vamos fazer a troca de variáveis

$$u = r|\vec{k}_\perp|, \quad (\text{E.17})$$

então

$$I = -i \hat{e}_r \int \frac{u^2 du}{2\pi r^3} \frac{F\left(\frac{u^2}{r^2} + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)}{\frac{u^2}{r^2} + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} J_1(u) \quad (\text{E.18})$$

$$I = -i \hat{e}_r \int \frac{u^2 du}{2\pi r^3} \frac{F\left(\frac{u^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}}{r^2}\right)}{\frac{u^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}}{r^2}} J_1(u) \quad (\text{E.19})$$

$$I = -i \hat{e}_r \int \frac{u^2 du}{2\pi r} \frac{F\left(\frac{u^2 + \frac{r^2 \omega^2}{\gamma^2}}{r^2}\right)}{u^2 + \frac{r^2 \omega^2}{\gamma^2}} J_1(u). \quad (\text{E.20})$$

Agora vamos substituir a equação acima na Equação (E.1):

$$N(\omega, r) = \frac{4Z^2\alpha}{\omega} \left| -i \hat{e}_r \int \frac{u^2 du}{2\pi r} \frac{F\left(\frac{u^2 + \frac{r^2 \omega^2}{\gamma^2}}{r^2}\right)}{u^2 + \frac{r^2 \omega^2}{\gamma^2}} J_1(u) \right|^2 \quad (\text{E.21})$$

$$N(\omega, r) = \frac{Z^2\alpha}{\pi^2 r^2 \omega} \left| \int_0^\infty u^2 du \frac{F\left(\frac{u^2 + \frac{r^2 \omega^2}{\gamma^2}}{r^2}\right)}{u^2 + \frac{r^2 \omega^2}{\gamma^2}} J_1(u) \right|^2. \quad (\text{E.22})$$

Esta é a forma geral do fluxo de fótons equivalentes dependente da distância transversa do centro da partícula que o produz, que será utilizado para o cálculo do fluxo de fótons com diferentes fatores de forma nuclear.

APÊNDICE F – FATOR DE FORMA NUCLEAR

O fator de forma nuclear é definido como a transformada de Fourier da densidade espacial de cargas, dividido pela carga total [63]. Ou, em outras palavras, é definido como a transformada de Fourier da distribuição de densidade espacial de cargas $\rho(\vec{r})$, logo

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{r} \cdot \vec{q}} d^3 r. \quad (\text{F.1})$$

Para esta dissertação utilizaremos apenas distribuições de densidade de carga que sejam esfericamente simétricas, ou seja, independente dos ângulos θ e ϕ . Assim, podemos executar a integração nas variáveis angulares da Equação (F.1):

$$F(\vec{q}) = \int \rho(r) e^{i\vec{r} \cdot \vec{q}} r^2 d(\cos \theta) dr d\phi \quad (\text{F.2})$$

$$F(\vec{q}) = \int_0^\infty dr \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi \rho(r) e^{i r q \cos \theta} r^2. \quad (\text{F.3})$$

Utilizando a relação $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, obtemos

$$F(\vec{q}) = 2\pi \int_0^\infty dr \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \rho(r) [\cos(rq \cos \theta) + i \sin(rq \cos \theta)] r^2 \quad (\text{F.4})$$

$$F(\vec{q}) = 2\pi \int_0^\infty r^2 \rho(r) dr \left[\frac{1}{qr} \sin(rq \cos \theta) - \frac{i}{qr} \cos(rq \cos \theta) \right] \Big|_{-1}^1 \quad (\text{F.5})$$

$$F(\vec{q}) = 2\pi \int_0^\infty r^2 \rho(r) dr \left[\frac{1}{qr} \sin(rq) - \frac{1}{qr} \sin(-rq) - \frac{i}{qr} \cos(rq) + \frac{i}{qr} \cos(-rq) \right] \quad (\text{F.6})$$

$$F(\vec{q}) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r \rho(r) \sin(rq) dr. \quad (\text{F.7})$$

F.1 FATOR DE FORMA PONTUAL

Quando consideramos que uma partícula é pontual, sua distribuição de densidade espacial de cargas é dada pela delta de Dirac, $\rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$, e a distribuição de densidade de cargas em função apenas do módulo da distância é dada por

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r). \quad (\text{F.8})$$

Com esta distribuição de densidade de cargas inserida na Equação (F.7), obtemos o fator de forma pontual:

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r) \sin(rq) dr \quad (\text{F.9})$$

Podemos integrar na distância r com auxílio das propriedades da função delta de Dirac, então

$$F(q) = \frac{1}{q} \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{r} \sin(qr) \right], \quad (\text{F.10})$$

utilizando L'Hopital, resolve-se trivialmente este limite e obtemos

$$F(q) = 1. \quad (\text{F.11})$$

F.2 FATOR DE FORMA DE MONOPOLÓ

Existem diversos modelos para distribuição de densidade de carga de núcleos pesados. Dentre eles destaca-se a distribuição de Yukawa [62], dada pela equação

$$\rho(r) = \frac{\Lambda^2}{4\pi} \frac{e^{-\Lambda r}}{r}, \quad (\text{F.12})$$

onde Λ é uma constante relacionada com o raio médio do núcleo, que pode ser avaliado experimentalmente. Vamos substituir a distribuição de densidade de carga de Yukawa na Equação (F.7)

$$F(\vec{q}) = \frac{\Lambda^2}{q} \int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr. \quad (\text{F.13})$$

Podemos resolver a integral da equação acima por partes, obtendo

$$\int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr = -e^{-\Lambda r} \frac{1}{q} \cos(rq) \Big|_0^\infty - \Lambda \int_0^\infty e^{-\Lambda r} \frac{1}{q} \sin(rq) dr. \quad (\text{F.14})$$

Integrando novamente por partes, obtemos

$$\int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr = \frac{1}{q} - \frac{\Lambda}{q} \left[e^{-\Lambda r} \frac{1}{q} \sin(rq) \Big|_0^\infty + \frac{\Lambda}{q} \int_0^\infty e^{-\Lambda r} \frac{1}{q} \sin(rq) dr \right]. \quad (\text{F.15})$$

$$\int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr = \frac{1}{q} - \frac{\Lambda^2}{q^2} \int_0^R e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr. \quad (\text{F.16})$$

Logo, obtemos

$$\left(1 + \frac{\Lambda^2}{q^2} \right) \int_0^R e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr = \frac{1}{q} \quad (\text{F.17})$$

$$\int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr = \frac{q}{\Lambda^2 + q^2}. \quad (\text{F.18})$$

Agora podemos inserir a Equação (F.18) na Equação (F.13):

$$F(\vec{q}) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2}. \quad (\text{F.19})$$

Este é o fator de forma de monopolo, amplamente utilizado na literatura para caracterização de núcleos pesados.

F.3 FATOR DE FORMA REALÍSTICO

Outro fator de forma de grande relevância para núcleos pesados em trabalhos recentes é o fator de forma realístico. Este considera uma distribuição de densidade de carga parametrizada [93] com a distribuição de Woods-Saxon [94], dada pela equação

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}. \quad (\text{F.20})$$

Infelizmente com esta equação não é possível obter um fator de forma analítico. Mas podemos estimá-lo fazendo algumas considerações. O fator de forma realístico será estimado com uma distribuição de cargas com densidade constante no núcleo entre 0 e R , $\rho(r) = \rho_0/A$, e multiplicado pelo fator de forma de monopolo [94]. Para o fator de forma com a distribuição de densidade de cargas constante, temos

$$F(\vec{q}) = \frac{4\pi\rho_0}{qA} \int_0^R \sin(qr) dr. \quad (\text{F.21})$$

Integrando por partes, obtemos

$$F(\vec{q}) = \frac{4\pi\rho_0}{qA} \left[-\frac{r}{q} \cos(qr) \Big|_0^R + \int_0^R \frac{1}{q} \cos(qr) dr \right] \quad (\text{F.22})$$

$$F(\vec{q}) = \frac{4\pi\rho_0}{qA} \left[-\frac{R}{q} \cos(qR) + \frac{1}{q^2} \sin(qr) \Big|_0^R \right] \quad (\text{F.23})$$

$$F(\vec{q}) = \frac{4\pi\rho_0}{q^3 A} [\sin(qR) - qR \cos(qR)]. \quad (\text{F.24})$$

Este é o fator de forma para uma distribuição contínua de cargas distribuída entre 0 e R . O fator de forma realístico pode ser estimado analiticamente multiplicando este fator de forma pela Equação (F.19), onde a constante $\Lambda = 1/a$. Então

$$F(\vec{q}) = \frac{4\pi\rho_0}{q^3 A} [\sin(qR) - qR \cos(qR)] \left[\frac{1}{1 + a^2 q^2} \right]. \quad (\text{F.25})$$

F.4 FATOR DE FORMA DE DIPOLO

Uma distribuição da densidade de cargas em prótons muito utilizada é a chamada distribuição de dipolo, expressa por

$$\rho(r) = \frac{\Lambda^3}{8\pi} e^{-\Lambda r}, \quad (\text{F.26})$$

com $\Lambda^2 = 0,71 \text{ GeV}^2$ sendo uma constante obtida experimentalmente [66, 67]. Substituindo esta equação na Equação (F.7), temos

$$F(\vec{q}) = \frac{\Lambda^3}{2q} \int_0^\infty r e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr, \quad (\text{F.27})$$

podemos resolver esta integral por partes e obter

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr &= -\frac{1}{q} r e^{-\Lambda r} \cos(rq) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{q} e^{-\Lambda r} \cos(rq) dr \\ &\quad - \int_0^\infty \frac{\Lambda}{q} r e^{-\Lambda r} \cos(rq) dr. \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

Integrando novamente por partes

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr &= \frac{1}{q^2} e^{-\Lambda r} \sin(rq) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\Lambda}{q^2} e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr \\ &\quad + \frac{1}{q^2} r e^{-\Lambda r} \sin(rq) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\Lambda}{q^2} e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr \\ &\quad - \int_0^\infty \frac{\Lambda^2}{q^2} r e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr. \end{aligned} \quad (\text{F.29})$$

Podemos passar a última integral da direita para o lado esquerdo da equação. Assim, obtemos

$$\int_0^\infty r e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr \left(1 + \frac{\Lambda^2}{q^2} \right) = \frac{\Lambda}{q^2} \int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr, \quad (\text{F.30})$$

portanto,

$$\int_0^\infty r e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr = \left(\frac{q^2}{\Lambda^2 + q^2} \right) \frac{\Lambda}{q^2} \int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr \quad (\text{F.31})$$

$$\int_0^\infty r e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr = \left(\frac{\Lambda}{\Lambda^2 + q^2} \right) \int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr. \quad (\text{F.32})$$

Então, podemos voltar à Equação (F.27), que torna-se

$$F(\vec{q}) = \frac{1}{q} \left(\frac{\Lambda^4}{\Lambda^2 + q^2} \right) \int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr. \quad (\text{F.33})$$

Agora vamos voltar nossas atenções para a integral na equação acima, e resolvê-la também por partes.

$$\int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr = -\frac{1}{q} e^{-\Lambda r} \cos(rq) \Big|_0^\infty - \frac{\Lambda}{q} \int_0^\infty e^{-\Lambda r} \cos(rq) dr \quad (\text{F.34})$$

$$\int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr = \frac{1}{q} - \frac{\Lambda}{q} \int_0^\infty e^{-\Lambda r} \cos(rq) dr. \quad (\text{F.35})$$

Usando novamente a técnica de integração por partes no lado direito

$$\int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr = \frac{1}{q} - \frac{\Lambda}{q^2} e^{-\Lambda r} \sin(rq) \Big|_0^\infty - \frac{\Lambda^2}{q^2} \int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr. \quad (\text{F.36})$$

Assim, podemos isolar a integral restante na equação acima

$$\int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr \left(1 + \frac{\Lambda^2}{q^2} \right) = \frac{1}{q} \quad (\text{F.37})$$

$$\int_0^\infty e^{-\Lambda r} \sin(rq) dr = \frac{q}{\Lambda^2 + q^2}. \quad (\text{F.38})$$

Com este resultado, podemos voltar à Equação (F.33), e obtemos

$$F(\vec{q}) = \frac{1}{q} \frac{\Lambda^4}{\Lambda^2 + q^2} \frac{q}{\Lambda^2 + q^2} \quad (\text{F.39})$$

$$F(\vec{q}) = \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + q^2)^2}. \quad (\text{F.40})$$

Este é o fator de forma de dipolo para prótons, que utilizamos nesta dissertação.

APÊNDICE G – FLUXO PONTUAL DEPENDENTE DA DISTÂNCIA TRANSVERSA

O fator de forma pontual caracteriza partículas sem estrutura interna, e é dado por

$$F(q^2) = 1. \quad (\text{G.1})$$

Com este fator de forma nuclear, o fluxo de fótons da Equação (E.22), torna-se

$$N(\omega, r) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 r^2 \omega} \left| \int_0^\infty u^2 du \frac{1}{u^2 + \frac{r^2 \omega^2}{\gamma^2}} J_1(u) \right|^2. \quad (\text{G.2})$$

Para resolver esta integral da equação acima vamos utilizar a propriedade [95]

$$\int_0^\infty \frac{u^{\nu+1} J_\nu(au) du}{(u^2 + z^2)^{\mu+1}} = \frac{a^\mu z^{\nu-\mu}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(az). \quad (\text{G.3})$$

Esta equação é válida para $a > 0$, $\text{Re}(z) > 0$, e $-1 < \text{Re}(\nu) < \text{Re}(\mu) + 3/2$. Para aplicar esta solução à integral da Equação (G.2), fazemos

$$\nu = 1; \quad \mu = 0; \quad a = 1; \quad z = \frac{r\omega}{\gamma},$$

logo

$$\int_0^\infty \frac{u^2 J_1(u) du}{u^2 + \frac{r^2 \omega^2}{\gamma^2}} = \frac{r\omega}{\gamma} K_1 \left(\frac{r\omega}{\gamma} \right). \quad (\text{G.4})$$

Substituindo este resultado na Equação (G.2), do fluxo de fótons, obtemos

$$N(\omega, r) = \frac{Z^2 \alpha \omega}{\pi^2 \gamma^2} K_1^2 \left(\frac{r\omega}{\gamma} \right). \quad (\text{G.5})$$

Este é o fluxo de fótons equivalentes para uma parícula pontual.

APÊNDICE H – FLUXO DE MONOPOLIO DEPENDENTE DA DISTÂNCIA TRANSVERSA

Neste apêndice vamos obter uma expressão para o fluxo de fótons dependente da distância transversa utilizando o fluxo de monopolio, que é amplamente utilizado na literatura para núcleos pesados. O fator de forma de Monopolio é dado por

$$F(q^2) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2}. \quad (\text{H.1})$$

Sendo que $q^2 = \frac{u^2 + \frac{r^2 \omega^2}{\gamma^2}}{r^2}$, o fator de forma de monopolio torna-se

$$F(q^2) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \frac{u^2 + \frac{r^2 \omega^2}{\gamma^2}}{r^2}} \quad (\text{H.2})$$

$$F(q^2) = \frac{r^2 \Lambda^2}{r^2 \Lambda^2 + u^2 + \left(\frac{r\omega}{\gamma}\right)^2}. \quad (\text{H.3})$$

Por simplicidade na notação, de agora em diante adotaremos $x = \frac{r\omega}{\gamma}$, assim

$$F(q^2) = \frac{r^2 \Lambda^2}{r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2}. \quad (\text{H.4})$$

Na integral para obter o fluxo de fótons da Equação (E.22), temos um termo do tipo $F(q^2/(u^2 + x^2))$. Vamos escrever este termo de maneira mais conveniente para o fluxo de monopolio.

$$\frac{F(q^2)}{u^2 + x^2} = \frac{r^2 \Lambda^2}{r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2} \frac{1}{u^2 + x^2}, \quad (\text{H.5})$$

que pode ser dividido em duas frações parciais como

$$\frac{F(q^2)}{u^2 + x^2} = \frac{1}{u^2 + x^2} - \frac{1}{r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2}, \quad (\text{H.6})$$

pois

$$\begin{aligned} \frac{F(q^2)}{u^2 + x^2} &= \frac{r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2 - u^2 - x^2}{(u^2 + x^2)(r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2)} \\ &= \frac{r^2 \Lambda^2}{r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2} \frac{1}{u^2 + x^2}. \end{aligned} \quad (\text{H.7})$$

Então, ao substituir a Equação (H.7) na Equação (E.22), obtemos

$$N(\omega, r) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 r^2 \omega} \left| \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \left(\frac{1}{u^2 + x^2} - \frac{1}{r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2} \right) \right|^2 \quad (\text{H.8})$$

$$N(\omega, r) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 r^2 \omega} \left| \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{u^2 + x^2} - \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2} \right|^2. \quad (\text{H.9})$$

Podemos, como na solução para o fluxo pontual, utilizar a equação

$$\int_0^\infty \frac{u^{\nu+1} J_\nu(au) du}{(u^2 + z^2)^{\mu+1}} = \frac{a^\mu z^{\nu-\mu}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(az). \quad (\text{H.10})$$

Para resolver a primeira integral da Equação (H.9), fazemos

$$\nu = 1; \quad \mu = 0; \quad a = 1; \quad z = x,$$

assim,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{u^2 + x^2} &= \frac{1^0 x^{1-0}}{2^0 \Gamma(0+1)} K_{1-0}(1x) \\ \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{u^2 + x^2} &= x K_1(x). \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

Para resolver a segunda integral da Equação (H.9) com a Equação (H.10), faremos

$$\nu = 1; \quad \mu = 0; \quad a = 1; \quad z = \sqrt{x^2 + r^2 \Lambda^2},$$

então

$$\begin{aligned} \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2} &= \frac{1^0 \sqrt{x^2 + r^2 \Lambda^2}^{1-0}}{2^0 \Gamma(0+1)} K_{1-0}(1\sqrt{x^2 + r^2 \Lambda^2}) \\ \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2} &= \sqrt{x^2 + r^2 \Lambda^2} K_1(\sqrt{x^2 + r^2 \Lambda^2}). \end{aligned} \quad (\text{H.12})$$

O fluxo de fôtons de monópole é obtido substituindo as Equações (H.11) e (H.12) na Equação (H.9):

$$N(\omega, r) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 r^2 \omega} \left| x K_1(x) - \sqrt{x^2 + r^2 \Lambda^2} K_1(\sqrt{x^2 + r^2 \Lambda^2}) \right|^2. \quad (\text{H.13})$$

com a definição de x :

$$N(\omega, r) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 r^2 \omega} \left[\left(\frac{r\omega}{\gamma} \right) K_1 \left(\frac{r\omega}{\gamma} \right) - \sqrt{\left(\frac{r\omega}{\gamma} \right)^2 + r^2 \Lambda^2} K_1 \left(\sqrt{\left(\frac{r\omega}{\gamma} \right)^2 + r^2 \Lambda^2} \right) \right]^2. \quad (\text{H.14})$$

APÊNDICE I – FLUXO DE DIPOLO DEPENDENTE DA DISTÂNCIA TRANSVERSA

Neste apêndice obteremos o fluxo de dipolo, que é amplamente usado para prótons. Tal fluxo é obtido com o fator de forma de dipolo, dado por

$$F(q^2) = \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + q^2)^2}. \quad (\text{I.1})$$

Como $q^2 = \frac{u^2 + x^2}{r^2}$, com $u = rk_\perp$ e $x = \frac{r\omega}{\gamma}$, podemos reescrever o fator de forma de dipolo como

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \frac{\Lambda^4}{\left(\Lambda^2 + \frac{u^2+x^2}{r^2}\right)^2} \\ F(q^2) &= \frac{\Lambda^4}{\frac{1}{r^4}(r^2\Lambda^2 + u^2 + x^2)^2} \\ F(q^2) &= \frac{r^4\Lambda^4}{(r^2\Lambda^2 + u^2 + x^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

No integrando da Equação (E.22) aparece um termo do tipo $F(q^2)/(u^2 + x^2)$. Podemos escrevê-lo de maneira mais conveniente com ajuda da Equação (I.2), para que possamos utilizar a Equação (H.10) para resolver a integral:

$$\frac{F(q^2)}{(u^2 + x^2)} = \frac{r^4\Lambda^4}{(r^2\Lambda^2 + u^2 + x^2)^2(u^2 + x^2)}. \quad (\text{I.3})$$

Podemos separar esta equação em frações parciais, do tipo

$$\frac{F(q^2)}{(u^2 + x^2)} = \frac{A}{(u^2 + x^2)} + \frac{B}{(r^2\Lambda^2 + u^2 + x^2)} + \frac{C}{(r^2\Lambda^2 + u^2 + x^2)^2}. \quad (\text{I.4})$$

Agora basta determinarmos os coeficientes A , B e C .

$$\frac{r^4\Lambda^4}{(r^2\Lambda^2 + u^2 + x^2)^2(u^2 + x^2)} = \frac{A}{(u^2 + x^2)} + \frac{B}{(r^2\Lambda^2 + u^2 + x^2)} + \frac{C}{(r^2\Lambda^2 + u^2 + x^2)^2} \quad (\text{I.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{r^4\Lambda^4}{(r^2\Lambda^2 + u^2 + x^2)^2(u^2 + x^2)} &= \frac{1}{(r^2\Lambda^2 + u^2 + x^2)^2(u^2 + x^2)} [A(r^2\Lambda^2 + u^2 + x^2)^2 + \\ &\quad + B(r^2\Lambda^2 + u^2 + x^2) + C(u^2 + x^2)] \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{r^4\Lambda^4}{(r^2\Lambda^2 + u^2 + x^2)^2(u^2 + x^2)} &= \frac{1}{(r^2\Lambda^2 + u^2 + x^2)^2(u^2 + x^2)} \\ &[Ar^4\Lambda^4 + Au^4 + Ax^4 + 2Ar^2\Lambda^2u^2 + 2Ar^2\Lambda^2x^2 + 2Au^2x^2 + \\ &\quad Br^2\Lambda^2u^2 + Br^2\Lambda^2x^2 + Bu^4 + Bx^4 + 2Bu^2x^2 + \\ &\quad Cu^2 + Cx^2] \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

$$\frac{r^4 \Lambda^4}{(r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2)^2 (u^2 + x^2)} = \frac{1}{(r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2)^2 (u^2 + x^2)} \{ A r^4 \Lambda^4 + (A + B) u^4 + \\ + (A + B) x^4 + [2A + B + C/(r^2 \Lambda^2)] r^2 \Lambda^2 u^2 + \\ + (2A + B + C/(r^2 \Lambda^2)) r^2 \Lambda^2 x^2 + 2(A + B) u^2 x^2 \}. \quad (\text{I.8})$$

Da equação acima, podemos retirar as relações

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ A + B &= 0 \\ 2A + B + C/(r^2 \Lambda^2) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

que possuem solução trivial: $A = 1, B = -1, C = -r^2 \Lambda^2$. Com estas soluções, a Equação (I.4) torna-se

$$\frac{F(q^2)}{(u^2 + x^2)} = \frac{1}{(u^2 + x^2)} - \frac{1}{r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2} - \frac{r^2 \Lambda^2}{(r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2)^2}. \quad (\text{I.10})$$

Agora estamos em condições de calcular o fluxo da Equação (E.22), e para isto vamos substituir a Equação (I.10) nela

$$N(\omega, r) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 r^2 \omega} \left| \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \left(\frac{1}{(u^2 + x^2)} - \frac{1}{r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2} - \frac{r^2 \Lambda^2}{(r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2)^2} \right) \right|^2 \quad (\text{I.11})$$

$$\begin{aligned} N(\omega, r) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 r^2 \omega} & \left| \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{(u^2 + x^2)} - \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2} + \right. \\ & \left. - r^2 \Lambda^2 \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{(r^2 \Lambda^2 + u^2 + x^2)^2} \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

As três integrais da equação acima podem ser resolvidas com a equação já vista antes (Equação (H.10)), que é dada por

$$\int_0^\infty \frac{u^{\nu+1} J_\nu(au) du}{(u^2 + z^2)^{\mu+1}} = \frac{a^\mu z^{\nu-\mu}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(az). \quad (\text{I.13})$$

Para a primeira integral da Equação (I.13), temos

$$\nu = 1; \quad \mu = 0; \quad a = 1; \quad z = x,$$

portanto

$$\int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{(u^2 + x^2)} = \frac{1^0 x^{1-0}}{2^0 \Gamma(0+1)} K_{1-0}(1x)$$

$$\int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{(u^2 + x^2)} = x K_1(x). \quad (\text{I.14})$$

Para a segunda integral da Equação (I.13), temos

$$\nu = 1; \quad \mu = 0; \quad a = 1; \quad z = \sqrt{r^2 \Lambda^2 + x^2},$$

portanto

$$\begin{aligned} \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{(u^2 r^2 \Lambda^2 + x^2)} &= \frac{1^0 \sqrt{r^2 \Lambda^2 + x^2}^{1-0}}{2^0 \Gamma(0+1)} K_{1-0}(1 \sqrt{r^2 \Lambda^2 + x^2}) \\ \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{(u^2 r^2 \Lambda^2 + x^2)} &= \sqrt{r^2 \Lambda^2 + x^2} K_1(\sqrt{r^2 \Lambda^2 + x^2}). \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

E, finalmente, para a terceira integral da Equação (I.13), temos

$$\nu = 1; \quad \mu = 1; \quad a = 1; \quad z = \sqrt{r^2 \Lambda^2 + x^2},$$

portanto

$$\begin{aligned} \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{(u^2 r^2 \Lambda^2 + x^2)^2} &= \frac{1^1 \sqrt{r^2 \Lambda^2 + x^2}^{1-1}}{2^1 \Gamma(1+1)} K_{1-1}(1 \sqrt{r^2 \Lambda^2 + x^2}) \\ \int_0^\infty du u^2 J_1(u) \frac{1}{(u^2 r^2 \Lambda^2 + x^2)^2} &= \frac{1}{2} K_0(\sqrt{r^2 \Lambda^2 + x^2}). \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Enfim, podemos obter o fluxo de dipolo dependente da distância transversa ao substituir os resultados obtidos nas Equações (I.14), (I.15) e (I.16) na Equação (E.22):

$$\begin{aligned} N(\omega, r) &= \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 r^2 \omega} \left| x K_1(x) - \sqrt{r^2 \Lambda^2 + x^2} K_1(\sqrt{r^2 \Lambda^2 + x^2}) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^2 \Lambda^2}{2} K_0(\sqrt{r^2 \Lambda^2 + x^2}) \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

Para finalizar, podemos substituir $x = \left(\frac{r\omega}{\gamma}\right)$

$$\begin{aligned} N(\omega, r) &= \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 r^2 \omega} \left[\left(\frac{r\omega}{\gamma}\right) K_1\left(\frac{r\omega}{\gamma}\right) - \sqrt{r^2 \Lambda^2 + \left(\frac{r\omega}{\gamma}\right)^2} K_1\left(\sqrt{r^2 \Lambda^2 + \left(\frac{r\omega}{\gamma}\right)^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^2 \Lambda^2}{2} K_0\left(\sqrt{r^2 \Lambda^2 + \left(\frac{r\omega}{\gamma}\right)^2}\right) \right]^2. \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$