

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

VINÍCIUS WIGGERS

**A DINÂMICA DE UM OSCILADOR VAN DER POL-DUFFING
QUADRIDIIMENSIONAL**

**JOINVILLE
2021**

VINÍCIUS WIGGERS

**A DINÂMICA DE UM OSCILADOR VAN DER POL-DUFFING
QUADRIDIMENSIONAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Paulo Cesar Rech

**JOINVILLE
2021**

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Wiggers, Vinícius
A dinâmica de um oscilador Van der Pol-Duffing
quadridimensional / Vinícius Wiggers. -- 2021.
51 p.

Orientador: Paulo Cesar Rech
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Física, Joinville, 2021.

1. Van der Pol-Duffing. 2. Expoente de Lyapunov. 3. Diagrama
de bifurcação. 4. Multiestabilidade. 5. Hipercaos. I. Rech, Paulo
Cesar. II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de
Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física. III.
Título.

VINÍCIUS WIGGERS

**A DINÂMICA DE UM OSCILADOR VAN DER POL-DUFFING
QUADRIDIMENSIONAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Paulo Cesar Rech

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Paulo Cesar Rech, Dr.
Univ. do Estado de Santa Catarina

Membros:

Prof. Holokx Abreu Albuquerque, Dr.
Univ. do Estado de Santa Catarina

Prof. João Carlos Xavier, Dr.
Univ. Federal de Santa Catarina

Joinville, 15 de junho 2021

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço antes de tudo aos meus pais, Conceição e Walmor, por todo o sacrifício e luta, por me darem a oportunidade de estar ocupando este lugar.

Ao meu avô João, e meu irmão Vitor, por todo o amor e carinho.

À minha companheira Sarah, que esteve ao meu lado e me incentivou nos momentos mais complicados.

Aos meus amigos desde 2014, durante graduação e mestrado, pelos quais tenho muito carinho, Thais, Daniel, Túlio e Júlia.

Ao meu orientador Paulo Cesar Rech, por todos esses anos de ensinamentos e discussões, por ter me iniciado nessa área de pesquisa, pela paciência e confiança nos últimos anos.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Física, em especial aos membros do Grupo de Dinâmica Não-Linear, professores César e Holokx, presentes em vários momentos de minha formação.

Ao Sidnei e à Susele, ambos da secretaria do Programa durante esse período, meu obrigado pela prestatividade e eficiência.

À Tatiane e Alessandra, profissionais que me auxiliaram muito nos últimos anos.

Agradeço ainda à FAPESC pelo suporte financeiro.

RESUMO

Esta dissertação apresenta um estudo a respeito de um oscilador de Van der Pol-Duffing de quatro dimensões. A investigação é feita através de simulações numéricas, utilizando o método de integração de Runge-Kutta de quarta ordem e o cálculo dos expoentes de Lyapunov para construir planos de parâmetros e bacias de atração, além de diagramas de bifurcação também obtidos com o método de Runge-Kutta. Em um primeiro momento, é estudado o plano de parâmetros (a, b) , onde ambos a e b multiplicam a variável z no sistema de equações que descreve o modelo. Para esse plano, são encontrados atratores periódicos, quase periódicos, caóticos e hipercaóticos, além da coexistência de mais de um atrator para o mesmo valor de parâmetro, chamado de multiestabilidade. Multiestabilidade é encontrada através da construção de diagramas de bifurcação idênticos sobre a mesma reta, para valores do parâmetro crescendo e decrescendo sobre tal reta, além da confecção de bacias de atração a partir da análise dos expoentes de Lyapunov. Na segunda parte, propomos a investigação de um novo plano, (c, d) , onde esses novos parâmetros multiplicam a variável dinâmica w nas equações. Nesse novo plano encontramos todas as características presentes no anterior, hipercaos e multiestabilidade, além do surgimento de conjuntos de estruturas periódicas bem definidas, similares às encontradas para o oscilador de Van der Pol-Duffing, osciladores de Rössler e o circuito de Chua, por exemplo. Confeccionando diagramas de bifurcação para tais estruturas, encontramos cascatas de dobramento e soma de períodos.

Palavras-chave: Van der Pol-Duffing. Plano de parâmetros. Expoente de Lyapunov. Diagrama de bifurcação. Multiestabilidade. Hipercaos.

ABSTRACT

This dissertation presents a study regarding a four-dimensional Van der Pol-Duffing oscillator. We investigate the system through numerical simulation, utilizing a fourth-order Runge-Kutta integration method and the computation of Lyapunov exponents to construct parameter planes and basins of attraction, along with bifurcation diagrams also obtained with the Runge-Kutta method. Firstly, we study the (a, b) parameter plane, where both a and b multiply the variable z on the system of equations that describes the model. We find periodic, quasiperiodic, chaotic and hyperchaotic attractors on this plane, and also the coexistence of more than one attractor for the same parameter value, namely multistability. Multistability is found by plotting identical bifurcation diagrams along the same line, for increasing and decreasing values of the parameter on this line, along with plotting basins of attraction obtained by analyzing Lyapunov exponents. On the second part, we propose the investigation of a new parameter plane, namely (c, d) , where the new parameters c and d now multiply the dynamical variable w on the equations. On this new plane, we find all the same features found on the previous plane, hyperchaos and multistability, for example, along with the emergence of organized periodic structures, similar to those found for the Van der Pol-Duffing oscillator, Rössler oscillators and the Chua circuit, to name a few. Plotting bifurcation diagrams for these structures, we find period-doubling and period-adding cascades.

Keywords: Van der Pol-Duffing. Parameter planes. Lyapunov exponent. Bifurcation diagram. Multistability. Hyperchaos.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Exemplo de atrator periódico para o sistema estudado em (WIGGERS; RECH, 2017a). | 16 |
| Figura 2 – Exemplo de atrator quase-periódico para o sistema estudado em (WIGGERS; RECH, 2017a). | 17 |
| Figura 3 – Exemplo de atrator caótico para o sistema estudado em (WIGGERS; RECH, 2017a). | 17 |
| Figura 4 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. | 22 |
| Figura 5 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. Ampliação da região indicada em 4. | 23 |
| Figura 6 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. Ampliação da região indicada em 4. O gradiente de cores indica os valores dos segundos maiores expoentes de Lyapunov. | 23 |
| Figura 7 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. Ampliação da região indicada em 4. | 24 |
| Figura 8 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. Ampliação da região indicada em 4. O gradiente de cores indica os valores dos segundos maiores expoentes de Lyapunov. | 24 |
| Figura 9 – Diagrama de bifurcação para o sistema (10) do parâmetro a pela variável x para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ e $b = 8,0$. | 25 |
| Figura 10 – Diagramas de bifurcação para o sistema (10) do parâmetro a crescente (azul) e decrescente (vermelho) pela variável x para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ e $b = 8,0$. | 25 |
| Figura 11 – Bacia de atração para o sistema (10) das condições iniciais x_0 e y_0 para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ $a = 2,135$, $b = 4,0$, $z = 0,3$ e $w = 0,4$. | 26 |
| Figura 12 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$. | 27 |
| Figura 13 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada em 12. | 28 |
| Figura 14 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada em 12. O gradiente de cores indica os valores dos segundos maiores expoentes de Lyapunov. | 28 |
| Figura 15 – Diagramas de bifurcação para o sistema (10) do parâmetro a crescente (azul) e decrescente (vermelho) pela variável x para $\varepsilon = 0,5$, $\beta = 0,1$ e $b = 6,0$. | 29 |
| Figura 16 – Bacia de atração para o sistema (10) das condições iniciais x_0 e y_0 para $\varepsilon = 0,5$, $\beta = 0,1$ $a = 6,825$, $b = 6,0$, $z = 0,3$ e $w = 0,4$. | 29 |
| Figura 17 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$. | 30 |
| Figura 18 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada em 17. | 30 |

| | |
|--|----|
| Figura 19 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada em 17. O gradiente de cores indica os valores dos segundos maiores expoentes de Lyapunov. | 31 |
| Figura 20 – Diagramas de bifurcação para o sistema (10) do parâmetro a crescente (azul) e decrescente (vermelho) pela variável x para $\varepsilon = 2,0$, $\beta = 0,1$ e b sobre a reta $b = -8a + 39$ | 31 |
| Figura 21 – Bacia de atração para o sistema (10) das condições iniciais x_0 e y_0 para $\varepsilon = 2,0$, $\beta = 0,1$ $a = 3,910$, $b = 7,72$, $z = 0,3$ e $w = 0,4$ | 32 |
| Figura 22 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. . . | 33 |
| Figura 23 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. Ampliação da região indicada em 22. | 33 |
| Figura 24 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. Ampliação da região indicada em 22. O gradiente de cores indica os valores dos segundos maiores expoentes de Lyapunov. | 34 |
| Figura 25 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. Ampliação da região indicada em 23. | 35 |
| Figura 26 – Diagrama de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c pela variável x para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ e d sobre a reta $d = 0,0714285714c + 1,45$ | 35 |
| Figura 27 – Diagrama de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c pela variável x para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ e d sobre a reta $d = 0,0714285714c + 1,45$. Ampliação de uma parte da Figura 26. | 36 |
| Figura 28 – Diagrama de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c pela variável x para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ e d sobre a reta $d = 0,0714285714c + 1,45$. Ampliação de uma parte da Figura 26. | 36 |
| Figura 29 – Diagramas de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c crescente (azul) e decrescente (vermelho) pela variável x para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ e d sobre a reta $d = 0,0714285714c + 1,45$ | 37 |
| Figura 30 – Bacia de atração para o sistema (11) das condições iniciais x_0 e y_0 para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ $c = 6,055$, $d = 1,756875$, $z = 0,3$ e $w = 0,4$ | 37 |
| Figura 31 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$ | 38 |
| Figura 32 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$. O gradiente de cores nessa Figura representa os valores dos segundos maiores expoentes de Lyapunov. | 38 |
| Figura 33 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada em 31. | 39 |
| Figura 34 – Diagrama de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c pela variável x para $\varepsilon = 0,5$, $\beta = 0,1$ e d sobre a reta $d = 18c - 58,6$ | 39 |
| Figura 35 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada em 33. | 40 |

| | |
|--|----|
| Figura 36 – Diagrama de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c pela variável x para $\varepsilon = 0,5$, $\beta = 0,1$ e d sobre a reta $d = 0,35c - 1,5085$ | 40 |
| Figura 37 – Bacia de atração para o sistema (11) das condições iniciais x_0 e y_0 para $\varepsilon = 0,5$, $\beta = 0,1$ $c = 2,95070$, $d = 2,55117$, $z = 0,3$ e $w = 0,4$ | 41 |
| Figura 38 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$ | 42 |
| Figura 39 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$. O gradiente de cores nessa Figura representa os valores dos segundos maiores expoentes de Lyapunov. | 42 |
| Figura 40 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada na Figura 38. | 43 |
| Figura 41 – Diagrama de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c pela variável x para $\varepsilon = 2,0$, $\beta = 0,1$ e d sobre a reta $d = 2,6c - 21,62$ | 43 |
| Figura 42 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada na Figura 40. | 44 |
| Figura 43 – Diagrama de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c pela variável x para $\varepsilon = 2,0$, $\beta = 0,1$ e d sobre a reta $d = 1,1c - 6,67$ | 44 |
| Figura 44 – Bacia de atração para o sistema (11) das condições iniciais x_0 e y_0 para $\varepsilon = 2,0$, $\beta = 0,1$ $c = 10,083$, $d = 4,5958$, $z = 0,3$ e $w = 0,4$ | 45 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 12 |
| 2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA | 14 |
| 2.1 | SISTEMAS DINÂMICOS | 14 |
| 2.2 | ESPAÇO DE FASE | 14 |
| 2.3 | BIFURCAÇÕES | 14 |
| 2.4 | ATRATOR | 15 |
| 2.5 | EXPOENTE DE LYAPUNOV | 17 |
| 2.6 | PLANOS DE PARÂMETROS | 19 |
| 2.7 | MULTIESTABILIDADE | 19 |
| 3 | SISTEMAS DE VAN DER POL E DUFFING | 20 |
| 3.1 | OSCILADOR DE VAN DER POL | 20 |
| 3.2 | EQUAÇÃO DE DUFFING | 20 |
| 3.3 | OSCILADOR DE VAN DER POL-DUFFING | 20 |
| 3.4 | SISTEMA DE VAN DER POL-DUFFING 4D | 21 |
| 4 | RESULTADOS NUMÉRICOS | 22 |
| 4.1 | PLANO (a, b) | 22 |
| 4.2 | PLANO (c, d) | 32 |
| 5 | CONCLUSÃO | 46 |
| | REFERÊNCIAS | 48 |

1 INTRODUÇÃO

No final do século XVII Newton publicou os *Principia*, onde sintetizou as três leis fundamentais da dinâmica (REICHL, 2004). Utilizando essas leis e o cálculo diferencial, foi capaz de explicar as leis de Kepler dos movimentos planetários e a interação entre dois corpos (STROGATZ, 2014). Durante décadas, vários cientistas procuraram estender as leis de Newton ao problema de três corpos (interação entre três corpos) (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996). Porém, soluções algébricas não foram encontradas e o problema foi considerado impossível de ser resolvido (STROGATZ, 2014). Contudo, nos anos finais do século XIV, o matemático francês Henri Poincaré propôs uma nova abordagem para o problema (OTT, 2002). Poincaré propôs uma abordagem qualitativa ao invés de quantitativa, sugerindo questionar a estabilidade do sistema total, e não a posição de cada corpo individualmente (STROGATZ, 2014).

A invenção dos computadores por volta de 1950 possibilitou um novo avanço no estudo da dinâmica (STROGATZ, 2014). Dessa forma, em 1963, o matemático Edward Lorenz descobriu, por acaso, o famoso atrator em forma de borboleta (SCHUSTER; JUST, 2005). Lorenz percebeu uma sensível dependência às condições iniciais no sistema que estava estudando, tal sensibilidade é um dos principais indícios da existência de caos (SCHUSTER; JUST, 2005). A partir de 1970, o estudo de sistemas caóticos se expandiu, sendo estudados sistemas de diversas áreas do conhecimento, tais como: dinâmicas populacionais (HASSELL; COMINS; MAY, 1991), redes neurais (SOMPOLINSKY; CRISANTI; SOMMERS, 1988), lasers (WINFUL; RAHMAN, 1990), mercado financeiro (LEBARON, 1994), mecânica de fluidos (KHAYAT, 1994), criptografia (BAPTISTA, 1998), entre vários outros.

Após a publicação do artigo de Lorenz em 1963 (LORENZ, 1963), diversos sistemas dinâmicos tridimensionais foram estudados (RÖSSLER, 1976)(HAYES; GREBOGI; OTT, 1993)(KENNEDY, 1994). Isso se deve, principalmente, ao teorema de Poincaré-Bendixson, o qual mostra que apenas sistemas de dimensão maior que 2 podem exibir comportamento caótico (HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2012). Entretanto, em 1979, Otto Rössler publicou o primeiro trabalho a respeito de um sistema com quatro dimensões apresentando comportamento caótico (RÖSSLER, 1979). Neste trabalho, Rössler detecta pela primeira vez o que chamou de hipercaos. Desde então, a existência de tal comportamento caótico de maior dimensão tem sido alvo de vários estudos (CHLOUVERAKIS; SPROTT, 2006)(LI; TANG; CHEN, 2005)(LI; CHEN, 2004)(MATSUMOTO; CHUA; KOBAYASHI, 1986).

A equação de Duffing foi proposta em 1918, pelo engenheiro alemão Georg Duffing. Tal equação foi muito estudada no século XX, por ser uma das mais simples a apresentar dinâmica caótica (KOVACIC; BRENNAN, 2011). Já o oscilador de van der Pol foi proposto em 1920 pelo engenheiro holandês Balthasar Van der Pol, sendo um modelo simples de um circuito elétrico com resistência não linear (GUCKENHEIMER, 1980). O oscilador de Van der Pol-Duffing (MURALI; LAKSHMANAN, 1993), por sua vez, tem sido estudado nas últimas décadas, como exemplo de sistema caótico que apresenta multiestabilidade (CHUDZIK et al., 2011). Dentre

as aplicações do sistema, seja em formas forçadas ou acopladas, podemos citar a detecção de sinais (ZHIHONG; SHAOPU, 2015), biestabilidade óptica (KAO; WANG, 1993) e sinais de eletroencefalogramas (GHORBANIAN et al., 2015).

O sistema estudado nesta dissertação foi proposto por Kuiate et al, em 2018, sendo uma versão de 4^a ordem do oscilador de Van der Pol-Duffing (KUIATE et al., 2018). Neste artigo, é exemplificada a implementação deste sistema na forma de um circuito elétrico. A dinâmica é brevemente discutida e mostra-se a possibilidade de utilização de tal sistema como ferramenta de criptografia. O objetivo deste trabalho é então se aprofundar nos detalhes da dinâmica deste sistema, detectando e localizando regiões de hipercaos e multiestabilidade nos planos de parâmetros. As análises são feitas através do cálculo dos expoentes de Lyapunov e construção de diagramas de bifurcação.

Esta dissertação é organizada de maneira que no Capítulo 2, Fundamentação Teórica, são discutidos conceitos básicos de dinâmica não linear, tendo em vista a elaboração e compreensão do trabalho. No Capítulo 3, Osciladores de Van der Pol e Duffing, são apresentados brevemente as equações na qual o sistema estudado é baseado. No Capítulo 4, Resultados Numéricos, são apresentados os resultados obtidos numericamente e sua análise. No Capítulo 5, Conclusão, são dadas as considerações finais e possíveis continuações.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentados conceitos básicos da teoria de dinâmica não linear, com o intuito de possibilitar a elaboração e compreensão do trabalho.

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS

De acordo com Yuri Kuznetsov, a ideia de sistema dinâmico é a formalização matemática do conceito de processo determinístico (KUZNETSOV, 2013). Ou seja, um sistema dinâmico é um modelo matemático determinístico que descreve a evolução de uma dada variável de acordo com o tempo (OTT, 2002). Em outras palavras, é uma regra que determina estados futuros dessa variável de acordo com os estados passados (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996). Em tais sistemas, o tempo, dado por t , pode ser uma variável discreta ou contínua (OTT, 2002). Sistemas com tempo contínuo são comumente chamados fluxos, e sistemas com tempo discreto são referidos como mapas. Um exemplo de forma geral de sistema dinâmico a tempo contínuo é dado pelo conjunto de n equações

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= f_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} &= f_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \\ &\vdots \\ \frac{dx^{(n)}}{dt} &= f_n(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}). \end{aligned} \tag{1}$$

Esse é um sistema de primeira ordem (devido à ordem da maior derivada), de n equações autônomas (devido à independência explícita ao tempo) e ordinárias (derivadas em relação a somente uma variável independente) (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2017).

2.2 ESPAÇO DE FASE

O espaço $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ composto pelas n variáveis dinâmicas do sistema é chamado espaço de fase (STROGATZ, 2014). O estado do sistema em um tempo t é determinado por um ponto no espaço de fase (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996). Em mecânica clássica, o espaço de fase é composto pelas coordenadas generalizadas q e pelos momentos generalizados p (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2001). O caminho percorrido pelos pontos através do espaço de fase é chamado de órbita ou trajetória (OTT, 2002).

2.3 BIFURCAÇÕES

Mudanças qualitativas na dinâmica de um sistema devido à variação de parâmetros são chamadas de bifurcações (STROGATZ, 2014)(OTT, 2002)(KUZNETSOV, 2013). Essas

mudanças podem alterar a estabilidade e criar ou extinguir um ponto fixo (STROGATZ, 2014). Bifurcações podem ser locais, quando ocorrem próximas a um ponto fixo ou ciclo limite (trajetória periódica), ou globais, caso contrário (KUZNETSOV, 2013)(GUCKENHEIMER; HOLMES, 2013). O plano dado por parâmetro x variável é chamado diagrama de bifurcação (STROGATZ, 2014). Nos diagramas de bifurcação, o parâmetro é considerado como variável independente.

Podemos ainda classificar bifurcações de maneira mais específica, de acordo com a mudança que tal bifurcação provoca na dinâmica. A bifurcação do tipo sela-nó é um dos mais simples e comuns, sendo a bifurcação que cria e destrói (aparecimento e desaparecimento) pontos fixos (STROGATZ, 2014)(ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996). Bifurcações transcríticas ocorrem quando a estabilidade de um ponto fixo é alterada devido uma variação no parâmetro de controle (GUCKENHEIMER; HOLMES, 2013). Entretanto, ao contrário das bifurcações sela-nó, nas bifurcações transcríticas os pontos fixos continuam existindo para todos os valores do parâmetro (STROGATZ, 2014). Bifurcações do tipo forquilha ocorrem em sistemas com alguma simetria espacial. Nesse tipo de bifurcação, pontos fixos tendem a aparecer e sumir em pares (STROGATZ, 2014). Em bifurcações de dobramento de período, o ponto fixo perde estabilidade, e novas órbitas com o dobro do período surgem (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996). Uma bifurcação de Poincaré-Andronov-Hopf, ou simplesmente bifurcação de Hopf, ocorre quando a estabilidade de um ponto fixo é alterada e uma órbita periódica de baixa amplitude surge (KUZNETSOV, 2013)(GUCKENHEIMER; HOLMES, 2013)(WIGGINS, 2003).

2.4 ATRATOR

De maneira simples, um atrator é um conjunto de pontos para o qual trajetórias próximas a este convergem no espaço de fase (STROGATZ, 2014). Uma definição mais formal é dada por: um atrator é um conjunto fechado A com as propriedades

1. A é um conjunto invariante, qualquer trajetória $x^{(n)}(t)$ iniciada dentro do conjunto permanece neste;
2. A atrai um conjunto aberto de condições iniciais. Existe um conjunto aberto U tal que $A \subset U$ onde, se uma condição inicial $x^{(n)}(0)$ está em U , a distância entre $x^{(n)}(t)$ e A tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. Ou seja, A atrai as trajetórias que iniciam suficientemente próximas. A bacia de atração de A é o maior conjunto U que satisfaz tal condição;
3. Não existe subconjunto de A que satisfaz as condições anteriores (STROGATZ, 2014)(ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996)(OTT, 2002)(LICHENBERG; LIEBERMAN, 2013).

Os atratores de um sistema podem ser classificados como:

- ponto de equilíbrio: um ponto do espaço de fase para onde condições iniciais próximas são atraídas;

- atrator periódico: trajetória periódica fechada no espaço de fase, conforme exemplo na Figura 1;
- atrator quase periódico: trajetória aberta no espaço de fase, com dois ou mais períodos incomensuráveis, ou seja, a razão entre eles não é um número inteiro. De maneira mais simples, movimento quase periódico pode ser pensado como uma combinação de movimentos periódicos com diferentes frequências de oscilação. Caracterizado pela formação de uma superfície toroidal no espaço de fase, visível na Figura 2;
- atrator caótico: trajetória aberta irregular no espaço de fase. Possui como característica a sensível dependência às condições iniciais, ou seja, duas trajetórias iniciadas muito próximas divergem exponencialmente quando t cresce. Um exemplo é dado na Figura 3 (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996)(STROGATZ, 2014)(OTT, 2002).

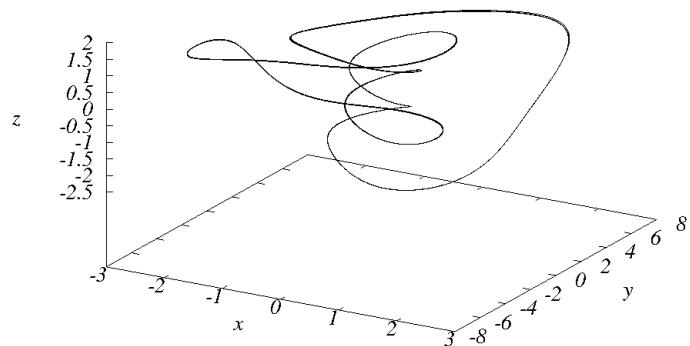


Figura 1 – Exemplo de atrator periódico para o sistema estudado em (WIGGERS; RECH, 2017a).

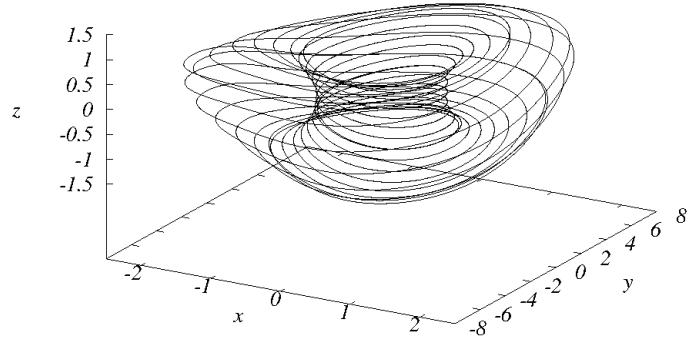


Figura 2 – Exemplo de atrator quase-periódico para o sistema estudado em (WIGGERS; RECH, 2017a).

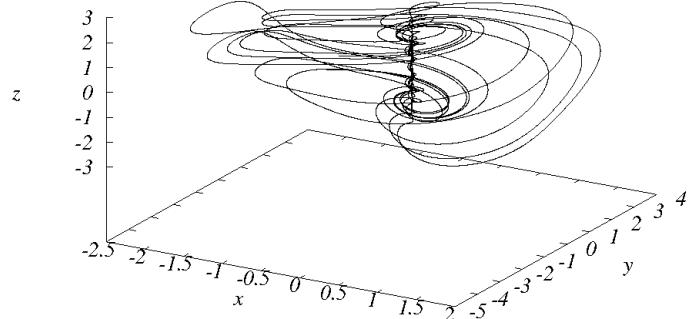


Figura 3 – Exemplo de atrator caótico para o sistema estudado em (WIGGERS; RECH, 2017a).

2.5 EXPOENTE DE LYAPUNOV

O comportamento dinâmico local de um sistema pode variar para as diferentes direções do fluxo no espaço de fase. Por exemplo, condições iniciais próximas podem se aproximar em uma direção e se afastar em outra, conforme a evolução temporal (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996). Um atrator caótico apresenta sensibilidade em relação às condições iniciais (OTT, 2002). O elemento que quantifica essa sensibilidade é o que chamamos de expoente de Lyapunov, ou melhor, expoentes de Lyapunov, uma vez que um sistema com n dimensões possui n expoentes (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996). O expoente de Lyapunov indica a taxa exponencial média de divergência ou convergência entre trajetórias inicialmente muito próximas no espaço de fase (STROGATZ, 2014).

Considerando uma hiperesfera de condições iniciais no espaço de fase n -dimensional,

com raio inicial infinitesimal r_0 , inicialmente em $x^{(n)}(t_0)$. Após um tempo t , tais condições iniciais seguem o fluxo das equações diferenciais e o raio da hiperelipse na direção j do espaço de fase pode ser escrita como

$$r_{(j)}(t - t_0) = r_0 e^{\lambda_{(j)}(t - t_0)}. \quad (2)$$

Podemos ainda reescrever a equação (2) na forma

$$\lambda_{(j)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t - t_0)} \ln \left[\frac{r_{(j)}(t - t_0)}{r_0} \right], \quad (3)$$

sendo $\lambda_{(j)}$ o j -ésimo expoente de Lyapunov da trajetória iniciada em $x^{(n)}(t_0)$. Um expoente positivo indica crescimento do fluxo nesta direção, e consequentemente divergência exponencial de órbitas próximas (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996)(OTT, 2002)(WIGGINS, 2003).

O Teorema de Liouville (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2001) afirma que o hipervolume de estados no espaço de fase de um sistema Hamiltoniano (conservativo) deve se manter constante no tempo, e que no caso de um sistema dissipativo esse hipervolume se contrai. Tomando o hipervolume $V^{(n)}(t)$ da hiperesfera de condições iniciais supracitada em um instante t como

$$V^{(n)}(t) = r_{(1)}(t)r_{(2)}(t)\dots r_{(n)}(t) = \prod_{j=1}^n r_{(j)}(t). \quad (4)$$

Utilizando (2) e (4), podemos escrever o volume da hiperesfera em função dos expoentes de Lyapunov

$$V^{(n)}(t) = \prod_{j=1}^n r_0 e^{\lambda_{(j)} t} = r_0^n e^{(\sum_{j=1}^n \lambda_{(j)}) t} \quad (5)$$

Portanto, para um sistema dissipativo

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{(j)} < 0 \quad (6)$$

ou seja, a soma de todos os expoentes de Lyapunov deve ser menor que zero.

É possível caracterizar um atrator de acordo com os expoentes de Lyapunov, da forma:

- ponto de equilíbrio: todos os expoentes são negativos, o atrator converge para um ponto específico;
- atrator periódico: o maior expoente é zero, e os demais negativos, sendo o expoente nulo na direção da trajetória;

- atrator quase-periódico: os dois maiores expoentes são nulos, dando origem à formação da superfície toroidal;
- atrator caótico: o maior expoente de Lyapunov é positivo, associado à direção divergente entre as trajetórias inicialmente próximas. O segundo maior expoente é nulo, referente à direção de propagação da trajetória. Entretanto, os demais expoentes são menores que zero, e a soma de todos é negativa;
- atrator hipercaótico: somente possível em sistemas de quatro ou mais dimensões, é caracterizado por dois ou mais expoentes de Lyapunov positivos (STROGATZ, 2014)(ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996)(OTT, 2002)(WIGGINS, 2003).

2.6 PLANOS DE PARÂMETROS

Planos de parâmetros são utilizados para caracterizar o sistema de acordo com os expoentes de Lyapunov e a variação dos parâmetros de controle do sistema. Os eixos das ordenadas e abscissas indicam os valores dos parâmetros, e a terceira dimensão, representada por um gradiente de cores, indica os valores dos expoentes de Lyapunov. Tal diagrama permite a identificação de estruturas periódicas e rotas para o caos dentro do espaço de parâmetros composto pelos parâmetros de controle do sistema.

2.7 MULTIESTABILIDADE

Multiestabilidade é a coexistência de mais de um atrator para um mesmo conjunto de valores de parâmetros (ANGELI; FERRELL; SONTAG, 2004). O fenômeno foi comprovado experimentalmente por Arrecchi et. al (ARECCHI et al., 1982) em um sistema de laser de CO_2 . Desde então, tal fenômeno tem sido estudado e encontrado em diversas áreas do conhecimento (ANGELI; FERRELL; SONTAG, 2004), e o controle dos múltiplos estados estáveis é desejado a fim de aplicações tecnológicas (PISARCHIK; FEUDEL, 2014). A detecção de multiestabilidade em um sistema pode ser feita através de análises do espaço de fase, diagramas de bifurcação e bacias de atração (WIGGERS; RECH, 2017b).

3 SISTEMAS DE VAN DER POL E DUFFING

Neste capítulo serão introduzidos brevemente os sistemas de Van der Pol e Duffing, os quais servem como base para o sistema estudado nesta dissertação.

3.1 OSCILADOR DE VAN DER POL

O oscilador de Van der Pol, dado pela equação diferencial

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (7)$$

foi proposto pelo engenheiro eletricista holandês Balthasar Van der Pol, como modelo de circuito eletrônico com resistência não linear (GUCKENHEIMER, 1980). Devido à sua simplicidade matemática e rica dinâmica, esse sistema foi amplamente estudado, especialmente os fenômenos de bifurcação e rotas para o caos, vistos em (GUCKENHEIMER, 1980)(HOLMES; RAND, 1978)(PARLITZ; LAUTERBORN, 1987)(KENNEDY; CHUA, 1986).

3.2 EQUAÇÃO DE DUFFING

A equação de Duffing, proposta por Georg Duffing, engenheiro alemão, em 1918, como modelo de oscilador gerador de vibrações harmônicas, cuja rigidez é composta por termos quadráticos e cúbicos, e o amortecimento viscoso linear (KOVACIC; BRENNAN, 2011), pode ser escrita na forma forçada como

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f \cos \omega t. \quad (8)$$

Assim como o oscilador de Van der Pol, a simplicidade matemática possibilitou diversos estudos, teóricos e experimentais, principalmente relacionados a circuitos eletrônicos, mostrados nas referências (ALDRIDGE; CLELAND, 2005)(PARLITZ; LAUTERBORN, 1985)(KOVACIC; BRENNAN, 2011)(NOVAK; FREHLICH, 1982)(SEBALD et al., 2011).

3.3 OSCILADOR DE VAN DER POL-DUFFING

Entre as décadas de 1970 e 1980 iniciaram-se os estudos da combinação dos osciladores de Van der Pol e Duffing, dada pela equação

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f \cos \omega t, \quad (9)$$

conhecida atualmente como oscilador de Van der Pol-Duffing (HORVA et al., 1975)(UEDA; AKAMATSU, 1981). Tal equação tem servido como modelo para diversos fenômenos não

lineares, tais como a existência de multiestabilidade (KAO; WANG, 1993)(WIGGERS; RECH, 2017b)(CHUDZIK et al., 2011), detecção de sinais (MURALI; LAKSHMANAN, 1993), e controle da dinâmica do sistema através de feedback (XU; CHUNG, 2003).

3.4 SISTEMA DE VAN DER POL-DUFFING 4D

O oscilador de Van der Pol-Duffing quadridimensional foi proposto por Kuiate et. al (KUIATE et al., 2018), devido à possibilidade de um sistema dessa forma apresentar hipercaos (CHLOUVERAKIS; SPROTT, 2006)(LINZ, 2008), aliada à possibilidade de implementação de um circuito eletrônico modelado por tal (VAIDYANATHAN et al., 2015). A dinâmica desse novo sistema é brevemente discutida nas referências (KUIATE et al., 2018)(RAJAGOPAL et al., 2019), onde são encontradas regiões periódicas, caóticas e hipercaóticas, além de multiestabilidade. Kuiate et. al e Rajagopal et. al ainda demonstram a implementação de um circuito eletrônico modelado pelo sistema proposto, através de um software (KUIATE et al., 2018) ou circuito integrado (RAJAGOPAL et al., 2019), ambos obtendo resultados experimentais qualitativamente próximos aos teóricos.

O sistema é dado pelo conjunto de equações

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= az, \\ \dot{z} &= w, \\ \dot{w} &= -w - bz + \varepsilon(1 - x^2)y - x + \beta x^3,\end{aligned}\tag{10}$$

onde os parâmetros a e b são introduzidos como forma de gerar caos e hipercaos no sistema. No circuito eletrônico experimental, tais parâmetros são equivalentes à razão entre dois resistores (KUIATE et al., 2018).

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

No seguinte capítulo serão apresentados os resultados obtidos durante a pesquisa, referente ao sistema de equações (10). Os cálculos dos expoentes de Lyapunov foram obtidos com o algoritmo de Wolf (WOLF et al., 1985), o qual é baseado nos métodos desenvolvidos por Benettin et. al (BENETTIN et al., 1980), Shimada e Nagashima (SHIMADA; NAGASHIMA, 1979), utilizando o método de integração de Runge-Kutta de quarta ordem. Em cada uma das figuras de planos de parâmetros são considerados um milhão de pontos, distribuídos de maneira equidistante em uma grade 1000x1000. A cada um desses pontos está associada uma cor, referente ao valor do maior expoente de Lyapunov, ou segundo maior expoente nas figuras indicadas. Para valores positivos, é associado um gradiente entre amarelo e vermelho, a cor preta está relacionada a expoentes nulos, e o gradiente entre preto e branco indica valores menores que zero em tais figuras. As condições iniciais para todas as figuras são $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4)$, exceto quando explicitamente indicado o contrário.

4.1 PLANO (a, b)

Nesta seção discutiremos os resultados das simulações numéricas referentes ao plano de parâmetros (a, b) .

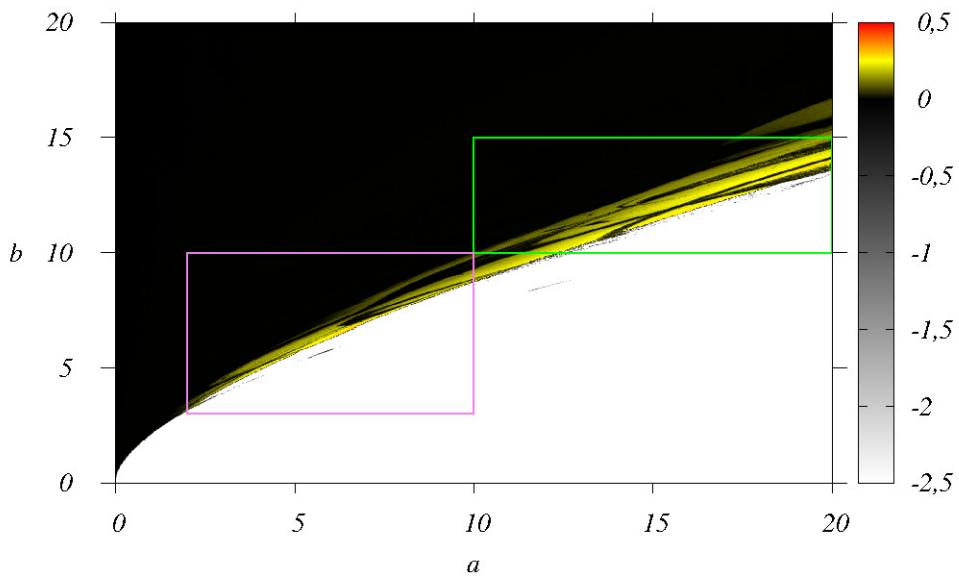


Figura 4 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$.

Figuras 4, 5 e 6 mostram recortes do plano ab para valores de $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. A Figura 5 é uma ampliação da área indicada pela caixa verde na Figura 4. A região pintada em branco na parte inferior direita nas figuras é caracterizada por órbitas divergentes. A Figura 6

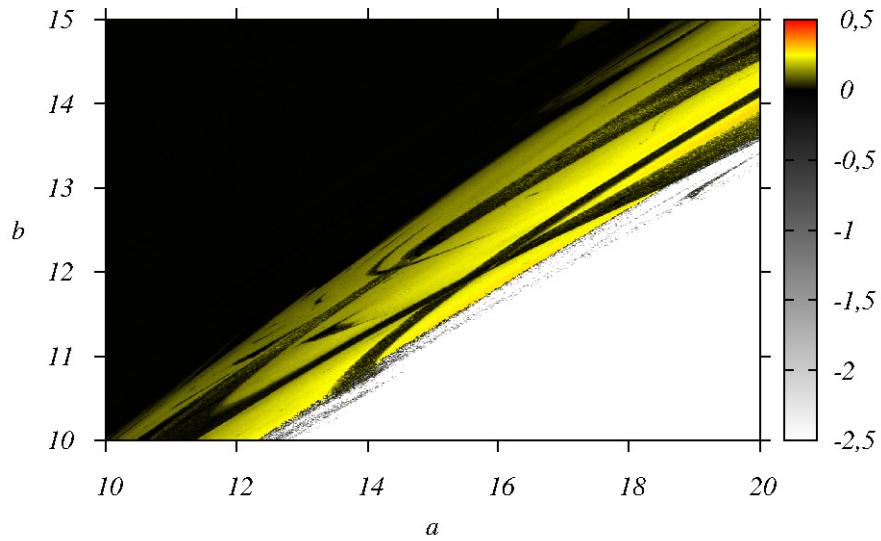


Figura 5 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. Ampliação da região indicada em 4.

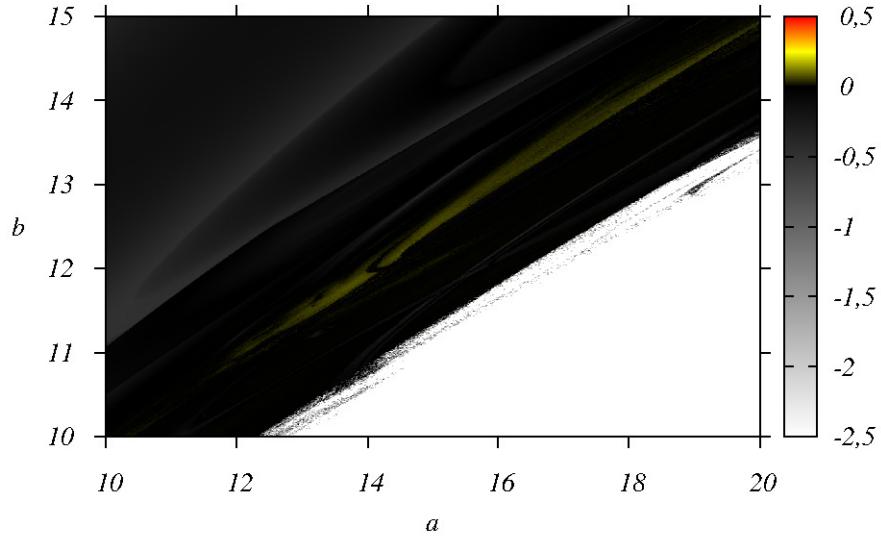


Figura 6 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. Ampliação da região indicada em 4. O gradiente de cores indica os valores dos segundos maiores expoentes de Lyapunov.

indica o segundo maior expoente de Lyapunov para os mesmos valores de parâmetros da Figura 5, a qual indica o valor do maior expoente.

Portanto, comparando as duas figuras e utilizando as informações contidas no Capítulo 2, vemos que a região em amarelo nas Figuras 5 e 6 indica trajetórias hipercaóticas. Regiões com

o gradiente entre amarelo e vermelho na Figura 5, e preto na Figura 6, representam trajetórias caóticas, regiões em preto em ambas as figuras localizam trajetórias quaseperiódicas e regiões em preto na Figura 5 e com gradiente entre preto e branco na Figura 6 sinalizam trajetórias periódicas.

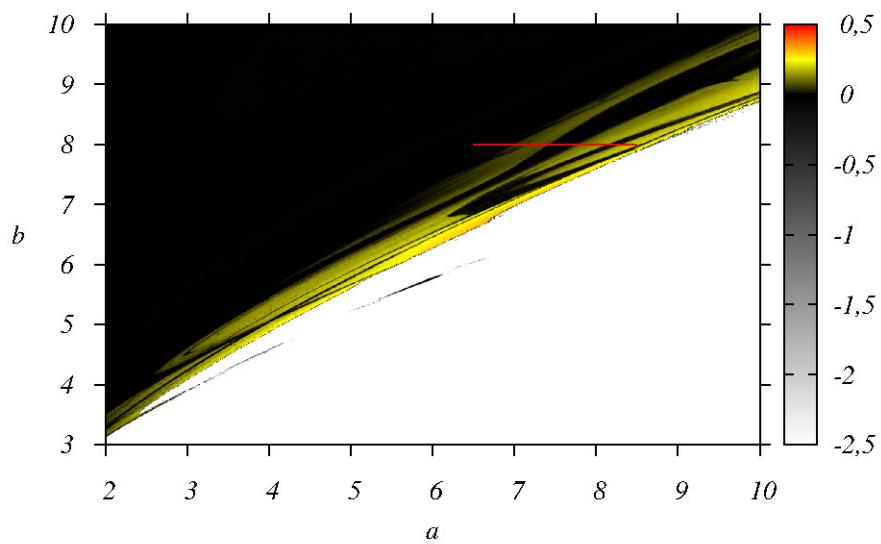


Figura 7 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. Ampliação da região indicada em 4.

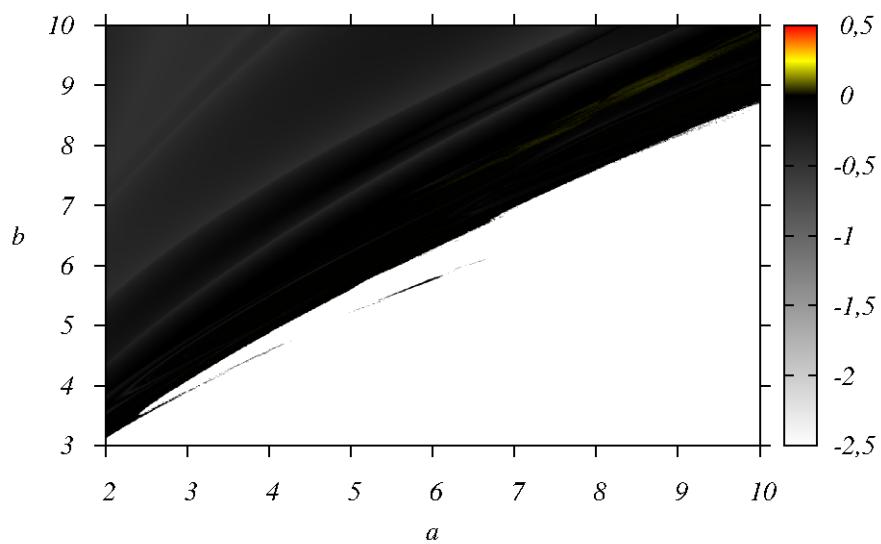


Figura 8 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. Ampliação da região indicada em 4. O gradiente de cores indica os valores dos segundos maiores expoentes de Lyapunov.

A mesma análise é válida para as Figuras 7 e 8, ampliações da outra área indicada pela caixa roxa na Figura 4. Nesse caso, a Figura 7 apresenta o maior expoente de Lyapunov, e a Figura 8 o segundo maior. Assim, percebemos na Figura 8 que a região hipercaótica inicia para valores de a próximos a 6,0, e b próximos a 7,0.

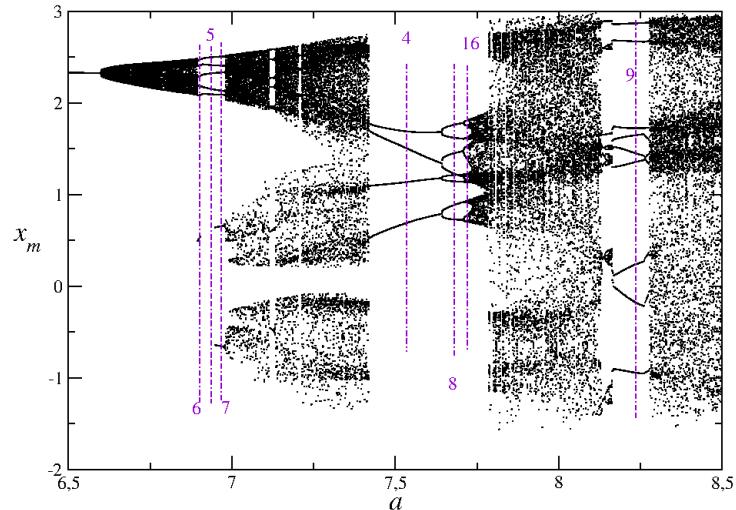


Figura 9 – Diagrama de bifurcação para o sistema (10) do parâmetro a pela variável x para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ e $b = 8,0$.

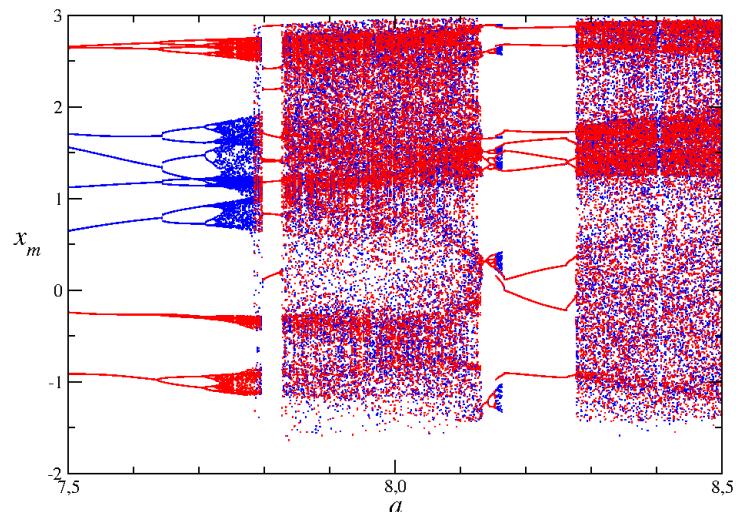


Figura 10 – Diagramas de bifurcação para o sistema (10) do parâmetro a crescente (azul) e decrescente (vermelho) pela variável x para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ e $b = 8,0$.

A Figura 9 mostra um diagrama de bifurcação construído sobre a linha indicada na Figura 7, onde $b = 8,0$ e a varia entre 6,5 e 8,5. Este diagrama de bifurcação, assim como todos os outros contidos nessa dissertação, são feitos utilizando o método de integração de Runge-Kutta de quarta ordem. O intervalo do parâmetro de controle é dividido em mil partes iguais. São plotados os máximos locais da variável x , representados por x_m , em função do parâmetro escolhido, considerando-se uma trajetória completa do atrator no espaço de fase. É importante salientar que, quando fazemos as contagens dos períodos nos diagramas de bifurcação, estamos contando

o número de máximos locais da variável em questão. Os valores de tais máximos locais estão indicados com os números na cor roxa na Figura 9. Observam-se bifurcações de dobramento de período entre $a = 7,5$ e $a = 7,75$.

Plotados na Figura 10 estão dois diagramas de bifurcação, um em azul e um em vermelho, ambos sobre a mesma linha $b = 4,0$ na Figura 7, porém apenas para a entre 7,5 e 8,5. O diagrama em azul é iniciado para o valor de $a = 7,5$, e incrementado até 8,5, com um passo igual a 10^{-3} . O diagrama na cor vermelha, por sua vez, é iniciado em $a = 8,5$ e reduzido com o mesmo passo, até $a = 7,5$. Os diagramas são construídos seguindo o atrator, ou seja, os cálculos são iniciados no valor inicial do parâmetro a , com as condições iniciais $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4)$, e a integração é feita para esse valor de a . Ao final desse passo de integração para o valor fixo de a , os valores das variáveis (x, y, z, w) são utilizados como condições iniciais para a integração do próximo valor de a . Analisando a Figura 10, percebemos que existem valores do parâmetro a onde os diagramas não coincidem, ou seja, existe mais de um atrator. Tal fenômeno é conhecido como multiestabilidade, também encontrado no sistema de Van der Pol-Duffing forçado em apenas duas dimensões (WIGGERS; RECH, 2017b).

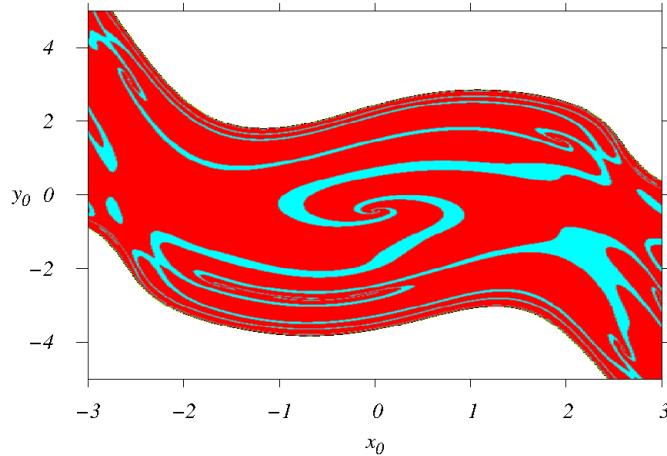


Figura 11 – Bacia de atração para o sistema (10) das condições iniciais x_0 e y_0 para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ $a = 2,135$, $b = 4,0$, $z = 0,3$ e $w = 0,4$.

Outra ferramenta útil na identificação de multiestabilidade é a construção de bacias de atração. Sendo o sistema aqui estudado composto por quatro dimensões, consequentemente as bacias de atração de tal sistema também têm quatro dimensões. Entretanto, o que chamaremos a partir de agora de bacias de atração são na verdade seções transversais ou cortes da bacia de atração, considerando apenas o plano de condições iniciais (x_0, y_0) .

As bacias são obtidas a partir da análise dos dois maiores expoentes de Lyapunov em cada ponto. Se os dois expoentes em determinado ponto são positivos, tais condições iniciais levam à uma trajetória hipercaótica no espaço de fase, para um expoente positivo e um igual

a zero, atrator caótico, com dois expoentes nulos observamos um atrator quase periódico, e para um expoente nulo e um negativo, temos um atrator periódico ou ciclo limite. Os expoentes são calculados com um código adaptado do utilizado para o cálculo nos planos de parâmetros, novamente usando o método de Runge-Kutta para integração numérica. Nesse caso, ao contrário do anterior, os valores dos parâmetros são fixados e as condições iniciais são variadas.

A Figura 11 mostra uma seção da bacia de atração construída para as condições iniciais x_0 e y_0 , considerando $z_0 = 0,3$ e $w_0 = 0,4$, com os valores de parâmetros $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$, $a = 2,135$ e $b = 4,0$. Vemos na Figura 11 uma malha de 250000 pontos, distribuídos de maneira equidistante. Regiões em branco indicam condições iniciais para as quais as trajetórias divergem no espaço de fase, pontos em vermelho indicam trajetórias periódicas e as partes em ciano equivalem a atratores quase periódicos. Novamente observamos diferentes atratores para os mesmos valores de parâmetros.

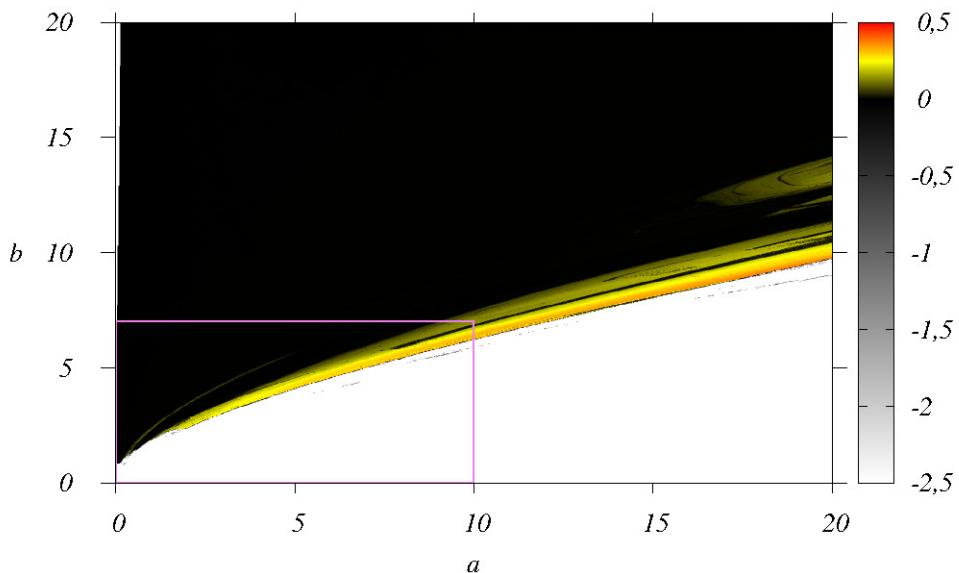


Figura 12 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$.

Consideremos agora o mesmo plano (a, b) , porém para os valores de $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$. Comparando as Figuras 4 e 12 percebemos que a região caótica em 12 acontece para valores menores de b , para a próximo a 20. Entretanto, encontramos expoentes positivos para valores menores de a na Figura 12.

A Figura 13 é a ampliação da parte indicada pela caixa roxa na Figura 12. A Figura 14, por sua vez, exibe os segundos maiores expoentes para a mesma região do plano de parâmetros. Observando os pontos amarelos em 14 vemos que nesse plano a região hipercaótica inicia-se próxima de $a = 7,0$ e $b = 6,0$.

Na Figura 15 observamos novamente dois diagramas de bifurcação, feitos sobre a linha $b = 6,0$ indicada na Figura 13, em azul construído para a crescente a partir de 5,0 até 9,0, e em vermelho para a decrescente de 9,0 a 5,0. Novamente observamos multiestabilidade, claramente

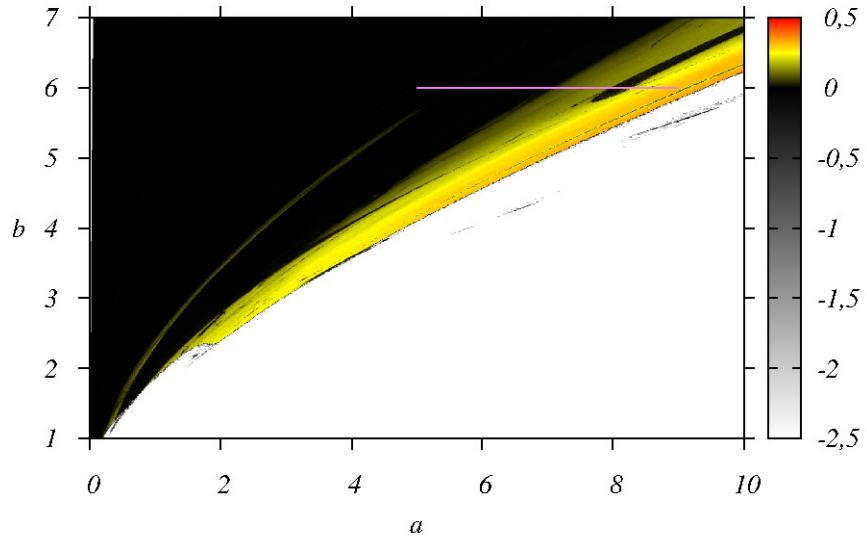


Figura 13 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada em 12.

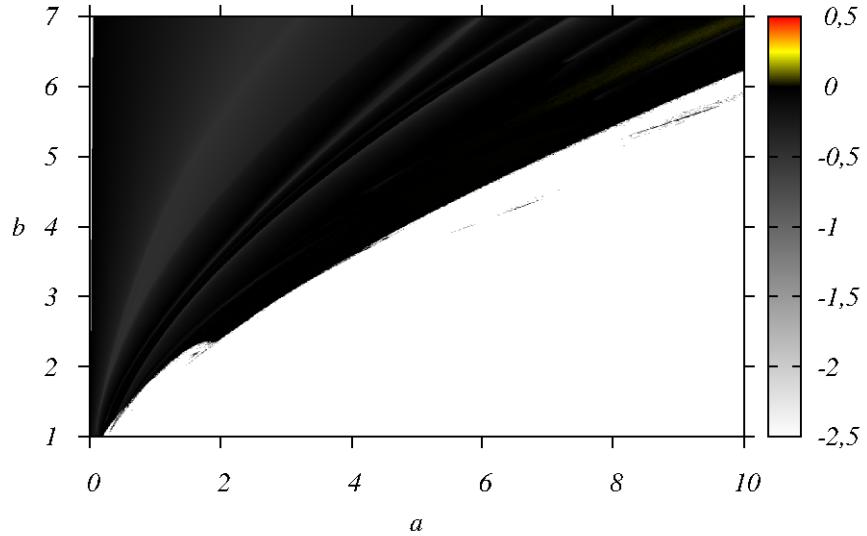


Figura 14 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada em 12. O gradiente de cores indica os valores dos segundos maiores expoentes de Lyapunov.

para valores de a entre 6,0 e 7,0, conforme indicam as linhas pontilhadas. Multiestabilidade confirmada mais uma vez através da bacia de atração na Figura 16, construída para os valores de $(a, b) = (6,825; 6,0)$. A bacia mostra condições iniciais que levam a atratores periódicos em vermelho, e atratores quase periódicos em ciano, além de condições iniciais que levam à

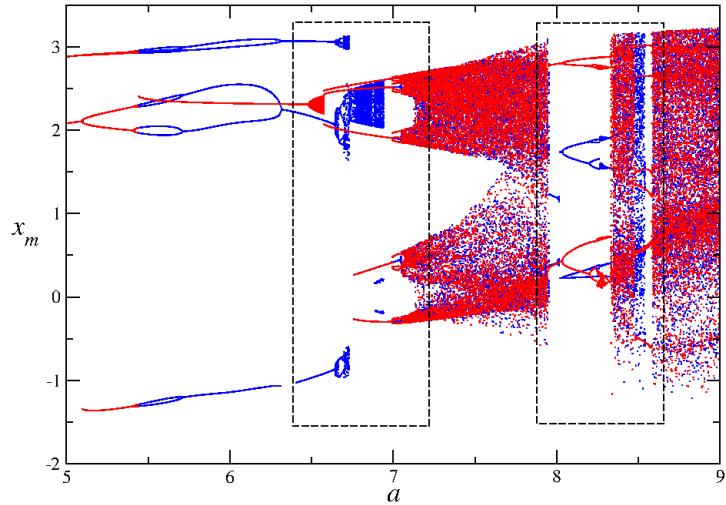


Figura 15 – Diagramas de bifurcação para o sistema (10) do parâmetro a crescente (azul) e decrescente (vermelho) pela variável x para $\varepsilon = 0,5$, $\beta = 0,1$ e $b = 6,0$.

trajetórias divergentes no espaço de fase em branco.

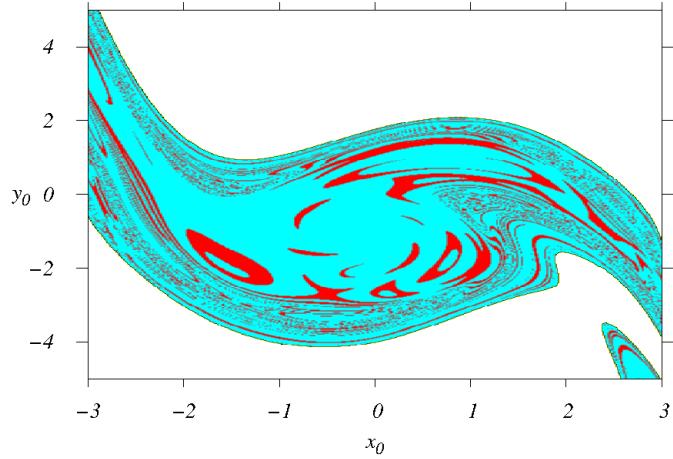


Figura 16 – Bacia de atração para o sistema (10) das condições iniciais x_0 e y_0 para $\varepsilon = 0,5$, $\beta = 0,1$ $a = 6,825$, $b = 6,0$, $z = 0,3$ e $w = 0,4$.

Por fim, analisamos o plano (a, b) para os valores de $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$. A Figura 17 mostra o plano para a e b variando entre 0 e 20, plotado com os maiores expoentes de Lyapunov. Comparando a Figura 17 com as Figuras 12 e 4, vemos que a região de trajetórias divergentes é consideravelmente maior em 17, sendo que para valores de a a partir das proximidades de 13,0, quase toda a região de b entre 0 e 20 leva a tais trajetórias divergentes.

Observamos na Figura 18 a ampliação da área retangular destacada em azul na Figura 17, com a Figura 19 representando a mesma área, porém, mostrando os segundos maiores expoentes. Analisando os pontos em amarelo na Figura 19, nota-se que existem atratores hipercaóticos para

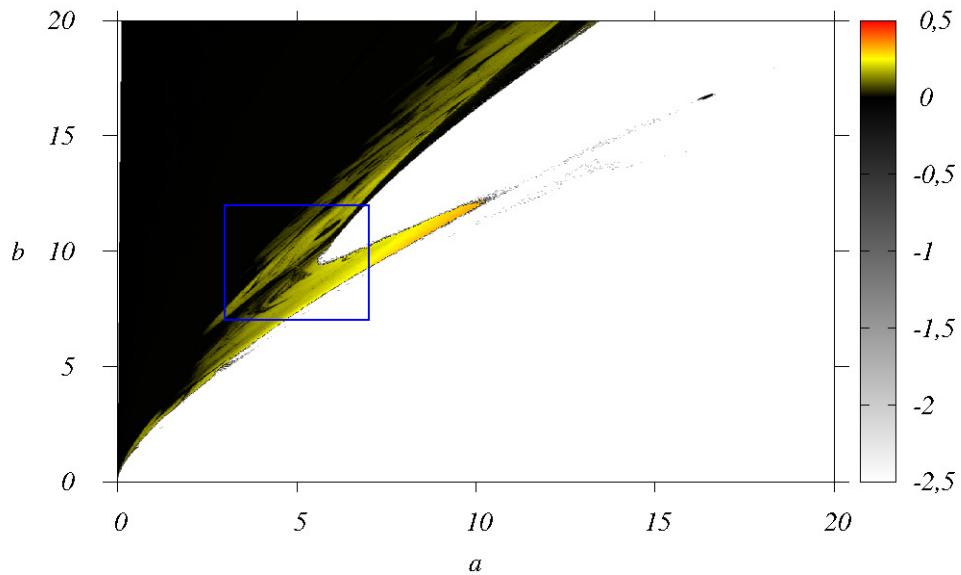


Figura 17 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$.

valores de a próximos a 4,0 e b próximos a 7,0.

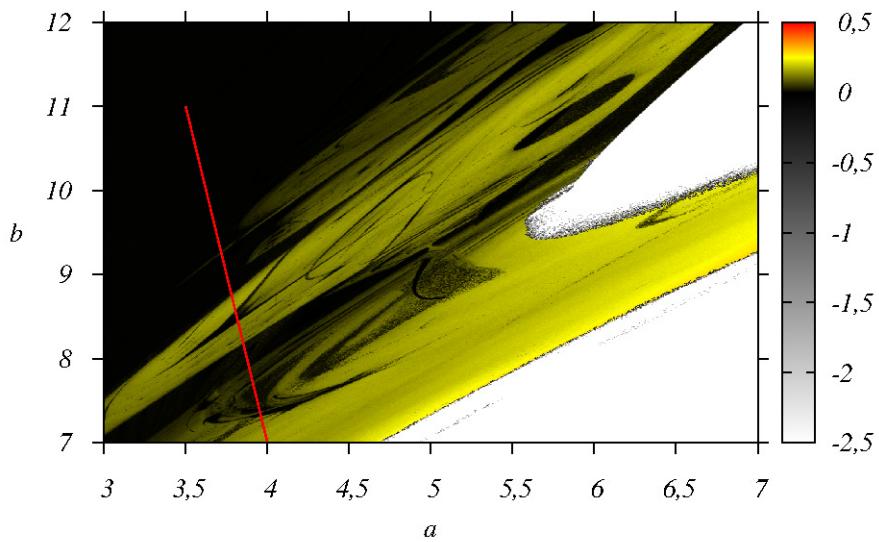


Figura 18 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada em 17.

A Figura 20 mostra os dois diagramas de bifurcação construídos sobre a reta indicada na Figura 18. O diagrama em azul é feito incrementando o valor de a , e em vermelho o caso contrário. A equação que caracteriza a reta sobre a qual os diagramas foram feitos é dada por $b = -8a + 39$. Mais uma vez, observam-se áreas onde os diagramas não coincidem, mais precisamente entre

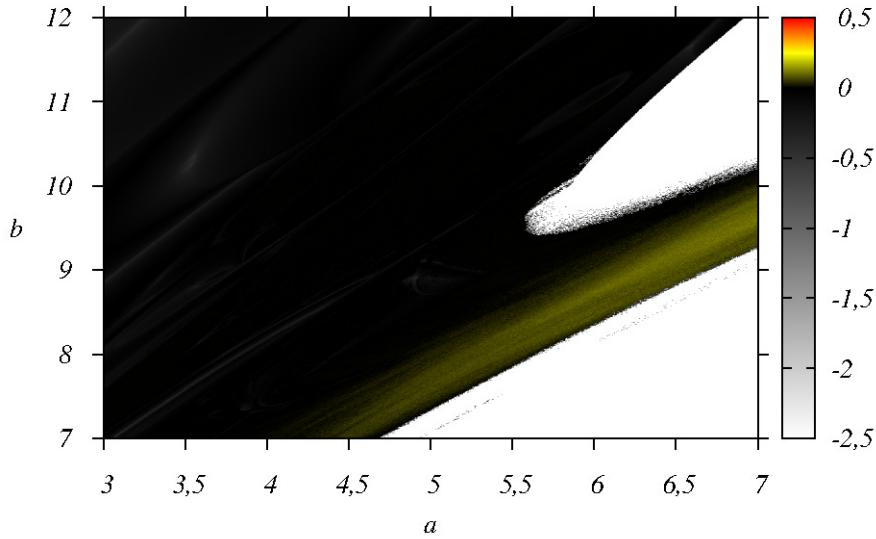


Figura 19 – Plano de parâmetros (a, b) para o sistema (10), para $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada em 17. O gradiente de cores indica os valores dos segundos maiores expoentes de Lyapunov.

3,65 e 3,75, e também 3,85 e 3,95, de acordo com as caixas pontilhadas. Apresentado na Figura 21 está um recorte da bacia de atração para as condições iniciais x_0 e y_0 , com $z = 0,3$, $w = 0,4$, $a = 3,910$ e $b = 7,72$. A região com os pontos em branco continua representando condições iniciais que levam à trajetórias divergentes, assim como os vermelhos e ciano apontam condições iniciais que levam a atratores periódicos e quase periódicos, respectivamente. Os pontos pintados em preto indicam condições iniciais que levam a atratores caóticos no espaço de fase.

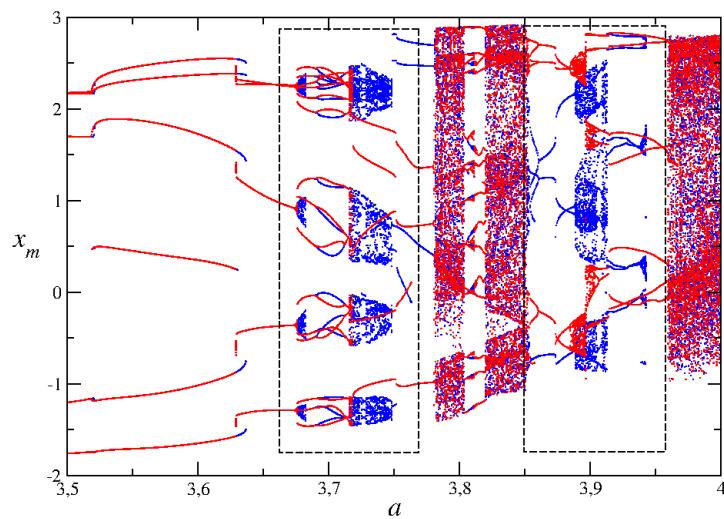


Figura 20 – Diagramas de bifurcação para o sistema (10) do parâmetro a crescente (azul) e decrescente (vermelho) pela variável x para $\varepsilon = 2,0$, $\beta = 0,1$ e b sobre a reta $b = -8a + 39$.

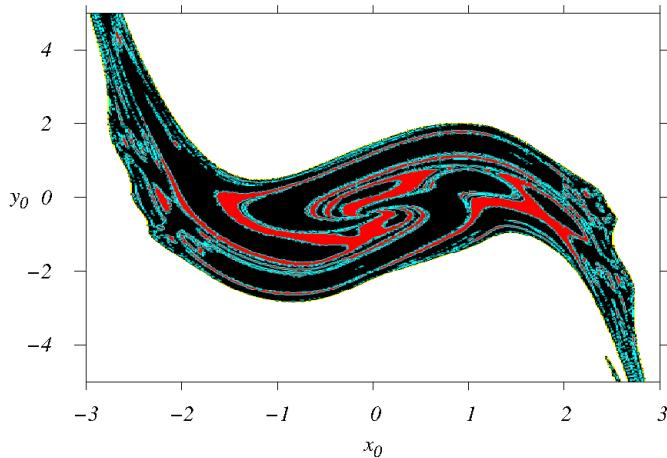


Figura 21 – Bacia de atração para o sistema (10) das condições iniciais x_0 e y_0 para $\varepsilon = 2,0$, $\beta = 0,1$ $a = 3,910$, $b = 7,72$, $z = 0,3$ e $w = 0,4$.

4.2 PLANO (c, d)

Consideraremos agora uma outra versão do sistema indicado nas equações (10), onde os parâmetros a e b são iguais a 1,0, e introduzimos os parâmetros de controle c e d , de maneira que as equações (10) podem ser reescritas na forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= cw, \\ \dot{w} &= -dw - z + \varepsilon(1 - x^2)y - x + \beta x^3. \end{aligned} \tag{11}$$

Assim como os parâmetros a e b , c e d são controlados através de resistores no circuito experimental. Originalmente, a e b estão diretamente ligados à variável dinâmica z (multiplicam z no sistema de equações 10). Logo, o objetivo da introdução dos parâmetros c e d é a investigação do efeito que tais parâmetros, agora associados à variável w (multiplicando a variável w no sistema (11)), exercem sobre a dinâmica do sistema.

A Figura 22 mostra o plano de parâmetros (c, d) , com c e d variando entre 0 e 20, $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. O esquema de cores permanece o mesmo dos planos anteriores, sendo que branco indica trajetórias divergentes, preto o expoente nulo, e o gradiente entre amarelo e vermelho expoentes positivos. Vemos na Figura 23 a ampliação do quadro destacado na Figura 22, e na Figura 24 a mesma região, porém com os segundos maiores expoentes.

Observamos no quadrante inferior direito da Figura 24 pontos pintados em amarelo, indicando que existem dois expoentes de Lyapunov maiores que zero nessa região. Portanto,

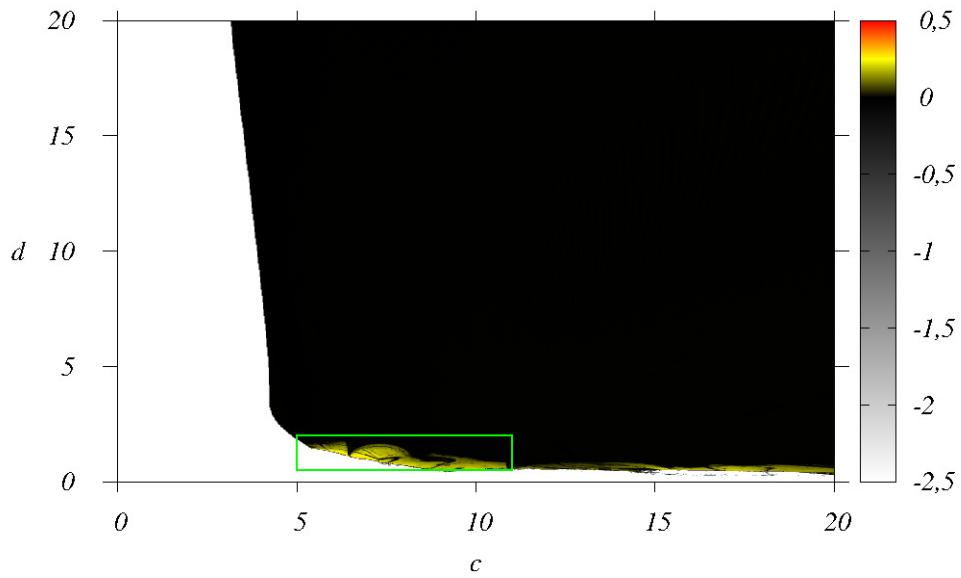


Figura 22 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$.

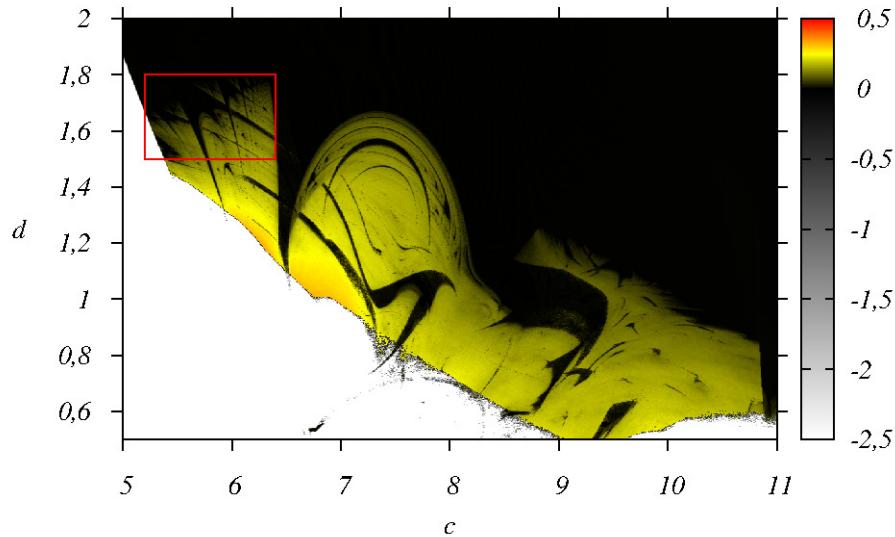


Figura 23 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$.
Ampliação da região indicada em 22.

vemos a existência de hipercaos também para o plano cd , mesmo que os parâmetros a e b sejam iguais a um.

Vemos na Figura 25 a ampliação da caixa em 23. Observamos o aparecimento de estruturas periódicas em meio à região caótica. Estruturas semelhantes aparecem também no espaço de parâmetros do oscilador de Van der Pol-Duffing bidimensional (WIGGERS; RECH, 2017b), em osciladores de Van der Pol-Duffing acoplados (KUZNETSOV; STANKEVICH; TURUKINA,

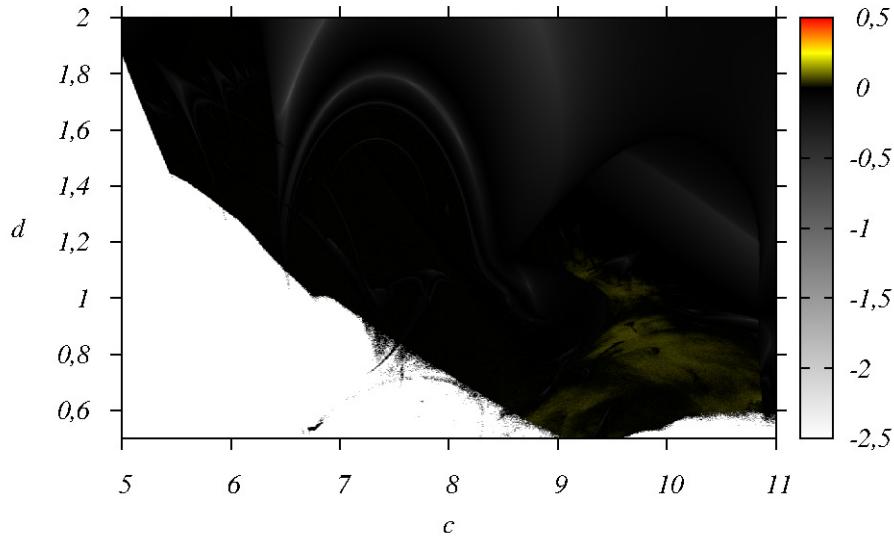


Figura 24 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$.
Ampliação da região indicada em 22. O gradiente de cores indica os valores dos segundos maiores expoentes de Lyapunov.

2009), e também em um oscilador de Rössler (GALLAS, 2010).

Os números marcados em branco em algumas das estruturas periódicas indicam os períodos das mesmas. Tais períodos foram calculados com o diagrama de bifurcação apresentado na Figura 26. Facilmente nota-se que os períodos indicados em 25 coincidem com os períodos em 26. O diagrama de bifurcação foi construído sobre a reta $d = 0,0714285714c + 1,45$, explicitada na Figura 25.

Iniciando em 5,6, na maior estrutura periódica, e avançando sobre a reta até 6,3, atravessam-se diversas estruturas periódicas. Nota-se que sempre existe uma estrutura menor entre duas maiores. É possível observar isso em ambas as figuras, 25 e 26. Podemos considerar dois conjuntos de estruturas principais, um formado pelas estruturas maiores, cujos períodos são ímpares e crescem sempre de dois em dois, indicados pelos números roxos. E um segundo conjunto, com estruturas menores, intermediárias às estruturas anteriores, onde os períodos são pares e também aumentam de dois em dois, representados pelos números em verde. Entretanto, se considerarmos os dois conjuntos como um só, os períodos são apenas incrementados de um em um, iniciando em 5 e indo até 20, conforme mostram as Figuras 26 e 27.

As estruturas diminuem em tamanho conforme o parâmetro c é incrementado, dificultando a visualização dos períodos na extremidade direita da figura. A fim de possibilitar a contagem dos períodos foi feita a ampliação dessa região do diagrama de bifurcação, para c entre 6,2 e 6,3, conforme a Figura 27. Ainda sobre as estruturas periódicas intermediárias, vemos na Figura 28, ampliação de outra parte de 26, o surgimento de bifurcações de dobramento de período sucessivas. De acordo com o exemplo em 28, a estrutura inicia com período 8 e dobra de período

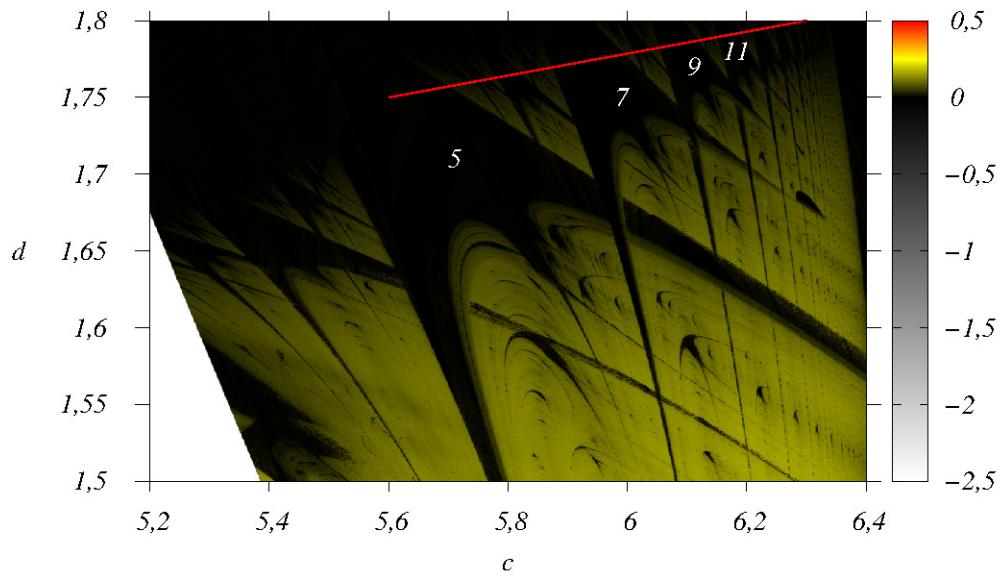


Figura 25 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$.
Ampliação da região indicada em 23.

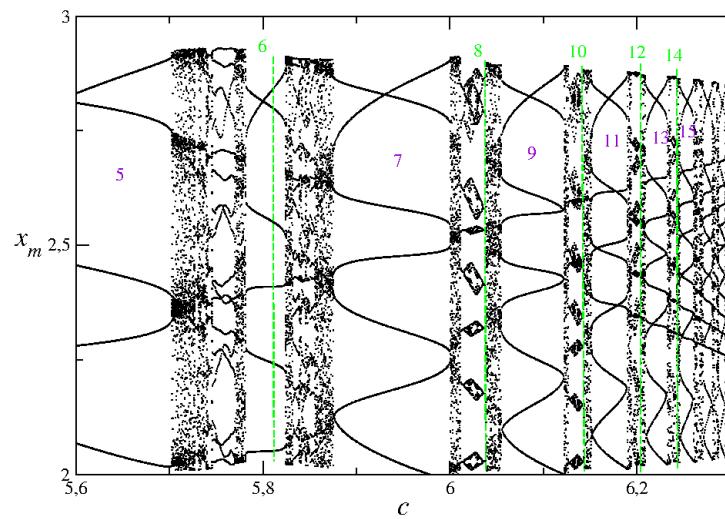


Figura 26 – Diagrama de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c pela variável x para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ e d sobre a reta $d = 0,0714285714c + 1,45$.

duas vezes, para 16 e 32 respectivamente. Logo após, existe uma breve região caótica, seguida por uma nova parte com período 32, que decresce para 16 e retorna a 32 novamente. Surge então uma nova região caótica, seguida por uma região com período 32 mais uma vez, e finalmente, os períodos são reduzidos pela metade duas vezes, para 16 e 8 respectivamente.

Analisando agora a Figura 29, onde estão plotados dois diagramas de bifurcação. Em azul, o mesmo diagrama da Figura 26, construído sobre a reta indicada em 25 para valores

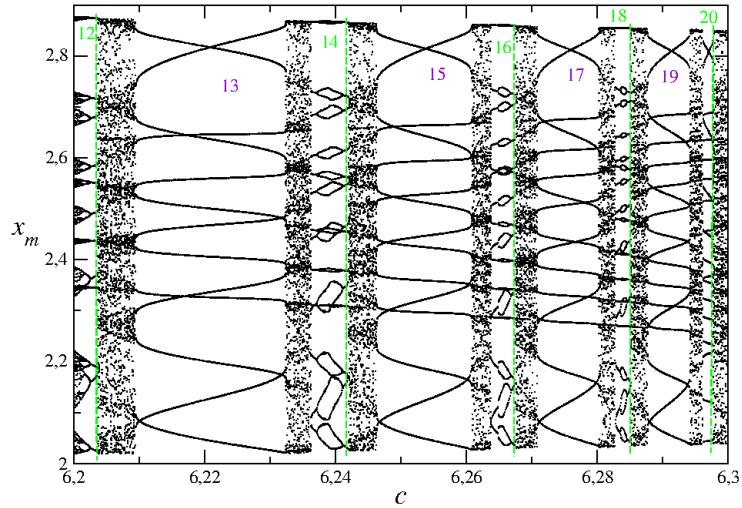


Figura 27 – Diagrama de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c pela variável x para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ e d sobre a reta $d = 0,0714285714c + 1,45$. Ampliação de uma parte da Figura 26.

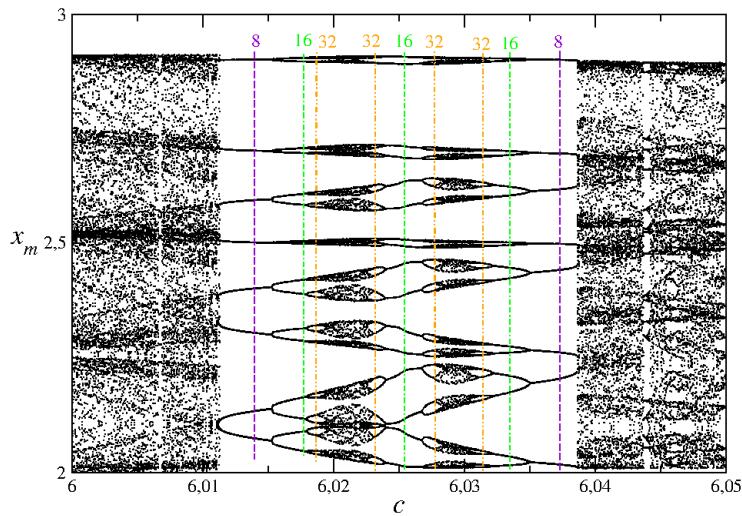


Figura 28 – Diagrama de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c pela variável x para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ e d sobre a reta $d = 0,0714285714c + 1,45$. Ampliação de uma parte da Figura 26.

crescentes de c . Em vermelho, um diagrama também construído sobre a mesma reta em 25, porém, desta vez para c iniciando em 6,3 e decrescendo até 5,6. Observamos claramente nas regiões explicitadas com as caixas tracejadas a existência de diferentes atratores para os mesmos valores de parâmetros. Explicitamos agora a existência também de multiestabilidade no plano (c, d) .

Na Figura 30 temos o corte da bacia de atração para os valores de parâmetros $c = 6,055$, $d = 1,756875$, $\varepsilon = 1,0$ e $\beta = 0,01$. A região branca representa condições iniciais que levam à trajetórias divergentes no espaço de fase, pontos em preto levam a atratores caóticos, em vermelho e ciano atratores periódicos e quase periódicos respectivamente. Mais uma vez observamos a existência de multiestabilidade.

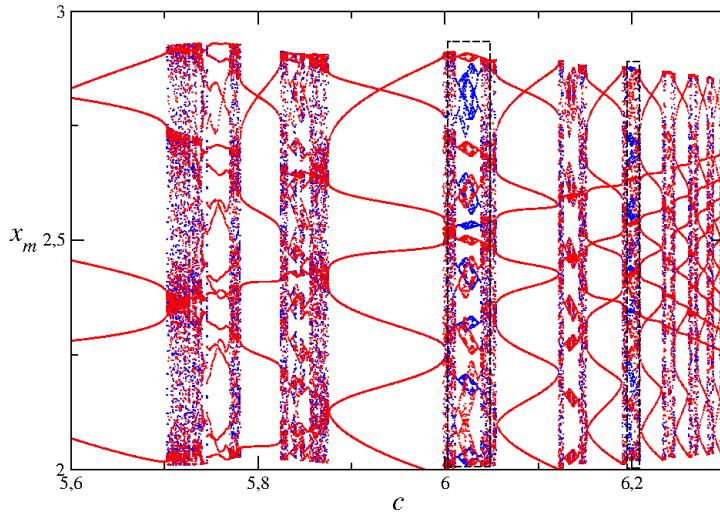


Figura 29 – Diagramas de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c crescente (azul) e decrescente (vermelho) pela variável x para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$ e d sobre a reta $d = 0,0714285714c + 1,45$.

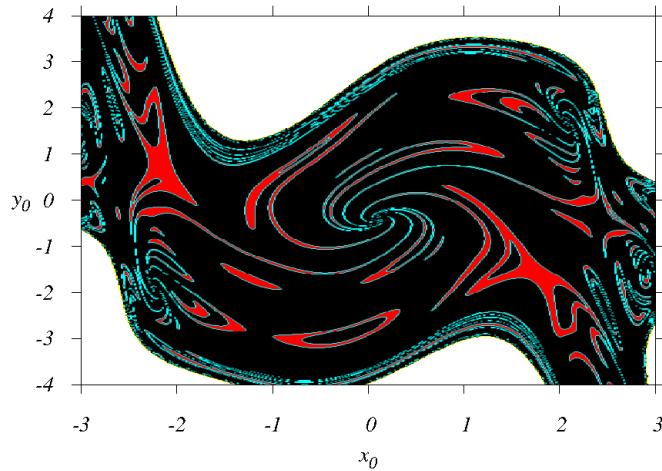


Figura 30 – Bacia de atração para o sistema (11) das condições iniciais x_0 e y_0 para $\varepsilon = 1,0$, $\beta = 0,01$, $c = 6,055$, $d = 1,756875$, $z = 0,3$ e $w = 0,4$.

Analisaremos agora o plano (c, d) para os valores $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$. Um recorte do plano é mostrado na Figura 31 para c e d entre 0 e 20. Comparando 31 com 22 vemos uma clara diferença na estrutura do plano, ou seja, na dinâmica. A região de trajetórias divergentes é maior em 31 na região esquerda superior, para valores de c entre 0 e 10, e d entre 5 e 20. Vemos também que os expoentes positivos estão concentrados principalmente na região inferior esquerda. Já na Figura 32, que mostra os segundos maiores expoentes, não observamos expoentes positivos para essa faixa de valores.

A Figura 33 mostra a ampliação da área indicada pela caixa azul na Figura 31. Encontramos nessa região o aparecimento de novas estruturas periódicas, sendo a maior destas a encontrada em $(c, d) = (3; 2,5)$. Estruturas periódicas semelhantes são também encontradas, por exemplo, para o circuito de Chua (GALLAS, 2010), o mapa de Hénon (GALLAS, 1993) e para

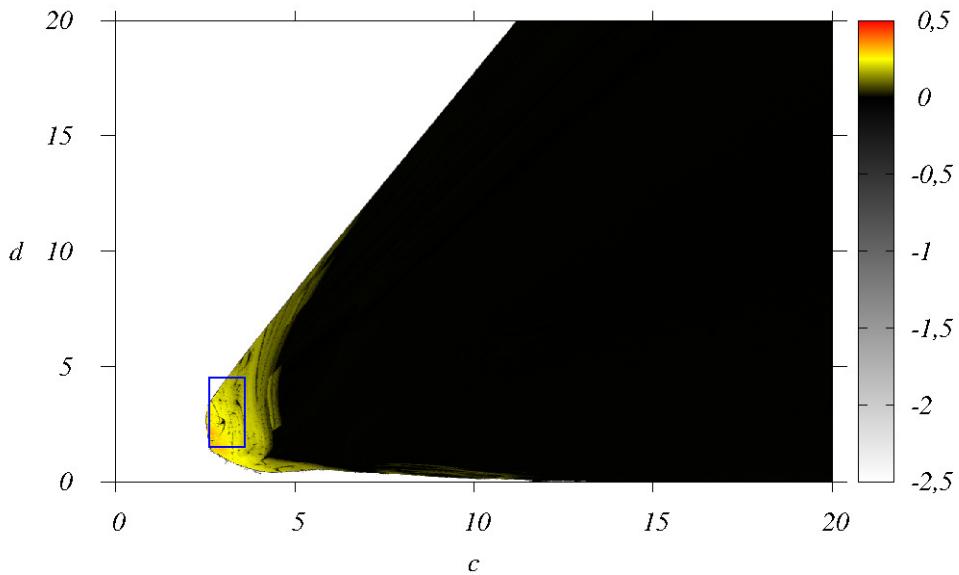


Figura 31 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$.

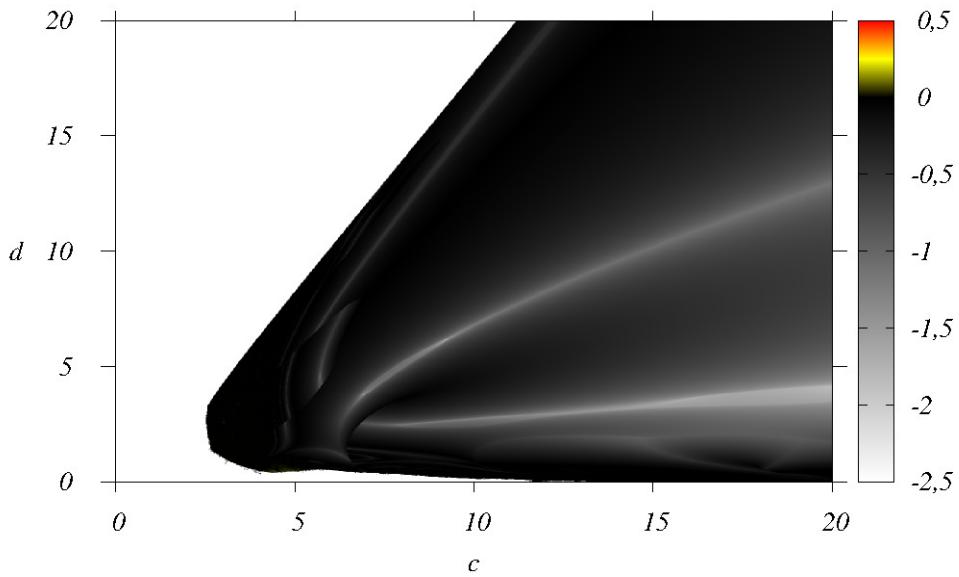


Figura 32 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$. O gradiente de cores nessa Figura representa os valores dos segundos maiores expoentes de Lyapunov.

um rotador periodicamente forçado (OLIVEIRA; ROBNIK; LEONEL, 2011).

Vemos na Figura 34 o diagrama de bifurcação da variável x pelo parâmetro c , construído sobre a linha indicada em 33, dada por $d = 18c - 58,6$. Essa reta atravessa algumas das estruturas periódicas em 33, e observamos então em 34 a sequência de períodos: $7 \rightarrow 9 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 5$, que não aparecem pertencer a nenhuma série específica.

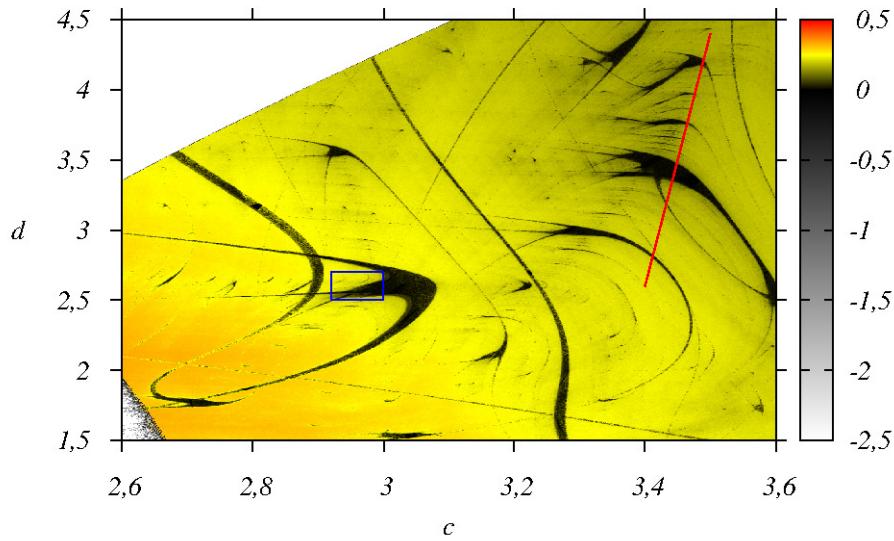


Figura 33 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada em 31.

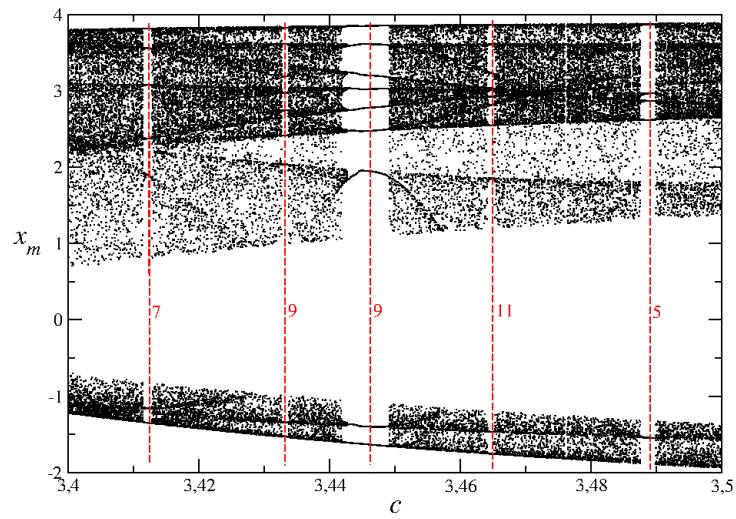


Figura 34 – Diagrama de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c pela variável x para $\varepsilon = 0,5$, $\beta = 0,1$ e d sobre a reta $d = 18c - 58,6$.

Já na Figura 35 observamos a ampliação da área destacada em 33. Percebemos então que na extremidade da estrutura periódica surgem novos conjuntos de estruturas periódicas, novamente em formato de camarão. Percebe-se ainda uma simetria entre dois conjuntos de estruturas, aparentemente espelhados, conforme indicado pelas letras A e B na Figura.

Vemos na Figura 36 um diagrama de bifurcação construído sobre a reta que atravessa o conjunto de estruturas periódicas B, reta dada por $d = 0,35c - 1,5085$, indicada na Figura 35. A fim de possibilitar a contagem do número de máximos locais, foram feitas maximizações de algumas partes da Figura 36, porém, tais maximizações não estão incluídas na dissertação. Conforme indicam as linhas pontilhadas em vermelho, assim como seus respectivos períodos ao

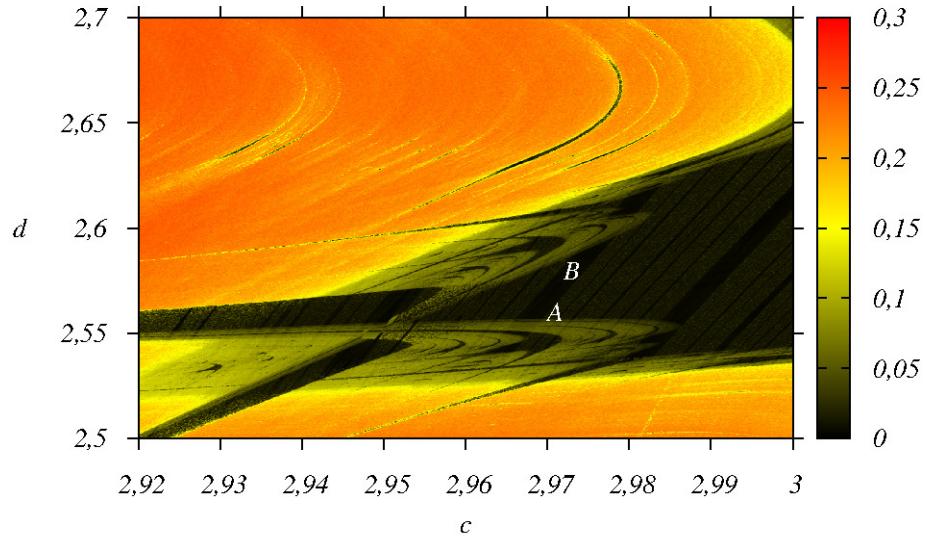


Figura 35 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada em 33.

lado, vemos a sequência de períodos pares: $2 \rightarrow 10 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 8$.

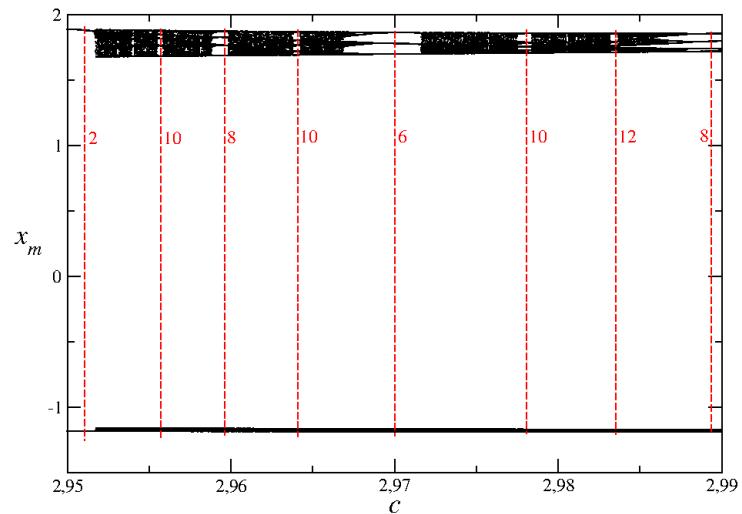


Figura 36 – Diagrama de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c pela variável x para $\varepsilon = 0,5$, $\beta = 0,1$ e d sobre a reta $d = 0,35c - 1,5085$.

Apresentado na Figura 37 está um corte da bacia de atração das condições iniciais x_0 e y_0 , para os valores dos parâmetros: $c = 2,95070$, $d = 2,55117$, $\varepsilon = 0,5$ e $\beta = 0,1$. O esquema de cores se mantém o mesmo das bacias de atração anteriores, branco representa condições iniciais que levam à trajetórias divergentes no espaço de fase, preto a atratores caóticos e ciano a atratores quase periódicos.

Por fim, analisaremos o plano (c, d) para os valores de $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$. A Figura 38 mostra o recorte do plano para c e d entre 0 e 20. Observa-se uma nova mudança na configuração

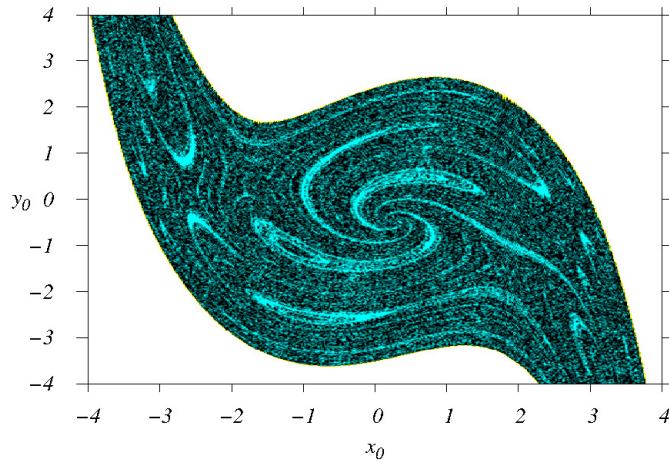


Figura 37 – Bacia de atração para o sistema (11) das condições iniciais x_0 e y_0 para $\varepsilon = 0,5$, $\beta = 0,1$ $c = 2,95070$, $d = 2,55117$, $z = 0,3$ e $w = 0,4$.

do plano, com a região de divergência se mantendo agora próxima aos eixos, e a região caótica (pontos em amarelo/vermelho) se estendendo para c entre 0 e 10, e d entre 0 e 20, nos dois quadrantes do lado esquerdo da figura.

Entretanto, existe ainda uma faixa com expoentes positivos para valores de c entre 10 e 20 e d próximos a 2 e 3. Nessa mesma região, para c entre 15 e 20 observamos na Figura 39 uma faixa com pontos amarelos. Uma vez que a Figura 39 mostra os segundos maiores expoentes, conclui-se que essa faixa de pontos representa atratores hipercaóticos.

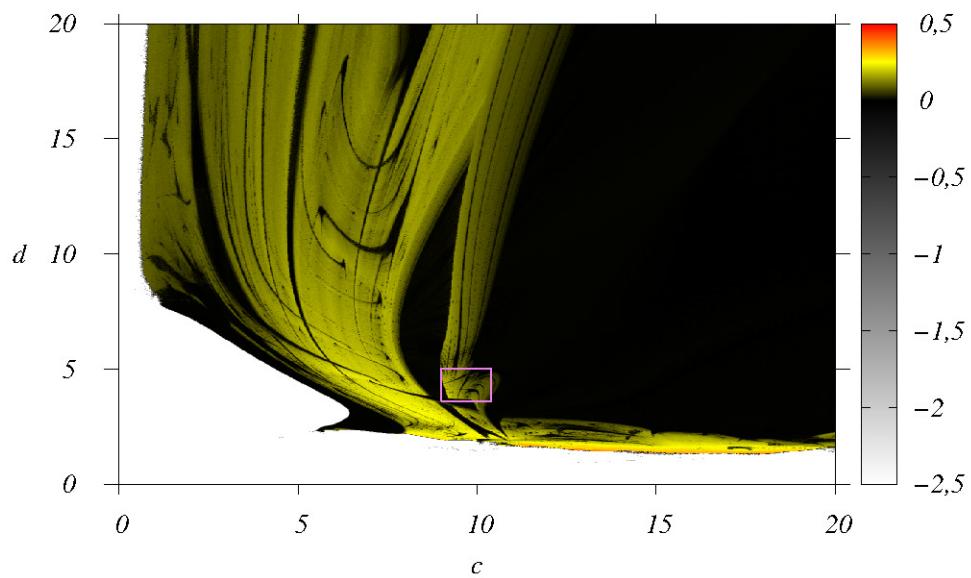


Figura 38 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$.

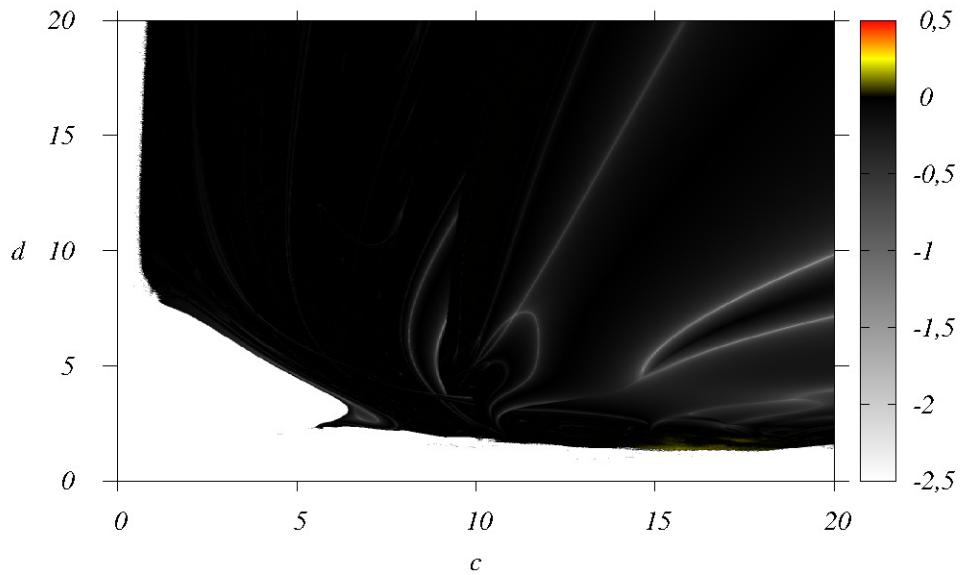


Figura 39 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$. O gradiente de cores nessa Figura representa os valores dos segundos maiores expoentes de Lyapunov.

A Figura 40 apresenta a ampliação indicada na caixa em 38. Nessa ampliação, vemos um novo conjunto de estruturas periódicas em formato de camarão. Tais estruturas surgem em meio

a uma região caótica. Observamos na região central superior destacada que existe uma interseção entre duas estruturas maiores que as outras, algo que também acontece na região mais abaixo em uma das estruturas menores, também destacada. Nessas interseções, vemos novamente o surgimento de outros conjuntos de estruturas periódicas, aparentemente espelhadas entre si, da mesma forma que ocorre na Figura 35.

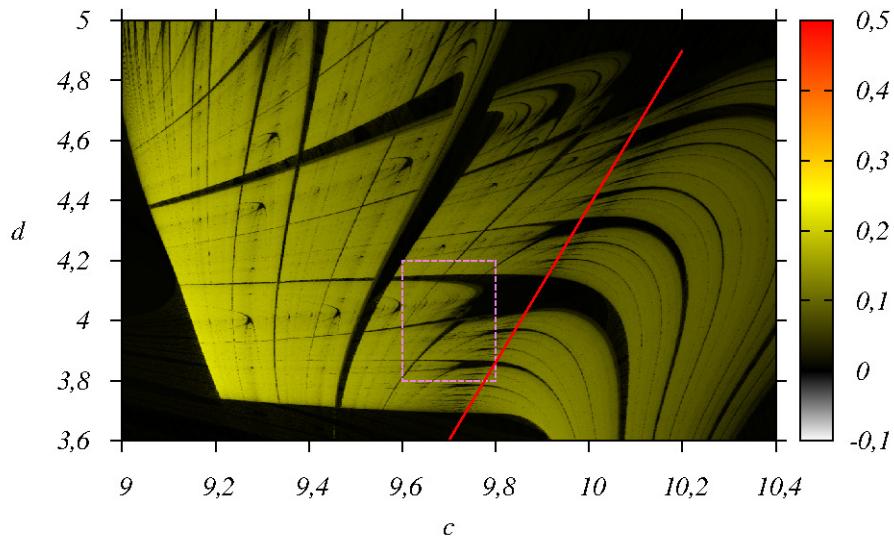


Figura 40 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada na Figura 38.

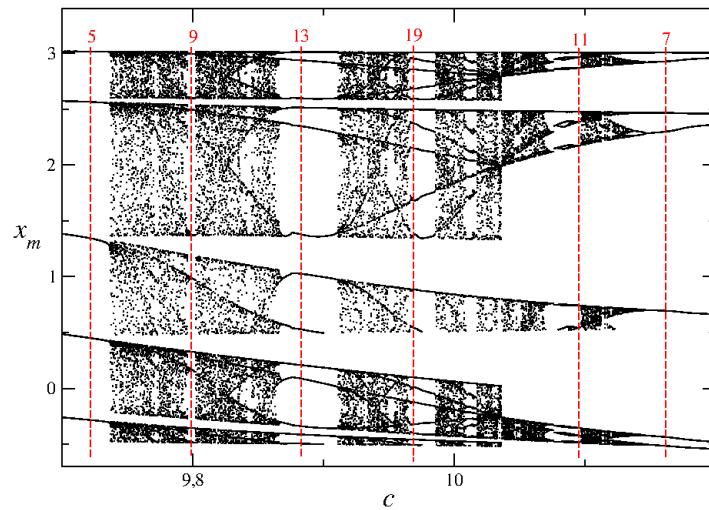


Figura 41 – Diagrama de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c pela variável x para $\varepsilon = 2,0$, $\beta = 0,1$ e d sobre a reta $d = 2,6c - 21,62$.

Vemos na Figura 41 o diagrama de bifurcação construído sobre a reta $d = 2,6c - 21,62$ indicada em 40. Conforme mostrado na figura, vemos a sequência de períodos ímpares $5 \rightarrow 9 \rightarrow 13 \rightarrow 19 \rightarrow 11 \rightarrow 7$.

A Figura 42 traz a ampliação da região de interseção entre duas estruturas periódicas, destacada na Figura 40. Com essa ampliação, vemos em mais detalhes o surgimento dos conjuntos espelhados próximos à interseção (A e B na figura), assim como o surgimento de estruturas menores entre as extremidades da maior estrutura, nas proximidades de $d = 4,05$.

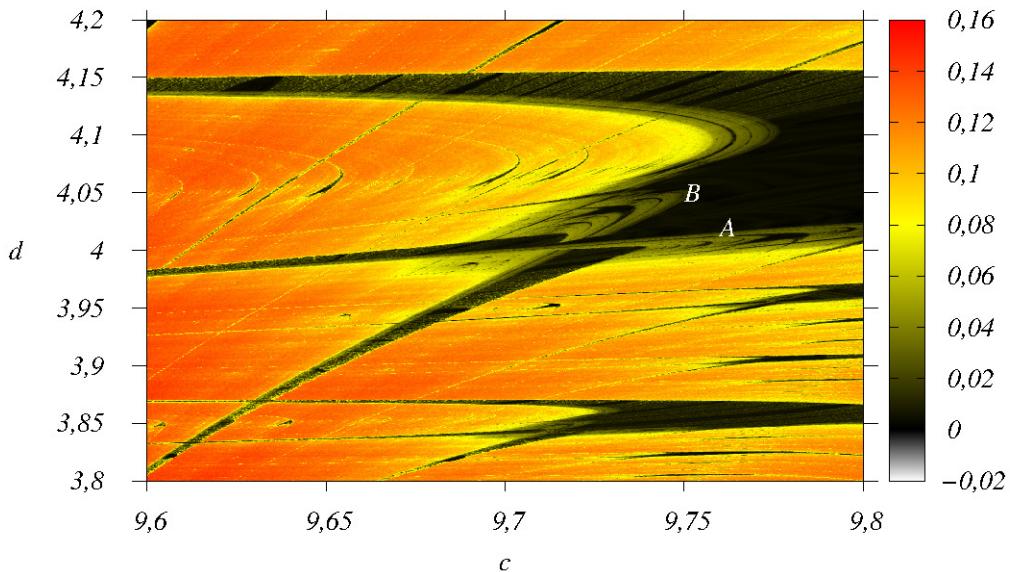


Figura 42 – Plano de parâmetros (c, d) para o sistema (11), para $\varepsilon = 2,0$ e $\beta = 0,1$. Ampliação da região indicada na Figura 40.

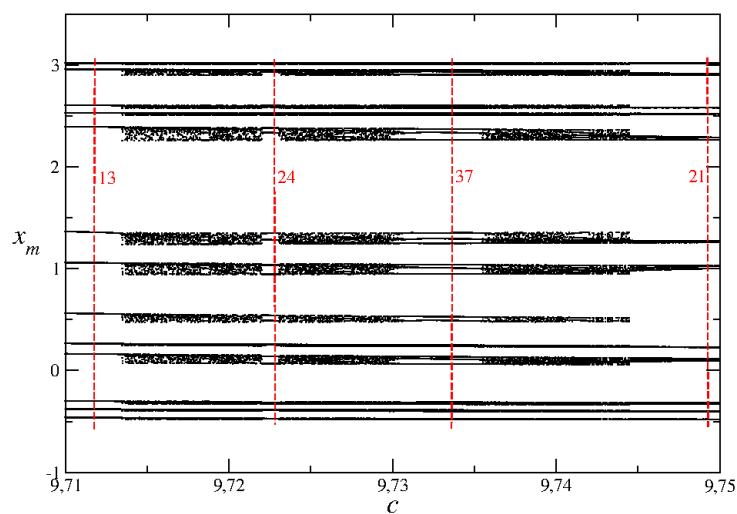


Figura 43 – Diagrama de bifurcação para o sistema (11) do parâmetro c pela variável x para $\varepsilon = 2,0$, $\beta = 0,1$ e d sobre a reta $d = 1,1c - 6,67$.

A Figura 43 traz o diagrama de bifurcação construído sobre a reta $d = 1,1c - 6,67$, que corta o conjunto B de estruturas periódicas. Novamente foram necessárias sucessivas ampliações

para a contagem dos períodos, dado que os máximos locais se encontram próximos um dos outros em algumas partes do diagrama. As linhas traçadas em vermelho indicam os períodos de quatro das estruturas em questão. Nota-se que o terceiro período é o resultado da soma dos dois períodos anteriores, entretanto, o quarto termo não aparenta seguir a mesma tendência. Vemos finalmente na Figura 44 o corte da bacia de atração para os valores de $c = 10,083$ e $d = 4,5958$. Observam-se mais uma vez condições iniciais que levam a dois diferentes tipos de atratores, periódicos e quase periódicos, em vermelho e ciano respectivamente, além de condições iniciais que levam à trajetórias divergentes no espaço de fase, representadas por pontos brancos.

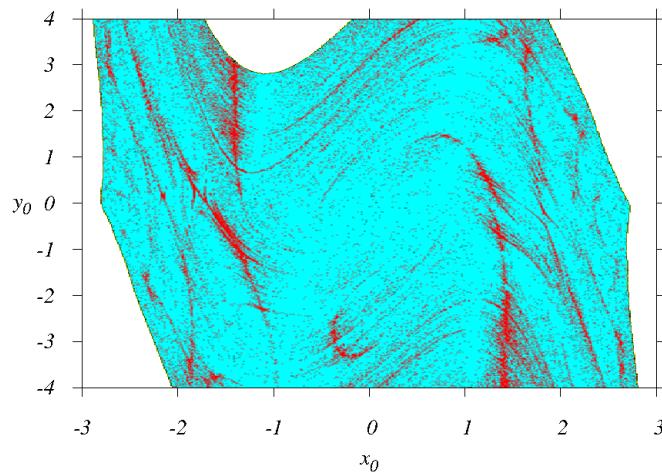


Figura 44 – Bacia de atração para o sistema (11) das condições iniciais x_0 e y_0 para $\varepsilon = 2,0$, $\beta = 0,1$ $c = 10,083$, $d = 4,5958$, $z = 0,3$ e $w = 0,4$.

5 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi o estudo da dinâmica de um oscilador de Van der Pol-Duffing em quatro dimensões proposto recentemente. Para tal, foram utilizados planos de parâmetros, diagramas de bifurcação e bacias de atração, todos eles obtidos através de simulações numéricas, com o método de integração de Runge-Kutta de quarta ordem.

Inicialmente foi estudado o plano de parâmetros (a, b) , os quais multiplicam a variável z no sistema de equações estudado. Esse plano foi investigado para três combinações diferentes dos parâmetros (ε, β) : $(1, 0; 0, 01)$, $(0, 5; 0, 1)$ e $(2, 0; 0, 1)$. Para as duas primeiras combinações, $(1, 0; 0, 01)$ e $(0, 5; 0, 1)$, vemos similaridade entre os planos, e para a terceira combinação, $(2, 0; 0, 1)$, vemos que a região de trajetórias divergentes é consideravelmente maior. Entretanto, a partir da análise dos dois maiores expoentes de Lyapunov, observamos que para as três combinações existem regiões periódicas, quase periódicas, caóticas e hipercaóticas.

Observamos ainda, através da construção de diagramas de bifurcação para valores de a crescentes e decrescentes, a existência de mais de um atrator para o mesmo valor de a , ou seja, multiestabilidade, que ocorre também para o oscilador de Van der Pol-Duffing bidimensional. Além disso, a construção de bacias de atração corrobora esse fato. Tais bacias são construídas através da análise dos dois maiores expoentes de Lyapunov, calculados para a trajetória no espaço de fase iniciada em cada uma das condições iniciais. Multiestabilidade foi encontrada para as três combinações de valores de ε e β .

Em um segundo momento, propomos o estudo de um novo plano de parâmetros (c, d) , análogo ao plano anterior. Entretanto, os parâmetros c e d multiplicam a variável dinâmica w nas equações. Esse estudo é feito a partir da mesma análise feita para o plano anterior, utilizando planos de parâmetros, diagramas de bifurcação e bacias de atração, novamente para as três combinações dos parâmetros (ε, β) : $(1, 0; 0, 01)$, $(0, 5; 0, 1)$ e $(2, 0; 0, 1)$.

Considerando $(\varepsilon, \beta) = (1, 0; 0, 01)$ vemos que a região de trajetórias divergentes se restringe próxima aos eixos c e d . A região contendo expoentes positivos ocorre para valores baixos de d . Através de uma ampliação dessa região, vemos o surgimento de um conjunto organizado de estruturas periódicas, similares às encontradas para o oscilador de Van der Pol-Duffing bidimensional e osciladores de Rössler. Utilizando de diagramas de bifurcação, vemos a ocorrência de cascatas de adição de períodos e dobramentos de períodos, nesse segundo caso para estruturas menores intermediárias. Através do mesmo método com dois diagramas de bifurcação, para valores crescentes e decrescentes de c , além da construção de uma bacia de atração, observamos a existência de multiestabilidade. Além disso, observa-se para uma pequena faixa de valores nesse plano a existência de dois expoentes de Lyapunov positivos, indicando atratores hipercaóticos.

Seguindo para a combinação $(\varepsilon, \beta) = (0, 5; 0, 1)$ observamos o crescimento da região de trajetórias divergentes. Logo, a região de expoentes positivos é mais restrita, e não se encontram trajetórias hipercaóticas para os valores de c e d considerados. Entretanto, dentro da região caótica

existem estruturas periódicas em formato de camarão, similares às encontradas para o mapa de Henón, por exemplo. Analisando a maior dessas estruturas, encontramos o surgimento de dois conjuntos de estruturas semelhantes, espelhados entre si. Utilizando diagramas de bifurcação em dois locais diferentes desse plano, não encontramos nenhuma organização para os períodos de tais estruturas, pelo menos para os valores em questão. Com o auxílio de uma bacia de atração, observamos novamente a existência de multiestabilidade, visto que tal bacia mostra a coexistência de atratores caóticos e quase periódicos para os mesmos valores de c e d .

Finalmente, estudamos o plano (c, d) para os valores de $(\varepsilon, \beta) = (2, 0; 0, 1)$. Nesse caso, a região com expoentes positivos é consideravelmente maior em relação aos dois casos anteriores. Além disso, encontram-se dois expoentes positivos para uma faixa no quadrante inferior direito do plano. Dessa vez, a presença de estruturas periódicas é mais facilmente observada, visto que existem tais estruturas em maior quantidade e tamanho. De maneira análoga à combinação de ε e β anterior, observando mais de perto uma das estruturas, vemos o surgimento de novas estruturas similares menores, divididas também em conjuntos espelhados entre si. A utilização de diagramas de bifurcação mais uma vez possibilita a contagem dos períodos de tais estruturas, porém, nenhuma sequência aparente é obedecida. Por fim, a construção de uma bacia de atração apresenta a coexistência de atratores periódicos e quase periódicos, indicando multiestabilidade.

Apresentamos portanto, para dois planos de parâmetros diferentes, a existência de atratores periódicos, quase periódicos, caóticos e hipercaóticos. Além disso, mostramos também a existência de multiestabilidade para ambos os planos. Com isso, mostra-se uma alternativa para aplicações experimentais, estas discutidas nos artigos utilizados como base, sendo que o plano proposto (c, d) apresenta estruturas periódicas bem definidas, similares às encontradas em outros sistemas, algo não encontrado no plano (a, b) . Todavia, existem ainda aspectos desse sistema a serem estudados, podemos considerar por exemplo novas combinações de (ε, β) , investigar outras regiões dos planos (a, b) e (c, d) , ou ainda a combinação dos parâmetros a, b, c , e d , ou seja, avaliar o plano (a, b) para valores de c e d diferentes de 1,0 e vice-versa.

REFERÊNCIAS

- ALDRIDGE, J. S.; CLELAND, A. N. Noise-enabled precision measurements of a duffing nanomechanical resonator. **Physical review letters**, v. 94, n. 15, p. 156403, 2005. Citado na página 20.
- ALLIGOOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems**. 1. ed. Nova York, EUA: Springer-Verlag, 1996. Citado 7 vezes nas páginas 12, 14, 15, 16, 17, 18 e 19.
- ANGELI, D.; FERRELL, J. E.; SONTAG, E. D. Detection of multistability, bifurcations, and hysteresis in a large class of biological positive-feedback systems. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 101, n. 7, p. 1822–1827, 2004. Citado na página 19.
- ARECCHI, F. T. et al. Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a q-switched gas laser. **Physical Review Letters**, v. 49, n. 17, p. 1217, 1982. Citado na página 19.
- BAPTISTA, M. Cryptography with chaos. **Physics Letters A**, v. 240, n. 1-2, p. 50–54, 1998. Citado na página 12.
- BENETTIN, G. et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 2: Numerical application. **Meccanica**, v. 15, n. 1, p. 21–30, 1980. Citado na página 22.
- BOYCE, W.; DIPRIMA, R.; MEADE, D. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 11. ed. Hoboken, EUA: John Wiley & Sons, 2017. Citado na página 14.
- CHLOUVERAKIS, K.; SPROTT, J. C. Chaotic hyperjerk systems. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 28, n. 3, p. 739–746, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 21.
- CHUDZIK, A. et al. Multistability and rare attractors in van der pol-duffing oscillator. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 21, n. 07, p. 1907–1912, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 21.
- GALLAS, J. A. C. Structure of the parameter space of the hénon map. **Physical Review Letters**, v. 70, n. 18, p. 2714, 1993. Citado na página 37.
- GALLAS, J. A. C. The structure of infinite periodic and chaotic hub cascades in phase diagrams of simple autonomous flows. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 20, n. 02, p. 197–211, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 37.
- GHORBANIAN, P. et al. A phenomenological model of eeg based on the dynamics of a stochastic duffing-van der pol oscillator network. **Biomedical Signal Processing and Control**, v. 15, p. 1–10, 2015. Citado na página 13.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical mechanics**. 3. ed. [S.l.]: Pearson, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 18.
- GUCKENHEIMER, J. Dynamics of the van der pol equation. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 27, n. 11, p. 983–989, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 20.

- GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. **Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields**. 7. ed. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 42. Citado na página 15.
- HASSELL, M.; COMINS, H.; MAY, R. Spatial structure and chaos in insect population dynamics. **Nature**, v. 353, p. 255–258, 1991. Citado na página 12.
- HAYES, S.; GREBOGI, C.; OTT, E. Communicating with chaos. **Physical review letters**, v. 70, n. 20, p. 3031, 1993. Citado na página 12.
- HIRSCH, M.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra (Pure and Applied Mathematics, Vol. 60)**. 3. ed. Cambridge, EUA: Academic Press, 2012. Citado na página 12.
- HOLMES, P. J.; RAND, D. A. Bifurcations of the forced van der pol oscillator. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 35, n. 4, p. 495–509, 1978. Citado na página 20.
- HORVA, A. J. T. et al. Periodic solutions of a combined van der pol-duffing differential equation. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 17, n. 11-12, p. 677–680, 1975. Citado na página 20.
- KAO, Y.; WANG, C. Analog study of bifurcation structures in a van der pol oscillator with a nonlinear restoring force. **Physical Review E**, v. 48, n. 4, p. 2514, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 21.
- KENNEDY, M.; CHUA, L. Van der pol and chaos. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 33, n. 10, p. 974–980, 1986. Citado na página 20.
- KENNEDY, M. P. Chaos in the colpitts oscillator. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, v. 41, n. 11, p. 771–774, 1994. Citado na página 12.
- KHAYAT, R. E. Chaos and overstability in the thermal convection of viscoelastic fluids. **Journal of non-newtonian fluid mechanics**, v. 53, p. 227–255, 1994. Citado na página 12.
- KOVACIC, I.; BRENNAN, M. **The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour**. 1. ed. Hoboken, EUA: John Wiley & Sons, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 20.
- KUIATE, G. et al. Autonomous van der pol–duffing snap oscillator: analysis, synchronization and applications to real-time image encryption. **International Journal of Dynamics and Control**, v. 6, n. 3, p. 1008–1022, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 21.
- KUZNETSOV, A. P.; STANKEVICH, N. V.; TURUKINA, L. V. Coupled van der pol–duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 238, n. 14, p. 1203–1215, 2009. Citado na página 34.
- KUZNETSOV, Y. A. **Elements of applied bifurcation theory**. 3. ed. Nova York, EUA: Springer Science & Business Media, 2013. v. 112. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- LEBARON, B. Chaos and nonlinear forecastability in economics and finance. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences**, v. 348, n. 1688, p. 397–404, 1994. Citado na página 12.

- LI, Chunguang; CHEN, Guanrong. Chaos and hyperchaos in the fractional-order rössler equations. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 341, p. 55–61, 2004. Citado na página 12.
- LI, Y.; TANG, W.; CHEN, G. Generating hyperchaos via state feedback control. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 15, n. 10, p. 3367–3375, 2005. Citado na página 12.
- LICHENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. **Regular and chaotic dynamics**. 2. ed. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 38. Citado na página 15.
- LINZ, S. J. On hyperjerky systems. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 37, n. 3, p. 741–747, 2008. Citado na página 21.
- LORENZ, Edward N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of atmospheric sciences**, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963. Citado na página 12.
- MATSUMOTO, T.; CHUA, L.; KOBAYASHI, K. Hyper chaos: Laboratory experiment and numerical confirmation. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 33, n. 11, p. 1143–1147, 1986. Citado na página 12.
- MURALI, K.; LAKSHMANAN, M. Transmission of signals by synchronization in a chaotic van der pol–duffing oscillator. **Phys. Rev. E**, v. 48, n. 3, p. 1624–1626, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 21.
- NOVAK, S.; FREHLICH, R. G. Transition to chaos in the duffing oscillator. **Physical review A**, v. 26, n. 6, p. 3660, 1982. Citado na página 20.
- OLIVEIRA, D. F. M.; ROBNIK, M.; LEONEL, E. D. Shrimp-shape domains in a dissipative kicked rotator. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 21, n. 4, p. 043122, 2011. Citado na página 38.
- OTT, E. **Chaos in Dynamical Systems**. 2. ed. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2002. Citado 7 vezes nas páginas 12, 14, 15, 16, 17, 18 e 19.
- PARLITZ, U.; LAUTERBORN, W. Superstructure in the bifurcation set of the duffing equation $\ddot{x} + d\dot{x} + x + x^3 = f \cos(\omega t)$. **Physics Letters A**, v. 107, n. 8, p. 351–355, 1985. Citado na página 20.
- PARLITZ, U.; LAUTERBORN, W. Period-doubling cascades and devil's staircases of the driven van der pol oscillator. **Physical Review A**, v. 36, n. 3, p. 1428, 1987. Citado na página 20.
- PISARCHIK, Alexander N; FEUDEL, Ulrike. Control of multistability. **Physics Reports**, v. 540, n. 4, p. 167–218, 2014. Citado na página 19.
- RAJAGOPAL, K. et al. Hyperchaos and coexisting attractors in a modified van der pol–duffing oscillator. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 29, n. 05, p. 1950067, 2019. Citado na página 21.
- REICHL, L. **The Transition to Chaos - Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations**. 2. ed. Nova York, EUA: Springer-Verlag, 2004. Citado na página 12.
- RÖSSLER, O. An equation for continuous chaos. **Physics Letters A**, v. 57, n. 5, p. 397–398, 1976. Citado na página 12.

- RÖSSLER, O. An equation for hyperchaos. **Physics Letters A**, v. 71, n. 2-3, p. 155–157, 1979. Citado na página 12.
- SCHUSTER, H.; JUST, W. **Deterministic Chaos: An Introduction**. 4. ed. Weinheim, Alemanha: Wiley VCH, 2005. Citado na página 12.
- SEBALD, G. et al. Experimental duffing oscillator for broadband piezoelectric energy harvesting. **Smart materials and structures**, v. 20, n. 10, p. 102001, 2011. Citado na página 20.
- SHIMADA, I.; NAGASHIMA, T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. **Progress of theoretical physics**, v. 61, n. 6, p. 1605–1616, 1979. Citado na página 22.
- SOMPOLINSKY, H.; CRISANTI, A.; SOMMERS, H. Chaos in random neural networks. **Physical Review Letters**, v. 61, n. 3, p. 259–262, 1988. Citado na página 12.
- STROGATZ, S. **Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering**. 2. ed. Boulder, EUA: Westview Press, 2014. Citado 6 vezes nas páginas 12, 14, 15, 16, 17 e 19.
- UEDA, Y.; AKAMATSU, N. Chaotically transitional phenomena in the forced negative-resistance oscillator. **IEEE Transactions on circuits and Systems**, v. 28, n. 3, p. 217–224, 1981. Citado na página 20.
- VAIDYANATHAN, S. et al. Analysis, adaptive control and synchronization of a novel 4-d hyperchaotic hyperjerk system and its spice implementation. **Archives of Control Sciences**, v. 25, n. 1, 2015. Citado na página 21.
- WIGGERS, V.; RECH, P. C. Chaos, periodicity, and quasiperiodicity in a radio-physical oscillator. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 27, n. 07, p. 1730023, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 8, 16 e 17.
- WIGGERS, V.; RECH, P. C. Multistability and organization of periodicity in a van der pol–duffing oscillator. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 103, p. 632–637, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 19, 21, 26 e 33.
- WIGGINS, S. **Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos**. 2. ed. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003. v. 2. Citado 3 vezes nas páginas 15, 18 e 19.
- WINFUL, H.; RAHMAN, L. Synchronized chaos and spatiotemporal chaos in arrays of coupled lasers. **Physical Review Letters**, v. 65, n. 13, p. 1575–1578, 1990. Citado na página 12.
- WOLF, A. et al. Determining lyapunov exponents from a time series. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985. Citado na página 22.
- XU, J.; CHUNG, K. W. Effects of time delayed position feedback on a van der pol–duffing oscillator. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 180, n. 1-2, p. 17–39, 2003. Citado na página 21.
- ZIHONG, Z.; SHAOPU, Y. Application of van der pol–duffing oscillator in weak signal detection. **Computers & Electrical Engineering**, v. 41, p. 1–8, 2015. Citado na página 13.