

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO – FÍSICA

LUANA SANTANA

FOTOPRODUÇÃO DE MÉSONS VETORIAIS NO FORMALISMO DA
FATORIZAÇÃO k_T

JOINVILLE

2024

LUANA SANTANA

**FOTOPRODUÇÃO DE MÉSONS VETORIAIS NO FORMALISMO DA
FATORIZAÇÃO k_T**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Bruno Duarte da Silva Moreira
Coorientador: Victor Paulo Barros Gonçalves

JOINVILLE

2024

Santana, Luana

Fotoprodução de Mésons Vetoriais no Formalismo da
Fatorização k_T / Luana Santana. - Joinville, 2024.
124 p. : il. ; 30 cm.

Orientador: Bruno Duarte da Silva Moreira.

Coorientador: Victor Paulo Barros Gonçalves.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado
de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2024.

1. Cromodinâmica Quântica. 2. Saturação. 3. Colisões
Ultraperiféricas. 4. Fatorização k_T . 5. Mésons Vetoriais.
I. da Silva Moreira, Bruno Duarte. II. Barros
Gonçalves, Victor Paulo. III. Universidade do Estado
de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,
Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Título.

LUANA SANTANA

**FOTOPRODUÇÃO DE MÉSONS VETORIAIS NO FORMALISMO DA
FATORIZAÇÃO k_T**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Bruno Duarte da Silva Moreira

Coorientador: Victor Paulo Barros Gonçalves

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Bruno Duarte da Silva Moreira
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membros:

Prof. Dr. Bruno Duarte da Silva Moreira
Universidade do Estado de Santa Catarina

Prof. Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima
Universidade do Estado de Santa Catarina

Profa. Dr. Maria Simone Kugeratski Souza
Universidade Federal de Santa Catarina

Joinville, 29 de maio de 2024

Esse trabalho é dedicado à minha família.

AGRADECIMENTOS

À minha família, que sempre me apoiou para cursar o que for que eu desejasse. Minha mãe, Neusa, meu pai, Devanir, e minha irmã, Nicole, agradeço por me ouvirem com frustrações e alegrias, pois um ambiente familiar acolhedor contribuiu para minha formação como pessoa.

Agradeço ao meu amor, Daniel, por seu apoio e incentivo. Nossas vidas estão entrelaçadas desde 2018, então você é a pessoa que mais entende tudo que eu passei nos anos de graduação e mestrado, obrigada pela parceria.

Quero dedicar um espaço para agradecer a bons amigos que fiz na graduação, como Bianca, Caio, Eloir, Hanna e Julio, que com certeza contribuíram para eu chegar nessa etapa. Além disso, deixo meus agradecimentos aos colegas de mestrado, que compartilharam disciplinas, conhecimento e momentos de descontração.

Também, agradeço ao meu orientador Bruno, por sua sempre compreensão, ajuda e ensinamentos, juntamente do meu coorientador Victor e colaborador André, pelos trabalhos realizados e conhecimentos compartilhados. A Física se tornou um pouco mais fácil com vocês.

Por fim, agradeço aos professores da UDESC que passaram pela minha formação tanto na graduação quanto no mestrado, à secretaria da Pós pela informações e sempre disponibilidade e à DS/CAPES e UDESC/PROMOP pelas bolsas concedidas.

“Living is worthwhile if one can contribute in
some small way to this endless chain of
progress.” (Dirac, 1933)

RESUMO

Com o advento de colisores de partículas, testar a Cromodinâmica Quântica (QCD) em condições de altas energias se tornou possível. O Anel Acelerador Elétron-Hádron (HERA) permitiu que a física do Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS) fosse analisada com as colisões *ep*. Isso forneceu informações relevantes sobre a estrutura do próton. Além disso, significantes avanços teóricos e dados experimentais mostram que, em altas energias, o próton é visto como um meio de alta densidade gluônica, devido a processos de emissão de glúons. Com isso, em certos regimes, espera-se que efeitos de recombinação de glúons, previstos por equações de evolução partônica não lineares, freiem o crescimento da seção de choque com a energia. Esse fenômeno é chamado de saturação partônica. Para esse estudo, estamos interessados na produção exclusiva de mésons vetoriais em colisões ultraperiféricas no formalismo da fatorização k_T , que foi desenvolvido em termos do momento transversal dos glúons. Nesse contexto, os principais elementos presentes na amplitude de espalhamento são as Distribuições de Glúons não Integradas (UGDs) e funções de onda do méson. Dessa forma, calculamos seções de choque fóton-próton, fóton-chumbo e fóton-oxigênio e distribuições de rapidez hádron-hádron, obtidas com a aproximação de fótons equivalentes. Mostramos que diferentes combinações de UGDs e funções de onda produzem consideráveis intervalos de incerteza nos observáveis, demonstrando a sensibilidade do formalismo nessas quantidades. Além disso, comparamos nossos resultados com dados disponíveis do HERA e do Grande Colisor de Hádrons (LHC) e obtivemos razoável concordância. Baseado nestes resultados, fazemos previsões para futuras colisões envolvendo próton, chumbo e oxigênio no LHC e para as energias previstas para o Futuro Colisor Circular (FCC).

Palavras-chave: Cromodinâmica Quântica. Saturação. Colisões Ultraperiféricas. Fatorização k_T . Mésons Vetoriais.

ABSTRACT

With the advent of particle colliders, testing Quantum Chromodynamics (QCD) under high energy conditions has become possible. The Hadron-Electron Ring Accelerator (HERA) collider enabled the physics of Deep Inelastic Scattering (DIS) to be analyzed with ep collisions. It provided relevant information about the proton structure. Furthermore, significant theoretical advances and experimental data show that, at high energies, the proton is seen as a medium with high gluonic density, due to gluon emission processes. Consequently, in certain regimes, one expects that recombination gluons effects, as predicted by nonlinear partonic evolution equations, slow down the cross section growth with energy. This phenomenon is called partonic saturation. For this study, we are interested in exclusive production of vector mesons in ultra-peripheral collisions in the k_T factorization formalism, which was developed in terms of the transverse momentum of the gluons. In this context, the key elements present in the scattering amplitude are the Unintegrated Gluon Distributions (UGDs) and meson wave functions. In this way, we calculate the photon-proton, photon-lead and photon-oxygen cross sections and the rapidity distributions hadron-hadron, obtained from the equivalent photon approximation. We show that different combinations of UGDs and wave functions present considerable uncertainty ranges in the observables, demonstrating the sensitivity of the formalism to these quantities. Furthermore, we compare our results with available data from HERA and the Large Hadron Collider (LHC), obtaining reasonable agreement. Based on these findings, we predict outcomes for future collisions involving proton, lead and oxygen at LHC and for the energies anticipated for the Future Circular Collider (FCC).

Keywords: Quantum Chromodynamics. Saturation. Ultra-peripheral Collisions. k_T Factorization. Vector Mesons.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Espalhamento elétron-múon.	21
Figura 2 – Constante de acoplamento da QCD [16].	24
Figura 3 – Espalhamento profundamente inelástico, em que um lépton interage com um hádron por meio de troca de um bóson, com o hádron quebrando no final produzindo um estado X não medido, em (a), e o mesmo diagrama visto como o bóson interagindo com cada párton individualmente no hádron, em (b).	25
Figura 4 – Espalhamento lépton-quark.	27
Figura 5 – Função de estrutura F_2 em termos da virtualidade Q^2 [23].	31
Figura 6 – Diagramas que contribuem para o DIS em ordem α_s [15].	32
Figura 7 – (a) Distribuições de glúons e quarks de valência e mar no H1 e ZEUS em NLO para $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ [24] e (b) distribuição de glúons em ajuste no H1 para $Q^2 = 5 \text{ GeV}^2$, $Q^2 = 20 \text{ GeV}^2$ e $Q^2 = 200 \text{ GeV}^2$ [25].	35
Figura 8 – DIS em pequeno x no formalismo dos fatores de impacto. Adaptado da Ref. [19].	42
Figura 9 – DIS em pequeno x : o fóton virtual flutua em um par $q\bar{q}$ a grandes distâncias do alvo. Adaptado da Ref. [19].	44
Figura 10 – Seção de choque γ^*p em função de Q^2 , em que as linhas sólidas consideram quarks leves de massa 140 MeV e linhas pontilhadas quarks de massa zero [39]. A linha cruzando as curvas indica a posição do ponto crítico.	48
Figura 11 – Em (a), emissão de glúons pelo par $q\bar{q}$, visto em (b) como a criação de um dipolo $q\bar{q}$ no limite de grande N_c [31].	49
Figura 12 – Representação dos termos da equação BK, em que x , y e z indicam posições. Adaptado da Ref. [32].	50
Figura 13 – Regiões de aplicabilidade das equações de evolução no plano transversal. Adaptado da Ref. [43].	52
Figura 14 – Scaling geométrico na seção de choque total γ^*p no DIS [45], à esquerda, e razão $\sigma_{diff}/\sigma_{tot}$ independente da energia para diferentes valores de virtualidade [46], à direita.	53
Figura 15 – Produção de mésons vetoriais no (a) VDM e (b) na troca de dois glúons [19].	54
Figura 16 – Seção de choque em função da energia de centro de massa γp para vários mésons [19].	56
Figura 17 – Diagrama de Feynman do espalhamento $\gamma + p \rightarrow V + p$ no formalismo de dipolo.	57
Figura 18 – Diagrama de Feynman do espalhamento $\gamma + p \rightarrow V + p$ na fatorização k_T	59

Figura 19 – Funções de onda gaussiana e coulombiana para o Υ , à esquerda e J/Ψ , à direita.	62
Figura 20 – Comportamento das funções de onda gaussiana e coulombiana utilizadas para os mésons (a) Υ e (b) J/Ψ	63
Figura 21 – Espaço de fase da distribuição de glúons no momento transversal para a BFKL [32].	64
Figura 22 – GBW (linhas tracejadas) e GBW NEW (linhas contínuas) para diferentes valores de x . Quanto menor o valor de x , maior a distribuição de glúons.	65
Figura 23 – rcBK para diferentes valores de x	66
Figura 24 – aBK para diferentes valores de x	67
Figura 25 – Colisão ultraperiférica, caracterizada por um parâmetro de impacto b maior que a soma dos raios das partículas.	69
Figura 26 – Campo eletromagnético de uma partícula em repouso. Conforme a velocidade se aproxima da velocidade da luz, a partícula sofre contração de Lorentz, e o campo se torna transversal à direção de movimento da carga, podendo ser visto como uma nuvem de fótons virtuais $n(\omega)$. . .	72
Figura 27 – Fluxo dependente da distância entre núcleos.	75
Figura 28 – Fluxo de fótons para os casos em que o próton ou o núcleo são as fontes de fótons. A curva contínua utiliza o fluxo com fator de forma de dipolo, enquanto que as outras consideram o fator de forma pontual.	76
Figura 29 – Seção de choque γp para produção de Υ usando as funções de onda gaussiana e coulombiana para comparação do GBW e GBW NEW. Dados das colaborações LHCb [62] e CMS [63]	79
Figura 30 – Comparação entre as distribuições de rapidez com as UGDs GBW e GBW NEW para as funções de onda (a) gaussiana e (b) coulombiana.	79
Figura 31 – Seção de choque γp para o méson J/Ψ no formalismo de dipolo (funções de onda GLC e BG) e fatorização k_T (funções de onda gaussiana e coulombiana) usando o GBW NEW. Dados da colaboração LHCb [64].	80
Figura 32 – Seção de choque total de fotoprodução dos mésons (a) J/Ψ e (b) Υ em colisões γp com a fatorização k_T . Dados das colaborações LHCb [62, 64], ALICE [65] e CMS [63].	81
Figura 33 – Distribuições de rapidez para produção de J/Ψ em (a) e (b) e Υ em (c) e (d) em colisões pp para $\sqrt{s} = 7$ TeV e 13 TeV. Dados da colaboração LHCb [62, 64, 70].	82
Figura 34 – Distribuições de rapidez para (a) J/Ψ e (b) Υ em pp para $\sqrt{s} = 14$ TeV.	83
Figura 35 – Distribuições de rapidez para a produção dos mésons (a) J/Ψ e (b) Υ em colisões pp para $\sqrt{s} = 100$ TeV, energias que serão acessadas pelo FFC.	84

Figura 36 – Distribuições de rapidez em colisões $p\text{Pb}$ para produção de J/Ψ , em (a) e (b) e Υ , em (c) e (d) para $\sqrt{s} = 5.02$ TeV e 8.16 TeV. Dados das colaborações CMS [63] e ALICE [65, 74, 75].	87
Figura 37 – Distribuições de rapidez em colisões $p\text{Pb}$ para produção de J/Ψ , em (a) e Υ , em (b) para $\sqrt{s} = 8.8$ TeV.	88
Figura 38 – Distribuições de rapidez em colisões $p\text{Pb}$ para produção de J/Ψ , em (a) e Υ , em (b) para $\sqrt{s} = 63$ TeV.	88
Figura 39 – Seção de choque γPb produzindo J/Ψ com a fatorização k_T + mudança na escala de saturação, em (a) e formalismo de dipolo + Glauber-Gribov, em (b). Dados da colaboração ALICE [81].	90
Figura 40 – Seção de choque γO produzindo J/Ψ com a fatorização k_T	91
Figura 41 – Distribuições de rapidez em colisão PbPb produzindo J/Ψ com a fatorização k_T , à esquerda, e formalismo de dipolo, à direita para $\sqrt{s} = 2.76$ TeV e 5.02 TeV. Dados das colaborações CMS [82], ALICE [83–85] e LHCb [86, 87].	92
Figura 42 – Distribuições de rapidez em colisão PbPb produzindo J/Ψ com a fatorização k_T para o LHC ($\sqrt{s} = 5.5$ TeV) e FCC ($\sqrt{s} = 39$ TeV).	92
Figura 43 – Distribuições de rapidez em colisões $p\text{O}$ para $\sqrt{s} = 9.1$ TeV e OO para $\sqrt{s} = 5.52$ TeV produzindo J/Ψ com a fatorização k_T	93
Figura 44 – Distribuição de rapidez em colisão OO produzindo J/Ψ com (a) fatorização k_T e (b) fatorização colinear [89], em que a curva pontilhada (verde) é a contribuição imaginária da amplitude de espalhamento, tracejado (laranja) a contribuição real e a curva contínua (azul) a soma das duas.	95
Figura 45 – Representação gráfica das equações de unitariedade. No lado esquerdo, a linha tracejada caracteriza a descontinuidade na amplitude, enquanto que no lado direito as linhas no meio representam todos os processos intermediários possíveis [19].	107
Figura 46 – Representação gráfica do teorema óptico [19].	107
Figura 47 – Diagrama contribuindo para o DIS em pequeno x [19].	110
Figura 48 – Diagramas para o espalhamento $\gamma^*g \rightarrow q\bar{q}$ no (a) canal t e (b) canal u [19].	112
Figura 49 – Dois dos quatro diagramas que contribuem para $\mathcal{A}^{\mu\nu\alpha\beta}$. Os outros dois diagramas são obtidos invertendo as linhas de férmions [19].	113
Figura 50 – Interação fóton-próton.	119

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Regras de Feynman. Adaptado da Ref. [10].	22
Tabela 2	– Parâmetros da funções de onda Gaus-LC e boosted Gaussian [15, 48]. .	58
Tabela 3	– Valores das constantes presentes nas funções de onda em unidades de GeV^{-2}	62
Tabela 4	– Parâmetros presentes no GBW e GBW NEW.	65
Tabela 5	– Parâmetros do modelo aBK [6].	67
Tabela 6	– Parâmetros e limites cinemáticos para processos fóton-hádron hádron-hádron no RHIC, LHC [2] e FCC [53] considerando colisões ultraperiféricas. .	71
Tabela 7	– Seção de choque total em nb e taxa de eventos em colisões pp com $\sqrt{s_{pp}} = 7$ TeV para J/Ψ e Υ . A luminosidade usada foi de 6.1 fb^{-1} por ano, referente a 2011 [71].	84
Tabela 8	– Seção de choque total em nb e taxa de eventos em colisões pp com $\sqrt{s_{pp}} = 13$ TeV para J/Ψ e Υ . A luminosidade usada foi de 67.9 fb^{-1} por ano, referente a 2018 [71].	85
Tabela 9	– Seção de choque total em nb e taxa de eventos em colisões pp com $\sqrt{s_{pp}} = 14$ TeV para J/Ψ e Υ . A luminosidade usada foi de 3000 fb^{-1} por ano, esperada para o HL-LHC [73].	85
Tabela 10	– Seção de choque total em nb e taxa de eventos em colisões pp com $\sqrt{s_{pp}} = 100$ TeV para J/Ψ e Υ . A luminosidade usada foi de 30000 fb^{-1} por dia, esperada para o FCC [73].	86
Tabela 11	– Seções de choque totais em μb com a fatorização k_T nos intervalos do ALICE e LHCb. A rcBK não foi calculada para o intervalo do LHCb por não termos a curva completa no intervalo de rapidez.	94

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

aBK	<i>Analytical BK</i>
ALICE	<i>A Large Ion Collider Experiment</i>
BFKL	Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov
BG	<i>Boosted Gaussian</i>
BK	Balitsky-Kovchegov
CGC	<i>Color Glass Condensate</i>
CMS	<i>Compact Muon Solenoid</i>
DGLAP	Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi
DIS	<i>Deep Inelastic Scattering</i>
DLA	<i>Double leading log approximation</i>
FCC	<i>Future Circular Collider</i>
GBW	Golec-Biernat-Wüsthoff
GLC	Gaus-LC
HERA	<i>Hadron-Electron Ring Accelerator</i>
JIMWLK	Jalilian-Marian-Iancu-McLerran-Weigert-Leonidov-Kovner
LHC	<i>Large Hadron Collider</i>
LHCb	<i>Large Hadron Collider beauty</i>
LLA	<i>Leading $\ln Q^2$ approximation</i>
LL _x A	<i>Leading $\ln 1/x$ approximation</i>
LO	<i>Leading order</i>
PDF	<i>Parton Distribution Function</i>
QCD	<i>Quantum Chromodynamics</i>
QED	<i>Quantum Electrodynamics</i>
QFT	<i>Quantum Field Theory</i>
rcBK	<i>Running coupling BK</i>
RHIC	<i>Relativistic Heavy Ion Collider</i>
UGD	<i>Unintegrated Gluon Distribution</i>
UPC	<i>Ultra-peripheral collision</i>
VDM	<i>Vector Dominance Model</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	CROMODINÂMICA QUÂNTICA	18
2.1	LAGRANGIANA DA QCD	19
2.2	REGRAS DE FEYNMAN	20
2.3	CONSTANTE DE ACOPLAMENTO E LIBERDADE ASSINTÓTICA	22
2.4	ESPALHAMENTO PROFUNDAMENTE INELÁSTICO	25
2.4.1	Espalhamento elástico lépton-quark	27
2.4.2	Espalhamento inelástico lépton-hádron	28
2.5	VIOLAÇÃO DO SCALING DE BJORKEN E EQUAÇÕES DGLAP	31
3	FÍSICA DE PEQUENO x	35
3.1	SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DGLAP EM ALTAS ENERGIAS	36
3.2	EQUAÇÃO BFKL	38
3.3	LIMITE DE FROISSART-MARTIN E A EQUAÇÃO GLR	39
3.4	FORMALISMO DA FATORIZAÇÃO k_T NO DIS	41
3.5	FORMALISMO DE DIPOLO NO DIS	43
3.6	EQUAÇÃO BK	48
3.7	SATURAÇÃO PARTÔNICA	51
4	PRODUÇÃO EXCLUSIVA DE MÉSONS VETORIAIS	54
4.1	FORMALISMO DE DIPOLOS DE COR	56
4.2	FATORIZAÇÃO k_T	58
4.3	FUNÇÕES DE ONDA	61
4.3.1	Parâmetros das funções de onda	62
4.4	MODELOS DE DIPOLO E DISTRIBUIÇÕES DE GLÚONS NÃO INTEGRADAS	63
4.4.1	Modelo GBW	64
4.4.2	Modelo rcBK	66
4.4.3	Modelo aBK	66
5	FOTOPRODUÇÃO DE PARTÍCULAS EM COLISÕES ULTRAPERIFÉRICAS	69
5.1	APROXIMAÇÃO DE FÓTONS EQUIVALENTES	71
5.2	FATORES DE FORMA	73
5.2.1	Fluxo de fótons dependente da distância entre núcleos	74
5.2.2	Fluxo de fótons em termos da energia dos fótons	75

6	PRODUÇÃO DE MÉSONS VETORIAIS EM INTERAÇÕES FÓTON-PRÓTON E FÓTON-NÚCLEO	78
6.1	SEÇÕES DE CHOQUE FÓTON-PRÓTON	78
6.1.1	Comparação entre GBW e GBW NEW	78
6.1.2	Comparação entre fatorização k_T e formalismo de dipolo	80
6.2	SEÇÕES DE CHOQUE γp PARA PRODUÇÃO DE J/Ψ E Υ	81
6.3	DISTRIBUIÇÕES DE RAPIDEZ EM COLISÕES pp	82
6.4	DISTRIBUIÇÕES DE RAPIDEZ EM COLISÕES pPb	86
6.5	SEÇÕES DE CHOQUE FÓTON-NÚCLEO	88
6.6	DISTRIBUIÇÕES DE RAPIDEZ PARA COLISÕES $PbPb$, pO E OO	91
7	CONCLUSÕES	96
	REFERÊNCIAS	98
	APÊNDICE A – TEOREMA ÓPTICO	105
	APÊNDICE B – RESSOMA NA QCD	108
	APÊNDICE C – FATORIZAÇÃO k_T NO DIS	110
	APÊNDICE D – CONVENÇÕES MATEMÁTICAS	114
D.1	PARAMETRIZAÇÃO DE SUDAKOV	114
D.2	VARIÁVEIS NO CONE DE LUZ	114
	APÊNDICE E – RELAÇÕES IMPORTANTES	116
E.1	RELAÇÃO ENTRE MOMENTO TRANSVERSO E RAIOS TRANS- VERSO DO DIPOLO	116
E.2	DISTRIBUIÇÃO DE GLÚONS NÃO INTEGRADA A PARTIR DA SEÇÃO DE CHOQUE DE DIPOLO	118
	APÊNDICE F – DEDUÇÃO DA APROXIMAÇÃO DE FÓTONS EQUIVALENTES	119

1 INTRODUÇÃO

O estudo da estrutura hadrônica em altas energias é de grande interesse para a física de partículas, com colisores como o HERA e o LHC motivando o estudo. Uma das maneiras mais efetivas de estudar a estrutura do próton, por exemplo, é por meio do Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS), em uma colisão ep . Nesse contexto, o elétron emite fótons virtuais que interagem com o próton, podendo quebrá-lo, fornecendo informações sobre sua estrutura. O estudo do DIS foi feito no colisor HERA, com uma energia de centro de massa fóton-próton W máxima da ordem de 300 GeV, mostrando que a densidade de glúons dentro do próton cresce com a energia [1]. Esse aumento de glúons, na teoria de campos efetiva do Condensado de Vidro de Cor (CGC), tem um limite físico que prevê equações não lineares de evolução partônica que freiam o crescimento da seção de choque da interação, fenômeno que chamamos de saturação.

Uma maneira de estudar interações γp no LHC, que apenas colide hádrons, é por meio das Colisões Ultraperiféricas (UPCs), em que prótons/núcleos emitem fluxos de fótons quase reais, em colisões de parâmetro de impacto maior que a soma dos seus raios. Nas UPCs, temos energias $W \sim 900 - 8000$ GeV [2], muito maiores que no HERA, o que torna interessante o estudo dessa física no LHC. Particularmente, o estudo da fotoprodução exclusiva de mésons vetoriais permite que estudemos a física de saturação de forma vantajosa, já que nessas colisões a seção de choque é proporcional ao quadrado da densidade de glúons.

Sabendo disso, vamos estudar um espalhamento em que um fóton flutua em um par quark-antiquark, troca Pomerons com o próton e, por fim, forma um méson vetorial representado pela sua função de onda. Conhecendo a amplitude de espalhamento do processo, podemos calcular os observáveis físicos de interesse, como seções de choque e distribuições de rapidez. A teoria empregada neste trabalho para obter as seções de choque é o formalismo da fatorização k_T [3], que tem como ingredientes relevantes as Distribuições de Glúons não Integradas (UGDs), para as quais utilizamos a parametrização fenomenológica GBW (devida a Golec-Biernat e Wüsthoff) [4] e os modelos de dipolo vindos da equação BK (devida a Balitsky e Kovchegov) [5,6]; e a função de onda do méson vetorial produzido. Além disso, utilizaremos a aproximação de fótons equivalentes [7–9] para obter as distribuições de rapidez e calcular seções de choque integradas.

Dessa forma, no Capítulo 2 é feita uma descrição da Cromodinâmica Quântica em termos da sua lagrangiana, das regras de Feynman e da constante de acoplamento da teoria. Ainda, colisões entre lépton-hádron, descritas pelo DIS, são discutidas para obtenção das funções de estrutura e o *scaling* de Bjorken. Uma análise mais profunda do DIS nos mostra a existência de quarks e glúons, que viola o *scaling* de Bjorken e nos leva as equações de evolução DGLAP (devida a Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli e Parisi).

No Capítulo 3, analisamos as equações DGLAP e BFKL (devida a Balitsky, Fadin,

Kuraev e Lipatov) no limite de altas energias, que equivale a pequeno x , e mostramos que elas violam o limite de crescimento da seção de choque e a unitariedade da matriz de espalhamento S . Com isso, discutimos que a equação GLR (devida a Gribov, Levin e Ryskin) propõe um processo de recombinação de glúons caracterizado por um termo não linear na equação, prevendo a escala de saturação. Ainda nesse capítulo, os formalismos de dipolo e fatorização k_T , no contexto do DIS, são apresentados.

O Capítulo 4 traz novamente os formalismos de dipolo e fatorização k_T , agora para descrever a produção de mésons em interações γp . Esse tipo de física é relevante pois colisores como o LHC fazem muitas medições desse tipo. Além disso, são descritas as funções de onda utilizadas e os modelos de dipolos empregados, transferidos para a representação no espaço de momentos na forma de UGDs.

A aproximação de fótons equivalentes é abordada no Capítulo 5, sendo um ferramental robusto muito utilizado na literatura para obter distribuições de rapidez por meio das seções de choque e fluxo de fótons que, em UPCs, dependem apenas das energias dos fótons. Mostramos também as principais colisões previstas para o LHC e o futuro colisor de energias ainda mais altas FCC, comparado com o Colisor Relativístico de Íons Pesados (RHIC), que nos motivam o cálculo desses observáveis fenomenologicamente.

No Capítulo 6, apresentamos nossos resultados de seção de choque γp , obtidos na fatorização k_T , com as distribuições de rapidez pp e pPb nas energias do LHC e FCC. As interações nucleares γPb e γO também são abordadas, com comparações de resultados obtidos no formalismo de dipolo e fatorização k_T em abordagens distintas do tratamento nuclear.

Por fim, as conclusões e perspectivas são apresentadas.

2 CROMODINÂMICA QUÂNTICA

O estudo das interações devido a força forte está presente na Cromodinâmica Quântica (QCD), sendo uma Teoria Quântica de Campos (QFT) invariante sobre transformações de fase local $SU(3)$. A Eletrodinâmica Quântica (QED), por exemplo, representa uma simetria de *gauge* local $U(1)$. Por conta dos geradores do grupo $SU(3)$ serem caracterizados por matrizes 3×3 , a função de onda ψ deve incluir três graus de liberdade adicionais que podem ser representados por um vetor de três componentes, análogos a simetria de sabor $SU(3)$ dos quarks (u , d e s). Esse novo grau de liberdade é chamado de carga de cor, para os tipos vermelho (r), verde (g) e azul (b). Como os geradores do grupo $SU(3)$ não comutam, a QCD é conhecida como uma teoria de *gauge* não-abeliana [10], dando origem a interações entre glúons, o bóson da teoria análogo ao fóton na QED.

A interação na QED é mediada por um fóton correspondendo ao grupo $U(1)$, enquanto a QCD é mediada por oito glúons correspondentes aos oito geradores do grupo $SU(3)$ [10]. Apenas partículas com cor acoplam com os glúons, por isso léptons, que são neutros de cor, não experimentam a força forte. Dessa forma, apenas os quarks e antiquarks, além dos próprios glúons, interagem com glúons, pois são partículas (e antipartículas) com carga de cor. Além disso, como acontece com a carga elétrica, o antiquark carrega a anticor correspondente ao quark, ou seja, temos \bar{r} , \bar{g} e \bar{b} . Como será discutido nesse capítulo, podemos descrever a interação entre quarks e glúons por meio da lagrangiana da QCD, além de derivar as regras de Feynman, que são um ferramental vantajoso para obter as amplitudes de espalhamento e, conseqüentemente, as seções de choque dos processos de interesse. Para estudar a estrutura do próton, por exemplo, podemos analisar a seção de choque de um espalhamento do tipo elétron-próton.

Com o objetivo de analisar o processo ep , usamos o Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS), que foi amplamente estudado no colisor HERA. Com o DIS, pôde-se concluir que o próton é composto por distribuições de quarks e, por meio da violação do *scaling* de Bjorken, distribuições de glúons. Dessa forma, a evolução das distribuições de quarks e glúons em termos da virtualidade do fóton que participa da interação pode ser obtida pelas equações DGLAP. Veremos, nesse capítulo, como obter as equações fundamentais do DIS e as equações DGLAP, de forma a adquirir algumas informações sobre a estrutura do próton.

2.1 LAGRANGIANA DA QCD

Vamos começar estudando a lagrangiana¹ da QCD, que em QFT permite obter as regras de Feynman. A lagrangiana do quark “livre”², que respeita a equação de Dirac, é dada por [11]

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi(x), \quad (2.1.1)$$

em que m é a massa do quark,

$$\cancel{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla},$$

sendo γ^μ matrizes de Dirac [10] e $\psi(x)$ representa o estado de quarks no espaço das cores

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix},$$

em que cada componente é um spinor de Dirac. A lagrangiana \mathcal{L}_q é invariante sob uma transformação de gauge global (independente de x)

$$\psi(x) \rightarrow U\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)U^\dagger, \quad (2.1.2)$$

com $U^\dagger = U^{-1}$ e $|U| = 1$ pertencendo a representação fundamental do grupo SU(3). As matrizes U podem ser expressas por

$$U \equiv U(\theta) = \exp(i\theta^a t^a), \quad (2.1.3)$$

onde θ^a são os parâmetros de transformação de *gauge*; o índice a tem valores de 1 a 8; t^a são os geradores de grupo de cores na representação fundamental; além de que $t^a = \lambda^a/2$, com λ^a sendo as matrizes de Gell-Mann [11].

Invariância sob transformações de *gauge* globais podem ser estendidas para locais quando temos θ^a dependente de x . Podemos obtê-las introduzindo campos de glúons $A_\mu^a(x)$ que se transformam de acordo com

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^\theta(x) = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}, \quad (2.1.4)$$

em que g é uma constante de acoplamento,

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)t^a \quad (2.1.5)$$

¹ O termo mais correto para \mathcal{L} é densidade lagrangiana, sendo mais comumente utilizado na literatura o nome lagrangiana.

² Para esse cálculo, e no restante da dissertação, vamos utilizar o sistema de unidades naturais da física de partículas, no qual $\hbar = c = 1$.

e substituindo ∂_μ (da Eq. (2.1.1)) pela derivada covariante $D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu$. A lei de transformação da derivada covariante

$$D_\mu^\theta = \partial_\mu + igA_\mu^\theta = UD_\mu U^\dagger \quad (2.1.6)$$

garante a invariância de *gauge* da lagrangiana

$$\mathcal{L}_q + \mathcal{L}_{qg} = \bar{\psi}(x)(i\not{D} - m)\psi(x) = \mathcal{L}_q - g\bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x). \quad (2.1.7)$$

A lagrangiana do campo de *gauge*

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{2} \text{Tr} [G_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}(x)] \quad (2.1.8)$$

é escrita em termos das intensidades do campo $G_{\mu\nu}(x)$, que são construídas com as derivadas covariantes D_μ ,

$$G_{\mu\nu}(x) = -\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (2.1.9)$$

Para as componentes $G_{\mu\nu}^a(x) = 2 \text{Tr}(t^a G_{\mu\nu}(x))$ temos

$$G_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - igT_{bc}^a A_\mu^b(x)A_\nu^c(x), \quad (2.1.10)$$

onde $T_{bc}^a = -if^{abc}$ são os geradores de grupo da representação adjunta; f^{abc} são as constantes de estrutura de grupo [11]. A invariância de (2.1.8) segue da lei de transformação para campos de força

$$G_{\mu\nu}^\theta(x) = -\frac{i}{g}[D_\mu^\theta, D_\nu^\theta] = UG_{\mu\nu}U^\dagger. \quad (2.1.11)$$

Portanto, a lagrangiana da QCD é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_{qg}, \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} [G_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}(x)] + \bar{\psi}(x)(i\not{D} - m)\psi(x) - g\bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x), \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

sendo o primeiro termo relacionado com glúons livres e interações de 3 e 4 glúons; o segundo termo é o termo de quarks livres e o terceiro é o termo de interação férmion-bóson-férmion. A partir dessa lagrangiana, pode-se construir as regras de Feynman.

2.2 REGRAS DE FEYNMAN

A amplitude de espalhamento \mathcal{M} de uma colisão, ente físico que nos fornece a dinâmica de uma colisão, pode ser obtida por meio de uma série de regras de relativa simplicidade, as regras de Feynman, que são derivadas formalmente da QFT. Usando a lagrangiana da QCD (Eq. (2.1.12)), fazemos uma expansão em série de Dyson da

matriz de espalhamento S em segunda ordem³ no termo de interação e obtemos os padrões encontrados por Feynman (sua contribuição para as regras da QED pode ser consultada em mais detalhes na Ref. [12]).

Há três elementos básicos em um diagrama de Feynman: (i) os spinores de Dirac para as partículas fermiônicas reais externas iniciais e finais, e para bósons vetores polarização; (ii) um termo de propagador⁴ para a partícula trocada, representado por linhas internas entre dois vértices [13]; (iii) um fator para cada vértice de interação [10]. O produto desses elementos nos fornece $-i\mathcal{M}$. As regras de Feynman para calcular as amplitudes de espalhamento em mais baixa ordem estão presentes na Tab. 1, sendo $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico do espaço de Minkowski e γ^μ matrizes na representação de Dirac-Pauli.

O tempo nos diagramas de Feynman neste caso cresce da esquerda para a direita, de forma que partículas se propagam para frente e antipartículas se propagam para trás no tempo. Além disso, propagadores são sempre partículas virtuais⁵ que não são detectadas no espalhamento. Por fim, a amplitude total é dada pela soma de todos os diagramas possíveis para uma mesma ordem em teoria de perturbação.

Ao considerarmos, por exemplo, um diagrama de espalhamento do tipo $e^-\mu^-$, descrito pela QED, teremos a representação da Fig. 1.

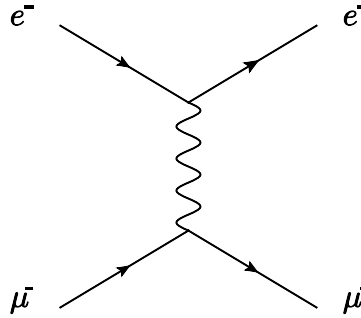


Figura 1 – Espalhamento elétron-múon.

Pela figura, na parte superior do diagrama, temos um elétron incidente, com $u(p)$, e um emergente, com $\bar{u}(p')$, conectados ao fóton pelo vértice da QED por $ie\gamma^\mu$. Para a parte inferior do diagrama, temos um múon incidente com $u(k)$ e o múon emergente com $\bar{u}(k')$, ligados por $ie\gamma^\nu$. Por fim, o fóton como propagador carrega $-ig_{\mu\nu}/q^2$. Nesse contexto, p, p', k, k' e q são os quadrimomentos das partículas. Dessa forma, fazemos o produto dessas quantidades e obtemos

$$-i\mathcal{M} = [\bar{u}(p')ie\gamma^\mu u(p)] \left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) [\bar{u}(k')ie\gamma^\nu u(k)] \quad (2.2.1)$$

³ Esse processo está descrito em mais detalhes em diversos livros de QFT, como na Ref. [9]

⁴ Em termos da QFT, descreve a propagação de um pacote de onda que somado pode ter características diferentes de uma partícula real, como estar fora da camada de massa (i.e., não respeita a relação de energia-momento $E = \sqrt{p^2 + m^2}$), ter tempo de vida limitado, etc. [13].

⁵ Partículas virtuais são, pelo princípio da incerteza, pacotes de onda com curto tempo de vida e não possuem energia bem definida, além de terem como solução um propagador (partículas reais têm como solução uma onda) [13].












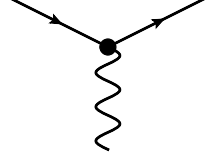
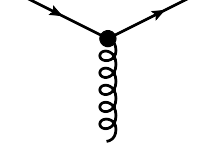
	Representação	Símbolo no diagrama
Partícula incidente	$u(p)$	
Partícula emergente	$\bar{u}(p)$	
Antipartícula incidente	$\bar{v}(p)$	
Antipartícula emergente	$v(p)$	
Fóton incidente	$\epsilon_\mu(p)$	
Fóton emergente	$\epsilon_\mu^*(p)$	
Glúon incidente	$\epsilon_\mu(p)$	
Glúon emergente	$\epsilon_\mu^*(p)$	
Propagador do fóton	$-\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2}$	
Propagador do férmion	$-\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}$	
Propagador do glúon (<i>gauge</i> de Feynman)	$-\frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} \delta^{ab}$	
Vértice da QED	$-i Q_f e \gamma^\mu$	
Vértice da QCD	$-i \frac{g_s}{2} \lambda^a \gamma^\mu$	

Tabela 1 – Regras de Feynman. Adaptado da Ref. [10].

A amplitude de espalhamento carrega a física de interesse do processo, e as seções de choque, que fornecem a probabilidade de uma colisão ocorrer, são proporcionais ao módulo quadrado de \mathcal{M} .

2.3 CONSTANTE DE ACOPLAMENTO E LIBERDADE ASSINTÓTICA

A escala da QCD utilizada para cálculos perturbativos é a constante de acoplamento α_s . Em escalas de energias baixas, α_s tem valores altos, de forma que expansões perturbativas podem não ser convergentes. Porém, apesar do nome, α_s não é constante, e depende da escala de energia analisada. Em altas energias, α_s se torna pequeno, de forma que teoria de perturbação pode ser usada [10].

O processo que torna α_s não constante é chamado de renormalização, em que parâmetros são definidos para que as divergências, i.e., infinitos nas amplitudes de espalhamento sejam absorvidos nos parâmetros da teoria, como ocorre com a carga elétrica na QED ou a carga de cor na QCD. De forma geral, os parâmetros da lagrangiana como constante de acoplamento, massa e os campos precisam ser redefinidos em termos de uma escala arbitrária. Na QCD, considerar um diagrama de Feynman com um loop já revela

divergências na teoria, de forma que precisamos redefinir α_s .

Para contornar esse problema, vamos considerar um observável físico adimensional $\Gamma(Q^2/\mu^2, \alpha_s(\mu^2))$, em que Q^2 é a escala do processo e μ^2 é a escala em que α_s foi definido. Esse observável não pode depender da escolha de escala, ou seja, deve ser invariante frente ao grupo de todas as possíveis escolhas de escala. Podemos garantir isso fazendo [14]

$$\mu^2 \frac{d\Gamma(Q^2/\mu^2, \alpha_s(\mu^2))}{d\mu^2} = 0. \quad (2.3.1)$$

Escrevendo em termos de derivadas parciais, temos

$$\begin{aligned} \mu^2 \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu^2} + \frac{\partial \alpha_s(\mu^2)}{\partial \mu^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha_s} \right] &= 0, \\ \left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] \Gamma \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

e a Eq. (2.3.2) é chamada equação de grupo de renormalização, sendo

$$\beta = \mu^2 \frac{\partial \alpha_s(\mu^2)}{\partial \mu^2} \quad (2.3.3)$$

e, na QCD, β foi calculado como uma expansão de α_s (fixo) até o terceiro termo significativo [14],

$$\beta(\alpha_s) = -b_0 \alpha_s^2 - b_1 \alpha_s^3 - b_2 \alpha_s^4 + \mathcal{O}(\alpha_s^5), \quad (2.3.4)$$

em que

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{33 - 2n_f}{12\pi}, \\ b_1 &= \frac{153 - 19n_f}{24\pi^2}, \\ b_2 &= \frac{77139 - 15099n_f + 325n_f^2}{3456\pi^3}, \end{aligned}$$

com n_f sendo o número de sabores ativos. Em nosso caso, vamos considerar a aproximação em mais baixa ordem. Façamos uma mudança de escala de $\alpha_s(\mu^2) \rightarrow \alpha_s(\mu_0^2)$ tal que o observável físico Γ não sofra alteração, ou seja, $\Gamma(\mu^2) = \Gamma(\mu_0^2)$, sendo μ_0 arbitrário. Usando a Eq. (2.3.3) trocando $\alpha_s \rightarrow x$, temos

$$\ln \left(\frac{\mu_0^2}{\mu^2} \right) = \int_{\alpha_s(\mu^2)}^{\alpha_s(\mu_0^2)} \frac{dx}{\beta(x)}, \quad (2.3.5)$$

e usando apenas o primeiro termo da Eq. (2.3.4) em $\beta(x)$, obtemos

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu_0^2)} - \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} = b_0 \ln \left(\frac{\mu_0^2}{\mu^2} \right)$$

ou, ainda,

$$\alpha_s(\mu_0^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \alpha_s(\mu^2)b_0 \ln(\mu^2/\mu_0^2)}. \quad (2.3.6)$$

A escala de confinamento Λ_{QCD} é dada por

$$\ln \Lambda_{QCD}^2 = \ln \mu^2 - \frac{1}{b_0 \alpha_s(\mu^2)}, \quad (2.3.7)$$

então rearranjando os termos e tomando $\mu_0^2 = Q^2$ na Eq. (2.3.6), obtemos finalmente

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{b_0 \ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}, \quad (2.3.8)$$

com $\Lambda_{QCD} \approx 0.2 - 0.3$ GeV, determinado experimentalmente. A Eq. (2.3.8) nos diz que, a medida que a escala de momento Q^2 aumenta, com $Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$, a constante de acoplamento diminui, permitindo cálculos perturbativos. Nessas condições, os quarks são aproximadamente livres, o que chamamos de liberdade assintótica⁶. Se $Q^2 \rightarrow \Lambda_{QCD}^2$, as interações entre quarks e glúons se tornam intensas, e métodos perturbativos não são mais aplicáveis [15]. A Fig. 2 representa o comportamento da constante de acoplamento forte em termos da escala de momento Q , com dados experimentais para comparação.

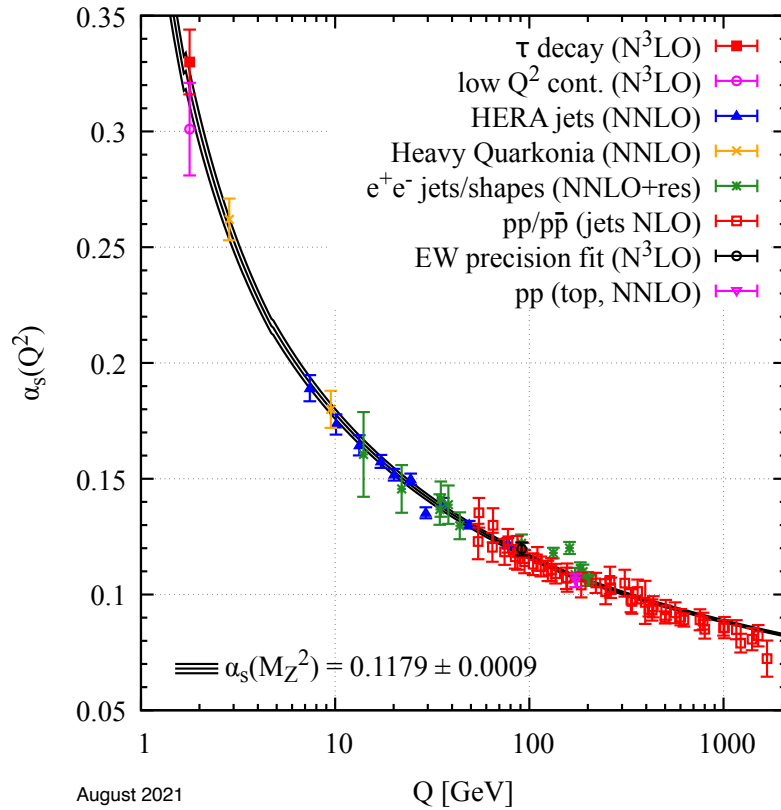


Figura 2 – Constante de acoplamento da QCD [16].

⁶ Em 2004, David J. Gross, H. David Politzer e Frank Wilczek receberam o Prêmio Nobel pela descoberta da liberdade assintótica. Disponível em: <<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2004/summary/>>. Acesso em: 20 nov. 2023.

No presente trabalho, nossa escala de momento Q é a massa dos mésons vetoriais produzidos. Como estamos estudando mésons pesados, com massas entre $3.097 - 9.46$ GeV, α_s é pequeno, de forma que podemos utilizar a QCD perturbativa. Isso permitirá que utilizemos equações importantes para estudo da estrutura dos prótons em altas energias, como as equações DGLAP e BFKL. Para isso, vamos começar discutindo um espalhamento muito utilizado na literatura, que lida com colisões lépton-hádron.

2.4 ESPALHAMENTO PROFUNDAMENTE INELÁSTICO

Para compreender a estrutura dos hádrons, a formulação mais efetiva é o Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS). No DIS temos um espalhamento de um lépton carregado ou neutro e um hádrón em grandes momentos transferidos, podendo quebrar a partícula e fornecer informações sobre sua estrutura interna. Nesse processo, temos a possibilidade de troca de bóson W^\pm , Z^0 ou γ . Quando temos a troca do bóson W^\pm , denominado corrente carregada, o processo é caracterizado por um lépton neutro no estado inicial e um lépton carregado no estado final [14, 17]. A troca de Z^0 ou γ descreve a corrente neutra e tem no seus estados inicial e final um lépton carregado [18]. Estamos interessados nos processos com troca de fóton, sendo do tipo

$$l(k) + N(p) \rightarrow l'(k') + X(P_X), \quad (2.4.1)$$

com X sendo o sistema hadrônico não detectado e as quantidades em parênteses os quadrimomentos das partículas [19]. A Fig. 3 (a) traz o diagrama de Feynman em mais baixa ordem para esse tipo de espalhamento, sendo $V^*(q)$ o bóson trocado na interação.

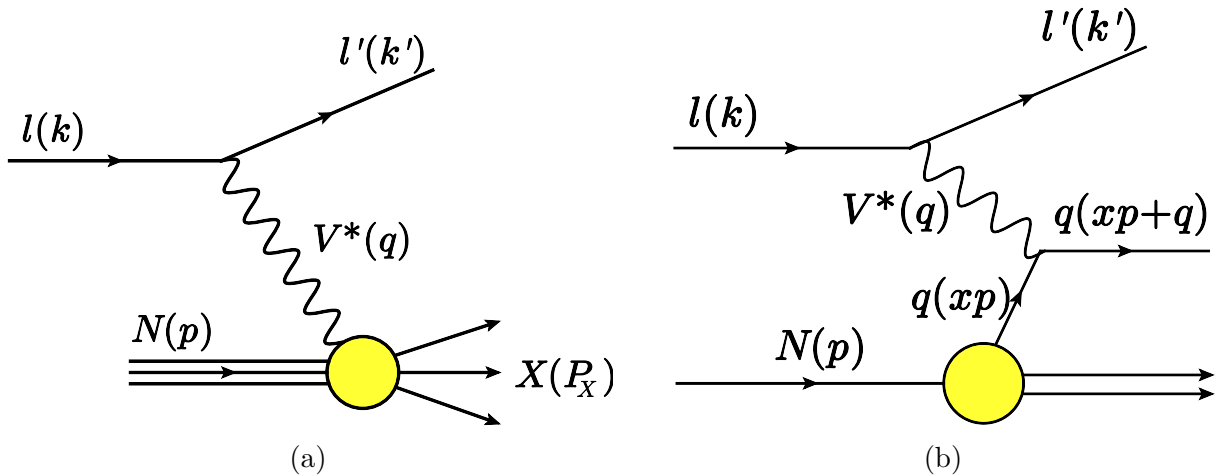


Figura 3 – Espalhamento profundamente inelástico, em que um lépton interage com um hádrón por meio de troca de um bóson, com o hádrón quebrando no final produzindo um estado X não medido, em (a), e o mesmo diagrama visto como o bóson interagindo com cada párton individualmente no hádrón, em (b).

Para uma colisão dentro do próton com momento transferido grande o suficiente, o

fóton consegue resolver objetos pontuais com tamanho da ordem do inverso do momento transferido. Esses objetos não possuem estrutura interna e são chamados de pártons. No modelo de pártons, consideramos que a seção de choque do DIS lépton-hádrón é a soma incoerente das seções de choque elásticas entre o lépton e cada párton individualmente [15], como visto na Fig. 3 (b). Vamos discutir mais sobre o modelo de pártons nessa seção.

O espalhamento dado pela Eq. (2.4.1) será representado pelos quadrimomentos iniciais k e p para, respectivamente, o lépton e hádrón incidentes. Ainda, k' e P_X são os 4-momentos finais. As quantidades invariantes de Lorentz do DIS são fundamentais para descrevermos esse tipo de processo, portanto vamos discuti-las [19]. O quadrado da energia de centro de massa da colisão é a variável de Mandelstam⁷ s ,

$$s = (k + p)^2. \quad (2.4.2)$$

Sendo q o quadrimomento do bóson vetorial mediador da interação, que neste caso é o fóton, definimos

$$q^2 \equiv -Q^2 = (k - k')^2. \quad (2.4.3)$$

sendo Q^2 chamado de virtualidade, propriedade de partículas virtuais⁸. A energia de centro de massa γ^*p ou massa invariante W é escrita como

$$W^2 = (p + q)^2 \quad (2.4.4)$$

e definimos a perda de energia $\nu = E - E'$, sendo E a energia inicial do lépton e E' a energia final, ou ainda podemos escrever ν como

$$\nu = \frac{p \cdot q}{M} = \frac{W^2 + Q^2 - M^2}{2M} \quad (2.4.5)$$

sendo M a massa do hádrón. O espalhamento é dito profundamente inelástico já que Q^2 , W^2 e νM são muito maiores que M^2 , fragmentando o núcleon [19, 21]. No modelo de pártons, a fração de momento x do próton carregada pelo párton interagente é

$$x = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2 - M^2}, \quad (2.4.6)$$

conhecido como x de Bjorken. A inelasticidade y é dada por

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k} = \frac{W^2 + Q^2 - M^2}{s - M^2} \quad (2.4.7)$$

e pode ser vista como a fração de energia do lépton inicial carregada pelo fóton trocado

⁷ As variáveis de Mandelstam são definições relacionadas ao quadrimomentos das partículas envolvidas na colisão, em que s é o quadrado da energia de centro de massa e t , que será comentado nesse trabalho, é o quadrado do 4-momento transferido.

⁸ O 4-momento ao quadrado das partículas é igual a sua massa, que para o fóton seria zero. Porém, chamamos de fóton virtual (γ^*) aquele em que $Q^2 \neq 0$, também dito fora da camada de massa [20].

($y = \nu/E$). A variável x assume valores entre 0 e 1, assim como y . Com as quantidades discutidas, vamos começar estudando o espalhamento lépton-quark, que em comparação com o processo lépton-hádron nos fornecerá uma importante relação do DIS.

2.4.1 Espalhamento elástico lépton-quark

Para compreender o espalhamento lépton-hádron, vamos analisar o espalhamento lépton-párton, mais especificamente o caso elétron-quark, com a parte superior do diagrama da Fig. 3 (b). A carga dos quarks deve ser $\frac{2}{3}e$ ou $-\frac{1}{3}e$, que pode ser escrito em geral como $e' = e_i e$. O quark carrega uma fração x' do momento do hádron “pai”. Dessa forma, teremos que $p \rightarrow x'p$ e $s \rightarrow x's$, sendo s o quadrado da energia de centro de massa do sistema elétron-hádron [14]. A Fig. 4 traz a representação desse espalhamento para o caso geral lépton-párton, que possui a mesma estrutura presente na Fig. 1, de forma que a amplitude de espalhamento (2.2.1) pode ser utilizada nesse caso também.

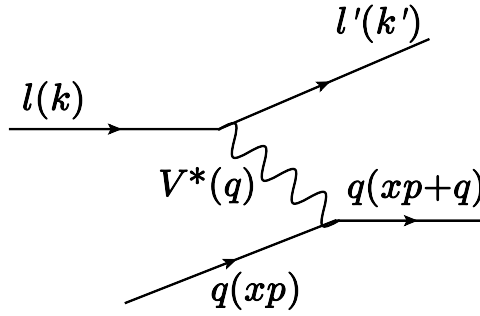


Figura 4 – Espalhamento lépton-quark.

Nesse contexto, a seção de choque do espalhamento lépton-quark é [14]

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dy} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} [1 + (1 - y)^2] x' s e_i^2 \quad (2.4.8)$$

e $Q^2 = sy \rightarrow Q^2 = x'sy$. A seção de choque lépton-hádron é obtida ao definirmos uma função de distribuição $f_i(x)$, que fornece a probabilidade de um quark i carregar uma fração x do momento p do hádron. Outra quantidade extremamente relevante no DIS é a distribuição de momento $xf(x)$, chamada de Função de Distribuição Partônica (PDF) [14].

Portanto, a seção de choque duplamente diferencial para o espalhamento incoerente⁹ (em que o fóton interage apenas com um pártion e fazemos uma soma sobre essas interações) devido a todos os tipos possíveis de quarks com um valor específico de x é [19]

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx dy} &= \sum_i f_i(x) \frac{d\hat{\sigma}}{dy}, \\ &= \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} [1 + (1 - y)^2] s \sum_i e_i^2 x f_i(x) \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

⁹ No espalhamento coerente, o fóton interage com todos os pártions ao mesmo tempo.

ou, de forma equivalente,

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4} [1 + (1-y)^2] \sum_i e_i^2 x f_i(x). \quad (2.4.10)$$

2.4.2 Espalhamento inelástico lépton-hádrón

Tendo o resultado da seção de choque lépton-quark, podemos calcular a seção de choque lépton-hádrón para comparar alguns resultados importantes no DIS. A seção de choque do processo (2.4.1), seguindo as variáveis da Fig. 3, é [19]

$$d\sigma = \frac{1}{4(k \cdot p)} \frac{1}{2} \sum_{s_k, s'_k} \frac{1}{2} \sum_S \sum_X \int \frac{d^3 P_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta^4(p + k - P_X - k') |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2E'}, \quad (2.4.11)$$

em que temos os somatórios nos spins das partículas, a conservação do 4-momento representada pela delta de Dirac em quatro dimensões e $(d^3 P_X / (2\pi)^3 2P_X^0)$ e $(d^3 k' / (2\pi)^3 2E')$ são termos referentes ao espaço de fase das partículas finais (sendo P_X^0 e E' as energias). Escrevemos o módulo quadrado da amplitude como

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} [\bar{u}_{k'}(k', s'_k) \gamma_\mu u_k(k, s_k)]^* [\bar{u}_{k'}(k', s'_k) \gamma_\nu u_k(k, s_k)] \langle X | J^\mu(0) | p, S \rangle^* \langle X | J^\nu(0) | p, S \rangle, \quad (2.4.12)$$

sendo J a corrente de transição do hádrón, com 4-momento p inicial, para o estado final X . Definimos o tensor hadrônico $W^{\mu\nu}$, devido ao hádrón, como

$$W^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{(2\pi)} \frac{1}{2} \sum_S \sum_X \int \frac{d^3 P_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta^4(p + q - P_X) \langle p, S | J^\mu(0) | X \rangle \langle X | J^\nu(0) | p, S \rangle, \quad (2.4.13)$$

e o tensor leptônico $L_{\mu\nu}$ devido ao lépton¹⁰ como

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2} \sum_{s_k, s'_k} [\bar{u}_{k'}(k', s'_k) \gamma_\mu u_k(k, s_k)]^* [\bar{u}_{k'}(k', s'_k) \gamma_\nu u_k(k, s_k)], \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}[k \gamma_\mu k' \gamma_\nu], \\ &= 2[k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}(k \cdot k')]. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Combinando as Eqs. (2.4.11) e (2.4.12) ao escrever em termos de $W^{\mu\nu}$ e $L_{\mu\nu}$, a seção de choque diferencial no referencial de repouso, com $(k \cdot p) = ME$, se torna¹¹

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha_{em}^2}{2MQ^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}. \quad (2.4.15)$$

O tensor hadrônico pode ser parametrizado como

¹⁰ As massas dos léptons são desprezadas nesse cálculo.

¹¹ $\Omega \equiv (\vartheta, \phi)$ é o ângulo sólido identificando a direção do lépton final.

$$\frac{1}{2M}W^{\mu\nu} = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) W_1(p \cdot q, q^2) + \frac{1}{M^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu\right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu\right) W_2(p \cdot q, q^2), \quad (2.4.16)$$

em que W_1 e W_2 carregam toda a informação sobre a estrutura do próton e a seção de choque do DIS (não polarizada) pode ser expressa da forma

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{4\alpha_{em}^2 E'^2}{Q^4} \left[2W_1 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right]. \quad (2.4.17)$$

Podemos introduzir as funções de estrutura adimensionais

$$F_1(x, Q^2) \equiv MW_1(\nu, Q^2), \quad (2.4.18)$$

$$F_2(x, Q^2) \equiv \nu W_2(\nu, Q^2). \quad (2.4.19)$$

Bjorken, em seu trabalho de 1969 (Ref. [22]), argumentou que no limite

$$\nu, Q^2 \rightarrow \infty, \quad x = \frac{Q^2}{2M\nu} \text{ fixo},$$

chamado de limite de Bjorken, F_1 e F_2 devem depender apenas de x , o que chamamos de *scaling* de Bjorken. Isso é verdade para o modelo de pártons que, historicamente, só considerava a existência de férmions carregados no próton. Na QCD, considerando também glúons, há uma dependência em Q^2 , que será discutida em mais detalhes na Seção 2.5.

Podemos reescrever a seção de choque do DIS (Eq. (2.4.17)) em termos de F_1 e F_2 usando as variáveis x e y definidas anteriormente,

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{2EE' \sin^2 \theta/2}{M(E - E')}, \quad (2.4.20)$$

$$y = 1 - \frac{E'}{E}, \quad (2.4.21)$$

em que $Q^2 = -(k - k')^2 = 4EE' \sin^2 \theta/2$. Então,

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2 s}{Q^4} \left[xy^2 F_1(x, Q^2) + \left(1 - y - \frac{xyM^2}{s}\right) F_2(x, Q^2) \right]. \quad (2.4.22)$$

Via teorema óptico¹², podemos relacionar as funções de estrutura do DIS e a seção de choque total de fotoabsorção virtual, dada por [19]

$$\sigma_\lambda^{\gamma^* N}(x, Q^2) = \frac{2\pi^2 \alpha_{em}}{M\sqrt{\nu^2 + Q^2}} \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)*} W^{\mu\nu} \quad (2.4.23)$$

em que $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ é o quadrivetor polarização de um fóton virtual de helicidade λ . As projeções de helicidade do fóton são

¹² O teorema óptico afirma que a seção de choque total (ou seja, a seção de choque para a reação $1 + 2 \rightarrow \text{qualquer coisa}$) é dada pela parte imaginária de apenas um elemento da matriz S , chamada de amplitude para o espalhamento elástico $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$ na região de espalhamento frontal, em que o ângulo é $\theta = 0$ [19]. No Apêndice A, discutimos em mais detalhes o teorema óptico.

$$d_{\mu\nu}^{(\Sigma)} = \sum_{\lambda=0,\pm 1} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} \epsilon_{\nu}^{(\lambda)*} = - \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{Q^2} \right), \quad (2.4.24)$$

$$d_{\mu\nu}^{(L)} = \epsilon_{\mu}^{(0)} \epsilon_{\nu}^{(0)*} = \frac{Q^2}{M^2(\nu^2 + Q^2)} \left(p_{\mu} + \frac{p \cdot q}{Q^2} q_{\mu} \right) \left(p_{\nu} + \frac{p \cdot q}{Q^2} q_{\nu} \right), \quad (2.4.25)$$

$$d_{\mu\nu}^{(T)} = \frac{1}{2} \left[\epsilon_{\mu}^{(+1)} \epsilon_{\nu}^{(+1)*} + \epsilon_{\mu}^{(-1)} \epsilon_{\nu}^{(-1)*} \right] = \frac{1}{2} \left[d_{\mu\nu}^{(\Sigma)} - d_{\mu\nu}^{(L)} \right]. \quad (2.4.26)$$

Com isso, podemos calcular as seções de choque de fotoabsorção longitudinal e transversa, ou seja,

$$\sigma_L^{\gamma^* N} = \frac{2\pi^2 \alpha_{em}}{M\sqrt{\nu^2 + Q^2}} d_{\mu\nu}^{(L)} W^{\mu\nu} = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{\sqrt{\nu^2 + Q^2}} \left[-W_1 + \left(1 + \frac{\nu^2}{Q^2} \right) W_2 \right], \quad (2.4.27)$$

$$\sigma_T^{\gamma^* N} = \frac{2\pi^2 \alpha_{em}}{M\sqrt{\nu^2 + Q^2}} d_{\mu\nu}^{(T)} W^{\mu\nu} = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{\sqrt{\nu^2 + Q^2}} W_1. \quad (2.4.28)$$

Desprezando Q^2 em relação a ν^2 , já que $Q^2/\nu^2 = 4M^2 x^2/Q^2 \ll 1$ (ver Eq. (2.4.6)), as Eqs. (2.4.27) e (2.4.28) escritas em termos de F_1 e F_2 ficam

$$\sigma_L^{\gamma^* N} = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} (F_2 - 2x F_1), \quad (2.4.29)$$

$$\sigma_T^{\gamma^* N} = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} 2x F_1. \quad (2.4.30)$$

Definindo as funções de estrutura longitudinal e transversal como

$$F_T = 2x F_1, \quad (2.4.31)$$

$$F_L = F_2 - 2x F_1, \quad (2.4.32)$$

a seção de choque $\gamma^* N$ será

$$\sigma_{L,T}^{\gamma^* N}(x, Q^2) = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} F_{L,T}(x, Q^2). \quad (2.4.33)$$

Sabendo que $F_2 = F_L + F_T$, a seção de choque será proporcional a F_2 ,

$$\sigma^{\gamma^* N}(x, Q^2) = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} F_2(x, Q^2). \quad (2.4.34)$$

Ainda, comparando as Eqs. (2.4.22) e (2.4.9), obtemos

$$F_2(x, Q^2) = \sum_i e_i^2 x f_i(x), \quad (2.4.35)$$

$$F_L(x, Q^2) = 0. \quad (2.4.36)$$

e, retomando a Eq. (2.4.32), temos

$$F_2(x, Q^2) = 2x F_1(x, Q^2), \quad (2.4.37)$$

chamada de relação de Callan-Gross, que prevê que as funções de estrutura dependem apenas de x , o *scaling* de Bjorken citado anteriormente.

2.5 VIOLAÇÃO DO SCALING DE BJORKEN E EQUAÇÕES DGLAP

Para valores de x suficientemente pequenos, da ordem de 0.01, as funções de estrutura passam a depender de Q^2 e ocorre a violação do *scaling* de Bjorken, que aparece quando levamos em conta a interação entre pártons. A Fig. 5 mostra medidas experimentais de F_2 em termos de Q^2 . Vemos que, para grandes valores de x , a relação (2.4.37) é respeitada, porém, valores de x pequenos mostram uma dependência em Q^2 para F_2 , além do próprio x .

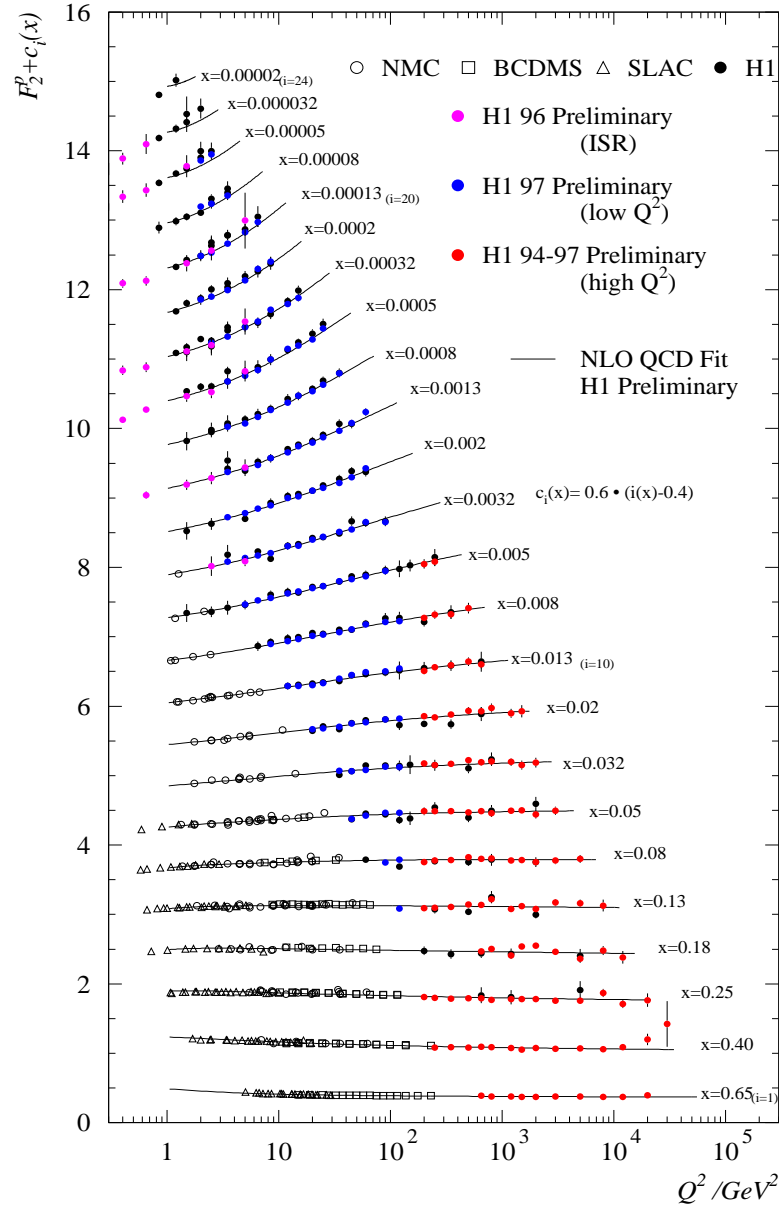


Figura 5 – Função de estrutura F_2 em termos da virtualidade Q^2 [23].

Vamos reescrever a função de estrutura $F_2(x)$ como

$$F_2(x) = \sum_{q,\bar{q}} \int_x^1 d\xi f_q(\xi) \hat{F}_2^q\left(\frac{x}{\xi}\right), \quad (2.5.1)$$

sendo \hat{F}_2^q a função de estrutura elementar dos quarks. Ao fazer $\hat{F}_2^q(z) = e_q^2 \delta(1-z)$, obtemos a Eq. (2.4.37). Porém, a equação acima vale apenas se desconsiderarmos interações entre quarks e antiquarks por meio da troca de glúons. Assim, há outros processos contribuindo para seção de choque $\gamma^* q$, correspondente aos dois primeiros diagramas da Fig. 6. Em ordem α_s^1 há correções de glúons real e virtual, surgindo singularidades no cálculo desses diagramas. Uma singularidade colinear aparece na emissão de glúons reais, que surge no canal da variável de Mandelstam \hat{t} quando $\hat{t} \rightarrow 0$, já que $\hat{t} \propto (1 - \cos \theta)$ diverge quando o glúon emitido é colinear ao quark “pai”. Outra singularidade aparece devido à emissão de glúons *soft*, que é cancelada ao se somar as contribuições reais e virtuais [15].

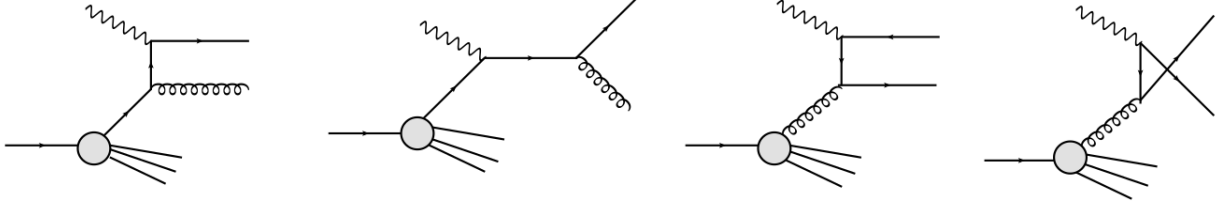


Figura 6 – Diagramas que contribuem para o DIS em ordem α_s [15].

Para lidar com a singularidade colinear, utilizamos um corte inferior k_0^2 no momento transversal k_\perp^2 do quark interagente. Em ordem α_s , os dois primeiros diagramas da Fig. 6, correspondentes a emissão real de glúons, contribuem para $\hat{F}_2^q(z)$ como [19]

$$\hat{F}_2^q(z) = \frac{\alpha_s}{2\pi} e_q^2 z \left[P(z) \ln \frac{Q^2}{k_0^2} + h(z) \right], \quad (2.5.2)$$

sendo $P(z)$ e $h(z)$ funções finitas. Portanto, a Eq. (2.5.1) fica

$$F_2(x) = \sum_{q,\bar{q}} e_q^2 x \left\{ f_q^0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_q^0(\xi) \left[P\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln \frac{Q^2}{k_0^2} + h\left(\frac{x}{\xi}\right) \right] \right\}. \quad (2.5.3)$$

Podemos introduzir a escala de fatorização μ^2 de maneira que o logaritmo presente na relação acima seja escrito como

$$\ln \left(\frac{Q^2}{k_0^2} \right) = \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) + \ln \left(\frac{\mu^2}{k_0^2} \right) \quad (2.5.4)$$

e separar a função $h(z)$ em

$$h(z) = \tilde{h}(z) + h'(z). \quad (2.5.5)$$

Com isso, podemos absorver a singularidade presente em $\ln \left(\frac{\mu^2}{k_0^2} \right)$ e o termo $h'(z)$ ao redefinir a distribuição de quarks

$$q(x, \mu^2) = f_q^0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_q^0(\xi) \left[P\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln \frac{\mu^2}{k_0^2} + h'\left(\frac{x}{\xi}\right) \right] + \dots \quad (2.5.6)$$

e escrever a função de estrutura como

$$F_2(x, Q^2) = \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 x \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi, \mu^2) C\left(\frac{x}{\xi}, Q^2, \mu^2\right), \quad (2.5.7)$$

em que definimos as funções coeficiente

$$C(z, Q^2, \mu^2) = \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[P(z) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + \tilde{h}(z) \right] + \dots \quad (2.5.8)$$

Como a escala μ^2 é arbitrária, o observável físico $F_2(x, Q^2)$ não pode depender dela. Assim, impomos que $\partial F_2 / \partial \ln \mu^2 = 0$ e

$$\sum_{q, \bar{q}} e_q^2 x \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left\{ \frac{\partial q(\xi, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} C\left(\frac{x}{\xi}, Q^2, \mu^2\right) + q(\xi, \mu^2) \frac{\partial}{\partial \ln \mu^2} C\left(\frac{x}{\xi}, Q^2, \mu^2\right) \right\} = 0, \quad (2.5.9)$$

de forma que, em ordem α_s , temos

$$\frac{\partial q(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} P\left(\frac{x}{\xi}\right) q(\xi, \mu^2). \quad (2.5.10)$$

A Eq. (2.5.10) é conhecida como equação DGLAP (Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli e Parisi) e nos fornece a evolução da distribuição de quarks [19]. A função de *splitting* $P(x)$ é a probabilidade de um quark emitir outro quark com fração de momento x , sendo calculada perturbativamente,

$$P(x) = \sum_n \alpha_s^n P^{(n)}(x). \quad (2.5.11)$$

Em $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$ nas funções de *splitting* e $\mathcal{O}(\alpha_s^1)$ nas funções coeficiente, a DGLAP ressona contribuições do tipo $(\alpha_s \ln Q^2)^n$, na Aproximação de $\ln Q^2$ Dominante (LLA) [15] (ver Apêndice B para mais detalhes sobre o processo de ressona da QCD).

De forma análoga, podemos tratar da distribuição de glúons $g(x, Q^2)$, pois temos o espalhamento do tipo $\gamma^* g \rightarrow q\bar{q}$, que correspondem aos dois últimos diagramas da Fig. 6. Vamos definir a distribuição não-singlete de quarks

$$q_{NS}(x, Q^2) = q(x, Q^2) - \bar{q}(x, Q^2) \quad (2.5.12)$$

e a distribuição singlete

$$\sum(x, Q^2) = \sum_i \left[q_i(x, Q^2) + \bar{q}_i(x, Q^2) \right], \quad (2.5.13)$$

em que \sum_i é uma soma nos sabores dos quarks, para escrever as equações DGLAP como

$$\frac{\partial q_{NS}(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} P\left(\frac{x}{\xi}\right) q_{NS}(\xi, t), \quad (2.5.14)$$

onde $t = \ln Q^2/\mu^2$ e

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Sigma(x, t) \\ g(x, t) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \begin{pmatrix} P_{qq}(x/\xi) & 2n_f P_{qg}(x/\xi) \\ P_{gq}(x/\xi) & P_{gg}(x/\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma(\xi, t) \\ g(\xi, t) \end{pmatrix}, \quad (2.5.15)$$

com n_f sendo o número de sabores ativos. As funções de *splitting* em Ordem Dominante (LO), com $z = x/y$, são [14, 19]

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{(1+z^2)}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right], \quad (2.5.16)$$

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2], \quad (2.5.17)$$

$$P_{gg}(z) = 6 \left[\frac{(1-z)}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) + \left(\frac{11}{12} - \frac{n_f}{18} \right) \delta(1-z) \right], \quad (2.5.18)$$

$$P_{gq}(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{1 + (1-z)^2}{z} \right], \quad (2.5.19)$$

em que as probabilidades totais devem satisfazer as relações

$$\int_0^1 P_{qq}(z) dz = 0, \quad (2.5.20)$$

$$\int_0^1 z [P_{qq}(z) + P_{gq}(z)] dz = 0, \quad (2.5.21)$$

$$\int_0^1 z [2n_f P_{qg}(z) + P_{gg}(z)] dz = 0, \quad (2.5.22)$$

em que a Eq. (2.5.20) garante que o número total de quarks menos antiquarks é conservado e as relações (2.5.21) e (2.5.22) correspondem a conservação do momento e sabor em quarks e glúons, respectivamente [14]. As funções de *splitting* não terão singularidades ao utilizarmos a seguinte relação [14, 19]

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{f(z) - f(1)}{1-z}.$$

Com a discussão do DIS, que permite que sondemos a estrutura do próton, e das equações DGLAP para evolução da distribuição de quarks e glúons, vamos analisar esses formalismos em altas energias no próximo capítulo.

3 FÍSICA DE PEQUENO x

Em processos de espalhamento em altas energias, a dinâmica interna em hádrons é dominada por uma grande densidade de glúons, para pequenos valores de x . A Fig. 7 (a) mostra a evolução de partons via DGLAP usando a PDF HERAPDF1.0 para $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ [24]. Para grande x , o momento do próton está concentrado nos quarks de valência (xu_v para quark up e xd_v para quark down), enquanto que para pequeno x o próton é dominado por um grande número de quarks de mar (xS) e glúons (xg), já que essas curvas estão multiplicadas por um fator de 0.05. Na Fig. 7 (b), com uma evolução também seguindo a DGLAP, é mostrada a distribuição de glúons $xg(x, Q^2)$ em termos de x para três virtualidades. Para Q^2 grande, temos um rápido crescimento da densidade de glúons correspondente a um regime diluído da QCD (conforme será discutido na Seção 3.7) e baixa banda de incerteza. Podemos concluir que sondar o próton com um fóton de grande virtualidade, aliado a pequeno x , permite que analisemos uma dinâmica dominada por grandes distribuições de glúons. Para Q^2 pequeno, o crescimento da densidade de glúons é menor, mas a banda maior de incerteza indica um regime de menor conhecimento teórico e experimental. Isso nos motiva a estudar esse regime de altas energias e pequena virtualidade.

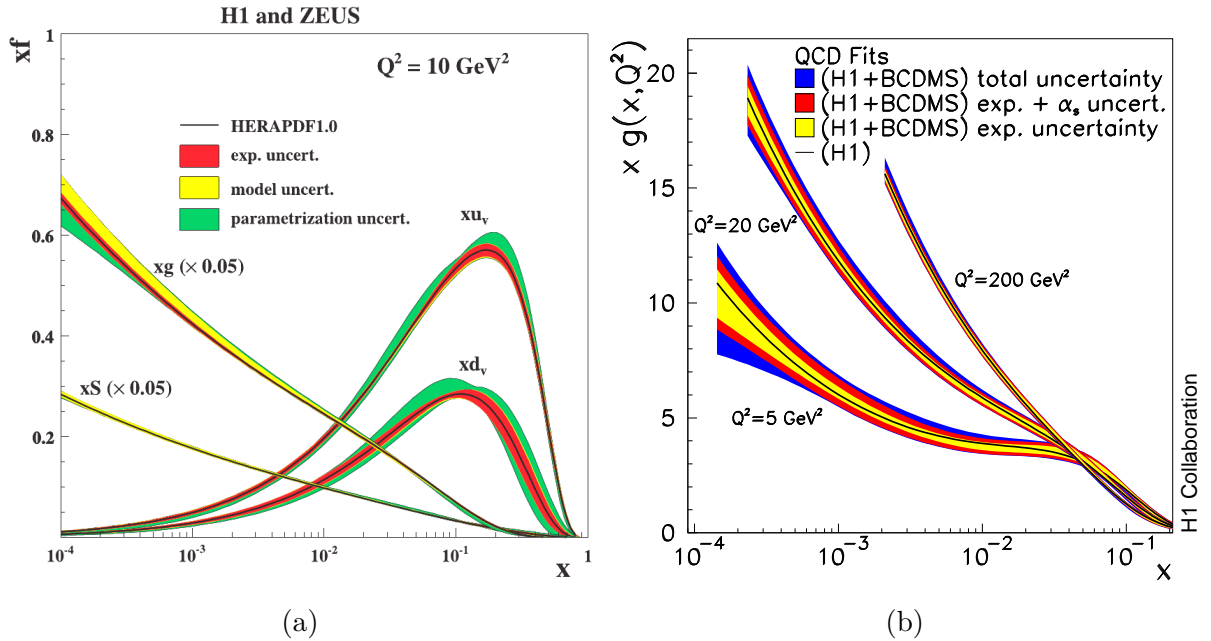


Figura 7 – (a) Distribuições de glúons e quarks de valência e mar no H1 e ZEUS em NLO para $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ [24] e (b) distribuição de glúons em ajuste no H1 para $Q^2 = 5 \text{ GeV}^2$, $Q^2 = 20 \text{ GeV}^2$ e $Q^2 = 200 \text{ GeV}^2$ [25].

Conforme a variável x de Bjorken decresce, a densidade de glúons no próton aumenta pois o processo de emissão de glúons é dominante. Neste regime de altas densidades, espera-se que o processo de recombinação de glúons passe a ser importante [26], resultando no fenômeno da saturação partônica, fazendo com que o crescimento da seção de choque do

processo seja freado. A saturação é descrita no Condensado de Vidro de Cor (CGC), que é uma teoria de campos efetiva da QCD. Uma equação de evolução da dinâmica partônica importante do CGC é devida a Jalilian-Marian-Iancu-McLerran-Weigert-Leonidov-Kovner (JIMWLK), sendo derivada fazendo um *boost* no alvo da colisão, cuja evolução não linear reflete a saturação na função de onda do alvo [26]. Porém, a JIMWLK é uma equação de grande complexidade, pois se trata de uma hierarquia infinita de equações acopladas, fazendo com que sua aplicação seja complexa.

Na aproximação de campos médios, a equação JIMWLK se reduz a equação de Balitsky-Kovchegov (BK), que contém um termo não linear que reduz o crescimento da densidade partônica, fazendo com que a amplitude de espalhamento satisfaça a condição de unitariedade da matriz S . Um resultado importante da BK é o *scaling* geométrico, verificado por dados de DIS na região de energia do HERA [26]. Portanto, para a física que estamos interessados, a BK se torna útil por prever a saturação partônica com uma equação de relativa simplicidade comparada a JIMWLK.

Nesse contexto, temos alguns formalismos no DIS que nos fornecem os observáveis físicos de interesse para estudo da saturação. Um deles, o formalismo de dipolo, para o qual a seção de choque fóton-próton é escrita em termos da amplitude de espalhamento de dipolo, poderá descrever a física de saturação. Nesse caso, escrevemos a amplitude de espalhamento em função do raio r do dipolo. Outro formalismo importante é a fatorização k_T , que permite que a seção de choque fóton-hádron seja escrita em termos da distribuição de glúons não integrada nos momentos transversos dos glúons. As variáveis r e k_T são conjugadas de Fourier, de forma que os dois formalismos podem ser facilmente relacionados por uma transformada de Fourier. O estudo desses formalismos combinado às equações de evolução partônica permitirão que a física de pequeno x , ou seja, altas energias, seja analisada em comparação com dados experimentais.

3.1 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DGLAP EM ALTAS ENERGIAS

Para começar o estudo em altas energias, vamos analisar o comportamento da DGLAP nesse regime, que é obtida a partir da fatorização colinear¹ (Eq. (2.5.7)). Podemos adiantar que, no limite de altas energias, as equações DGLAP se apresentam não adequadas, sendo válidas para x não tão pequeno e Q^2 acima de um valor mínimo [14]. Vamos discutir uma solução para a DGLAP em pequeno x e grande Q^2 na Aproximação de Duplo Logaritmo Dominante (DLLA) (conforme Apêndice B). Em LO, as funções de *splitting* (Eqs. (2.5.16), (2.5.17), (2.5.18) e (2.5.19)), quando $z \rightarrow 0$ são

$$P_{qq}(z) \rightarrow \frac{4}{3}, \quad P_{qg}(z) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad P_{gg}(z) \rightarrow \frac{6}{z}, \quad P_{gq}(z) \rightarrow \frac{8}{3z}. \quad (3.1.1)$$

¹ Na fatorização colinear, os párons não carregam momento transversal.

As funções de *splitting* do glúon P_{gq} e P_{gg} são as mais singulares, a última tendo o maior coeficiente. Assim, as equações DGLAP são dominadas pela emissão de glúons, ou seja, a QCD em pequeno x é dominada por glúons, como visto na Fig. 7². Considerando apenas a contribuição de glúons $g(x, Q^2)$, podemos aproximar a DGLAP por

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \approx \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} P_{gg} \left(\frac{x}{\xi} \right) g(\xi, t). \quad (3.1.2)$$

Reescrevendo a equação acima, temos,

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \approx \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_0^{\ln(1/x)} d \left(\ln \frac{1}{\xi} \right) P_{gg} \left(\frac{x}{\xi} \right) g(\xi, t). \quad (3.1.3)$$

Usando $\alpha_s(Q^2) = 1/b_0 t$ e a expressão de P_{gg} na Eq. (3.1.1) como $P(x/\xi) = 6\xi/x$, temos

$$t \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \approx \frac{3}{\pi b_0} \int_0^{\ln(1/x)} d \left(\ln \frac{1}{\xi} \right) \xi g(\xi, t). \quad (3.1.4)$$

Introduzindo as variáveis

$$u = \ln \frac{t}{t_0}, \quad v = \ln \frac{x_0}{x} \quad (3.1.5)$$

e diferenciando em relação a v além de usar u no lugar do $\ln t$, obtemos

$$\frac{\partial^2 G(u, v)}{\partial u \partial v} = \gamma^2 G(u, v), \quad (3.1.6)$$

em que $G(u, v) = xg(x, Q^2)$ e $\gamma^2 = 3/\pi b_0$. A equação obtida tem a forma de uma equação da onda. Como estamos interessados na solução no limite duplamente assintótico, ou seja, $\ln Q^2, \ln(1/x) \rightarrow \infty$, faremos algumas mudanças de variáveis convenientes,

$$\rho = \left(\frac{v}{u} \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \sigma = (uv)^{1/2}. \quad (3.1.7)$$

O limite desejado corresponde a fazer $\sigma \rightarrow \infty$ com ρ fixo. É possível obter, então, a seguinte relação

$$4 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\rho}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\rho^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \quad (3.1.8)$$

e, com $\sigma \rightarrow \infty$, podemos desprezar alguns termos e reduzir a expressão anterior a

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}. \quad (3.1.9)$$

Assim, a Eq. (3.1.6) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 G(\sigma, \rho)}{\partial \sigma^2} = 4\gamma^2 G(\sigma, \rho) \quad (3.1.10)$$

² Apesar de termos feito a análise para LO, o mesmo vale para Próxima Ordem Dominante (NLO), presente na Fig. 7.

e tem solução dada por

$$G(\sigma, \rho) = A \exp(2\gamma\sigma), \quad (3.1.11)$$

sendo A uma constante. Retornando às variáveis originais, temos

$$xg(x, Q^2) = A \exp \left(\sqrt{\frac{12}{\pi b_0} \ln \frac{t}{t_0} \ln \frac{x_0}{x}} \right). \quad (3.1.12)$$

Seguindo os mesmos passos mas mantendo α_s fixo, obtemos

$$xg(x, Q^2) = A \exp \left(2\sqrt{\frac{3\alpha_s}{\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \ln \frac{x_0}{x}} \right). \quad (3.1.13)$$

As duas soluções obtidas para a DGLAP em DLLA apresentam rápido crescimento da distribuição de glúons $xg(x, Q^2)$ conforme x diminui, ou seja, em altas energias [14]. Como veremos, isso traz problemas no cálculo de observáveis físicos, pois viola a unitariedade da matriz de espalhamento³ S e traz um aumento não físico para a seção de choque.

3.2 EQUAÇÃO BFKL

No espalhamento profundamente inelástico, temos dois tipos de ressonância: em virtualidade, que leva as equações DGLAP, e em x , com as contribuições em logaritmo dominante ($\ln 1/x$), como discutido no Apêndice B. Para o último caso, o procedimento foi proposto por Balitsky, Fadin, Kuraev e Lipatov [27–30], dando origem à equação BFKL. Temos problemas com as equações DGLAP em altas energias, podendo ser aplicadas apenas em certos regimes cinemáticos. Desta forma, vamos analisar como é o comportamento da BFKL nesse contexto.

Consideremos o espalhamento entre um fóton virtual e um próton. Os processos elementares γ^*g presentes na Fig. 6 são fundamentais para o espalhamento γ^*p , pois em pequeno x , regime que nos interessa, temos o grande crescimento da densidade gluônica. Além disso, em mais baixa ordem, a Fig. 6 fornece a amplitude de espalhamento γ^*p , com a presença de apenas um glúon [15].

A dinâmica BFKL, na Aproximação de $\ln 1/x$ Dominante (LL_xA) conforme Apêndice B, considera correções devido as múltiplas emissões de glúons. A equação BFKL evolui a Distribuição de Glúons não Integrada (UGD) como [19]

$$F(x, \mathbf{k}^2) \equiv \frac{\partial[xg(x, \mathbf{k}^2)]}{\partial \ln \mathbf{k}^2}, \quad (3.2.1)$$

³ Descreve a amplitude de probabilidade para um processo em que o sistema faz uma transição de um estado inicial para um final sobre influência de interação. A matriz S é unitária, como mostrado em diversos livros de QFT (ver Ref. [9], por exemplo).

que é a probabilidade de encontrar um glúon com uma fração de momento longitudinal x e momento transversal \mathbf{k}^2 . Além disso, a distribuição de glúons usual é dada por

$$xg(x, Q^2) = \frac{1}{\pi} \int^{Q^2} \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} F(x, \mathbf{k}^2) \quad (3.2.2)$$

então, enquanto $F(x, \mathbf{k}^2)$ conta o número de pártons para um dado x e \mathbf{k} , a distribuição $xg(x, Q^2)$ conta o número de pártons com x e $\mathbf{k} \leq Q$ [31]. Assim, em LO, a equação BFKL é escrita como

$$\frac{\partial F(x, \mathbf{k}^2)}{\partial \ln(1/x)} = \frac{\bar{\alpha}_s}{\pi} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \left[F(x, \mathbf{q}^2) - \frac{\mathbf{k}^2}{2q^2} F(x, \mathbf{k}^2) \right], \quad \bar{\alpha}_s = \frac{\alpha_s N_c}{\pi}, \quad (3.2.3)$$

sendo N_c o número de cores. Dessa forma, a Eq. (3.2.3) ressona todas as correções em altas energias, na aproximação de $\ln(1/x)$ dominante.

Vamos considerar duas soluções para a BFKL. Consideremos uma de escala de momento transversal Λ inicial. É possível mostrar que, para $|\mathbf{k}| \sim \Lambda$, temos a seguinte solução [32]

$$F(x, \mathbf{k}^2) \sim \left(\frac{1}{x} \right)^{\alpha_P - 1} \exp \left\{ - \frac{\ln^2(|\mathbf{k}|/\Lambda)}{14\zeta(3)\bar{\alpha}_s \ln(1/x)} \right\} \quad (3.2.4)$$

com $\alpha_P - 1 = 4\bar{\alpha}_s \ln 2$. A equação acima é a aproximação de difusão, que mostra que a distribuição de glúons cresce com potência de $1/x$ em pequeno x . Outra possível solução é obtida ao considerar $|\mathbf{k}| \gg \Lambda$, dada por [32]

$$F(x, \mathbf{k}^2) \sim \exp \left\{ 2 \sqrt{\bar{\alpha}_s \ln \left(\frac{1}{x} \right) \ln \left(\frac{|\mathbf{k}|^2}{\Lambda^2} \right)} \right\}. \quad (3.2.5)$$

Essa solução é a versão DLLA da BFKL. Ela prevê um forte crescimento da distribuição de glúons não integrada $F(x, \mathbf{k}^2)$ em pequeno x , bem como ocorre com a solução em altas energias para as equações DGLAP (ver Eq. (3.1.13)). Esse comportamento faz com que a BFKL também viole a unitariedade da matriz S e, consequentemente, o limite de Froissart-Martin (discutido a seguir), pois ambas são equações de evolução lineares.

3.3 LIMITE DE FROISSART-MARTIN E A EQUAÇÃO GLR

Em altas energias, as seções de choque possuem um limite de crescimento, descrito por Froissart-Martin [33, 34]. Dessa forma, a seção de choque total deve obedecer a seguinte relação

$$\sigma_{\text{tot}}(s) < C \ln^2 s, \quad (3.3.1)$$

onde s é o quadrado da energia de centro de massa e $C \sim 60$ mb é uma constante determinada da massa do pión [14]. As equações DGLAP e BFKL apresentam uma seção

de choque $\sigma_{\gamma^*p}^{\text{tot}}$ com crescimento do tipo W^2 (ou $1/x$) e eventualmente poderiam violar o limite de Froissart-Martin [14].

Uma maneira de contornar essa problema é considerar contribuições não lineares em altas densidades partônicas, como a proposta feita por Gribov, Levin e Ryskin [35] com a equação GLR. Eles discutiram que, em altas energias, o número de glúons seria tão grande que seria necessário considerar processos de recombinação de glúons $g + g \rightarrow g$. Assim, propuseram uma equação de evolução não-linear em que, antes da energia se tornar grande o suficiente para haver violação do limite de Froissart-Martin, poderia existir uma região de energia intermediária levando em conta a recombinação de glúons [35]. Esse efeito seria chamado de saturação. Outro efeito a ser considerado em altas energias é o *shadowing*, em que a seção de choque efetiva total é reduzida pois os párons começam a se sobrepor. *Shadowing* é um termo do DIS para grandes núcleos no qual se sabe que $\sigma(\gamma^*A) = A^\alpha \sigma(\gamma^*N)$, com $\alpha < 1$ do efeito de sobreposição [14]. Nesse contexto, A é a massa atômica e N os núcleons.

Vamos discutir o caso da saturação com mais detalhes. A seção de choque de recombinação de glúons é de ordem $\alpha_s(Q^2)/Q^2$ em uma escala transversa Q^2 , assim são esperados efeitos de saturação quando essa seção de choque se aproxima daquela do tamanho do disco do próton,

$$\frac{\alpha_s(Q^2)}{Q^2} xg(x, Q^2) \sim \pi R^2, \quad (3.3.2)$$

sendo R o raio do próton. No entanto, não há razão para a densidade de glúons ser uniforme no núcleon, e flutuações em algumas regiões podem aparecer e contribuir para a saturação ocorrer em densidades menores [14].

Com isso, Gribov, Levin e Ryskin e mais tarde Mueller e Qiu [36] estenderam a aproximação em DLLA para pequeno x para incluir efeitos de saturação, desenvolvendo a equação não linear GLR-MQ,

$$\frac{\partial^2 xg(x, Q^2)}{\partial \ln(1/x) \partial \ln(Q^2/\Lambda^2)} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} xg(x, Q^2) - \frac{\alpha_s N_c \pi}{2C_F S_\perp} \frac{1}{Q^2} [xg(x, Q^2)]^2, \quad (3.3.3)$$

sendo $g(x, Q^2)$ a PDF do glúon, S_\perp a área transversal do núcleo e $C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c = 4/3$ o fator de cor. O termo não linear na Eq. (3.3.3) faz com que o crescimento acentuado de $xg(x, Q^2)$ seja freado pelo processo de recombinação de glúons. Se fizermos o lado esquerdo da Eq. (3.3.3) ser zero, então impomos a saturação de $xg(x, Q^2)$ [15]. Nesse caso, podemos obter a escala de saturação Q_s^2 ,

$$Q_s^2 = \frac{\alpha_s \pi^2}{S_\perp 2C_F} xg(x, Q^2) = \frac{\alpha_s \pi^2}{S_\perp 2C_F} \left(\frac{1}{x}\right)^\lambda, \quad (3.3.4)$$

que pode ser aproximada como

$$Q_s^2 \sim \left(\frac{1}{x}\right)^\lambda, \quad (3.3.5)$$

considerando que $xg(x, Q^2) \sim (1/x)^\lambda$ seguindo a Eq. (3.2.5). Para $Q^2 \gg Q_s^2$, efeitos de saturação podem ser ignorados e as equações de evolução lineares DGLAP e BFKL são válidas; para $Q^2 \ll Q_s^2$ efeitos de saturação devem ser levados em conta [14].

3.4 FORMALISMO DA FATORIZAÇÃO k_T NO DIS

A fatorização colinear, em LLA, dá origem às equações DGLAP, em que as funções de estrutura dos hádrons são dadas, em todas as ordens, pela convolução de algumas quantidades intrinsecamente não perturbativas, mas universais (as densidades partônicas), com funções de estrutura calculadas perturbativamente. No limite de grande W^2 , a fatorização k_T se torna relevante, sendo k_T o momento transversal dos glúons. Na fatorização k_T nenhum ordenamento em k_\perp é assumido nas escadas de glúons, que resulta na BFKL [19].

A distribuição de glúons não integrada, dada pela Eq. (3.2.1), é essencial para a fatorização k_T , pois permite que se descreva a dinâmica de emissão de glúons em altas energias. Vamos analisar como o momento transversal presente na UGD desempenha papel fundamental para a seção de choque fóton-próton no DIS, com base no desenvolvimento da Ref. [19]. A seção de choque γ^*p com a fatorização k_T ⁴ é

$$\sigma_\lambda^{\gamma^*p}(x, Q^2) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \int_x^1 \frac{dx'}{x'} F\left(\frac{x}{x'}, \mathbf{k}^2\right) \hat{\sigma}_\lambda^{\gamma^*g}(x', \mathbf{k}^2, Q^2), \quad (3.4.1)$$

em que λ é a polarização do fóton virtual e $\hat{\sigma}_\lambda^{\gamma^*g}$ é a seção de choque gluônica. Em $\ln(1/x)$ dominante, podemos escrever

$$F\left(\frac{x}{x'}, \mathbf{k}^2\right) \simeq F(x, \mathbf{k}^2),$$

pois $\ln^n\left(\frac{x}{x'}\right) = \ln^n x \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln x}{\ln x'}\right)\right]$. Dessa forma, a equação (3.4.1) se torna

$$\sigma_\lambda^{\gamma^*p}(x, Q^2) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} F(x, \mathbf{k}^2) \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \hat{\sigma}_\lambda^{\gamma^*g}(x', \mathbf{k}^2, Q^2). \quad (3.4.2)$$

Além disso, podemos escrever a seção de choque γ^*p em termos de fatores de impacto, mostrado na Fig. 8, em que no limite de grande W^2 é

$$\sigma_\lambda^{\gamma^*p}(x, Q^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{\mathbf{k}'^2} \Phi_\lambda(\mathbf{k}^2, Q^2) \Phi_p(\mathbf{k}'^2) G_{BFKL}(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \quad (3.4.3)$$

sendo Φ_λ o fator de impacto do fóton, que descreve o acoplamento da escada de glúons ao fóton virtual e Φ_p o fator de impacto do próton, uma quantidade não perturbativa que

⁴ Seguindo a referência adotada, vamos omitir os subscritos \perp para vetores transversos, então vetores em negrito representam as duas componentes transversas dos vetores, seguindo a definição do cone de luz (ver Apêndice D.2).

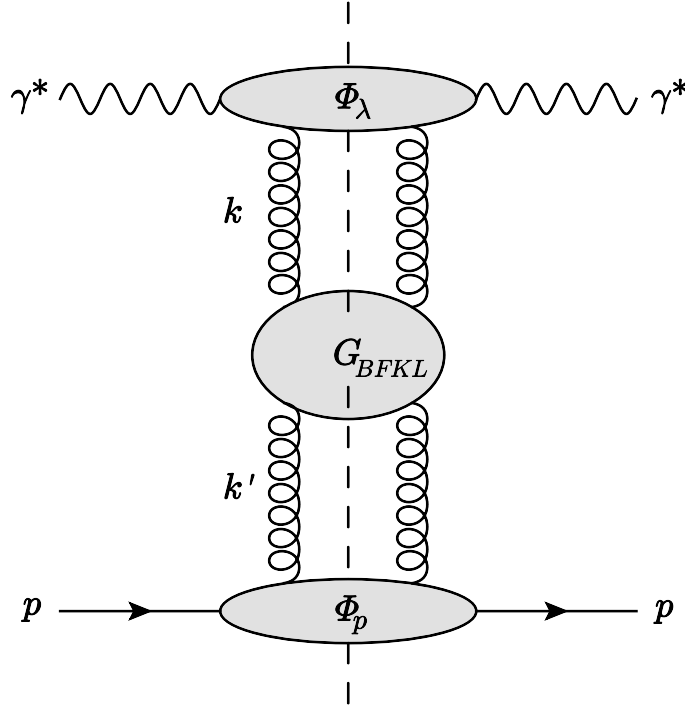


Figura 8 – DIS em pequeno x no formalismo dos fatores de impacto. Adaptado da Ref. [19].

nos fornece a estrutura interna do hádron e descreve o acoplamento da escada de glúons ao próton. Ainda, G_{BFKL} é a amplitude BFKL, contendo a escada de glúons perturbativa, de acordo com a ressonância em LL_xA .

Comparando as Eqs. (3.4.2) e (3.4.3), a UGD $F(x, \mathbf{k}^2)$ se relaciona com $\Phi_p(\mathbf{k}')$ e $G_{BFKL}(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ por meio da expressão

$$F(x, \mathbf{k}^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{\mathbf{k}'^2} \Phi_p(\mathbf{k}'^2) \mathbf{k}^2 G_{BFKL}(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}'), \quad (3.4.4)$$

ou seja, a distribuição de glúons não integrada carrega as informações relacionadas ao hádron e as escadas de glúons emitidas em altas energias. Usando (3.4.4) e comparando as equações (3.4.3) e (3.4.2), obtemos a relação entre o fator de impacto do fóton e a seção de choque γ^*g

$$\Phi_\lambda(\mathbf{k}, Q^2) = 2\mathbf{k}^2 \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \hat{\sigma}_\lambda^{\gamma^*g}(x', \mathbf{k}^2, Q^2) \quad (3.4.5)$$

e uma relação para a fatorização k_T

$$\sigma_\lambda^{\gamma^*p}(x, Q^2) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^4} F(x, \mathbf{k}^2) \Phi_\lambda(\mathbf{k}^2, Q^2). \quad (3.4.6)$$

Dessa forma,

- a parte não perturbativa da estrutura do próton está contida em Φ_p , portanto em $F(x, \mathbf{k}^2)$;

- a avaliação perturbativa de G_{BFKL} permite conhecer a evolução em x de $F(x, \mathbf{k}^2)$, uma vez que uma distribuição inicial $F(x_0, \mathbf{k}^2)$, ou seja, uma forma específica de Φ_p é assumida;
- o fator de impacto Φ_λ , ou equivalentemente a seção de choque transversal gluônica $\hat{\sigma}^{\gamma^*g}$, pode ser obtida por um cálculo de um diagrama de um loop fóton-glúon.

Como demonstrado no Apêndice C, ao calcular $\hat{\sigma}_\lambda^{\gamma^*g}$ explicitamente, as seções de choque $\sigma_\lambda^{\gamma^*p}$ em termos das polarizações longitudinal e transversal do fóton são [19]

$$\sigma_{L,T}^{\gamma^*p}(x, Q^2) = \frac{\alpha_{em}}{\pi Q^2} \sum_q e_q^2 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^4} \int_0^1 dz \int d^2\boldsymbol{\kappa} \alpha_s(\mu^2) F(\beta, \mathbf{k}^2) \times \left\{ \frac{N_\lambda(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa})}{(\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2)^2} + \frac{N_\lambda(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})}{[(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]^2} - \frac{2N_\lambda(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})}{(\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2)[(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]} \right\}, \quad (3.4.7)$$

sendo $\beta \equiv x/x'$ e

$$N_L(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 4z^2(1-z)^2 Q^4, \\ N_T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = Q^2[z^2 + (1-z)^2] \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2.$$

Em ordem dominante de $\ln(1/x)$, podemos escrever $F(\beta, \mathbf{k}^2) \simeq F(x, \mathbf{k}^2)$ e introduzir os parâmetros de impacto do fóton explicitamente como

$$\Phi_L = 8\alpha_s\alpha_{em} \sum_q e_q^2 \int dz Q^2 z^2 (1-z)^2 \int d^2\boldsymbol{\kappa} \left\{ \frac{1}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2} - \frac{1}{(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2} \right\}, \quad (3.4.8)$$

$$\Phi_T = 2\alpha_s\alpha_{em} \sum_q e_q^2 \int dz [z^2 + (1-z)^2] \int d^2\boldsymbol{\kappa} \times \left\{ \frac{\mathbf{k}^2 + 2Q^2 z(1-z)}{(\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2)[(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]} - \frac{Q^2 z(1-z)}{(\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2)^2} - \frac{Q^2 z(1-z)}{[(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]^2} \right\}, \quad (3.4.9)$$

de forma que a Eq. (3.4.7) se reduz à Eq. (3.4.6) [19]. A Eq. (3.4.7) é a seção de choque γ^*p na fatorização k_T no contexto do DIS, que será importante, também, para encontrarmos a seção de choque do formalismo de dipolo no DIS.

3.5 FORMALISMO DE DIPOLLO NO DIS

Uma forma interessante de abordar o DIS é através do formalismo de dipolo, descrevendo a dinâmica de pequeno x no referencial de repouso do próton. Nesse referencial, quando $x \rightarrow 0$, o fóton virtual se transforma em um par quark-antiquark a longas distâncias do alvo. Assim, depois de um longo tempo, o par $q\bar{q}$ espalha no próton. Como o tempo de interação é muito menor que tempo de formação do par, o tamanho transversal do dipolo $q\bar{q}$ é aproximadamente congelado durante o processo [19]. O diagrama desse processo está presente na Fig. 9.

No referencial de repouso do alvo, o momento do fóton é

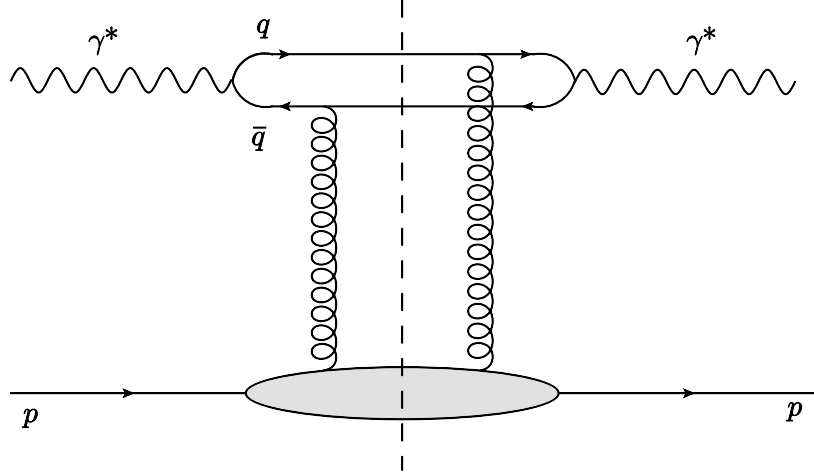


Figura 9 – DIS em pequeno x : o fóton virtual flutua em um par $q\bar{q}$ a grandes distâncias do alvo. Adaptado da Ref. [19].

$$q = (\nu, 0, 0, \sqrt{\nu^2 + Q^2}). \quad (3.5.1)$$

Usando as variáveis do cone de luz (ver Apêndice D.2), temos

$$q = \left(q^+, -\frac{Q^2}{2q^+}, \mathbf{0} \right), \quad (3.5.2)$$

sendo $q^+ \simeq \sqrt{2}\nu$ no limite de Bjorken. Com κ (κ') sendo o momento do par quark (antiquark), temos

$$\kappa = \left(zq^+, \frac{\kappa^2}{2zq^+}, \boldsymbol{\kappa} \right), \quad (3.5.3)$$

$$\kappa' = \left((1-z)q^+, \frac{\kappa^2}{2(1-z)q^+}, -\boldsymbol{\kappa} \right), \quad (3.5.4)$$

onde z é a fração de momento do cone de luz do fóton carregada pelo quark, estando o quark e antiquark na camada de massa. A massa invariante do par é dada por

$$M_{\text{par}}^2 = (\kappa + \kappa')^2 = \frac{\kappa^2}{z(1-z)}. \quad (3.5.5)$$

Vamos estimar o tempo de formação τ_f do par $q\bar{q}$ computando a diferença de energia δE entre o par e o fóton virtual. Pelo princípio da incerteza, temos que $\tau_f \sim 1/\Delta E$. Usando as Eqs. (3.5.3) e (3.5.4), temos

$$E_{\text{par}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q^+ + \frac{\kappa^2}{2z(1-z)q^+} \right) \quad (3.5.6)$$

e portanto a energia do fóton é

$$E_{\gamma^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q^+ - \frac{Q^2}{2q^+} \right). \quad (3.5.7)$$

Dessa forma, temos

$$\Delta E = E_{\text{par}} - E_{\gamma^*} = \frac{1}{2\sqrt{2}q^+} \left(Q^2 + \frac{\kappa^2}{z(1-z)} \right), \quad (3.5.8)$$

ou seja,

$$\Delta E \simeq \frac{Q^2}{\sqrt{2}q^+} = Mx, \quad (3.5.9)$$

já que, para a massa do par, $\kappa^2 \lesssim z(1-z)Q^2$, ou $M_{\text{par}}^2 \lesssim Q^2$.

Dessa forma, o tempo de formação do par $q\bar{q}$ é $\tau_f \sim 1/M_{\text{par}}x$, que em pequeno x é muito maior que o tempo de interação típica $\tau \sim r_p$, sendo r_p o raio do próton. Então, o tamanho transversal do par é congelado durante a interação com o próton, e podemos interpretar o DIS em pequeno x como o espalhamento de um dipolo de cor $q\bar{q}$ de tamanho fixo em um núcleo.

Vamos determinar a seção de choque no formalismo de dipolo a partir da fatorização k_T ao usar a Eq. (3.4.7) com α_s fixo e $F(\beta, \mathbf{k}^2) \simeq F(x, \mathbf{k}^2)$, escrevendo explicitamente nas componentes longitudinal e transversal

$$\begin{aligned} \sigma_L^{\gamma^*p}(x, Q^2) &= \frac{\alpha_{em}}{\pi Q^2} \sum_q e_q^2 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^4} \int_0^1 dz \int d^2\kappa \alpha_s F(x, \mathbf{k}^2) 4z^2(1-z)^2 Q^4 \\ &\times \left\{ \frac{1}{(\kappa^2 + \epsilon^2)^2} + \frac{1}{[(\kappa + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]^2} - \frac{2}{(\kappa^2 + \epsilon^2)[(\kappa + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]} \right\}, \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_T^{\gamma^*p}(x, Q^2) &= \frac{\alpha_{em}}{\pi Q^2} \sum_q e_q^2 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^4} \int_0^1 dz \int d^2\kappa \alpha_s F(x, \mathbf{k}^2) Q^2 [z^2 + (q-z)^2] \\ &\times \left\{ \frac{\kappa \cdot \kappa}{(\kappa^2 + \epsilon^2)^2} + \frac{(\kappa + \mathbf{k}) \cdot (\kappa + \mathbf{k})}{[(\kappa + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]^2} - \frac{2\kappa \cdot (\kappa + \mathbf{k})}{(\kappa^2 + \epsilon^2)[(\kappa + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]} \right\}, \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

e reescrevê-la na representação do parâmetro de impacto [19, 37], usando as identidades⁵

$$\int \frac{d^2\kappa}{(\kappa^2 + \epsilon^2)[(\kappa + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]} = \int d^2\mathbf{r} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} K_0^2(\epsilon r) \quad (3.5.12)$$

e

$$\int d^2\kappa \frac{\kappa^2 + \kappa \cdot \mathbf{k}}{(\kappa^2 + \epsilon^2)[(\kappa + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]} = \int d^2\mathbf{r} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} \epsilon^2 K_1^2(\epsilon r). \quad (3.5.13)$$

onde K_0 e K_1 são as funções de Bessel modificadas. Substituindo (3.5.12) e (3.5.13) nas componentes transversal e longitudinal, assumindo casos particulares nas identidades (conforme discutido no Apêndice E.1), as seções de choque de fotoprodução são

$$\sigma_{L,T}^{\gamma^*p}(x, Q^2) = \int_0^1 dz \int d^2\mathbf{r} |\Psi_{L,T}(z, r)|^2 \sigma(x, r), \quad (3.5.14)$$

em que $\sigma(x, r)$ é a seção de choque total de interação de um par $q\bar{q}$ de tamanho transversal

⁵ Uma demonstração dessas identidades está presente no Apêndice E.1.

r com o próton,

$$\sigma(x, r) = \frac{4\pi}{3} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^4} \alpha_s F(x, \mathbf{k}) (1 - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}). \quad (3.5.15)$$

Além disso, $|\Psi_{L,T}(z, r)|^2$ são os módulos ao quadrado das funções de onda das flutuações $q\bar{q}$ dos fótons longitudinais e transversos,

$$|\Psi_L(z, r)|^2 = \frac{6\alpha_{em}}{(2\pi)^2} \sum_q 4e_q^2 Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\varepsilon r), \quad (3.5.16)$$

$$|\Psi_T(z, r)|^2 = \frac{6\alpha_{em}}{(2\pi)^2} \sum_q e_q^2 [z^2 + (1-z)^2] \varepsilon^2 K_1^2(\varepsilon r), \quad (3.5.17)$$

com $\varepsilon^2 = Q^2 z(1-z) + m_q^2$, sendo m_q a massa do quark. É interessante citar que o fator de impacto do fóton, da fatorização k_T , se relaciona com a função de onda do fóton, bem como a UGD tem relação com a seção de choque de dipolo por meio de uma transformada de Fourier, como vimos na Eq. (3.5.15).

Vamos discutir algumas propriedades importantes de $\sigma(x, r)$. Expandindo a exponencial na Eq. (3.5.15), temos, para pequeno r ,

$$\sigma(x, r) \sim r^2, \quad (3.5.18)$$

ou seja, temos a propriedade da transparência de cor, em que dipolos pequenos interagem pouco com o próton. Uma avaliação mais cuidadosa de $\sigma(x, r)$ nos fornece, em pequeno r [38],

$$\sigma(x, r) \sim r^2 \alpha_s(r) \ln \left(\ln \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (3.5.19)$$

de forma que, inserindo a Eq. (3.5.19) em (3.5.14), a seção de choque transversa fica

$$\sigma_T^{\gamma^*p} \sim \frac{1}{Q^2} \ln^2 \left(\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right), \quad (3.5.20)$$

que demonstra, no limite de $r \rightarrow 0$, a equivalência entre o formalismo de dipolo e a aproximação em $\ln Q^2$ dominante da QCD. Já para r grande, por conta do confinamento, a seção de choque $\sigma(x, r)$ satura em um valor de seção de choque hádron-núcleon típico σ_0 ,

$$\sigma(x, r) \sim \sigma_0. \quad (3.5.21)$$

Essas características, presentes nas Eqs. (3.5.18 - 3.5.21), tornam o formalismo de dipolo muito adequado para estudar saturação, pois com essas considerações é possível modelar equações que levem em conta a transparência de cor e a saturação para calcular as seções de choque. Um desses modelos foi proposto por Golec-Biernat e Wüsthoff em 1999 [39], que obtiveram a seguinte expressão para descrever o DIS em pequeno x

$$\sigma(x, r) = \sigma_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{r^2}{4R_0^2(x)} \right) \right], \quad (3.5.22)$$

em que o termo em colchetes é a amplitude de dipolo $\mathcal{N}(r)$ do modelo e o raio $R_0(x)$ é

$$R_0(x) = \frac{1}{Q_0} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\lambda/2}, \quad (3.5.23)$$

com σ_0 , x_0 e λ sendo parâmetros livres. A expressão (3.5.22) é chamada de GBW. A equação satura para $r \gtrsim 2R_0$, tendendo a σ_0 . Para grande Q^2 , a contribuição dominante vem de pequenos dipolos, com $r \sim (1/Q) \ll R_0$, e $\sigma(x, r) \propto r^2$. Devido a dependência em x em R_0 , efeitos de saturação se tornam relevantes em valores não tão pequenos de Q^2 , em torno de $1 - 2 \text{ GeV}^2$. A linha crítica é definida por

$$R_0^2(x) = \frac{1}{Q^2} \quad (3.5.24)$$

e divide o plano (x, Q^2) nas região de scaling, em que $\sigma(x, r) \sim r^2$ e $\sigma_T^{*p} \sim 1/Q^2$ e a região de saturação, onde $\sigma(x, r) \sim \sigma_0$ e σ_T^{*p} é aproximadamente independente de Q^2 . A Fig. 10 mostra a seção de choque em termos da virtualidade Q^2 usando o GBW, em que dados experimentais para diversos valores de energia W são reproduzidos pela equação.

Embora seja um modelo simples, vemos que a equação obtida por Golec-Biernat e Wüsthoff é robusta, de forma que nas próximas seções utilizaremos essa parametrização em termos do momento transversal dos glúons no contexto da fatorização k_T .

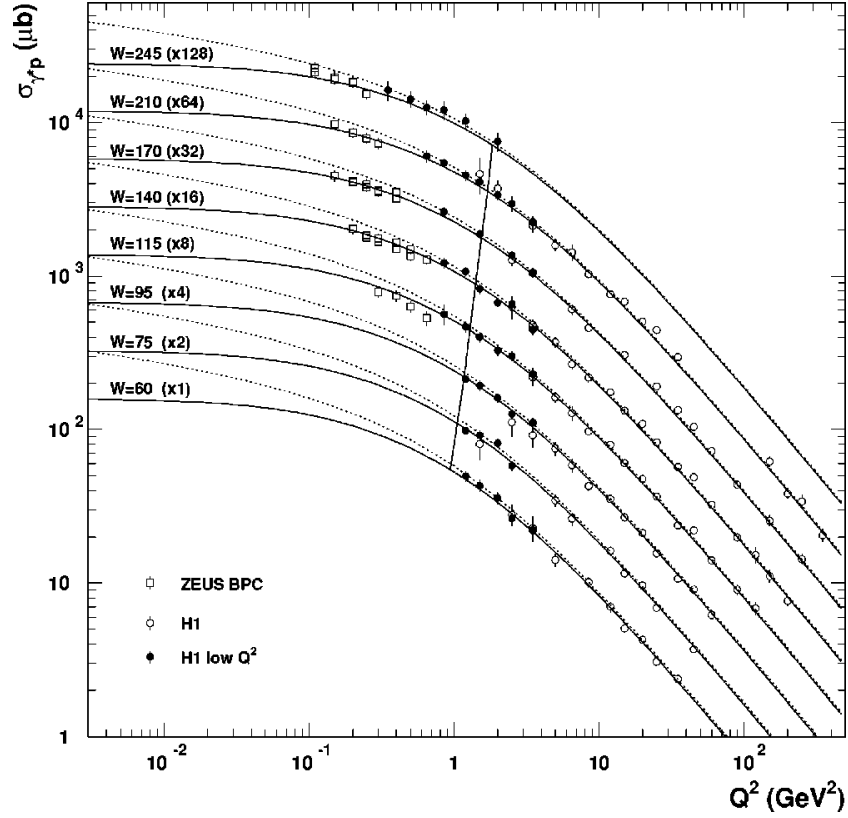


Figura 10 – Seção de choque γ^*p em função de Q^2 , em que as linhas sólidas consideram quarks leves de massa 140 MeV e linhas pontilhadas quarks de massa zero [39]. A linha cruzando as curvas indica a posição do ponto crítico.

3.6 EQUAÇÃO BK

Em colisões hadrônicas a altas energias, espera-se que o limite de Froissart-Martin seja violado conforme x diminui seguindo a evolução segundo equação BFKL. Com isso, é necessário levar em consideração outros fenômenos que não são previstos pela BFKL, descritos por uma dinâmica não linear de evolução partônica. Bem como a BFKL, a equação BK (devida a Balitsky [40] e Kovchegov [41]) ressona termos em $\alpha_s \ln 1/x$, e podemos reduzir a BK para a BFKL quando o termo não linear é desprezado. A BK é uma equação que evolui a probabilidade de espalhamento $\mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Y)$ de um dipolo $q\bar{q}$ com o alvo hadrônico na rapidez $Y = \ln(x_0/x)$, sendo x_0 o valor inicial de x . Nesse contexto, a Fig. 11 traz o comportamento da equação BK, em que a emissão de glúons pelo par quark-antiquark é visto como a emissão de dipolos em grande número de cores. Nessa figura, \mathbf{x} é a posição do quark e \mathbf{y} a posição do antiquark no espaço transversal em relação ao centro do alvo [42].

Podemos definir então

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{x} - \mathbf{z}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{y} - \mathbf{z}. \quad (3.6.1)$$

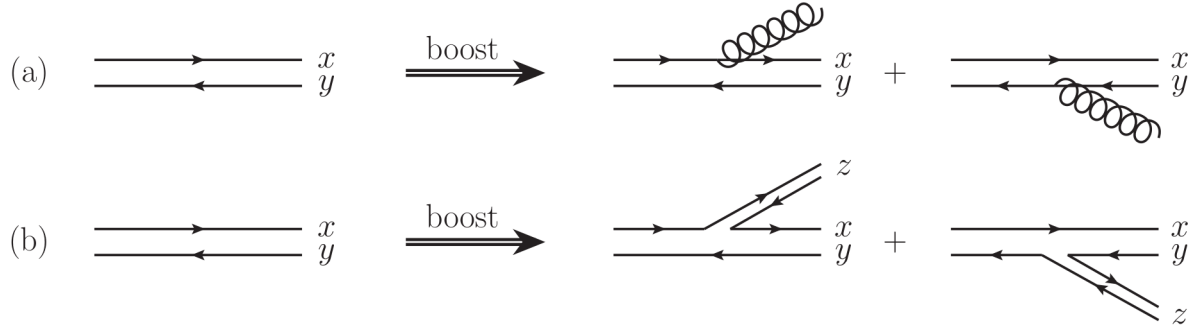


Figura 11 – Em (a), emissão de glúons pelo par $q\bar{q}$, visto em (b) como a criação de um dipolo $q\bar{q}$ no limite de grande N_c [31].

Se o alvo homogêneo tem raio muito maior que qualquer tamanho de dipolo considerado, podemos desprezar a dependência no parâmetro de impacto e a equação BK pode ser escrita como ($r \equiv |\mathbf{r}|$)

$$\frac{\partial \mathcal{N}(r, Y)}{\partial Y} = \int d^2z K^{\text{LO}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) [\mathcal{N}(r_1, Y) + \mathcal{N}(r_2, Y) - \mathcal{N}(r, Y) - \mathcal{N}(r_1, Y)\mathcal{N}(r_2, Y)], \quad (3.6.2)$$

sendo cada \mathcal{N} uma amplitude de dipolo e o “kernel” de evolução BFKL

$$K^{\text{LO}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2}, \quad (3.6.3)$$

que fornece a probabilidade de emissão dos dipolos [42].

Outra representação do comportamento dos termos da BK está presente na Fig. 12, que nos ajudará a compreender a Eq. (3.6.2). Com rapidez fixa, um dipolo “pai” incolor de tamanho r (em rosa, à esquerda da igualdade) emite um glúon real que, no limite de grande N_c , equivale aos dipolos “filhos” de tamanhos r_1 e r_2 (em azul, os dois primeiros termos). Assim, os dipolos filhos continuam a evoluir e interagem de forma independente com o alvo, ou seja, um deles fica como “espectador” durante a interação do outro, representando os termos lineares da BK. O terceiro termo, em amarelo, equivale ao dipolo original emitindo e reabsorvendo o glúon, correspondendo a uma correção devido ao glúon virtual, sobrando o dipolo de tamanho r após a autointeração. Por fim, o último termo, em verde, representa o termo não linear da equação BK, em que ambos os dipolos filhos evoluem e interagem com o alvo. O sinal de menos reflete o fato de que levar em consideração duas interações independentes superestima o resultado [5, 32], já que a soma dos dois primeiros termos contém o termo não linear. Vale ressaltar que todas as contribuições reais são representadas pelas duas linhas paralelas (o dipolo) preenchendo os lados esquerdo e direito dos retângulos.

O termo não linear presente na BK limita o crescimento da seção de choque, garantindo que o limite de Froissart-Martin seja respeitado. A BK assegura unitariedade localmente na configuração de espaço transversal, $|\mathcal{N}(r, Y)| \leq 1$, que é garantido já que

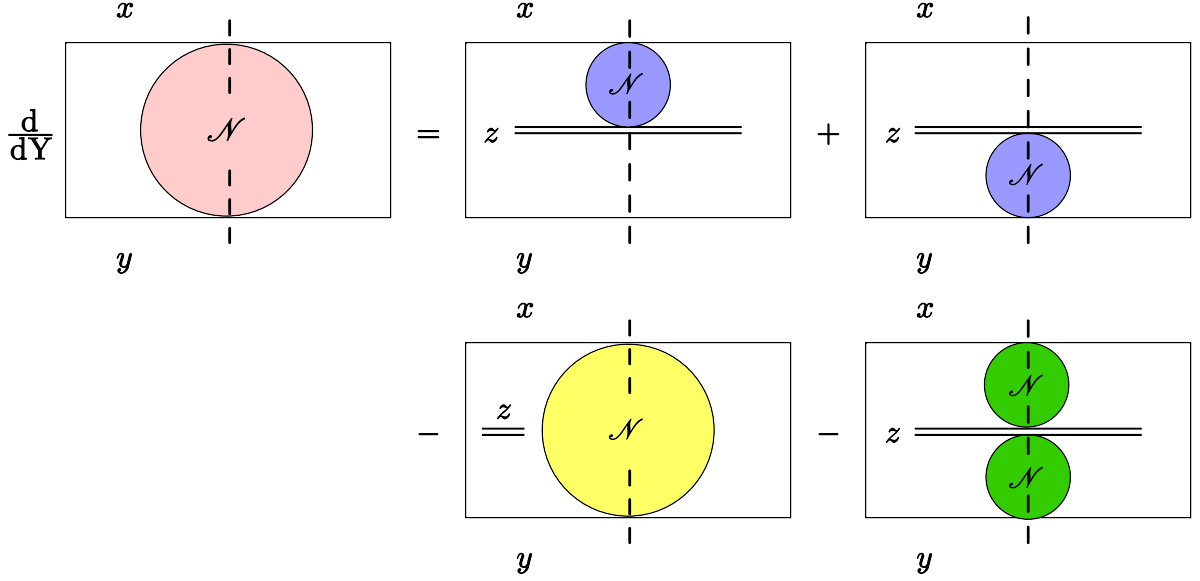


Figura 12 – Representação dos termos da equação BK, em que x , y e z indicam posições. Adaptado da Ref. [32].

para $\mathcal{N}(r, Y) = 1$ a derivada em relação a Y na Eq. (3.6.2) não pode ser positiva [42].

No limite de $Y \rightarrow \infty$, as soluções da equação BK exibem o scaling geométrico, ou seja, as soluções não são funções das variáveis r e Y separadamente, mas dependem de uma única variável,

$$\xi \equiv rQ_s(Y). \quad (3.6.4)$$

Nessa região, $Q_s(Y) \gg \Lambda_{\text{QCD}}$, e a equação BK (3.6.2) pode ser escrita em termos das variáveis $\xi = Q_s \mathbf{r}$, $\xi_1 = Q_s \mathbf{r}_1$ e $\xi_2 = Q_s \mathbf{r}_2$. Assim, $\mathcal{N}(r, Y) \equiv \mathcal{N}(\xi)$. Então, reescrevendo a derivada no lado esquerdo de Eq. (3.6.2), obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{N}(\xi)}{\partial Y} = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} = \frac{\partial Q_s(Y)}{\partial Y} r \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \xi} = \frac{\partial \ln[Q_s^2(Y)/\Lambda_{\text{QCD}}^2]}{\partial Y} r^2 \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial r^2}. \quad (3.6.5)$$

Integrando a relação acima em d^2r/r^2 , obtemos

$$\int \frac{d^2r}{r^2} \frac{\partial \mathcal{N}(\xi)}{\partial Y} = \pi \frac{\partial \ln[Q_s^2(Y)/\Lambda_{\text{QCD}}^2]}{\partial Y} [\mathcal{N}(\infty) - \mathcal{N}(0)] = \pi \frac{\partial \ln[Q_s^2(Y)/\Lambda_{\text{QCD}}^2]}{\partial Y}, \quad (3.6.6)$$

em que foi usado $\mathcal{N}(\infty) = 1$ e $\mathcal{N}(0) = 0$. Fazendo a mesma integração no lado direito da equação BK considerando $d^2r/r^2 = d^2\xi/\xi^2$, temos [42]

$$\int d^2\xi d^2\tau_1 \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \frac{r^2}{\xi_1^2 \xi_2^2} [\mathcal{N}(\xi_1) + \mathcal{N}(\xi_2) - \mathcal{N}(\xi) - \mathcal{N}(\xi_1)\mathcal{N}(\xi_2)]. \quad (3.6.7)$$

Igualando as Eqs. (3.6.6) e (3.6.7), temos

$$\frac{\partial \ln[Q_s^2(Y)/\Lambda_{\text{QCD}}^2]}{\partial Y} = \int d^2\xi d^2\xi_1 \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^3} \frac{r^2}{\xi_1^2 \xi_2^2} [\mathcal{N}(\xi_1) + \mathcal{N}(\xi_2) - \mathcal{N}(\xi) - \mathcal{N}(\xi_1)\mathcal{N}(\xi_2)]. \quad (3.6.8)$$

Como o integrando é independente de Y , então

$$\frac{\partial \ln[Q_s^2(Y)/\Lambda_{\text{QCD}}^2]}{\partial Y} = \frac{\alpha_s N_c \Omega}{\pi}, \quad (3.6.9)$$

em que Ω representa a integral anterior. Resolvendo para Q_s ,

$$Q_s^2 = \Lambda_{\text{QCD}}^2 \exp\left(\frac{\alpha_s N_c \Omega Y}{\pi}\right), \quad (3.6.10)$$

que mostra que a escala de saturação cresce com a energia Y com uma constante de acoplamento fixa. Assim, esperamos que no limite de altas energias as seções de choque sejam determinadas pela física de saturação [42].

3.7 SATURAÇÃO PARTÔNICA

Já discutimos que, para que tenhamos a unitariedade da matriz S e, consequentemente, o limite de Froissart-Martin mantidos na QCD em altas energias, consideramos a saturação partônica, em que processos de recombinação de glúons são relevantes. Para concluir essa discussão, a Fig. 13 nos traz o comportamento das principais equações de evolução estudadas nessa dissertação. Começando pela DGLAP, se trata de uma equação que fixa o valor de x e evolui em virtualidade a dinâmica partônica no próton. Nesse caso, temos um aumento do número de partons no hádron, enquanto que a resolução com que estes são vistos aumenta, já que $r \sim 1/Q$, ou seja, ao aumentar a virtualidade diminuímos as dimensões transversais dos partons.

Fixando a virtualidade, temos a evolução em x representada pelas equações BFKL, BK e JIMWLK. Para a BFKL, temos um aumento do número de partons conforme x diminui, assim como na DGLAP, porém ao fixar a virtualidade, a área transversal dos quarks e glúons permanece a mesma, fazendo com que o próton fique cada vez mais denso. Ainda assim, BFKL e DGLAP representam dinâmicas de sistemas diluídos, com equações de evolução lineares. A equação BK também evolui em energia, tendo contida em sua dinâmica de evolução a equação BFKL, porém ela prevê, com seu termo não linear, uma região de saturação, com a sobreposição de glúons que preenchem todo o próton indicando um freamento no crescimento da seção de choque. Essa região é caracterizada pela escala de saturação Q_s , discutida na Seção 3.3, em que o *scaling* geométrico é visto. Nessa região, acima da linha em roxo diagonal da figura, temos sistemas densos, e equações de evolução não lineares descrevendo o comportamento.

A teoria de campos efetiva por trás de equações como a BK e a JIMWLK é o condensado de vidro de cor, o CGC, em que múltiplas emissões de glúons *soft* são feitas

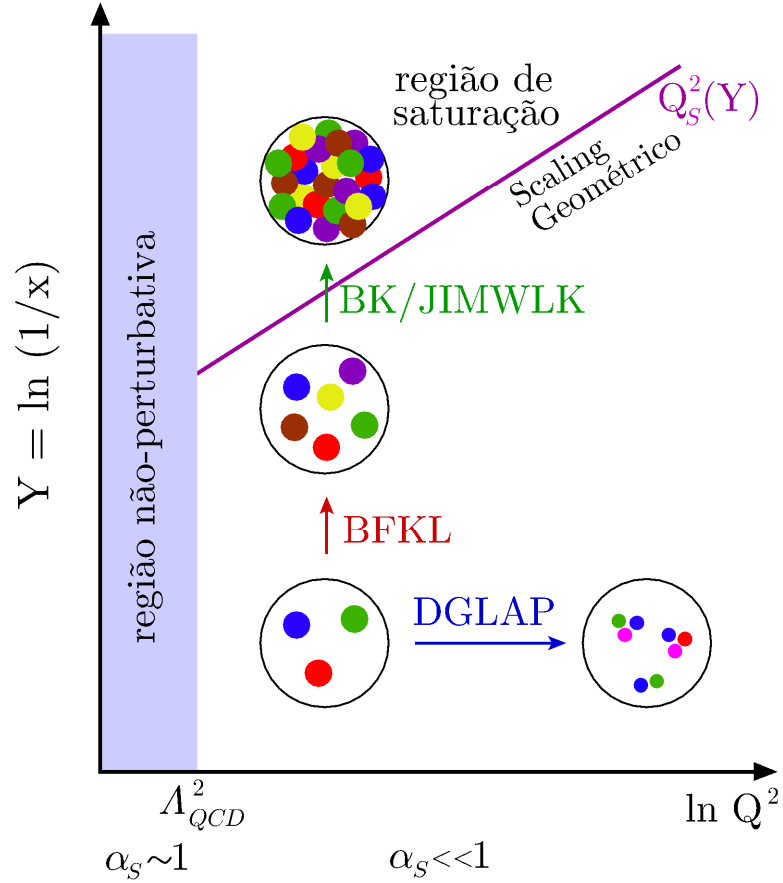


Figura 13 – Regiões de aplicabilidade das equações de evolução no plano transverso. Adaptado da Ref. [43].

por fontes que se movem rapidamente (glúons com $x' \gg x$) [15]. A JIMWLK representa uma hierarquia infinita de equações não lineares acopladas, mas que no limite de grande número de cores N_c , se reduz à equação BK para a parte imaginária da amplitude de espalhamento de dipolo \mathcal{N} [5]. Ainda, comparando as soluções da equação JIMWLK e BK, a diferença é da ordem de 0.1%, sendo duas ordens de grandeza menor que o esperado de $1/N_c^2 \approx 11\%$ [44], o que motiva a utilização da equação BK.

Vamos discutir um pouco da física de saturação/CGC em termos de evidências experimentais. Existem duas dificuldades principais para comparação com dados. A primeira delas é que existe um desenvolvimento teórico muito bem estabelecido apenas para espalhamento de um sistema diluído em um denso, como o DIS em um núcleo (eA) e espalhamento próton-núcleo, enquanto que existem muitos dados experimentais de espalhamento entre sistemas densos, como colisões núcleo-núcleo, constituindo um contexto a ser melhor explorado [32]. Outra dificuldade é que algumas alternativas de descrição, como a evolução segundo as equações DGLAP com a fatorização colinear, conseguem descrever diversos dados experimentais. Com isso, se fazem necessários dados experimentais que permitam diferenciarmos de forma definitiva a física não linear da evolução segundo equações DGLAP [32]. Colisões em energias mais altas podem, no futuro,

ser determinantes nesse t3pico.

Entretanto, diversos dados experimentais podem ser descritos pela f3sica de satura33o. Assim, vamos mostrar algumas evid34ncias experimentais da satura33o, em que observ34veis f3sicos estudados no HERA concordam com os resultados do formalismo do CGC. O *scaling* geom34trico, em que a 3nica escala dimensional em altas energias relevante 3 a de satura33o, ou seja, as se33es de choque γ^*p , em pequeno x , s3o escritas como

$$\tau = \frac{Q^2}{Q_s^2(x)} \sim \frac{1}{r^2 Q_s^2(x)}, \quad (3.7.1)$$

3 um comportamento previsto no CGC dentro da BK, por exemplo. Podemos verificar esse comportamento na se33o de choque γ^*p da Fig. 14, 3 esquerda. Outra previs33o importante da f3sica de satura33o 3 que a raz33o entre a se33o de choque difrativa e total deve ser independente da energia (uma discuss33o mais detalhada pode ser vista na Ref. [32]). Esse comportamento 3st3 presente na Fig. 14, 3 direita.

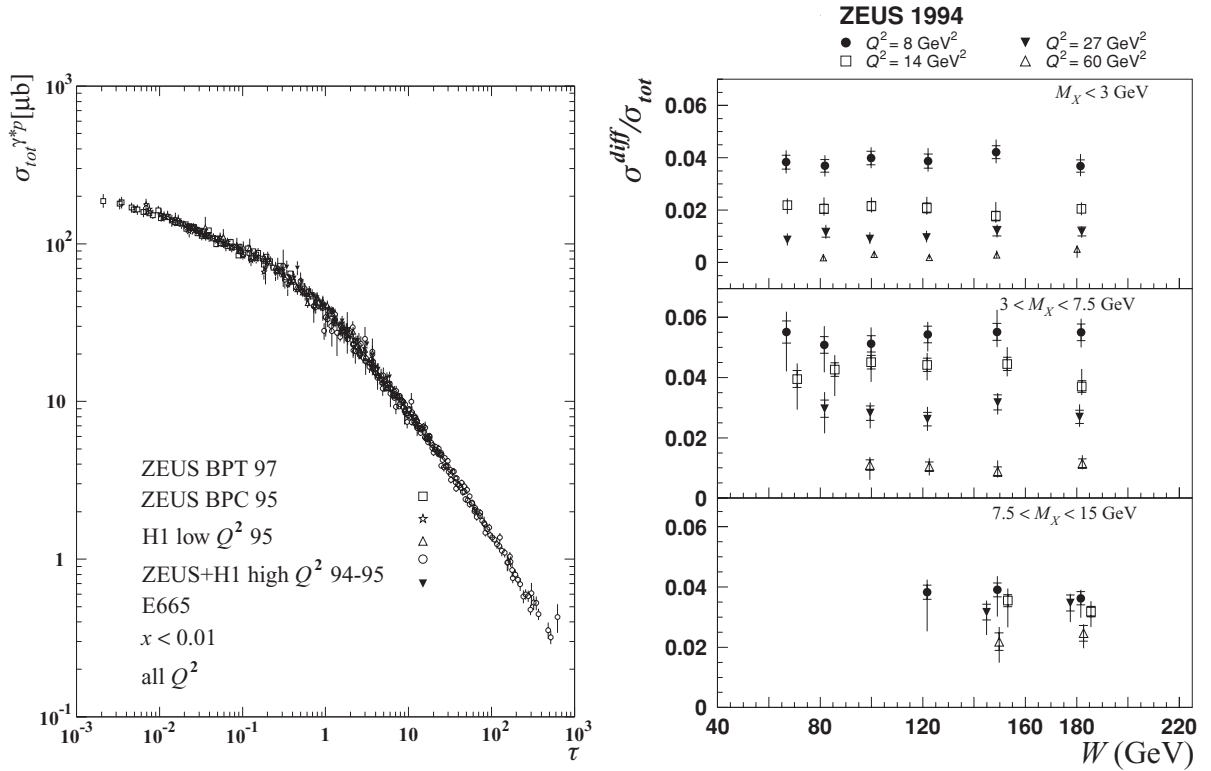


Figura 14 – Scaling geom34trico na se33o de choque total γ^*p no DIS [45], 3 esquerda, e raz33o $\sigma_{diff}/\sigma_{tot}$ independente da energia para diferentes valores de virtualidade [46], 3 direita.

Tendo analisado a satura33o no contexto do DIS, vamos estudar outra classe de espalhamento, a produ33o exclusiva de part3culas, que 3 nosso foco nesse trabalho.

4 PRODUÇÃO EXCLUSIVA DE MÉSONS VETORIAIS

Vamos estudar agora uma classe importante de processos chamados difrativos, a produção exclusiva de mésons vetoriais. Processos difrativos são aqueles em que os prótons saem intactos da colisão e separados no estado final, caracterizados por regiões no acelerador sem produção de partículas, que chamamos de gaps de rapidez. Em QCD em mais baixa ordem, essas colisões são caracterizadas pela troca de um Pomeron perturbativo, ou seja, dois glúons no estado singlete de cor. Os processos exclusivos são aqueles em que apenas o méson e o hádron sobrevivem no estado final, e para este trabalho vamos considerar a fotoprodução ($Q^2 \simeq 0$), ou seja,

$$\gamma + p \rightarrow V + p, \quad (4.0.1)$$

em que V é o méson produzido. Em nosso caso, estamos interessados na produção dos mésons J/Ψ e Υ .

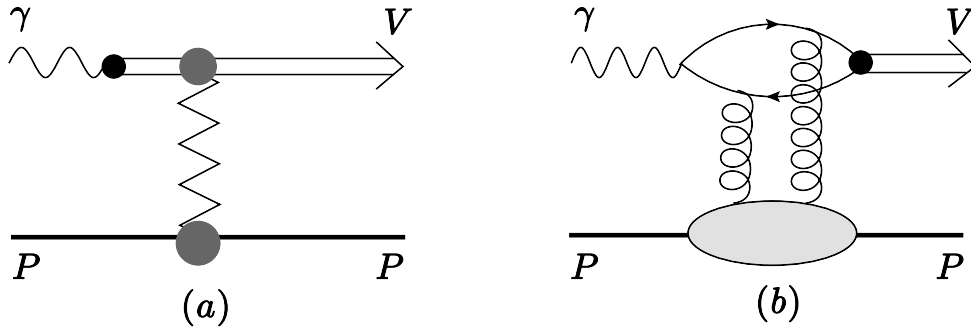


Figura 15 – Produção de mésons vetoriais no (a) VDM e (b) na troca de dois glúons [19].

Vamos analisar a seção de choque desse tipo de processo. No Modelo de Dominância Vetorial (VDM)¹, concebido por Sakurai em 1960 [47], assumimos que o fóton flutua em um méson vetorial que interage elasticamente com o fóton via troca de Pomeron, como visto na Fig. 15 à esquerda. Como a fotoprodução de mésons representa a parte elástica de $\sigma_{\text{tot}}^{\gamma p}$, com auxílio do teorema óptico, podemos escrever

$$\left. \frac{d\sigma^{\gamma p \rightarrow Vp}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{16\pi} (1 + \beta^2) (\sigma_{\text{tot}}^{\gamma p})^2, \quad (4.0.2)$$

sendo β a razão entre a parte real e imaginária da amplitude de espalhamento. No caso de dominância de Pomerons, a amplitude é puramente imaginária, sendo β zero. Assumindo a dependência em t da seção de choque elástica ditada pela teoria de Regge², temos [19]

$$\frac{d\sigma^{\gamma p \rightarrow Vp}}{dt} = \left. \frac{d\sigma^{\gamma p \rightarrow Vp}}{dt} \right|_{t=0} \exp \left[\left(b_0 + 2\alpha'_P \ln \frac{W^2}{W_0^2} \right) t \right] \quad (4.0.3)$$

¹ O VDM é uma teoria pré QCD que ainda fornece bons resultados do ponto de vista fenomenológico.

² A teoria de Regge descreve um espalhamento de dois corpos do tipo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, no limite de grande s (energia de centro de massa ao quadrado), em termos da troca de trajetórias de Regge. O Pomeron é uma trajetória de Regge. Para mais detalhes, ver Ref. [19].

e, usando (4.0.2) com $\beta = 0$, temos

$$\frac{d\sigma^{\gamma p \rightarrow Vp}}{dt} = \frac{1}{16\pi} (\sigma_{\text{tot}}^{\gamma p})^2 \exp \left[\left(b_0 + 2\alpha'_{\mathbb{P}} \ln \frac{W^2}{W_0^2} \right) t \right]. \quad (4.0.4)$$

Integrando a expressão acima entre $|t|_{\min}$ e $|t|_{\max}$ (sendo $|t|_{\min} = 0.7 \text{ GeV}^2$ tipicamente) e usando $\sigma_{\text{tot}}^{\gamma p} \sim (W^2)^{\alpha_{\mathbb{P}}(0)-1}$ nos fornece

$$\begin{aligned} \sigma^{\gamma p \rightarrow Vp}(W^2) &\sim \frac{\left[e^{-(b_0 + 2\alpha'_{\mathbb{P}} \ln(W^2/W_0^2)|t|)} \right]_{|t|_{\min}}^{|t|_{\max}}}{b_0 + 2\alpha'_{\mathbb{P}} \ln(W^2/W_0^2)} (W^2)^{2\alpha_{\mathbb{P}}(0)-2}, \\ &\sim (W^2)^{2a_{\mathbb{P}}(0)-2}. \end{aligned} \quad (4.0.5)$$

Neste caso, $a_{\mathbb{P}}$ é um parâmetro que depende do méson estudado, sendo ajustado pelas curvas experimentais³, assim como b_0 e W_0 .

A seção de choque para fotoprodução de ρ , ω e ϕ , experimentalmente, cresce da forma

$$\sigma^{\gamma p \rightarrow Vp} \sim W^{0.2}. \quad (4.0.6)$$

A seção de choque para J/Ψ , por exemplo, cresce muito mais rápido do que $W^{0.2}$. Nesse caso, como comentado na Seção 2.3, uma escala dura - a massa M_V^2 do méson - está presente no processo, e podemos usar QCD perturbativa. Para esse contexto, vamos considerar que o fóton flutua em um par quark-antiquark, que interage com o próton por meio de troca de dois glúons, ou uma escada gluônica, presente na Fig. 15 à direita. O rápido crescimento da seção de choque com W^2 é devido ao aumento da distribuição de glúons em pequeno x . Uma componente que precisa ser modelada nesse processo é a função de onda do méson, já que compõe a parte não perturbativa do estudo. O crescimento da seção de choque com a energia W pode ser visto na Fig. 16, em que mésons mais leves, com as seções de choque maiores, seguem aproximadamente o comportamento dado pela Eq. (4.0.5).

Usando funções de onda não-relativísticas para o méson vetorial, que é uma aproximação razoável para mésons pesados, a seção de choque para o processo $\gamma p \rightarrow Vp$ para QCD perturbativa com a aproximação de troca de dois glúons é

$$\left. \frac{d\sigma^{\gamma p \rightarrow Vp}}{dt} \right|_{t=0} \propto \left[\alpha_s x_{\mathbb{P}} g(x_{\mathbb{P}}, \tilde{Q}^2) \right]^2, \quad (4.0.7)$$

sendo $g(x_{\mathbb{P}}, \tilde{Q}^2)$ a distribuição de glúons em um \tilde{Q}^2 efetivo dado por

$$\tilde{Q}^2 \approx \frac{Q^2 + M_V^2}{4}. \quad (4.0.8)$$

Com a dependência no quadrado da distribuição de glúons, devido a troca de dois glúons, temos que a discriminação entre a física com e sem saturação pode ficar mais evidente,

³ Mais especificamente, é um parâmetro que leva em conta a dependência W^2 do denominador e da exponencial para a curva.

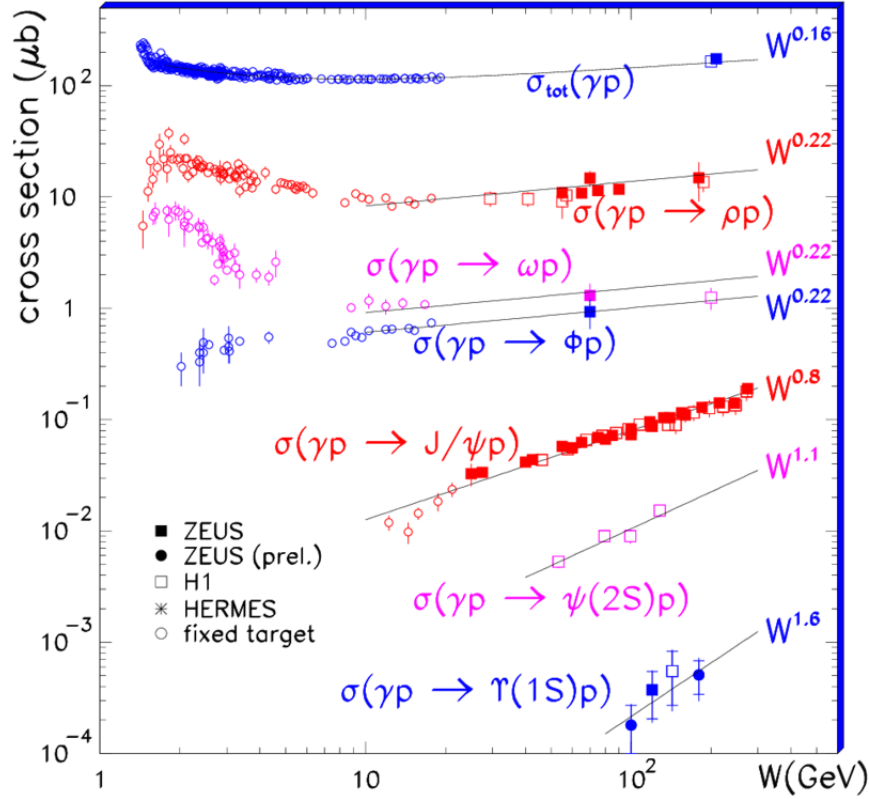


Figura 16 – Seção de choque em função da energia de centro de massa γp para vários mésons [19].

fazendo que a produção de mésons vetoriais seja ideal para esse estudo.

Para finalizar essa discussão inicial, usando o comportamento em pequeno x da distribuição de glúons como $xg(x) \sim x^{-\lambda}$, a Eq. (4.0.7) fica

$$\sigma^{\gamma p \rightarrow V p} \sim \left[x_{\mathbb{P}} g(x_{\mathbb{P}}, \tilde{Q}^2) \right]^2 \sim x_{\mathbb{P}}^{-2\lambda} \sim (W^2)^{2\lambda} \sim W^{0.8}, \quad (4.0.9)$$

em que $\lambda \approx 0.2$ é o valor aproximado que vem da análise de dados de DIS inclusivo, sendo 0.8 o expoente presente na Fig. 16 para o J/Ψ . À luz desse tipo de física, vamos analisar o formalismo de dipolo para obtenção das seções de choque $\sigma(\gamma + p \rightarrow V + p)$.

4.1 FORMALISMO DE DIPOLOS DE COR

Discutimos o formalismo de dipolo no contexto do DIS na Seção 3.5, em que um fóton virtual interage com os constituintes do próton e pode quebrá-lo. Para a produção exclusiva de partículas, em que teremos o próton intacto e um méson vetorial no estado final, vamos analisar como o formalismo de dipolo se modifica, em relação ao DIS, para calcular a seção de choque de fotoprodução para o processo quase elástico. A Fig. 17

mostra o diagrama de Feynman nesse caso, que se difere do formalismo de dipolo no DIS (ver Fig. 9) com a presença do méson e do próton intacto no estado final .

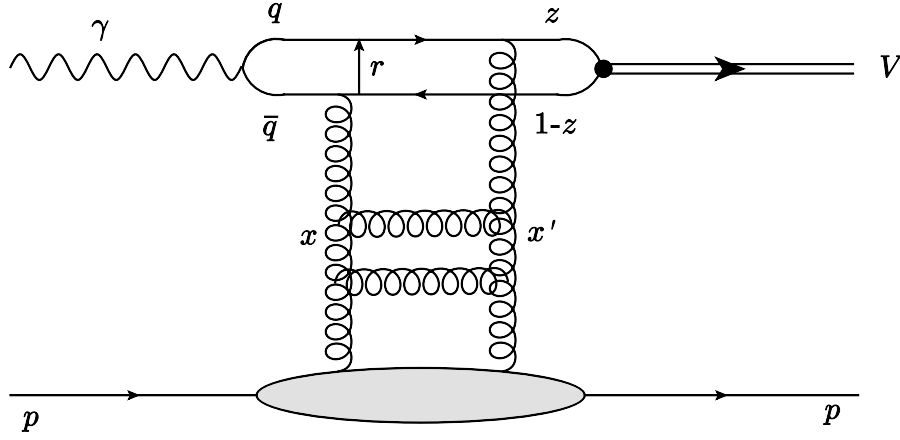


Figura 17 – Diagrama de Feynman do espalhamento $\gamma + p \rightarrow V + p$ no formalismo de dipolo.

Vamos seguir as Refs. [15, 48] para essa seção. A amplitude de espalhamento nesse caso é dada por

$$\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^* p \rightarrow V p}(x, Q, \Delta) = \int d^2\mathbf{r} \int dz [\psi_V^* \psi]_{T,L}(r, z, Q^2) \mathcal{A}_{q\bar{q}}(x, Q, \Delta), \quad (4.1.1)$$

$$= i \int d^2\mathbf{r} \int dz \int d^2\mathbf{b} [\psi_V^* \psi]_{T,L}(r, z, Q^2) e^{-i\mathbf{b} \cdot \Delta} 2[1 - S(x, r, b)], \quad (4.1.2)$$

sendo $t = \Delta^2$ e $\mathcal{A}_{q\bar{q}}(x, Q, \Delta) = 2i[1 - S(x, r, b)]$, em que S é a matriz de espalhamento. Considerando que S é predominantemente real, então

$$\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^* p \rightarrow V p}(x, Q, \Delta) = i \int d^2\mathbf{r} \int dz \int d^2\mathbf{b} [\psi_V^* \psi]_{T,L} e^{-i\mathbf{b} \cdot \Delta} 2\mathcal{N}(x, r, b), \quad (4.1.3)$$

em que amplitude de dipolo $\mathcal{N}(x, r)$ contém toda a informação sobre o alvo e a física de interação forte. Ainda, $[\psi_V^* \psi]_{T,L}$ representa o overlap da função de onda do fóton e do méson, sendo que ψ_V é assumida com o tamanho do par $q\bar{q}$ sendo muito menor do que o tamanho do próton. As funções de onda ψ_V e ψ são chamadas de frontais, e as correções não frontais podem ser incluídas usando o fator multiplicativo $\exp[i(1-z)\mathbf{r} \cdot \Delta]$ [15]. Para o caso transversal, que será particularmente de interesse nesse trabalho pois consideramos $Q^2 = 0$, temos [48]

$$[\psi_V^* \psi]_T = \hat{e}_f e \frac{N_c}{\pi z(1-z)} \left\{ m_q^2 K_0(\epsilon r) \phi_T(r, z) - [z^2 + (1-z)^2] \epsilon K_1(\epsilon r) \partial_r \phi_T(r, z) \right\}, \quad (4.1.4)$$

em que \hat{e}_f é a carga efetiva do méson e K_0 e K_1 são funções de Bessel modificadas. Expressões para as funções de onda $\phi_T(r, z)$ serão discutidas em outro momento. A seção de choque para o caso elástico é

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{T,L}^{\gamma p \rightarrow Vp}}{dt} &= \frac{R_g^2(1+\beta^2)}{16\pi} \left| \mathcal{A}_{T,L}^{\gamma p \rightarrow Vp}(x, Q, \Delta) \right|^2, \\ &= \frac{R_g^2(1+\beta^2)}{16\pi} \left| \int d^2\mathbf{r} \int dz \int d^2\mathbf{b} (\psi_V^* \psi)_{T,L} e^{-i[\mathbf{b} - (1-z)\mathbf{r}] \cdot \mathbf{\Delta}} 2\mathcal{N}(x, r, b) \right|^2, \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

em que o termo $(1 + \beta^2)$ corrige a contribuição apenas imaginária de \mathcal{A} ao considerar a matriz S puramente real, já que

$$\beta = \frac{\text{Re}\mathcal{A}}{\text{Im}\mathcal{A}} = \tan\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right), \quad \lambda = \frac{\partial \ln[\mathcal{A}(x, Q^2, \Delta)]}{\partial \ln(1/x)}. \quad (4.1.6)$$

Ainda, considerando que os glúons ligados ao par $q\bar{q}$ podem carregar diferentes frações de momento do próton, i.e., x e x' , conforme Fig. 17, adicionamos a correção

$$R_g(\lambda) = \frac{2^{2\lambda+3}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\lambda + 5/2)}{\Gamma(\lambda + 4)}, \quad (4.1.7)$$

em que Γ é a função gama. A expressão acima é válida no limite em que $x' \ll x \ll 1$ e t é pequeno. Além disso, duas funções de onda muito conhecidas na literatura (ver Ref. [48], por exemplo) serão utilizadas nesse trabalho. A primeira é a Gaus-LC (GLC), em que estamos interessados na componente transversa,

$$\phi_T(r, z) = N_T [z(1-z)]^2 \exp(-r^2/2R_T^2). \quad (4.1.8)$$

A outra função de onda é a boosted Gaussian (BG), escrita como

$$\phi_T(r, z) = \mathcal{N}_T z(1-z) \exp\left[-\frac{m_q^2 \mathcal{R}}{8z(1-z)} - \frac{2z(1-z)r^2}{\mathcal{R}^2} + \frac{m_q^2 \mathcal{R}^2}{2}\right], \quad (4.1.9)$$

sendo que os parâmetros para os mésons J/Ψ e Υ podem ser consultados na Tab. 2.

Méson	m_q/GeV	\hat{e}_f	N_T	R_T^2/GeV^{-2}	\mathcal{N}_T	$\mathcal{R}^2/\text{GeV}^{-2}$
J/Ψ	1.4	2/3	1.23	6.5	0.575	2.3
Υ	4.5	1/3	0.67	2.16	0.469	0.55

Tabela 2 – Parâmetros da funções de onda Gaus-LC e boosted Gaussian [15, 48].

Utilizaremos o formalismo de dipolo para produção de mésons para comparar com a fatorização k_T nesse mesmo contexto, a partir da discussão a seguir.

4.2 FATORIZAÇÃO k_T

Quando consideramos a evolução seguindo as equações DGLAP, desprezamos a componente transversal k_T do momento partônico [49], de forma que a DGLAP representa a fatorização colinear. Em altas energias, essa componente não pode ser considerada nula, de maneira que utilizamos a fatorização k_T para cálculo de observáveis físicos nesses regimes. Estamos interessados em um processo em que um fóton virtual γ flutua em um

par quark q e antiquark \bar{q} , formando um dipolo de cor. O quark carrega uma fração z do momento longitudinal do fóton, assim como \bar{q} carrega o momento $1 - z$. A componente $\boldsymbol{\kappa}$ é o momento transversal do fóton carregado pelo quark, e $-\boldsymbol{\kappa}$ pelo antiquark. Esse dipolo irá trocar Pomerons com o próton no colisor e, no fim, formará um méson vetorial V , descrito por uma função de onda $\psi(z, \boldsymbol{\kappa})$. Esse processo será descrito em função da energia de centro de massa W do processo fóton-próton. O diagrama de Feynman da interação está representado na Fig. 18. Temos ainda que $F(x, \mathbf{k})$ é a distribuição de glúons não integrada, sendo x a fração do momento hadrônico carregado pelos pártons e \mathbf{k} a componente transversa de momento dos glúons interagentes, em que omitimos o subscrito \perp .

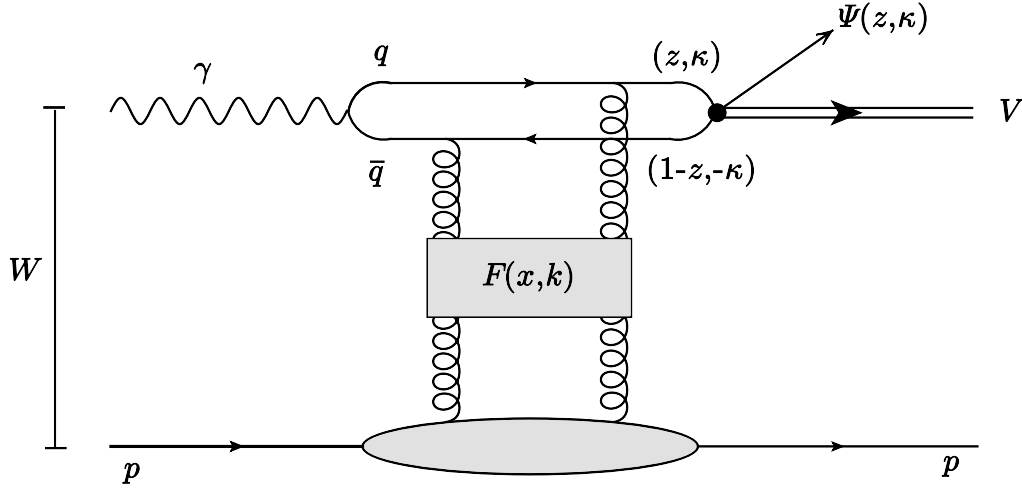


Figura 18 – Diagrama de Feynman do espalhamento $\gamma + p \rightarrow V + p$ na fatorização k_T .

A amplitude de espalhamento, descrita nas Refs. [3, 50, 51], tem como parte imaginária a expressão

$$\text{Im } \mathcal{M} = W^2 \frac{c_V \sqrt{4\pi\alpha_{em}}}{4\pi^2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^4} \alpha_s \mathcal{F}(x_1, x_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \int \frac{dz d^2\boldsymbol{\kappa}}{z(1-z)} I(\lambda_V, \lambda_\gamma), \quad (4.2.1)$$

com c_V sendo a fração de carga do quark que compõe o méson ($2/3$ para o J/ψ e $1/3$ para o Υ) e a função $I(\lambda_V, \lambda_\gamma)$ tem a seguinte forma

$$I(L, L) = \psi_V(z, \boldsymbol{\kappa}) \left\{ 4QMz^2(1-z)^2 \left[1 + \frac{(1-2z)^2}{4z(1-z)} \frac{2m_q}{M+2m_q} \right] \Phi_2 \right\}, \quad (4.2.2)$$

$$I(T, T) = \psi_V(z, \boldsymbol{\kappa}) \left\{ m_q^2 \Phi_2 + [z^2 + (1-z)^2] (\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\Phi}_1) + \frac{m_q}{M+2m_q} [\boldsymbol{\kappa}^2 \Phi_2 - (2z-1)^2 (\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\Phi}_1)] \right\}, \quad (4.2.3)$$

onde

$$M^2 = 4(m_q^2 + \mathbf{p}^2) = \frac{\boldsymbol{\kappa}^2 + m_q^2}{z(1-z)} \quad (4.2.4)$$

é a massa invariante do sistema $q\bar{q}$, m_q a massa dos quarks e $\psi_V(z, \boldsymbol{\kappa})$ é a função de onda do méson, que será discutida com mais detalhes na Seção 4.3. As quantidades Φ_2 e Φ_1 são dadas por

$$\Phi_2 = -\frac{1}{(\mathbf{r} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2} - \frac{1}{(\mathbf{r} - \mathbf{k})^2 + \epsilon^2} + \frac{1}{(\mathbf{r} + \boldsymbol{\Delta}/2)^2 + \epsilon^2} + \frac{1}{(\mathbf{r} - \boldsymbol{\Delta}/2)^2 + \epsilon^2}, \quad (4.2.5)$$

$$\Phi_1 = -\frac{\mathbf{r} + \mathbf{k}}{(\mathbf{r} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{k}}{(\mathbf{r} - \mathbf{k})^2 + \epsilon^2} + \frac{\mathbf{r} + \boldsymbol{\Delta}/2}{(\mathbf{r} + \boldsymbol{\Delta}/2)^2 + \epsilon^2} + \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\Delta}/2}{(\mathbf{r} - \boldsymbol{\Delta}/2)^2 + \epsilon^2}, \quad (4.2.6)$$

em que $\epsilon^2 = m_q^2 + z(1-z)Q^2$ e $\mathbf{r} = \boldsymbol{\kappa} + \left(z - \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{\Delta}$, sendo $\boldsymbol{\Delta}$ o momento transferido. Para nossa seção de choque, vamos utilizar apenas $I(T, T)$, pois como estamos considerando $Q^2 = 0$, então $I(L, L) = 0$. Além disso, $\mathcal{F}(x_1, x_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ é a distribuição de glúons não integrada fora da diagonal, que para pequeno $\boldsymbol{\Delta}^2$, dentro do cone de difração, pode ser aproximada como

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = F(x_{eff}, \mathbf{k}^2) \exp\left(\frac{-B(W)\boldsymbol{\Delta}^2}{2}\right) \quad (4.2.7)$$

em que consideramos $\boldsymbol{\Delta} = 0$ no limite de espalhamento frontal, ou seja, quase sem desvio; $F(x_{eff}, \mathbf{k}^2)$ é a distribuição de glúons não integrada, $B(W)$ é o parâmetro de *slope* e

$$x_{eff} = c_s \left(\frac{M_V^2 + Q^2}{W^2 + Q^2} \right), \quad (4.2.8)$$

em que $c_s = 0.41$ e M_V é a massa do méson vetorial. Aqui, a constante c_s desempenha o mesmo papel do R_g (Eq. 4.1.7), de forma que não escrevemos nossa seção de choque em termos dessa quantidade [3]. Assim, a amplitude imaginária de espalhamento é dada por

$$\begin{aligned} \text{Im } \mathcal{M}_T(W, \Delta^2 = 0, Q^2) &= W^2 \frac{\sqrt{4\pi\alpha_{em}c_V}}{4\pi^2} 2 \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)} \int_0^\infty \pi d\boldsymbol{\kappa}^2 \psi_V(z, \boldsymbol{\kappa}^2) \times \\ &\int_0^\infty \frac{\pi d\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^4} \alpha_s F(x_{eff}, \mathbf{k}^2) \left(A_0(z, \boldsymbol{\kappa}^2) W_0(\boldsymbol{\kappa}^2, \mathbf{k}^2) + A_1(z, \boldsymbol{\kappa}^2) W_1(\boldsymbol{\kappa}^2, \mathbf{k}^2) \right), \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

e as funções A_0 , A_1 , W_0 e W_1 são escritas como

$$A_0(z, \boldsymbol{\kappa}^2) = m_q^2 + \frac{\boldsymbol{\kappa}^2 m_q}{M + 2m_q}, \quad (4.2.10)$$

$$A_1(z, \boldsymbol{\kappa}^2) = \left[z^2 + (1-z)^2 - (2z-1)^2 \frac{m_q}{M + 2m_q} \right] \frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2}, \quad (4.2.11)$$

$$W_0(\boldsymbol{\kappa}^2, \mathbf{k}^2) = \frac{1}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2} - \frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{\kappa}^2 - \epsilon^2 - \mathbf{k}^2)^2 + 4\epsilon^2 \boldsymbol{\kappa}^2}}, \quad (4.2.12)$$

$$W_1(\boldsymbol{\kappa}^2, \mathbf{k}^2) = 1 - \frac{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2}{2\boldsymbol{\kappa}^2} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\kappa}^2 - \epsilon^2 - \mathbf{k}^2}{\sqrt{(\boldsymbol{\kappa}^2 - \epsilon^2 - \mathbf{k}^2)^2 + 4\epsilon^2 \boldsymbol{\kappa}^2}} \right), \quad (4.2.13)$$

Finalmente, a seção de choque de fotoprodução de mésons vetoriais na fatorização k_T é

$$\sigma_T(\gamma p \rightarrow V p) = \frac{1 + \rho^2}{16\pi B(W)} \left| \text{Im} \frac{\mathcal{M}}{W^2} \right|^2, \quad (4.2.14)$$

em que ρ recupera a contribuição da parte real da amplitude de espalhamento, sendo dado por

$$\rho = \frac{\text{Re } \mathcal{M}}{\text{Im } \mathcal{M}} = \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{\partial(\text{Im } \mathcal{M}/W^2)}{\partial \log W^2} \right]. \quad (4.2.15)$$

Ainda, como já comentando, $B(W)$ é o parâmetro de *slope* e podemos escrevê-lo como

$$B(W) = B_0 + 2\alpha'_{eff} \log \left(\frac{W^2}{W_0^2} \right), \quad (4.2.16)$$

que corrige a inclinação da seção de choque com o momento transferido, com os parâmetros B_0 e α'_{eff} sendo obtidos por dados experimentais. Estamos usando $\alpha'_{eff} = 0.164 \text{ GeV}^{-2}$, $W_0 = 95 \text{ GeV}$ e $B_0 = 4.5 \text{ GeV}^{-2}$ para J/Ψ e $B_0 = 3.5 \text{ GeV}^{-2}$ para Υ [51]. Ainda, por não termos dependência explícita no quadrimomento transferido t nas UGDs, o parâmetro de *slope* surge ao integrarmos em t .

Diferente do contexto do DIS, em que a seção de choque $\gamma^* p$ é proporcional à distribuição de glúons não integrada (ver Eq. (3.4.7)), na produção exclusiva de mésons a seção de choque é proporcional ao módulo quadrado da amplitude de espalhamento, que resulta na UGD ao quadrado, como na Eq. (4.2.14). Por isso, estudar efeitos de saturação é muito vantajoso no contexto da produção de mésons, já que UGDs com saturação podem ser discriminadas mais facilmente de UGDs sem saturação.

4.3 FUNÇÕES DE ONDA

Utilizamos dois tipos de funções de onda distintas em nossos cálculos da fatorização k_T , baseadas na Ref. [3], considerando apenas o estado fundamental 1S. A gaussiana, representando um modelo do tipo oscilador harmônico, é escrita como

$$\psi_{1S}(\mathbf{p}) = C_1 \exp \left(-\frac{\mathbf{p}^2 r_1^2}{2} \right), \quad (4.3.1)$$

em que C_1 e r_1^2 são parâmetros obtidos pela condição de normalização e largura de decaimento, que serão discutidos ainda nessa seção.

Também utilizamos uma função de onda do tipo coulombiana, dada por

$$\psi_{1S}(\mathbf{p}) = \frac{C_2}{\sqrt{M}} \frac{1}{(1 + a_1^2 \mathbf{p}^2)^2}, \quad (4.3.2)$$

no qual o parâmetro a_1^2 está relacionado com o tamanho do sistema ligado e M é a massa invariante dada pela Eq. (4.2.4). Vamos discutir como obtemos os parâmetros das funções de onda gaussiana e coulombiana.

4.3.1 Parâmetros das funções de onda

Para estados S das funções de onda, temos a seguinte normalização

$$1 = \frac{N_c}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \, 4M |\psi^S(\mathbf{p}^2)|^2, \quad (4.3.3)$$

sendo esfericamente simétrico. Temos ainda a constante de decaimento f_V , em termos de $V \rightarrow e^+e^-$. No caso dos estados S,

$$f_S = \frac{N_c}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \, \frac{8}{3} (M + m) \psi_S(\mathbf{p}^2) \quad (4.3.4)$$

e a largura de decaimento será dada por

$$\Gamma(V \rightarrow e^+e^-) = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3M_V^3} f_V^2 c_V^2. \quad (4.3.5)$$

Utilizando essas condições de normalização, obtemos as constantes r_1^2 e a_1^2 para cada méson, presentes na Tab. 3. Além disso, na Fig. 19 temos as curvas para as duas funções de onda para cada méson vetorial estudado.

Méson	r_1^2	C_1	a_1^2	C_2
J/Ψ	2.665	2.259	4.505	12.66
Υ	0.613	0.433	0.990	4.062

Tabela 3 – Valores das constantes presentes nas funções de onda em unidades de GeV^{-2} .

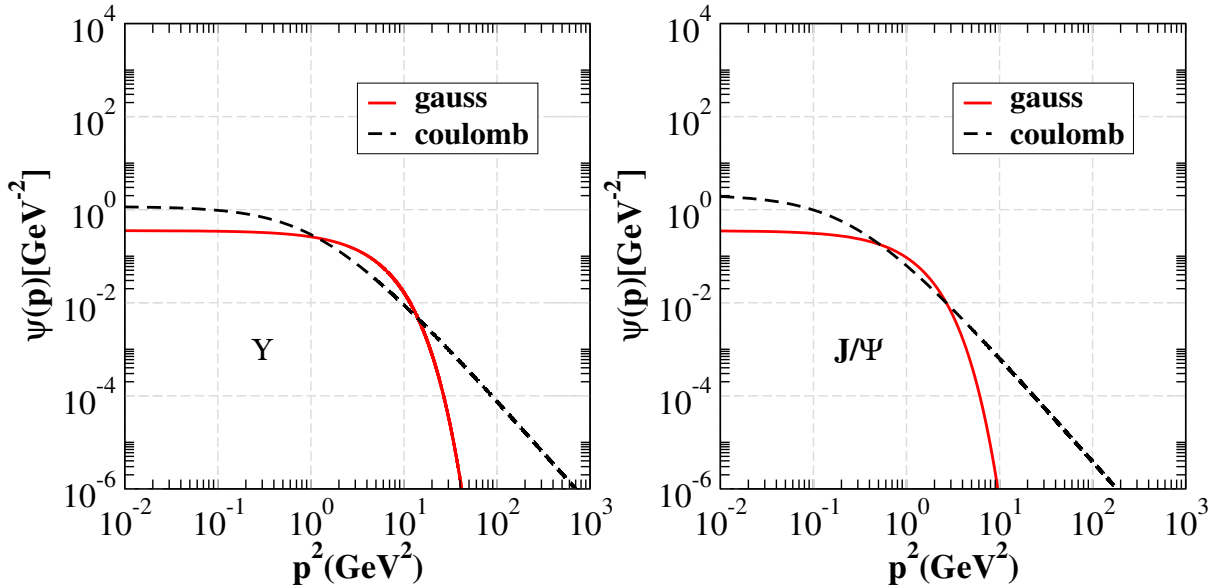


Figura 19 – Funções de onda gaussiana e coulombiana para o Υ , à esquerda e J/Ψ , à direita.

Para prever o comportamento das funções de onda na seção de choque, é mais interessante calcular a expressão $H(\kappa^2)$, sendo a integração nas variáveis z e \mathbf{k} na Eq.

(4.2.9), ou seja,

$$H(\kappa^2) = \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)} \psi_V(z, \kappa^2) \int_0^\infty \frac{\pi d^2 \mathbf{k}}{\mathbf{k}^4} \left(A_0(z, \kappa^2) W_0(\kappa^2, \mathbf{k}^2) + A_1(z, \kappa^2) W_1(\kappa^2, \mathbf{k}^2) \right). \quad (4.3.6)$$

Com isso, construímos as Fig. 20 para as funções de onda gaussiana e coulombiana e os mésons estudados. Percebe-se que, para ambos os mésons, a função gaussiana tem valores maiores em quase todo intervalo de interesse κ^2 . Além disso, esse fato é atestado ao se fazer a integração das curvas, com as gaussianas tendo valores maiores que as coulombianas. Dessa forma, esperamos que nossos resultados apresentem seções de choque maiores para a função de onda gaussiana do que para a coulombiana.

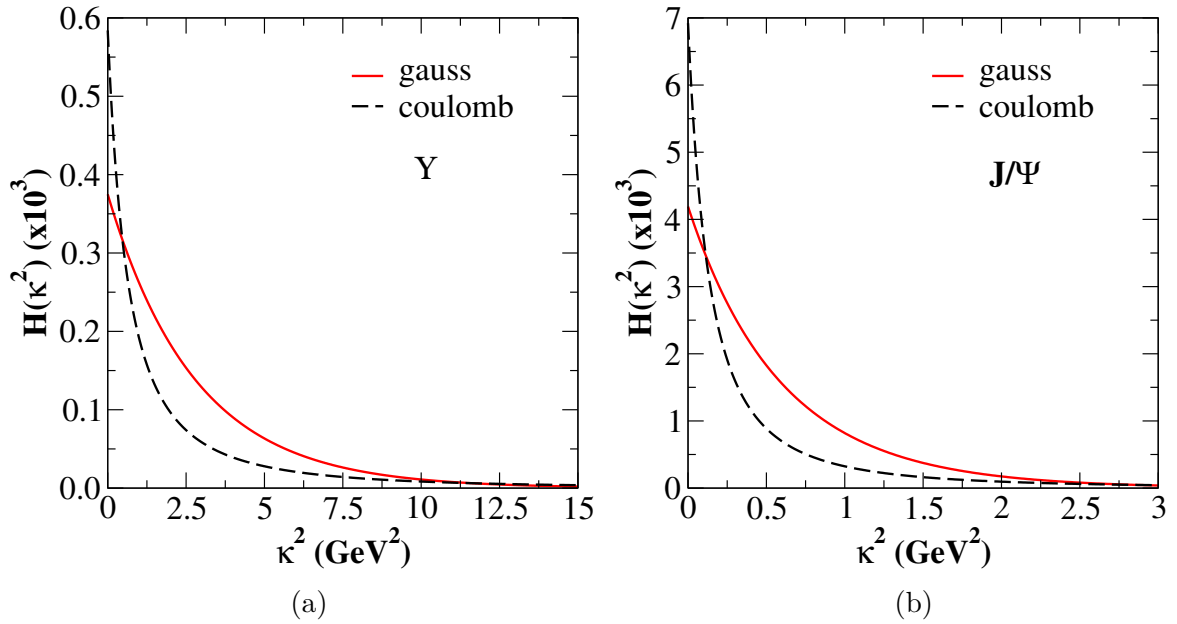


Figura 20 – Comportamento das funções de onda gaussiana e coulombiana utilizadas para os mésons (a) Υ e (b) J/Ψ .

4.4 MODELOS DE DIPOLO E DISTRIBUIÇÕES DE GLÚONS NÃO INTEGRADAS

Com o formalismo de dipolo sendo uma maneira interessante de estudar a saturação partônica, diversos modelos fenomenológicos para a amplitude de espalhamento \mathcal{N} foram propostos na literatura. Eles contêm as características esperadas para a amplitude de espalhamento, como o limite de transparência de cor e a saturação. Um deles, já comentado, é o GBW, com uma expressão simples para a seção de choque de dipolo. Outros modelos que serão comentados a seguir são a *running coupling* BK (rcBK) e *analytical* BK (aBK). Esses modelos permitirão que obtenhamos as distribuições de glúons não integradas $F(x, \mathbf{k}^2)$ fazendo uma transformada de Fourier, já que \mathcal{N} é escrita em termos do raio do dipolo r .

As UGDs fornecem a probabilidade de encontrar um glúon com fração de momento longitudinal x e momento transversal \mathbf{k}^2 [19]. A Fig. 21 mostra a evolução BFKL da

distribuição de glúons não integrada para três valores de x . Podemos esperar, então, que nossas distribuições tenham um pico, que é o ponto com mais glúons dentro do próton, caracterizado pelo quadrado da escala de saturação Q_s , ou seja, a maior parte dos glúons tem $k \approx Q_s$, e que a partir disso a distribuição cai com o inverso do momento transversal dos glúons [32].

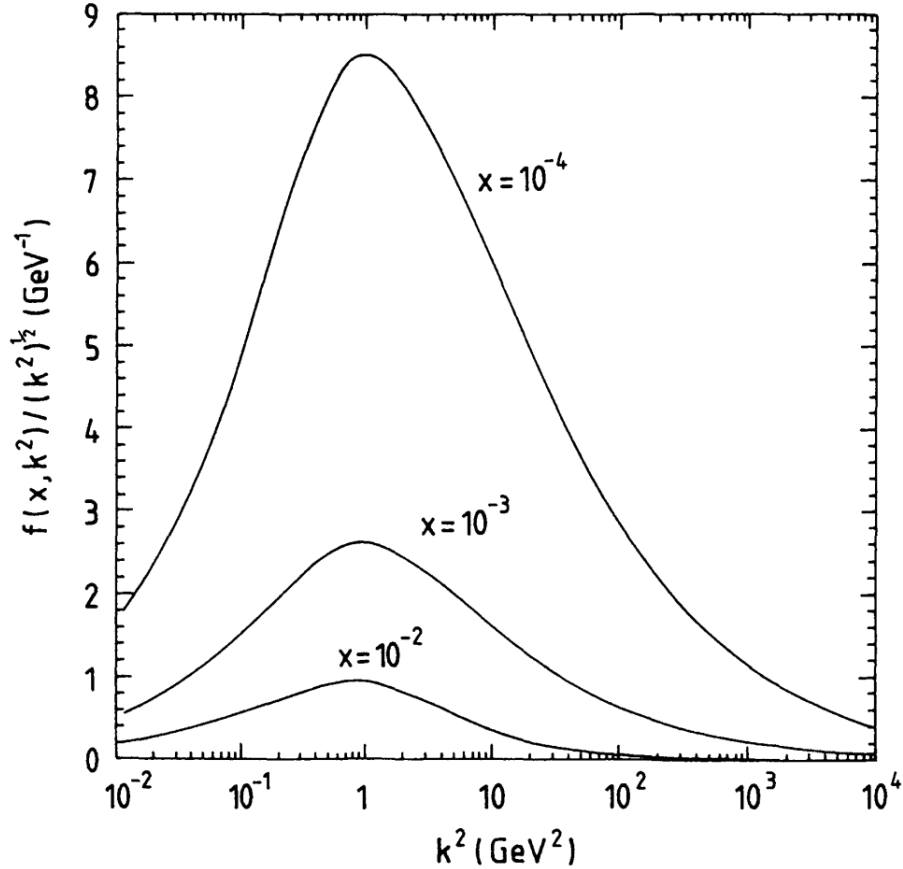


Figura 21 – Espaço de fase da distribuição de glúons no momento transversal para a BFKL [32].

Tendo isso em vista, vamos discutir os modelos utilizados nessa dissertação para as distribuições de glúons para três valores distintos de x , que foram obtidos pela transformada de Fourier das amplitudes de espalhamento de dipolo. Esperamos que valores cada vez menores de x levem a distribuições maiores de glúons, tendo em vista que o decréscimo em x equivale a um aumento da energia de centro de massa fóton-próton da colisão.

4.4.1 Modelo GBW

A UGD devido a Golec-Biernat-Wüsthoff (GBW) vem do modelo de dipolo obtido utilizando dados do DESY-HERA [4, 51]. A equação que representa a GBW no espaço de momento transversal é

$$F(x, \mathbf{k}^2) = \frac{3\sigma_0}{4\pi^2\alpha_s} R_0^2(x) \mathbf{k}^4 \exp[-R_0^2(x) \mathbf{k}^2], \quad (4.4.1)$$

onde

$$R_0(x) = \frac{1}{Q_0} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\lambda/2}, \quad (4.4.2)$$

em que $Q_0 = 1$ GeV e $R_0(x)$ tem uma relação inversamente proporcional à escala de saturação Q_s , dada pela Eq. (3.3.5) e discutido na Eq. (3.5.24). Podemos concluir que, quanto menor o valor de x , maior é a contribuição da dinâmica dos glúons no hádron em relação ao seu momento transversal \mathbf{k} . Os parâmetros utilizados na GBW estão presentes na Tab. 4.

	σ_0 (mb)	x_0	λ
GBW	29.12	0.41×10^{-4}	0.277
GBW NEW	27.43	0.40×10^{-4}	0.248

Tabela 4 – Parâmetros presentes no GBW e GBW NEW.

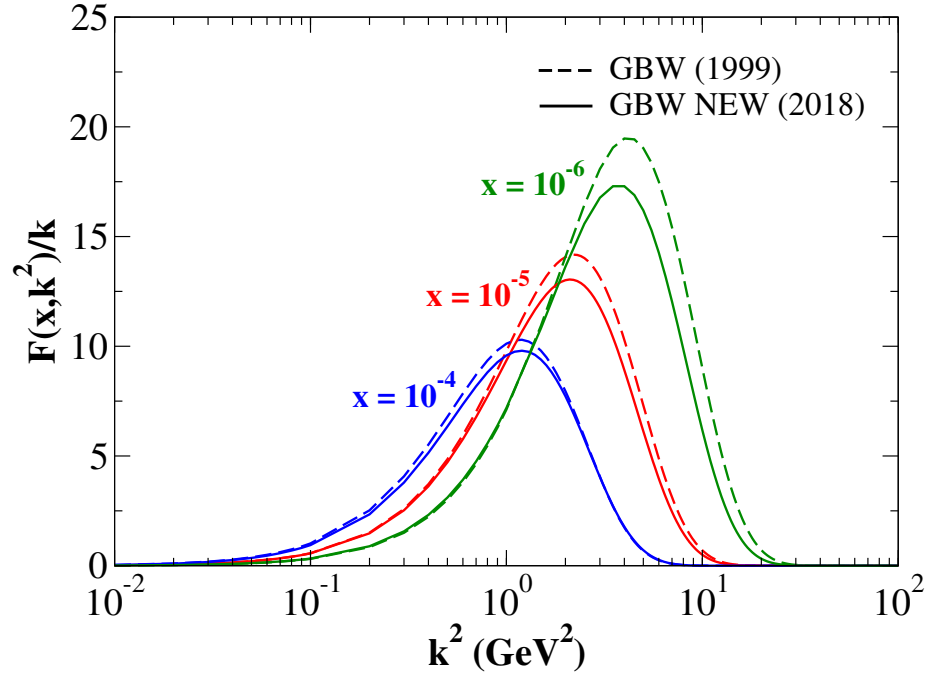


Figura 22 – GBW (linhas tracejadas) e GBW NEW (linhas contínuas) para diferentes valores de x . Quanto menor o valor de x , maior a distribuição de glúons.

Além disso, medidas mais recentes para os parâmetros do GBW foram determinadas a partir de dados extraídos em pequeno x em 2018 [52]. Este modelo com parâmetros atualizados será chamado de GBW NEW a partir de agora, com seus valores também presentes na Tab. 4 e a UGD representada na Fig. 22. Nosso interesse em utilizar dois modelos para o GBW é comparar os resultados para as seções de choque e distribuições

de rapidez, de forma a avaliar as diferenças entre o modelo com os parâmetros originais e atualizado.

4.4.2 Modelo rcBK

Outro modelo de dipolo interessante para nosso estudo é a rcBK (*running coupling BK*), que é uma solução numérica da equação BK obtida em 2009 [5]. Os autores utilizaram correções de constante de acoplamento variável, obtendo a amplitude de espalhamento de dipolo. Com a amplitude de espalhamento $\mathcal{N}(\mathbf{r})$ obtida a partir da Eq. (3.6.2), fazemos a transformada de Fourier e obtemos $\mathcal{N}(\mathbf{k})$ no espaço dos momentos. Na referência [5], é fornecido um código em FORTRAN para o cálculo da amplitude de espalhamento e a Fig. 23 mostra comportamento da UGD para diferentes valores de x . Como esperado, quanto menor o valor de x , maior o número de glúons sendo emitidos dentro do hádron.

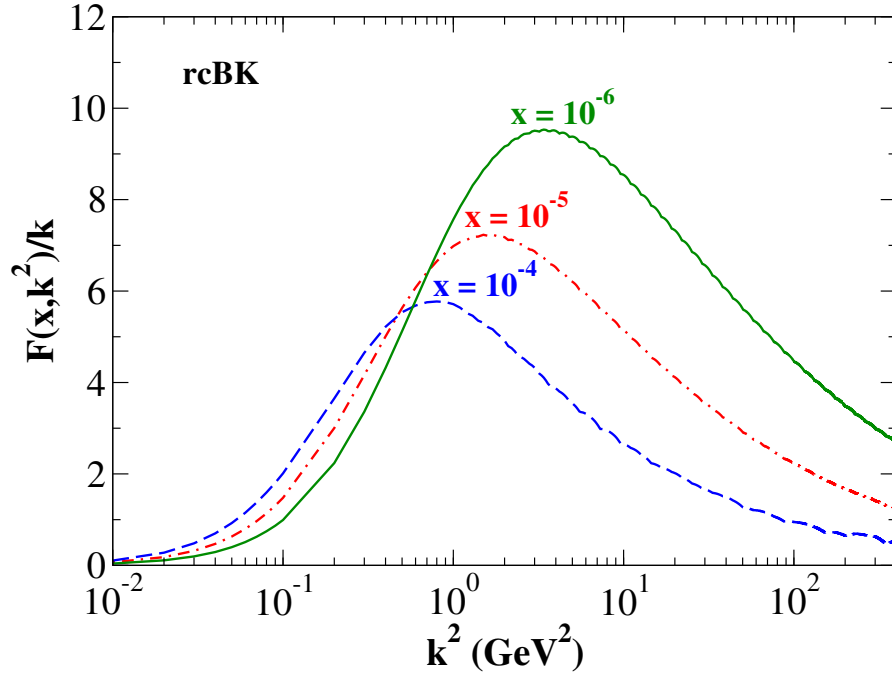


Figura 23 – rcBK para diferentes valores de x .

4.4.3 Modelo aBK

A equação BK, sendo uma equação integro-diferencial não-linear, não possui uma solução analítica exata. Usando o método do equilíbrio homogêneo (*homogeneous balance method*)⁴, Cai, Wang e Chen em trabalho recente [6] propuseram uma solução analítica para a BK, que aqui chamaremos de aBK. Os parâmetros ajustados pelos autores para

⁴ O método do equilíbrio homogêneo consiste em encontrar a solução de um conjunto de equações não lineares parciais, em que o termo de maior ordem não linear e maior ordem na derivada parcial são balanceados para obter a solução exata. Para mais detalhes, ver Ref. [6]

dados do HERA podem ser consultados na Tab. 5. A solução da equação BK com constante de acoplamento variável na prescrição da escala de saturação é

$$N(L, Y) = \frac{A_0 \exp(2\beta)}{\left\{ \exp \beta + \exp \left[L \sqrt{A_0/6A_2} \right] \right\}^2}, \quad (4.4.3)$$

em que $L = \ln(\mathbf{k}^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)$ e β é dado por

$$\beta = \theta + \frac{(A_1 \sqrt{6A_0/A_2} + 5A_0) \sqrt{cY}}{3bc}, \quad b = \frac{11N_c - 2N_f}{12N_c}, \quad (4.4.4)$$

onde N_c é o número de cores e N_f o número de sabores.

A_0	A_1	A_2	c	θ
6.98	-8.46	2.95	3.11	-2.76

Tabela 5 – Parâmetros do modelo aBK [6].

Para utilizar a Eq. (4.4.3) com a notação que utilizamos nesse trabalho, seguindo [19, 32], fazemos

$$F(x, \mathbf{k}^2) = \mathbf{k}^2 \frac{N_c r_p^2}{\alpha_s \pi} N(L, Y) \quad (4.4.5)$$

sendo o raio do próton $r_p = 3.2 \text{ GeV}^{-1}$ [6].

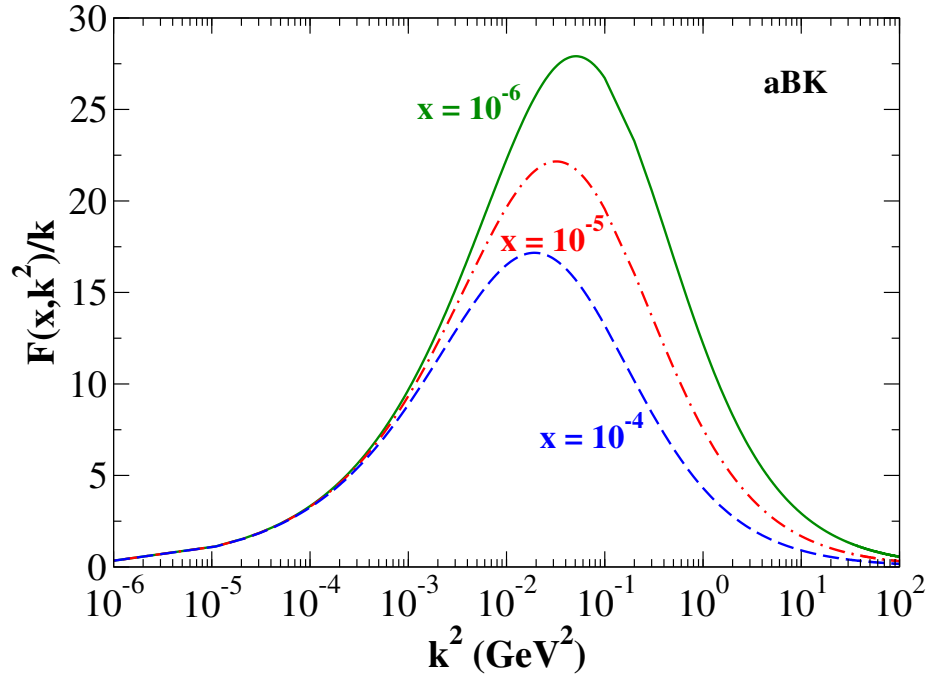


Figura 24 – aBK para diferentes valores de x .

Na Fig. 24, temos o comportamento da aBK, que reproduz o que esperamos das UGDs, em que a distribuição de glúons não integrada é maior para menor x . Comparando

as curvas da figura da aBK com GBW e rcBK, os picos se localizam em valores de \mathbf{k}^2 menores, entre $10^{-2} - 10^{-1}$, enquanto que para os outros dois casos ficam em torno de $10^0 - 10^1$. Dessa forma, temos \mathbf{k}^2 com valores menores na escala de saturação, ou seja, mais glúons com menos momento transversal.

Com os ingredientes aqui discutidos, podemos calcular as seções de choque fóton-próton usando os formalismos da fatorização k_T e dipolo. Na próxima seção, vamos estudar a aproximação de fótons equivalentes, que permite o estudo de seções de choque hádron-hádron. Este formalismo permitirá que sejam feitos estudos dos observáveis medidos no LHC como seções de choque e distribuição de rapidez em colisões hádron-hádron.

5 FOTOPRODUÇÃO DE PARTÍCULAS EM COLISÕES ULTRAPERIFÉRICAS

Os processos que estamos interessados para produção de mésons vetoriais são os fóton-induzidos, que são abordados pela aproximação de fótons equivalentes. Nesse formalismo, podemos considerar que o fóton é real ($Q^2 \approx 0$), já que a escala dura do processo é a massa dos mésons (sendo grande no nosso caso) e podemos estudar a produção exclusiva de partículas, quando o processo é limpo e apenas o méson e os hádrons sobrevivem no final. Nesse contexto, como o fóton não porta carga elétrica, portanto não emite partículas, são produzidos mésons no estado final sem outras partículas envolvidas além dos hádrons iniciais, que não quebram.

Vamos considerar colisões do tipo ultraperiféricas (UPCs), representadas pela Fig. 25. Para essas colisões, o parâmetro de impacto b é maior que a soma dos raios das partículas envolvidas na colisão. Nesse caso, os hádrons atuam como fonte de fótons, sendo colisões do tipo fóton-núcleo possíveis. Com um parâmetro de impacto grande o suficiente, as interações hadrônicas são suprimidas, sendo a interação inicial descrita pela QED e, posteriormente, a interação fóton-hádron descrita pela QCD. Outros casos possíveis de colisão são a periférica, em que $b < R_1 + R_2$, e frontal, com $b \approx 0$, que não são objetos de estudo dessa dissertação.

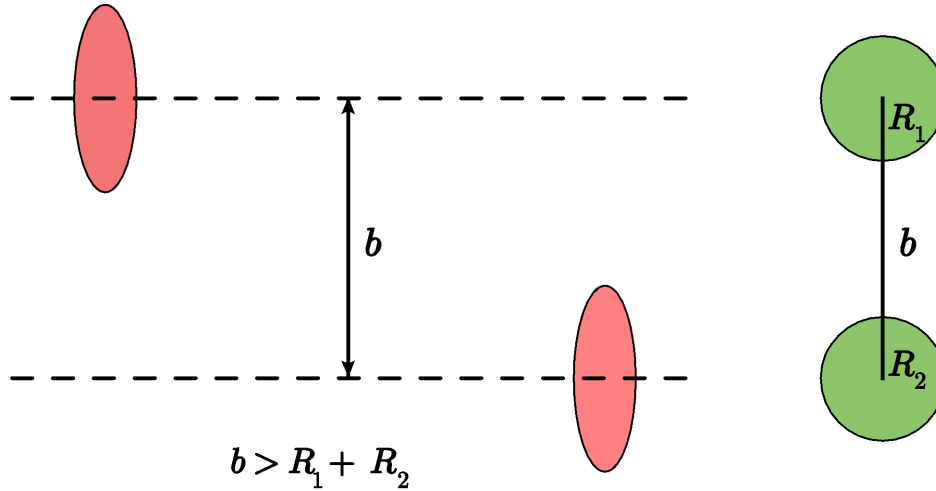


Figura 25 – Colisão ultraperiférica, caracterizada por um parâmetro de impacto b maior que a soma dos raios das partículas.

Além das colisões fóton-próton, que são amplamente estudadas em colisores como o HERA e o LHC, colisões com núcleos pesados, como o chumbo (Pb) são interessantes pois as seções de choque são ampliadas devido aos grandes campos gerados. O LHC é particularmente interessante para o estudo da física de saturação, pois as altas energias permitem que a física de pequeno x seja acessada em colisões γp e γA em que $W \sim 1$ TeV, sendo W a energia de centro de massa fóton-hádron [15].

Quando um núcleo é a fonte de fóton da colisão, as seções de choque são ampliadas

por um fator Z^2 se os fótons forem emitidos por todo o núcleo de forma coerente. Então, o comprimento de onda do fóton deve ser da ordem do raio do núcleo. Portanto, a virtualidade do fóton deve respeitar as relações

$$Q^2 \leq \frac{1}{R_A^2} \quad \rightarrow \quad Q_{\max}^2 = \frac{1}{R_A^2}. \quad (5.0.1)$$

Sendo k o quadrimomento do fóton, sabemos que $Q^2 = -k^2$ e, para $k = (\omega, k_x = \omega/\gamma, \mathbf{k}_\perp)$, no qual x é o eixo de colisão, temos

$$Q^2 \approx \frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_\perp^2. \quad (5.0.2)$$

Combinando as Eqs. (5.0.1) e (5.0.2), obtemos para a energia e momento máximos dos fótons, respectivamente,

$$\omega_{\max} \approx \frac{\gamma_L}{R_A} \quad \text{e} \quad |\mathbf{k}_{\perp, \max}| \approx \frac{1}{R_A}. \quad (5.0.3)$$

A Tab. 6 mostra diversas colisões propostas para os colisores RHIC e LHC, bem como os valores máximos de luminosidade \mathcal{L}_{AB} , energia dos feixes E_{feixe} e fator gama de Lorentz γ_L . A luminosidade é uma característica dos colisores, sendo proporcional ao número de colisões que ocorrem em um dado período. Comparando RHIC e LHC, percebemos que o LHC alcançará valores maiores em todos os casos comparando colisões de mesmo tipo, por colidir hádrons em energias mais elevadas. Além disso, as energias de centro de massa $\sqrt{s_{\text{NN}}}$ e $\sqrt{s_{\gamma\text{N}}}$, principalmente do LHC, são indicações para futuras colisões, de forma que podemos fazer previsões para colisões próton-próton (pp), próton-chumbo ($p\text{Pb}$) e chumbo-chumbo (PbPb), um dos objetivos desse trabalho. As colisões próton-oxigênio ($p\text{O}$) e oxigênio-oxigênio (OO) são particularmente interessantes pois é esperado que nos próximos anos esta análise seja feita no LHC, e podemos utilizar a fatorização k_T para fazer previsões para essas colisões.

A Tab. 6 também traz informações sobre o colisor Futuro Colisor Circular (FCC). O FCC será uma extensão do atual LHC, com uma circunferência de 90 – 100 km e energia de centro de massa de 100 TeV para colisões próton-próton. Com o LHC atingindo seu pico de luminosidade em torno de 2040, alcançar energias ainda mais altas com o FCC permitirão que nova física possa ser detectada [54]. As energias de centro de massa máximas para o FCC foram calculadas por

$$\sqrt{s_{\gamma\text{N}}} = (2\omega_{\max}\sqrt{s_{\text{NN}}})^{1/2}, \quad (5.0.4)$$

em que $\gamma_L = \sqrt{s_{\text{NN}}}/2m_p$, sendo R_A o raio do próton/chumbo¹.

Tendo em vista essa discussão, vamos estudar a aproximação de fótons equivalentes considerando UPCs, para obter os observáveis físicos relacionados com as colisões citadas.

¹ Seguindo a Ref. [2], foi utilizado como raio do próton $R_p = 0.6$ fm para cálculo no FCC.

AB	\mathcal{L}_{AB} ($\text{mb}^{-1}\text{s}^{-1}$)	$\sqrt{s_{\text{NN}}}$ (TeV)	E_{feixe} (TeV)	γ_L	ω_{max} (GeV)	$\sqrt{s_{\gamma\text{N}}^{\text{max}}}$ (GeV)
RHIC						
Au+Au	0.4	0.2	0.1	106	3.0	34.7
pp	6000	0.5	0.25	266	87	296
LHC						
O+O	160	7	3.5	3730	243	1850
Ar+Ar	43	6.3	3.15	3360	161	1430
Pb+Pb	0.42	5.5	2.75	2930	81	950
$p\text{O}$	10000	9.9	4.95	5270	343	2610
$p\text{Ar}$	5800	9.39	4.7	5000	240	2130
$p\text{Pb}$	420	8.8	4.4	4690	130	1500
pp	10^7	14	7	7455	2452	8390
FCC						
Pb+Pb	7.3	39	19.5	20783	576	6706
$p\text{Pb}$	1192	63	31.5	33572	931	10832
pp	5.6×10^7	100	50	53290	17559	59260

Tabela 6 – Parâmetros e limites cinemáticos para processos fóton-hádron hádron-hádron no RHIC, LHC [2] e FCC [53] considerando colisões ultraperiféricas.

5.1 APROXIMAÇÃO DE FÓTONS EQUIVALENTES

O método dos fótons equivalentes, desenvolvido de forma clássica em 1924 por Enrico Fermi [55], consiste em considerar o campo eletromagnético de uma carga carregada, em velocidades próximas à da luz, como uma nuvem de fótons quase reais. Isso se deve pela partícula sofrer contração de Lorentz em altas velocidades, fazendo com que seu campo eletromagnético tenha maior contribuição da parte transversa, assemelhando-se ao campo eletromagnético da luz. Um esquema do método pode ser visto na Fig. 26. Com esse desenvolvimento prévio, Weizsäcker [56] e Williams [57–59] em 1934 adicionaram correções quânticas e relativísticas ao formalismo.

Em colisões ultraperiféricas de hádrons em altas energias, espera-se que a parte inicial do processo seja dominada pela troca de fótons de baixas virtualidades, devido ao pequeno quadrimomento transferido nesse tipo de interação. Nesse contexto, é possível mostrar (Apêndice F) que a seção de choque hádron-hádron σ_{hh} pode ser fatorizada em termos da seção de choque fóton-hádron $\sigma_{\gamma h}$, devido à interação do fóton com o hádron alvo, e do fluxo de fótons equivalentes $n(\omega)$, devido à emissão de fótons por parte do hádron projétil. Dessa forma,

$$\sigma_{hh} = \int d\omega \frac{n(\omega)}{\omega} \sigma_{\gamma h}. \quad (5.1.1)$$

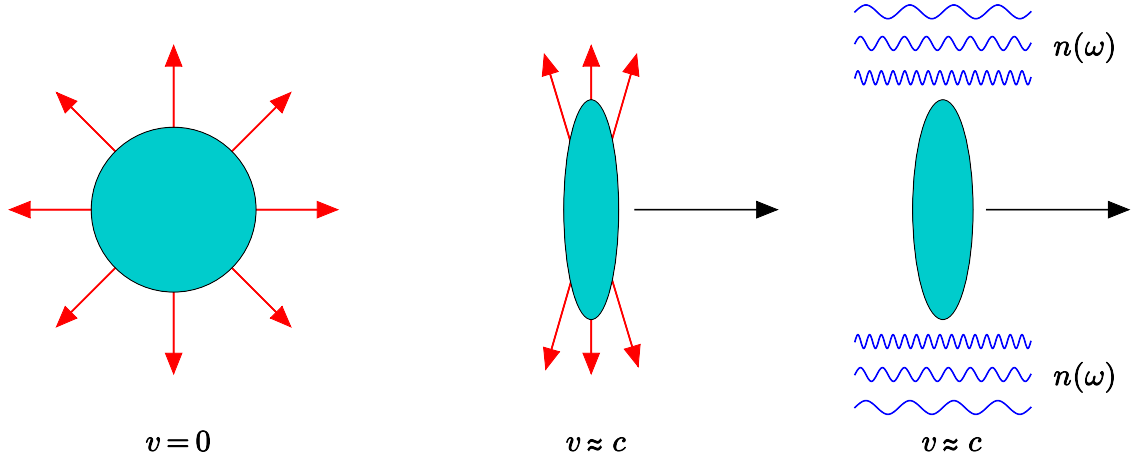


Figura 26 – Campo eletromagnético de uma partícula em repouso. Conforme a velocidade se aproxima da velocidade luz, a partícula sofre contração de Lorentz, e o campo se torna transversal à direção de movimento da carga, podendo ser visto como uma nuvem de fótons virtuais $n(\omega)$.

A partir da Eq. (5.1.1), podemos calcular, por exemplo, uma seção de choque próton-próton ao considerar que o próton atua como fonte de fótons, que irão colidir com o próton alvo. Conhecendo a seção de choque fóton-próton para produção de estado final X , calculada por exemplo com o formalismo de dipolo ou fatorização k_T ; bem como o fluxo de fótons equivalentes devido ao próton ultra-relativístico (que pode ser calculado com a QED), podemos calcular a seção de choque pp do mesmo estado X final [15]. Escrevendo a seção de choque em termos da derivada em relação a ω , temos

$$\frac{d\sigma_{hh}}{d\omega} = \frac{1}{\omega} n(\omega) \sigma_{\gamma h}(\omega) \quad (5.1.2)$$

e, com a energia do fóton podendo ser escrita como $\omega = (M_V/2)e^Y$, ou seja, $Y = \ln(2\omega/M_V)$, em que Y é a rapidez do méson vetorial produzido, podemos reescrever a equação (5.1.2),

$$\frac{d\sigma_{hh}}{dY}(\sqrt{s}, Y) = n(Y) \sigma_{\gamma h}(Y), \quad (5.1.3)$$

de forma que obtemos uma relação para a distribuição de rapidez do méson vetorial produzido em colisões hádron-hádron em termos do fluxo de fótons e da seção de choque fóton-hádron. A distribuição de rapidez é um observável físico medido diretamente nos colisores, relacionada com as regiões de maior probabilidade de detecção da partícula produzida.

Para considerar contribuições de fluxo de fótons provenientes da esquerda ou da direita na colisão, já que qualquer um dos hádrons podem atuar como a fonte de fótons, a expressão mais completa para a aproximação de fótons equivalentes é

$$\frac{d\sigma_{hh}}{dY}(Y) = n(Y) \sigma_{\gamma h}(Y) + n(-Y) \sigma_{\gamma h}(-Y). \quad (5.1.4)$$

Ainda, podemos calcular a seção de choque total a partir da expressão acima,

$$\sigma_{hh} = \int_{Y_{\min}}^{Y_{\max}} dY \frac{d\sigma_{hh}}{dY}, \quad (5.1.5)$$

quantidade que pode ser comparada com dados experimentais.

Como o fluxo de fótons pode ser obtido em termos da distância transversa r do centro dos hádrons, então

$$\frac{n(\omega)}{\omega} = \int d^2\mathbf{r} N(\omega, r), \quad (5.1.6)$$

em que $N(\omega, r)$ é o fluxo dependente da energia ω dos fótons e da distância transversa r do centro do hádron que emitiu o fóton. É possível mostrar que (para mais detalhes sobre o termo no módulo, ver Apêndice F)

$$N(\omega, r) = \frac{4Z^2\alpha_{em}}{\omega} \left| \int \frac{d^2\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} \mathbf{k}_{\perp} \frac{F\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_{\perp}^2\right)}{\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_{\perp}^2} e^{-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}_{\perp}} \right|^2, \quad (5.1.7)$$

em que \mathbf{k}_{\perp} são as componentes transversas do 4-momento do fóton e $F\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_{\perp}^2\right)$ é fator de forma nuclear, interpretado como a transformada de Fourier da distribuição de cargas no espaço de posições [60]. Dessa maneira, podemos considerar diferentes tipos de distribuições de cargas, como o de uma carga pontual, de monopolo, entre outros. A grande vantagem dessa equação é que nos permite obter as expressões para os fluxos de fótons em colisões ultraperiféricas, como será discutido em mais detalhes na próxima seção.

5.2 FATORES DE FORMA

A discussão dessa seção é baseada nas Refs. [60, 61]. O fator de forma é a transformada de Fourier da distribuição de cargas, normalizado pela carga total. A distribuição de cargas no núcleo é obtida normalmente por processos de espalhamento elástico de elétrons em um núcleo [61]. Podemos escrever que o fator de forma $F(q)$ é dado por

$$F(q) = \frac{1}{K} \int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}, \quad (5.2.1)$$

onde

$$K = \int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (5.2.2)$$

com $\rho(\mathbf{r})$ sendo a densidade espacial de cargas e \mathbf{q} o momento transferido pelo núcleo na colisão. Vamos discutir nessa dissertação os fatores de forma pontual, de monopolo e dipolo, de maneira a escrever as expressões dos fluxos de fótons emitidos pelo próton e por núcleos.

5.2.1 Fluxo de fótons dependente da distância entre núcleos

Assumindo que a partícula/íon que emite os fótons não possui estrutura interna, ou seja, $\rho(\mathbf{r}) = Ze\delta(\mathbf{r})$, então temos o fator de forma

$$F(q^2) = 1 \quad (5.2.3)$$

e na Eq. (5.1.7) podemos descrever o núcleo atômico como sendo do tipo pontual. Dessa forma, obtemos o fluxo pontual,

$$N(\omega, r) = \frac{Z^2 \alpha_{em}}{\pi^2 \omega r^2} \left(\frac{\omega r}{\gamma_L} \right)^2 K_1^2 \left(\frac{\omega r}{\gamma_L} \right), \quad (5.2.4)$$

em que K_1 é a função de Bessel modificada. Já o fator de forma de monopolo é dado por

$$F(q^2) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2}, \quad (5.2.5)$$

de forma que Λ é escrito em termos do raio quadrático médio do núcleo ($\Lambda = \sqrt{\frac{6}{\langle R^2 \rangle}}$), ajustado com auxílio de dados experimentais [61]. Dessa forma, para o chumbo por exemplo, temos

$$\langle R^2 \rangle^{1/2} = 5.5016 \text{ fm} \quad \rightarrow \quad \Lambda = 0.088 \text{ GeV}. \quad (5.2.6)$$

Integrando a expressão (5.1.7) com o fator de forma (5.2.5), obtemos o fluxo de monopolo,

$$N(\omega, r) = \frac{Z^2 \alpha_{em}}{\pi^2} \frac{1}{\omega} \left[\frac{\omega}{\gamma_L} K_1 \left(\frac{\omega r}{\gamma_L} \right) - K_1 \left(r \sqrt{\frac{\omega^2}{\gamma_L^2} + \Lambda^2} \right) \sqrt{\frac{\omega^2}{\gamma_L^2} + \Lambda^2} \right]^2. \quad (5.2.7)$$

As Eqs. (5.2.4) e (5.2.7) nos fornecem os fluxos de fótons em termos da energia do fóton ω e a distância entre os núcleos r .

Integrando $N(\omega, r)$ em ω , ou seja,

$$N(r) = \int N(\omega, r) d\omega, \quad (5.2.8)$$

podemos analisar o comportamento das Eqs. (5.2.4) e (5.2.7) em termos de r , em que o caso do chumbo será particularmente interessante. A Fig. 27 será útil para essa análise. O comportamento das curvas quando r é menor que o raio do Pb difere, de forma que ao considerar o monopolo temos uma curva bem comportada enquanto que para o pontual a curva diverge em $r = 0$. O resultado mais interessante para nosso trabalho é que, para $r > R_{Pb}$, as curvas possuem o mesmo comportamento. Com isso, ao considerar colisões ultraperiféricas, podemos integrar na distância de forma analítica, considerando $r_{\min} = R_1 + R_2$ (conforme Fig. 25), e utilizar um fluxo mais simples como o pontual. Além disso, vemos que quanto mais perto estão os núcleos, maior o fluxo de fótons.

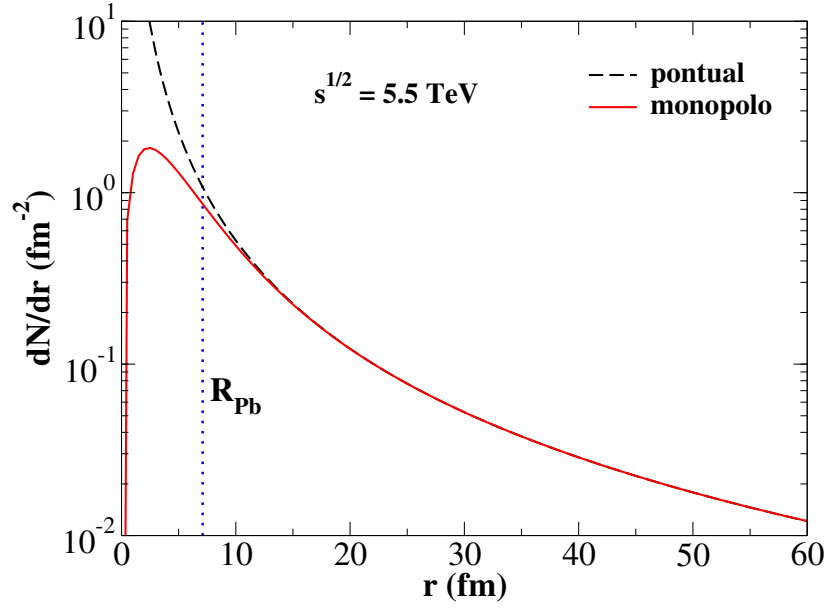


Figura 27 – Fluxo dependente da distância entre núcleos.

5.2.2 Fluxo de fótons em termos da energia dos fótons

Vamos obter equações para o fluxo de fótons em termos da energia dos fótons ω ao integrar $N(\omega, r)$ em r . As expressões utilizadas nesse trabalho podem ser consultadas na Ref. [1]. O fluxo de fótons equivalentes para partículas do tipo pontual é obtido a partir da Eq. (5.2.4), sendo o núcleo ou o próton a fonte de fótons, ou seja,

$$n_A(\omega) = \frac{2Z^2\alpha_{em}}{\pi} \left[\xi K_0(\xi) K_1(\xi) - \frac{\xi^2}{2} (K_1^2(\xi) - K_0^2(\xi)) \right], \quad (5.2.9)$$

em que

$$\xi = \omega(R_{h_1} + R_{h_2})/\gamma_L, \quad (5.2.10)$$

sendo γ_L o fator gama de Lorentz. As quantidades R_{h_1} e R_{h_2} são os raios dos núcleos envolvidos na colisão. Essa expressão fornece bons resultados quando estamos lidando com Z^2 grande, como para o oxigênio ou chumbo, utilizados nesse trabalho. Para o próton, que tem $Z = 1$, precisamos de uma expressão diferente, que será justificada pela discussão adiante. Quando o próton é a fonte de fótons, consideramos um fator de forma do tipo dipolo,

$$F(q^2) = \left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2} \right)^2, \quad \Lambda^2 = 0.71 \text{ GeV}^2 \quad (5.2.11)$$

e assim o fluxo de fótons vindo do próton é

$$n_p(\omega) = \frac{\alpha_{em}}{2\pi} \left[1 + \left(1 - \frac{2\omega}{\sqrt{s}} \right)^2 \right] \left(\ln \Omega - \frac{11}{6} + \frac{3}{\Omega} - \frac{3}{2\Omega^2} + \frac{1}{3\Omega^3} \right), \quad (5.2.12)$$

com

$$\Omega = 1 + \left[(0.71 \text{ GeV}^2) / Q_{min}^2 \right] \quad \text{e} \quad Q_{min}^2 = \omega^2 / \left[\gamma_L^2 (1 - 2\omega/\sqrt{s}) \right] \approx (\omega/\gamma_L)^2.$$

A Fig. 28 mostra o comportamento das duas expressões de fluxo de fótons em termos de ω . Em todas as curvas, a probabilidade de emissão de fótons com muita energia é baixa, por isso as curvas caem abruptamente; ao passo que quanto menor a energia dos fótons, maior o fluxo.

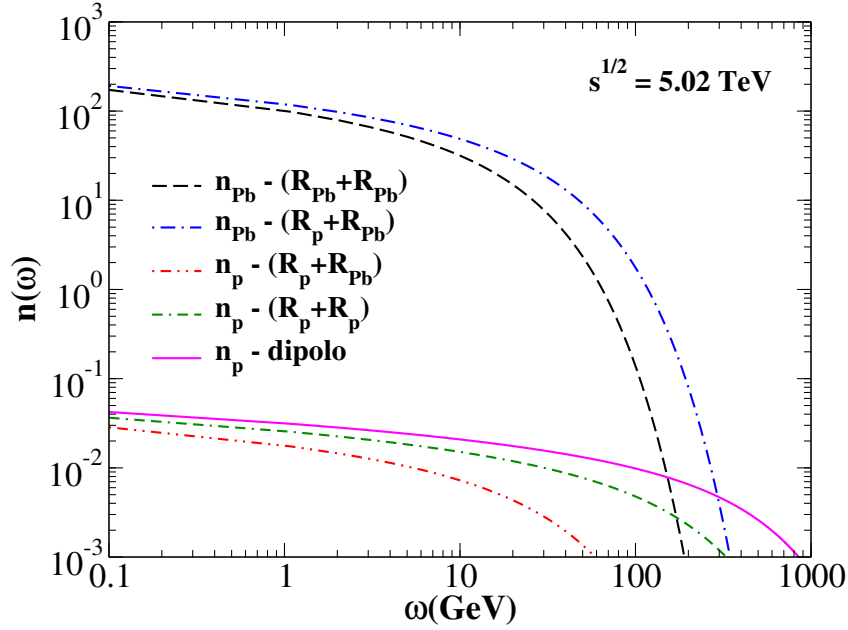


Figura 28 – Fluxo de fótons para os casos em que o próton ou o núcleo são as fontes de fótons. A curva contínua utiliza o fluxo com fator de forma de dipolo, enquanto que as outras consideram o fator de forma pontual.

As curvas tracejada e ponto-tracejada representam o comportamento quando o fluxo vem do chumbo, em que a diferença entre as duas se deve pela curva ponto-tracejada considerar um r_{min} como a soma dos raios do próton e chumbo, para pPb , enquanto que a curva tracejada considera uma colisão $PbPb$. Vemos que no primeiro caso temos um fluxo maior por estarmos integrando a curva em um r_{min} menor, ou seja, temos um espaço de fase maior. Além disso, as duas curvas ganham dos fluxos n_p , já que temos maior número de prótons no chumbo, consequentemente mais fótons emitidos.

Outra informação interessante é que, comparando o fluxo de fótons vindos do próton e vindos dos chumbo em colisões pPb (curvas ponto-ponto-tracejada e ponto-tracejada, respectivamente), temos 4 ordens de grandeza de diferença, ou seja, podemos desprezar o fluxo do próton em colisões pPb . Para colisões pO , por exemplo, a contribuição do próton não é desprezível, devido ao número atômico muito menor do oxigênio em relação ao chumbo. Ainda, comparando os fluxos n_p , vemos que o caso com fator de forma de dipolo tem fluxo maior (curva contínua), já que para esse $n(\omega)$ não temos r_{min} . Resultados

experimentais apontam que o fator de forma de dipolo é o mais adequado para prótons [10].

Tendo descrito os formalismos para as seções de choque e a aproximação de fótons equivalentes, estamos aptos a mostrar nossos resultados para interações γp , γPb e γO e as distribuições de rapidez.

6 PRODUÇÃO DE MÉSONS VETORIAIS EM INTERAÇÕES FÓTON-PRÓTON E FÓTON-NÚCLEO

Com o ferramental teórico descrito, podemos calcular as seções de choque exclusivas de fotoprodução de mésons vetoriais em colisões ultraperiféricas utilizando o formalismo da fatorização k_T , que fornece a amplitude de espalhamento do processo. Nesse capítulo, os resultados para seções de choque e distribuições de rapidez, obtidas por meio da aproximação de fótons equivalentes, são discutidos e comparados com dados experimentais dos colisores HERA, com medidas das colaborações H1 e ZEUS e LHC, com dados de Um Experimento do Grande Colisor de Íons (ALICE), Solenoide de Múon Compacto (CMS) e Experimento do Grande Colisor de Hádrons Beauty (LHCb). Além disso, nossas previsões para observáveis físicos em futuras colisões são mostrados para os colisores LHC e FCC.

6.1 SEÇÕES DE CHOQUE FÓTON-PRÓTON

Um dos objetivos deste trabalho é calcular as seções de choque em colisões γp e γA , sendo A núcleos de chumbo e oxigênio, para a produção dos mésons vetoriais Υ , com massa de 9.26 GeV e J/ψ , com massa de 3.096 GeV. A seção de choque é um observável físico que pode ser medido em experimentos em altas energias, de forma que fazer previsões dessa medida se torna interessante para estudar a validade dos modelos fenomenológicos.

Testamos a sensibilidade da seção de choque para escolha de diferentes distribuições de glúons não integradas, em que o modelo GBW NEW e as soluções analítica e numérica da equação BK, a aBK e rcBK respectivamente, foram utilizados. Além disso, o uso de duas funções de onda para o méson vetorial se faz necessário pela complexidade de descrever o estado ligado formado, de modo que as expressões gaussiana e coulombiana fornecem equações simples e que reproduzem dados experimentais em diferentes regimes cinemáticos.

Vale ressaltar que os modelos de dipolo/UGDs - GBW, rcBK e aBK - e funções de onda - GLC, BG, gaussiana e coulombiana - utilizados nesse trabalho foram ajustados com dados do HERA e com larguras de decaimentos experimentais do méson vetorial em léptons, respectivamente. Assim, nosso objetivo é fazer previsões de observáveis para outros colisores (como o LHC e FCC) com esses modelos da forma que foram desenvolvidos em suas referências (conforme discutido no Cap. 4), analisando como se comportam com a física que estamos interessados.

6.1.1 Comparação entre GBW e GBW NEW

Para começar as análises de resultados, calculamos a seção de choque para a produção do méson Υ presente na Fig. 29 usando os modelos GBW e GBW NEW, em que o último é uma atualização dos parâmetros do modelo original ajustados com dados experimentais mais recentes do HERA. Temos que o GBW NEW possui valores de seção

de choque maiores que o GBW em baixas energias, e em $W \approx 300$ GeV é ultrapassado pela parametrização antiga, de forma a fornecer seções de choque menores em pequeno x .

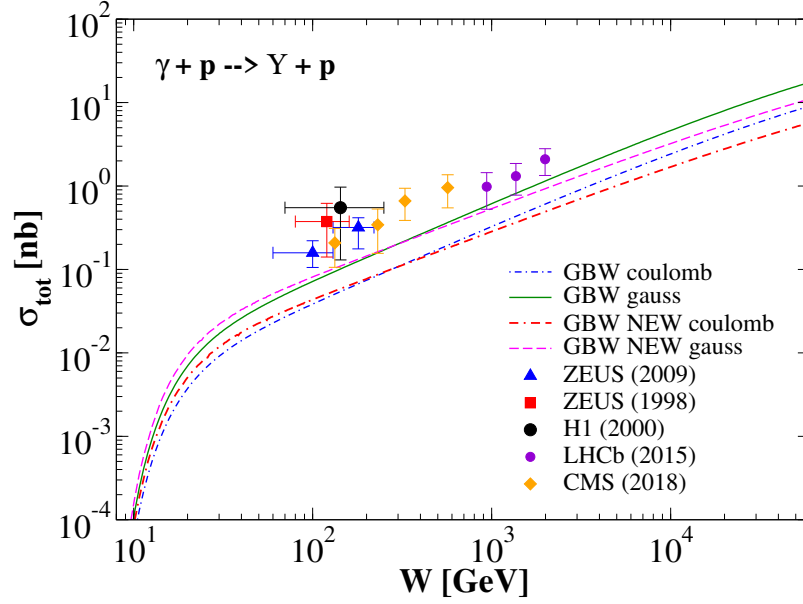


Figura 29 – Seção de choque γp para produção de Υ usando as funções de onda gaussiana e coulombiana para comparação do GBW e GBW NEW. Dados das colaborações LHCb [62] e CMS [63]

Esse comportamento pode ser observado também nas distribuições de rapidez pp , presentes na Fig. 30, para ambas funções de onda gaussiana e coulombiana. Percebe-se que, para (a) e (b), conforme aumentamos a energia de centro de massa \sqrt{s} da colisão, a diferença entre os modelos fica mais evidente. Em energias de 100 TeV, que serão utilizadas no FCC, usar o GBW NEW poderá ser importante na medida desses observáveis, dada a significativa diferença entre as curvas.

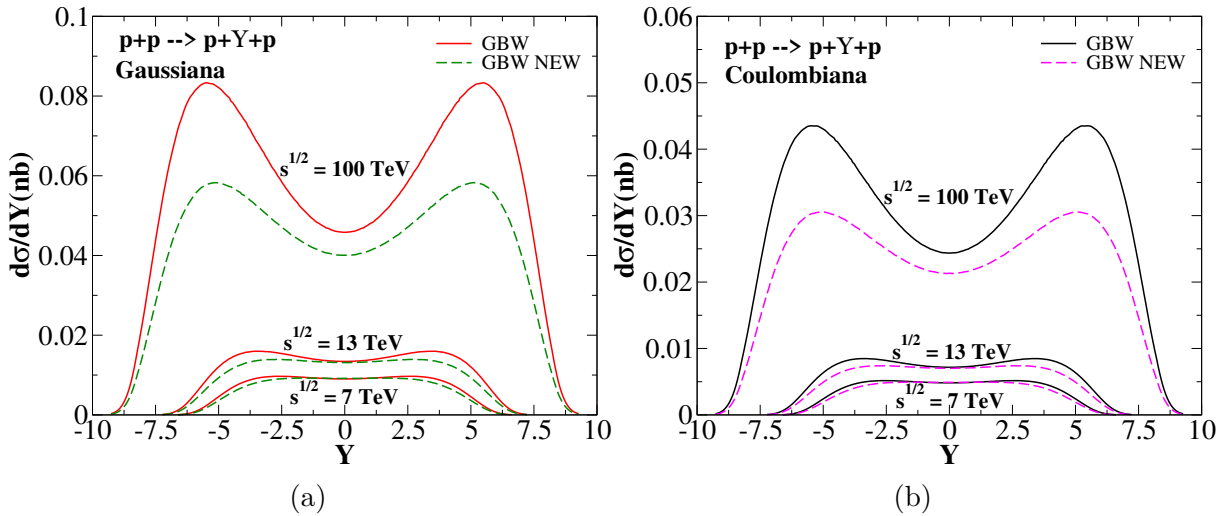


Figura 30 – Comparação entre as distribuições de rapidez com as UGDs GBW e GBW NEW para as funções de onda (a) gaussiana e (b) coulombiana.

Tendo em vista essas mudanças, vamos utilizar nas próximas análises apenas o GBW NEW, e poderemos verificar seus resultados em comparação com outras distribuições de glúons na fatorização k_T . Antes disso, vamos comparar de forma breve a fatorização k_T e o formalismo de dipolo no contexto $\gamma + p \rightarrow J/\Psi + p$.

6.1.2 Comparação entre fatorização k_T e formalismo de dipolo

Outra análise interessante a se fazer é comparar as seções de choque do formalismo de dipolo com a fatorização k_T , sendo o formalismo principal deste trabalho. A Fig. 31 traz as curvas para o GBW NEW usando as funções de onda para o formalismo de dipolo BG e GLC (conforme definidas na Seção 4.1) e para fatorização k_T a coulombiana e gaussiana (conforme definidas na Seção 4.3). Vemos que a gaussiana equivale, em altas energias, à função de onda gauss-LC, descrevendo bem os dados junto da boosted-gaussian, enquanto que a coulombiana fica mais abaixo, como esperado pela discussão teórica. Como discutido na Seção 3.5, o formalismo de dipolo é bastante adequado para estudo da saturação, por conseguirmos reproduzir bem os regimes diluído e de saturação analisando o tamanho do dipolo, de forma que dados experimentais são bem descritos com modelos de dipolo. Com isso, é interessante investigarmos como a fatorização k_T se comporta para outras UGDs com as duas funções de onda, de forma que possamos utilizar uma alternativa para o formalismo de dipolo no estudo da produção exclusiva de mésons vetoriais.

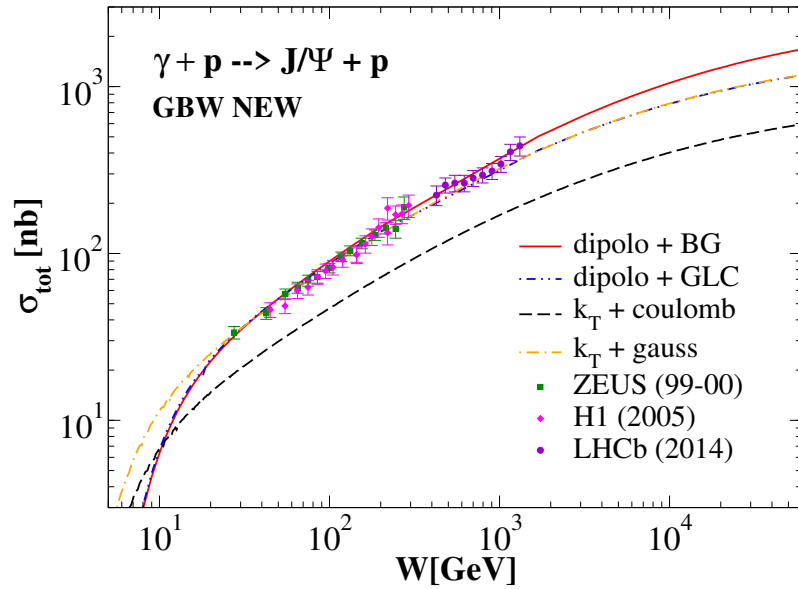


Figura 31 – Seção de choque γp para o méson J/Ψ no formalismo de dipolo (funções de onda GLC e BG) e fatorização k_T (funções de onda gaussiana e coulombiana) usando o GBW NEW. Dados da colaboração LHCb [64].

Usaremos o formalismo de dipolo para comparação com a fatorização k_T também na Seção 6.5, que mostrará a robustez de ambos. Vamos, por enquanto, focar nos resultados da fatorização k_T no contexto γp , pp e pPb .

6.2 SEÇÕES DE CHOQUE γp PARA PRODUÇÃO DE J/Ψ E Υ

Vamos começar a discussão dos resultados exclusivamente para a fatorização k_T com as seções de choque do tipo $\gamma + p \rightarrow V + p$, sendo V o méson produzido. A Fig. 32 traz as seções de choque para os mésons (a) J/ψ e (b) Υ , com dados do HERA e LHC para comparação.

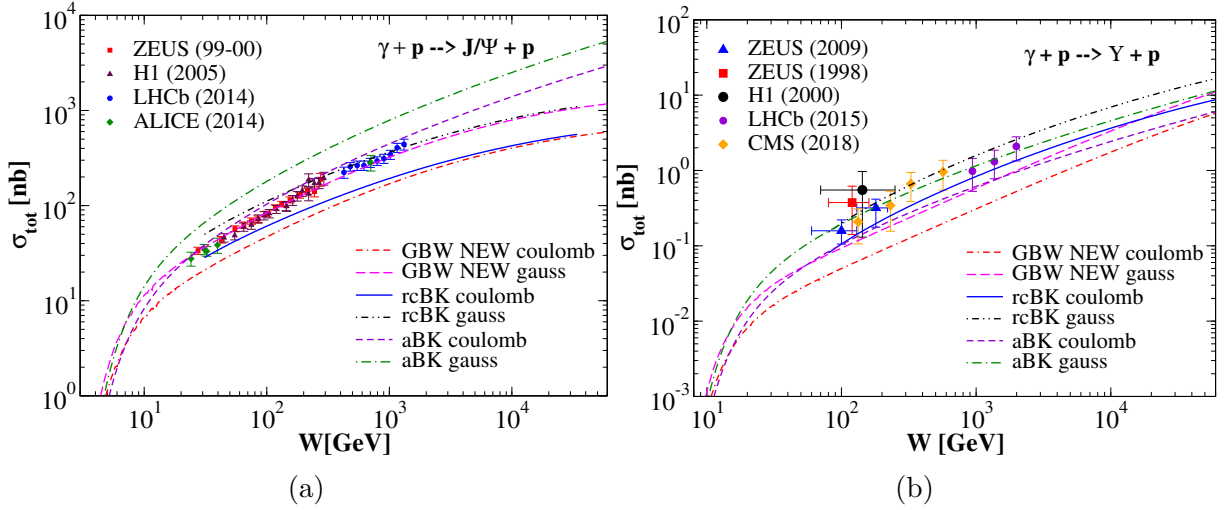


Figura 32 – Seção de choque total de fotoprodução dos mésons (a) J/Ψ e (b) Υ em colisões γp com a fatorização k_T . Dados das colaborações LHCb [62, 64], ALICE [65] e CMS [63].

Em todos os casos, as curvas com função de onda coulombiana fornecem seções de choque menores que as gaussianas, como esperado pela análise da Fig. 20. Em relação às UGDs, vemos diferenças significativas entre os modelos. As curvas GBW NEW ficam mais abaixo dos dados experimentais para Υ , mas fornecem resultados bem parecidos para o J/Ψ em comparação com a rcBK, que fornece uma física mais robusta para nossos cálculos, mostrando a validade do GBW como um modelo simples, mas que descreve bem a física de interesse. Vale salientar que as curvas da rcBK começam para energias W maiores por seu limite de validade de $x \leq 0.01$ [5], de forma que a utilização de outros modelos é importante para conhecermos o comportamento das seções de choque em baixas energias.

Para a aBK, temos que em (b), para as duas funções de onda, uma boa reprodução dos dados de HERA e LHC. Para o J/Ψ , as curvas tem crescimento mais rápido do que os outros modelos de dipolo. Com isso, é perceptível que as seções de choque são sensíveis à escolha de UGDs, que estão ligadas a quantidades não perturbativas, de forma que não há modelo definitivo para todos os mésons. É interessante citar também que as seções de choque do J/Ψ são maiores do que do Υ , pois é o méson mais leve entre eles. Isso ficará evidente também nas distribuições de rapidez, comparando mesmas energias.

6.3 DISTRIBUIÇÕES DE RAPIDEZ EM COLISÕES pp

Vamos discutir os resultados das distribuições de rapidez do méson J/Ψ em colisões pp , presentes na Fig. 33 (a) 7 TeV e (b) 13 TeV, com dados experimentais para comparação. Os modelos GBW NEW e rcBK apresentam resultados satisfatórios, abarcando dados experimentais em suas bandas de incerteza delimitadas pelas funções de onda coulombiana e gaussiana. Para a aBK, as distribuições de rapidez são perceptivelmente maiores, o que era esperado pelos resultados das seções de choque. É importante salientar que não estamos levando em conta o fator de probabilidade de sobrevivência do gap de rapidez, que surge devido aos múltiplos espalhamentos que podem trocar glúons em um estado não singleto de cor, ou seja, estados de glúons com cor líquida, fazendo o próton quebrar [66]. Porém, se considerarmos esses efeitos, que experimentalmente são possíveis, nossas curvas diminuem por um fator multiplicativo de até 0.8 [67–69], e resultados mais acima podem descrever melhor dados experimentais.

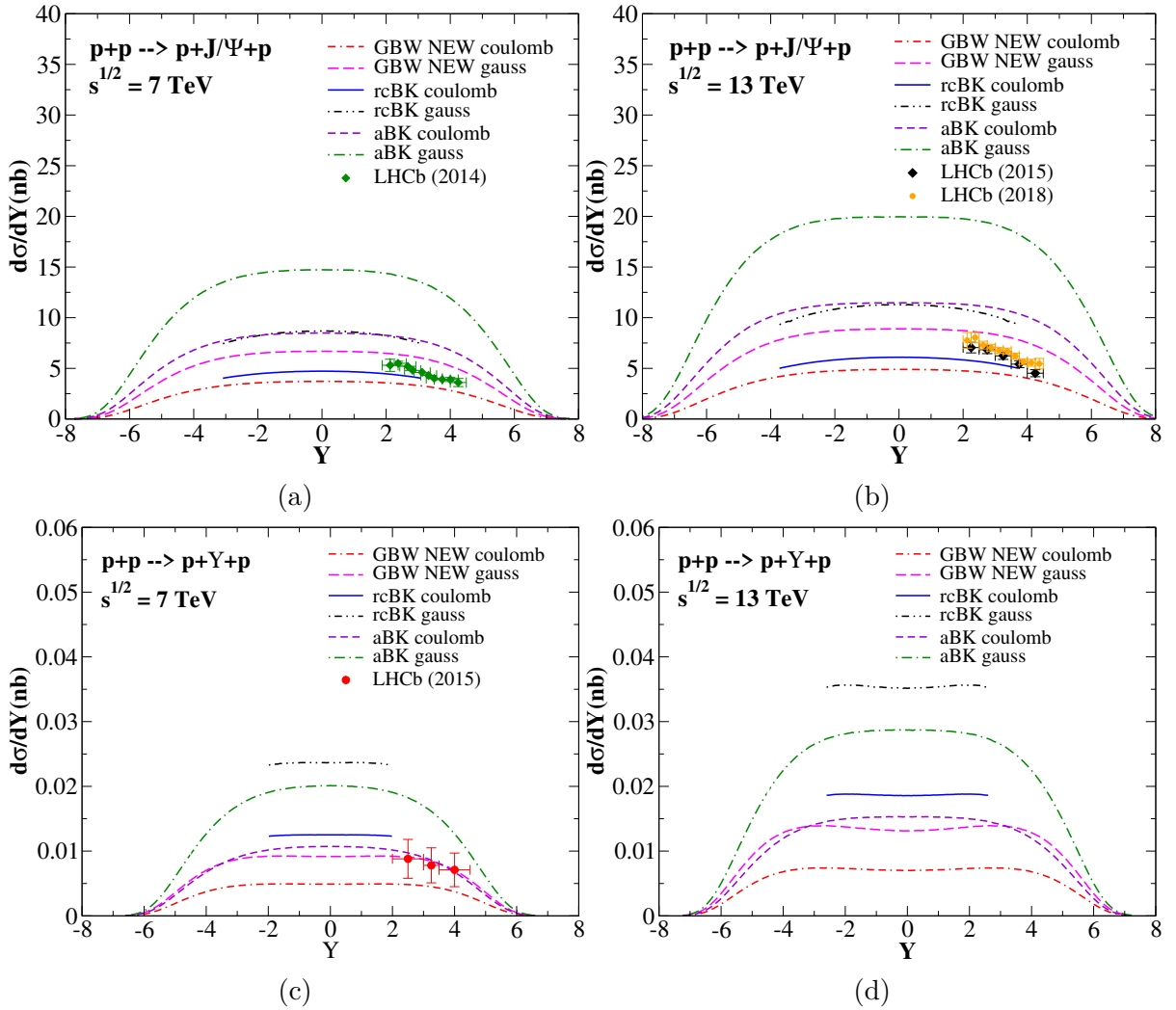


Figura 33 – Distribuições de rapidez para produção de J/Ψ em (a) e (b) e Υ em (c) e (d) em colisões pp para $\sqrt{s} = 7$ TeV e 13 TeV. Dados da colaboração LHCb [62, 64, 70].

Para o Υ , na Fig. 33 (c), temos dados experimentais do LHCb para comparação com os resultados das três UGDs para cada função de onda. Diferente das seções de choque fóton-próton, para a distribuição de rapidez observamos a função de onda coulombiana descrevendo melhor os dados para aBK e rcBK, enquanto que o GBW NEW + gaussiana é uma combinação melhor em 7 TeV. Em todos os casos, fica perceptível a banda de incerteza entre curvas, mostrando novamente a sensibilidade dos cálculos para escolha dessas quantidades. Além disso, assim como nas seções de choque, vemos nas distribuições de rapidez que mésons mais leves, como o caso do J/Ψ , terão seções de choque maiores, sendo mais fácil de produzi-lo experimentalmente.

Em termos gerais, a diferença entre as distribuições à esquerda e à direita é a energia de centro de massa da colisão, sendo de 7 TeV e 13 TeV respectivamente, e observamos o aumento das distribuições com \sqrt{s} maior. Vale ressaltar que é interessante que tenhamos aumento de energia nas colisões, pois teremos maior probabilidade de medir os processos descritos, já que se tratam de seções de choque maiores. Além disso, os modelos se afastam conforme a energia aumenta, com maior diferença na região central de rapidez $Y = 0$. Assim, podemos usar este afastamento para melhor discriminar entre os modelos.

Sabendo que nossos cálculos reproduzem razoavelmente os dados experimentais, podemos fazer previsões para energias mais altas, que serão medidas nos próximos anos. A Fig. 34 traz previsões para $\sqrt{s} = 14$ TeV, a energia máxima em colisões pp prevista para o LHC. Em geral, o comportamento das UGDs + funções de onda permanece aproximadamente o mesmo, mas temos distribuições de rapidez maiores que as anteriores, de forma que estudar a produção desses mésons será mais fácil em regimes de mais altas energias.

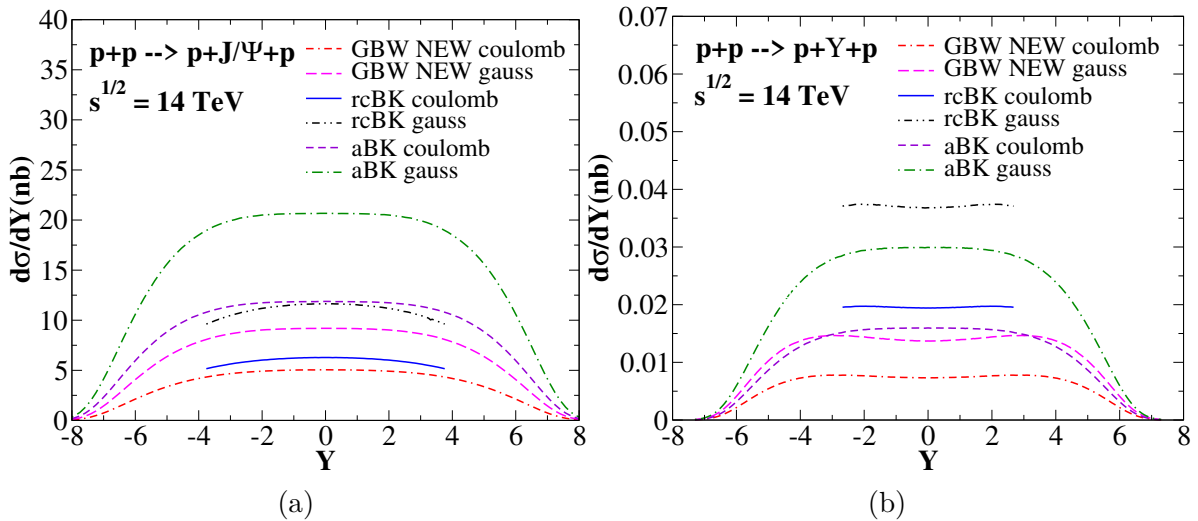


Figura 34 – Distribuições de rapidez para (a) J/Ψ e (b) Υ em pp para $\sqrt{s} = 14$ TeV.

Medidas ainda mais interessantes para testar a física de saturação serão possíveis com o FCC, que fará colisões pp com $\sqrt{s} = 100$ TeV. A Fig. 35 traz as distribuições de

rapidez para essas energias. Comparando com a figura anterior, temos um ganho muito significativo nas distribuições, já que as seções de choque são muito maiores.

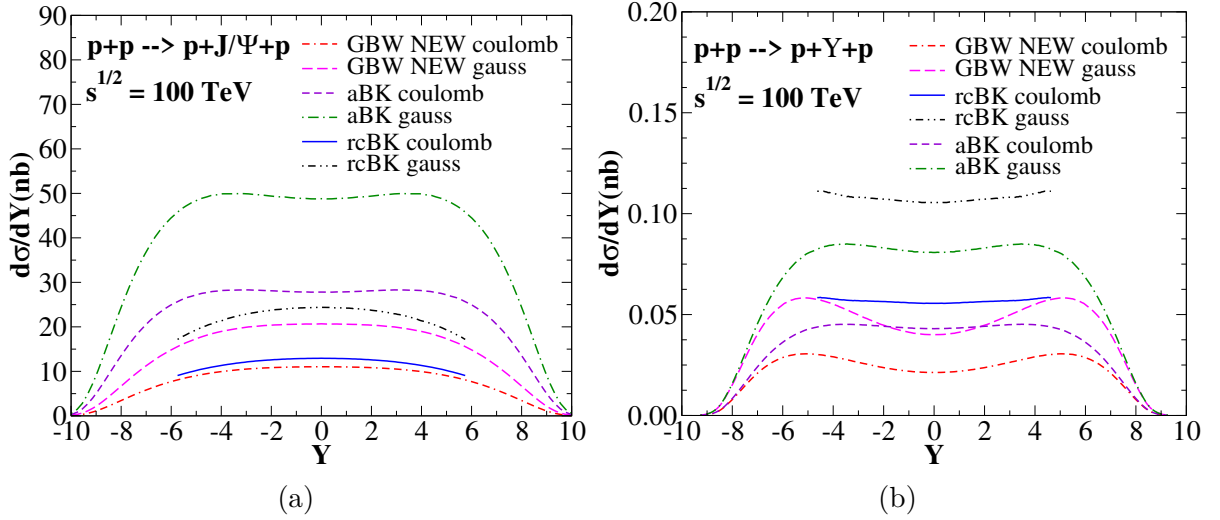


Figura 35 – Distribuições de rapidez para a produção dos mésons (a) J/Ψ e (b) Υ em colisões pp para $\sqrt{s} = 100$ TeV, energias que serão acessadas pelo FFC.

Alguns observáveis importantes que podemos calcular a partir das distribuições de rapidez são as seções de choque totais, seguindo a Eq. (5.1.5), e a taxa de eventos de produção de mésons. Para obter essa medida, fazemos [16]

$$N = \sigma_{\text{tot}} \int \mathcal{L}(t) dt, \quad (6.3.1)$$

sendo σ_{tot} a seção de choque integrada, $\mathcal{L}(t)$ a luminosidade instantânea (número de colisões de partículas produzidas em um determinado intervalo de tempo) e N , a taxa de eventos, a quantidade de partículas que são produzidas por unidade de tempo. A Tab. 7 traz os resultados das seções de choque integradas totais (em todo intervalo de rapidez) e a taxa de eventos para o J/Ψ e Υ quando foram medidas colisões com $\sqrt{s} = 7$ TeV. Percebemos uma grande diferença entre GBW NEW + coulomb e aBK + gauss para os dois mésons, como adiantado pelas distribuições de rapidez. Além disso, vemos que tanto seções de choque quanto número de eventos para o J/Ψ são maiores em relação ao Υ .

LHC 7 TeV	$\sigma_{\text{tot}}(J/\Psi)$	$N(\times 10^8)(J/\Psi)$	$\sigma_{\text{tot}}(\Upsilon)$	$N(\times 10^8)(\Upsilon)$
GBW NEW + coulomb	36.49	2.226	0.0457	0.00279
GBW NEW + gauss	66.96	4.085	0.0859	0.00524
aBK + coulomb	86.76	5.292	0.0912	0.00556
aBK + gauss	151.6	9.248	0.1712	0.01044

Tabela 7 – Seção de choque total em nb e taxa de eventos em colisões pp com $\sqrt{s_{pp}} = 7$ TeV para J/Ψ e Υ . A luminosidade usada foi de 6.1 fb^{-1} por ano, referente a 2011 [71].

Também calculamos σ_{tot} e N para as energias do LHC de 13 TeV, presentes na

Tab. 8. A discussão é basicamente a mesma realizada anteriormente, mas o interessante nesse caso é que energias maiores, além de produzirem seções de choque maiores, estão relacionadas à luminosidades mais altas, que geralmente aumentam nos colisores ao longo dos anos. Assim, as taxas de eventos para essas energias foram bem maiores em relação às medidas em 7 TeV. Vale ressaltar que nas Tabs. 7 e 8 utilizamos a luminosidade integrada em um ano inteiro de funcionamento do experimento, que não opera todos os dias, mas que nos fornece a quantidade de partículas medidas nesses experimentos nesse período.

LHC 13 TeV	$\sigma_{\text{tot}}(J/\Psi)$	$N(\times 10^8)(J/\Psi)$	$\sigma_{\text{tot}}(\Upsilon)$	$N(\times 10^8)(\Upsilon)$
GBW NEW + coulomb	52.90	35.12	0.078	0.05296
GBW NEW + gauss	98.11	66.62	0.147	0.09981
aBK + coulomb	131.1	89.02	0.149	0.1012
aBK + gauss	229.9	156.1	0.280	0.1901

Tabela 8 – Seção de choque total em nb e taxa de eventos em colisões pp com $\sqrt{s_{pp}} = 13$ TeV para J/Ψ e Υ . A luminosidade usada foi de 67.9 fb^{-1} por ano, referente a 2018 [71].

A taxa de eventos é uma medida importante para futuras colisões, de forma que fazermos previsões de N para o LHC e FCC se torna relevante. Entretanto, para fins de comparação entre as diferentes energias de centro de massa utilizadas nos colisores, fizemos essa breve análise dos resultados de taxas de eventos para colisões que já foram medidas, i.e., pp com $\sqrt{s} = 7$ e 13 TeV. Para previsões em futuras colisões, temos as seções de choque integradas e taxas de eventos na Tab. 9, para colisões pp em 14 TeV. Nesse caso, calculamos as taxas de eventos para o High Luminosity LHC (HL-LHC), que será uma atualização do LHC para altas luminosidades em 2025 [72]. Como esperado pelas distribuições de rapidez, as seções de choque totais são bastante distintas entre os modelos, como ocorre nas outras tabelas, e as taxas de eventos serão bastante beneficiadas com o aumento expressivo da luminosidade.

HL-LHC 14 TeV	$\sigma_{\text{tot}}(J/\Psi)$	$N(\times 10^8)(J/\Psi)$	$\sigma_{\text{tot}}(\Upsilon)$	$N(\times 10^8)(\Upsilon)$
GBW NEW + coulomb	55.21	1656	0.083	2.49
GBW NEW + gauss	102.6	3078	0.156	4.68
aBK + coulomb	137.5	4125	0.158	4.74
aBK + gauss	241.3	7239	0.297	8.91

Tabela 9 – Seção de choque total em nb e taxa de eventos em colisões pp com $\sqrt{s_{pp}} = 14$ TeV para J/Ψ e Υ . A luminosidade usada foi de 3000 fb^{-1} por ano, esperada para o HL-LHC [73].

Para o FCC, com colisões pp em que $\sqrt{s} = 100$ TeV, fizemos previsões que estão presentes na Tab. 10. Além do significativo aumento das seções de choque em relação ao LHC, temos que a luminosidade integrada por dia aumentará em uma ordem de grandeza em relação ao HL-LHC, produzindo taxas de eventos ainda maiores em comparação com

as outras energias de centro de massa. A produção dos mésons J/Ψ e Υ serão muito beneficiadas nesse contexto, e poderemos ter mais dados disponíveis para testar a saturação partônica.

FCC 100 TeV	$\sigma_{\text{tot}}(J/\Psi)$	$N(\times 10^8)(J/\Psi)$	$\sigma_{\text{tot}}(\Upsilon)$	$N(\times 10^8)(\Upsilon)$
GBW NEW + coulomb	149.9	44970	0.400	120
GBW NEW + gauss	285.2	85560	0.760	228
aBK + coulomb	435.9	130770	0.622	187
aBK + gauss	773.0	231900	1.170	351

Tabela 10 – Seção de choque total em nb e taxa de eventos em colisões pp com $\sqrt{s_{pp}} = 100$ TeV para J/Ψ e Υ . A luminosidade usada foi de 30000 fb^{-1} por dia, esperada para o FCC [73].

6.4 DISTRIBUIÇÕES DE RAPIDEZ EM COLISÕES $p\text{Pb}$

Agora, vamos discutir os resultados para colisões $p\text{Pb}$, em que consideramos a aproximação de fótons equivalentes desprezando a contribuição de fluxo de fótons vindos do próton, pois o fluxo de fótons vindos do chumbo é muito maior. Nesse caso, teremos distribuições assimétricas, já que temos uma assimetria nas contribuições de fluxos de fótons. Além disso, colisões $p\text{Pb}$ são interessantes pela quantidade de cargas que o chumbo carrega, levando a distribuições maiores que em colisões pp .

Na Fig. 36 (a) e (b) temos as distribuições de rapidez para 5.02 TeV e 8.16 TeV, respectivamente, para a produção de J/Ψ . Vemos que apenas a aBK gaussiana superestima os dados em (a), enquanto que as outras curvas estão mais próximas das medições do ALICE em todo intervalo de rapidez. Na Fig. 36 (b) observamos uma boa descrição dos dados para as mesmas combinações de UGDs e funções de onda que descrevem bem os dados de 5.02 TeV. Podemos esperar que essas mesmas combinações de modelos continuem descrevendo bem todo o intervalo de rapidez. Isto poderá ser verificado futuramente com novos dados experimentais.

Para a produção de Υ , nas Figs. 36 (c) e (d), temos uma diferença para o caso 5.02 TeV em relação às distribuições pp . Nesses casos, as curvas aBK e rcBK gaussiana são as que melhor descrevem os dados experimentais, enquanto que em pp essas UGDs forneciam distribuições de rapidez bem acima dos dados. Isso demonstra, mais uma vez, a sensibilidade dos cálculos para a escolha de UGDs e funções de onda de acordo com o méson estudado. Medidas futuras de produção de Υ em $p\text{Pb}$ poderão confirmar se esse comportamento se repete.

Além disso, como feito para o caso pp , apresentamos na Fig. 37 as previsões para as colisões $p\text{Pb}$ em energias mais altas no LHC. Resultados semelhantes já discutidos podem ser observados, como uma ampliação das distribuições no intervalo de rapidez, aliado à um aumento de normalização das curvas. Vemos também que com o aumento da energia,

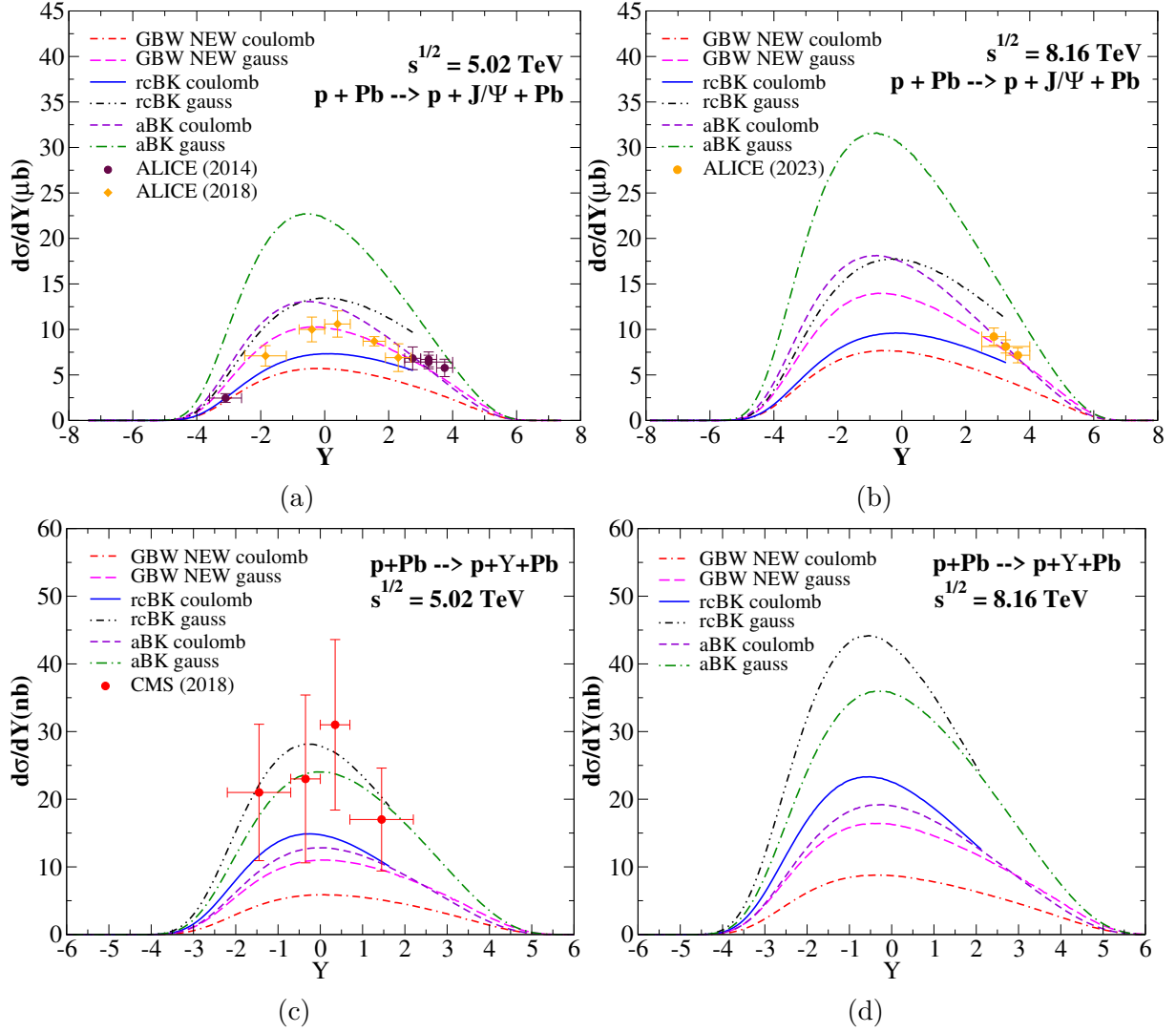


Figura 36 – Distribuições de rapidez em colisões pPb para produção de J/Ψ , em (a) e (b) e Υ , em (c) e (d) para $\sqrt{s} = 5.02$ TeV e 8.16 TeV. Dados das colaborações CMS [63] e ALICE [65, 74, 75].

temos um maior impacto na diferença entre as previsões com os distintos modelos de UGDs e funções de onda. Por fim, previsões para o FCC, que colidirá próton-chumbo à 63 TeV, estão presentes na Fig. 38 para J/Ψ e Υ , respectivamente. Comparando com as distribuições anteriores em colisões pPb , vemos um deslocamento dos picos das curvas na rapidez para a esquerda nos dois casos. Isso se deve pelo aumento significativo da energia de centro de massa de colisão, que faz com que valores de rapidez cada vez mais frontais sejam acessados. Esse comportamento também se faz presente nas distribuições de rapidez para colisões pp .

Até então, estudamos a interação γp , que permitiu que obtivéssemos as distribuições de rapidez em pp e pPb . Vamos agora estudar colisões nucleares, em que faremos comparações entre o formalismo de dipolo e fatorização k_T para $PbPb$ utilizando abordagens distintas, bem como faremos previsões para futuras colisões envolvendo oxigênio.

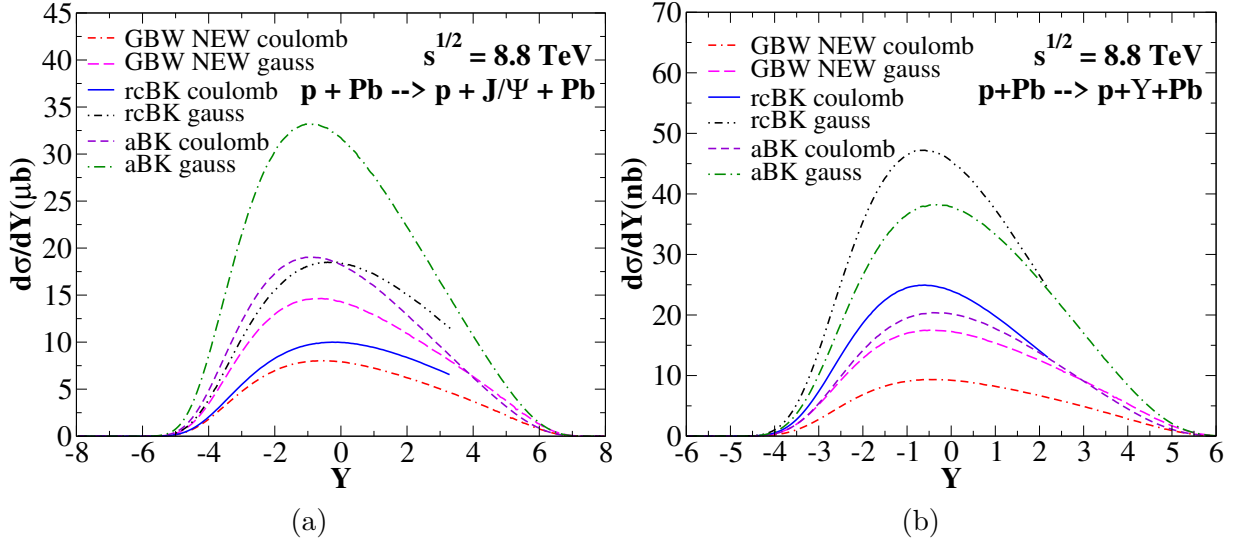


Figura 37 – Distribuições de rapidez em colisões p Pb para produção de J/Ψ , em (a) e γ , em (b) para $\sqrt{s} = 8.8$ TeV.

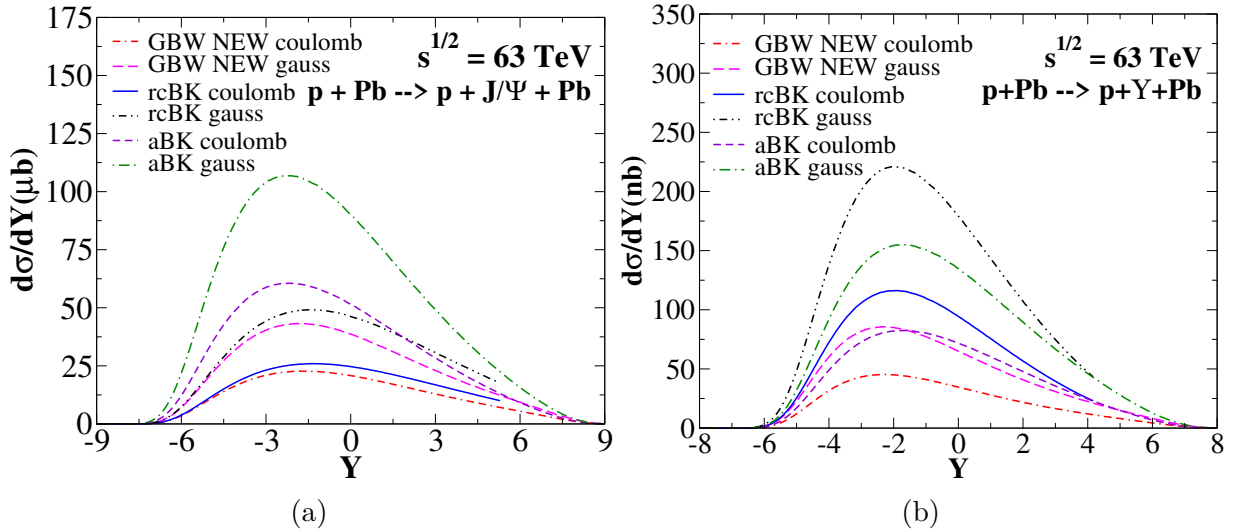


Figura 38 – Distribuições de rapidez em colisões p Pb para produção de J/Ψ , em (a) e γ , em (b) para $\sqrt{s} = 63$ TeV.

6.5 SEÇÕES DE CHOQUE FÓTON-NÚCLEO

Vamos estudar colisões envolvendo núcleos do tipo γA , sendo A , neste trabalho, Pb ou O. Com as seções de choque nucleares, utilizamos a aproximação de fótons equivalentes para obter distribuições de rapidez p O, OO e PbPb. Esses observáveis são extremamente relevantes para estudar a física de altas energias, pois seções de choque e fluxo de fótons são maiores em relação ao caso γp .

Em interações γA , o scaling geométrico é a propriedade em que a dependência em A da razão $\sigma^{\gamma A}/\pi R_A^2$ pode ser absorvida por uma dependência em A na escala de saturação $Q_{sA}(x)$ [76], ou seja,

$$\frac{\sigma^{\gamma A}(\tau_A)}{\pi R_A^2} = \frac{\sigma^{\gamma p}(\tau_A)}{\pi R_p^2},$$

em que $\tau_A = Q^2/Q_{sA}^2$. Dessa forma, podemos escrever a escala de saturação como

$$Q_{sA}^2(x) = Q_{sp}^2(x) \left(\frac{AR_p^2}{R_A^2} \right)^{1/\delta}, \quad (6.5.1)$$

em que $\delta = 0.8$ é fixado por dados experimentais [76]. Nessas expressões, R_p é o raio do próton e $R_A = 1.2A^{1/3}$ fm é uma boa estimativa para o raio do chumbo¹. Para os cálculos γO , usamos $R_A = 2.608$ fm [77]. Com essa aproximação, calculamos as seções de choque nucleares para produção de J/Ψ utilizando a fatorização k_T ao mudar a escala de saturação para GBW NEW e rcBK. Essa aproximação é melhor justificada em alguns casos, já que podemos definir uma razão entre UGDs para quantificar esses efeitos na mudança de escala da saturação [78],

$$R^{\text{UGD}} = \frac{F_A(x, \mathbf{k}^2)}{AF_p(x, \mathbf{k}^2)},$$

que devemos ter que para $A \rightarrow 1$ ou $\tau \gg 1$, $R^{\text{UGD}} \rightarrow 1$. Porém, essa razão cresce continuamente com τ , já que $R^{\text{UGD}} \propto F(\tau_A)/F(\tau_p)$ e o argumento do numerador é sempre menor que o do denominador, como apresentado pelos autores na Ref. [78], de forma que em comparação com um formalismo mais completo, vemos grande diferença. No mesmo trabalho, foi mostrado que essa abordagem traz resultados melhores quando lidamos com núcleos leves, já que a escala de saturação (6.5.1) será menor, estando mais próxima do caso do próton. Ainda assim, veremos que esse tratamento de mudança na escala de saturação nos fornece resultados muito interessantes.

Para fazer uma comparação mais profunda com o formalismo de dipolo, um dos mais utilizados na literatura para a física dessa dissertação, calculamos a seção de choque γPb utilizando a abordagem de Glauber-Gribov [79, 80]. Vamos fazer uma rápida explicação desse formalismo. Nesse modelo, o espalhamento dipolo-núcleo é escrito em termos do espalhamento do dipolo com cada núcleon, de modo que o fóton interage de forma coerente com todos os núcleons. Nesse caso, a amplitude de espalhamento é

$$\mathcal{N}^A(x, r, b) = 1 - \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma_{\text{dip}}(x, r^2) T_A(b) \right], \quad (6.5.2)$$

sendo $\sigma_{\text{dip}}(x, r^2)$ a seção de choque dipolo-próton e $T_A(b)$ a função perfil nuclear [15]. Com a amplitude de espalhamento sendo

$$\mathcal{A}^{\gamma^* A}(x, Q, \Delta) = i \int d^2\mathbf{r} dz [\psi_V^* \psi] \int d^2\mathbf{b} e^{-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{\Delta}} 2\mathcal{N}^A(x, r, b), \quad (6.5.3)$$

a seção de choque tem forma semelhante ao caso γp ,

¹ Essa relação fornece uma boa aproximação para o raio de um núcleo de grande número atômico.

$$\sigma^{\gamma^*A} = \int d^2\mathbf{b} \left| \int d^2\mathbf{r} \int dz [\psi_V^* \psi] e^{-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{\Delta}} \mathcal{N}^A(x, r, b) \right|^2. \quad (6.5.4)$$

Assim, a seção de choque γPb na primeira prescrição, para fatorização k_T , está presente na Fig. 39 (a) e, para comparação com o formalismo de dipolo, temos a seção de choque calculada para as funções de onda gauss-LC e boosted Gaussian com o GBW NEW e rcBK na Fig. 39 (b). Vemos que as duas abordagens descrevem bem os dados experimentais, sendo o caso da fatorização k_T particularmente interessante pois utiliza de uma aproximação simples para obter γPb . Outro detalhe importante em (a) é que, mesmo a mudança na escala de saturação não sendo tão robusta para núcleos pesados, temos bons resultados para Pb. Sabendo disso, calculamos a seção de choque γO com essa prescrição, presente na Fig. 40. Com esses resultados, podemos calcular as distribuições de rapidez PbPb, $p\text{O}$ e OO .

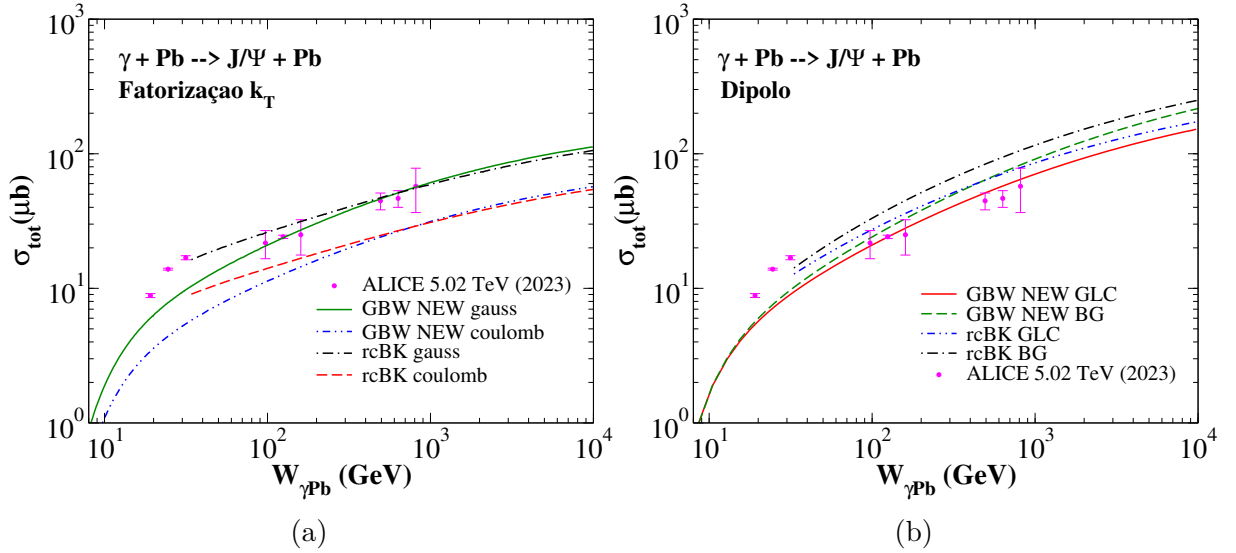


Figura 39 – Seção de choque γPb produzindo J/Ψ com a fatorização k_T + mudança na escala de saturação, em (a) e formalismo de dipolo + Glauber-Gribov, em (b).

Dados da colaboração ALICE [81].

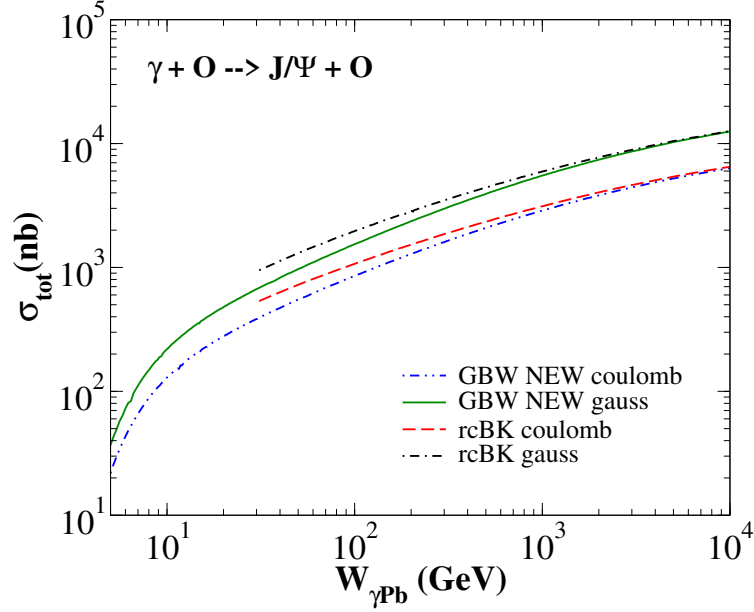


Figura 40 – Seção de choque γO produzindo J/Ψ com a fatorização k_T .

6.6 DISTRIBUIÇÕES DE RAPIDEZ PARA COLISÕES PbPb, pO E OO

Com as seções de choque γA , podemos calcular as distribuições de rapidez AA . Vamos começar analisando os resultados para PbPb, presentes na Fig. 41. Na coluna à esquerda, temos as distribuições para a fatorização k_T , usando a mudança na escala de saturação, enquanto que à direita usamos o formalismo de dipolo com a prescrição de Glauber-Gribov. Para o caso da fatorização k_T , temos uma boa descrição dos dados, principalmente usando a função de onda gaussiana, enquanto ainda percebemos uma significativa banda de incerteza entre modelos e funções de onda. Para o formalismo de dipolo, essa banda diminui, porém, para rapidez central, a rcBK fica muito acima dos dados experimentais nas duas energias de centro de massa calculadas, de 2.76 TeV e 5.02 TeV. Mesmo assim, os dois formalismos trazem bons resultados para colisões PbPb. Além disso, como visto no caso γp , a função de onda gaussiana na fatorização k_T tem resultados semelhantes a Gaus-LC no formalismo de dipolo.

Com a fatorização k_T reproduzindo bem dados do LHC, calculamos previsões para distribuições de rapidez para $\sqrt{s} = 5.5$ TeV, energia máxima para PbPb no LHC, e $\sqrt{s} = 39$ TeV, para o FCC, presentes na Fig. 42. Um primeiro resultado interessante, esperado pelo comportamento na seção de choque da Fig. 39 (a) para $W_{\gamma Pb} > 600$ GeV, é que a rcBK fornece distribuições menores que o GBW NEW comparando mesmas funções de onda em energias mais altas, o que não ocorria nos casos da Fig. 41. Além disso, com as figuras lado a lado, fica evidente as distribuições de rapidez muito maiores para as energias do FCC, de forma que a física da saturação partônica poderá ser melhor estudada.

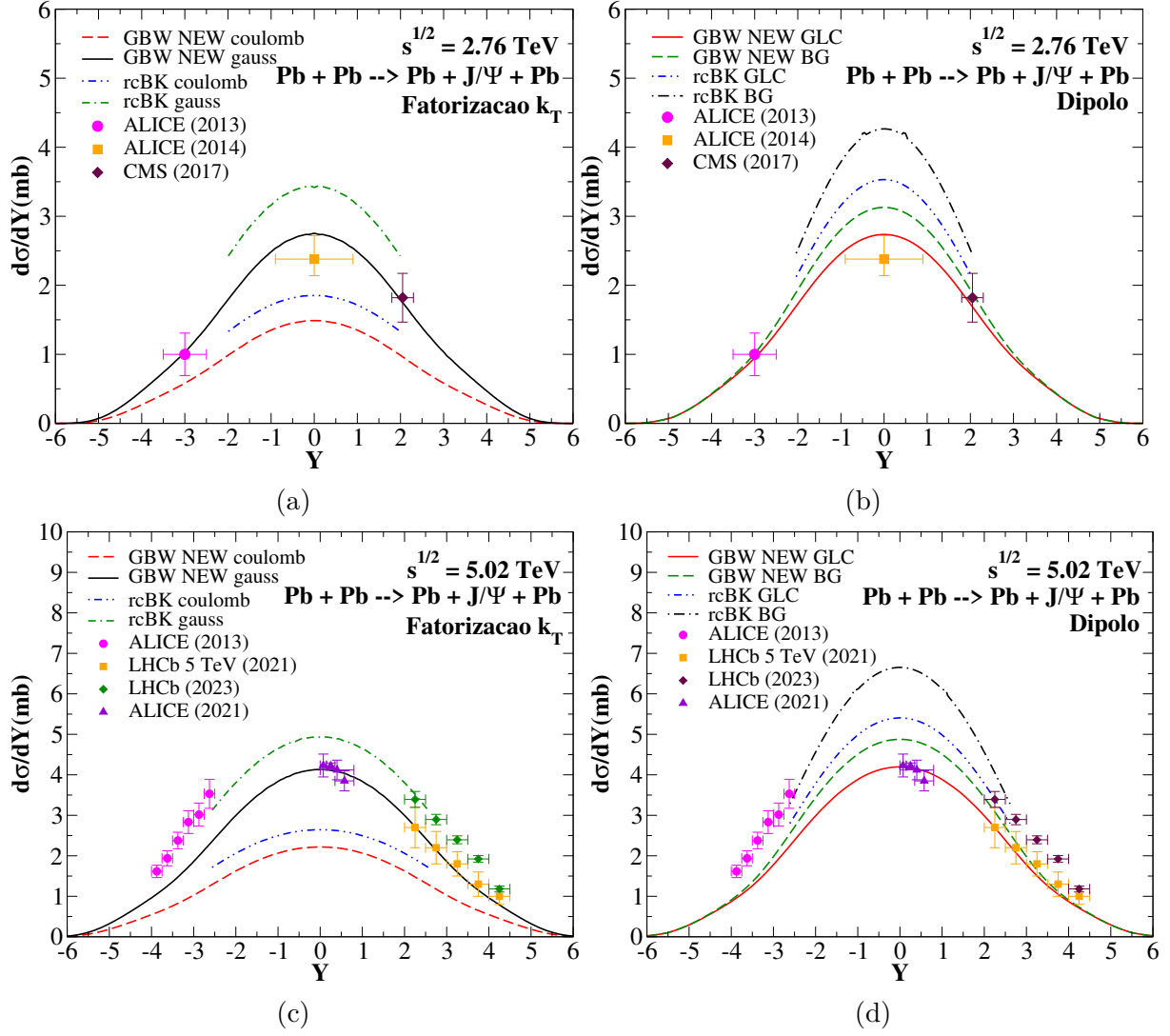


Figura 41 – Distribuições de rapidez em colisão PbPb produzindo J/Ψ com a fatorização k_T , à esquerda, e formalismo de dipolo, à direita para $\sqrt{s} = 2.76 \text{ TeV}$ e 5.02 TeV . Dados das colaborações CMS [82], ALICE [83–85] e LHCb [86, 87].

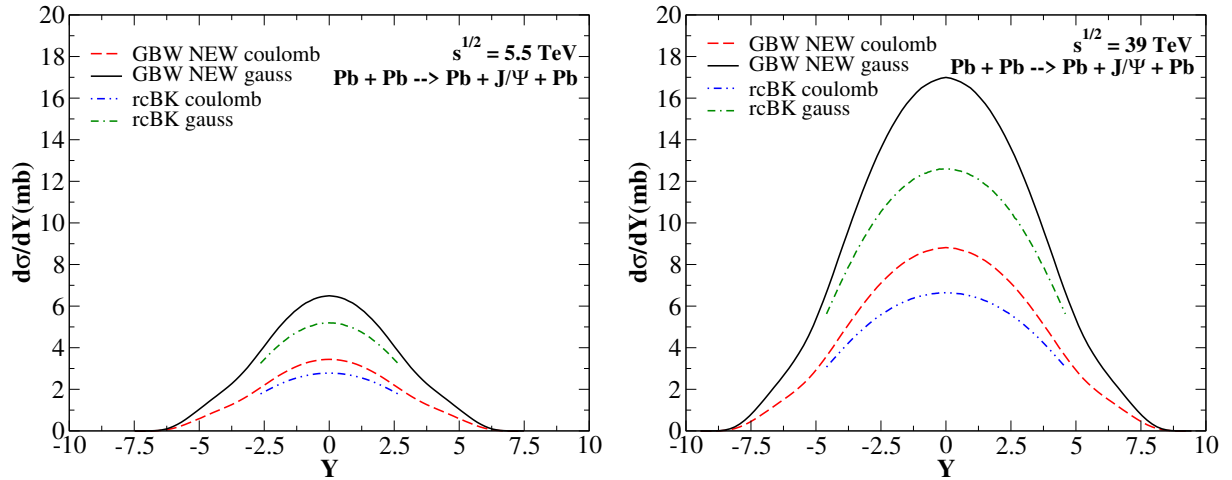


Figura 42 – Distribuições de rapidez em colisão PbPb produzindo J/Ψ com a fatorização k_T para o LHC ($\sqrt{s} = 5.5 \text{ TeV}$) e FCC ($\sqrt{s} = 39 \text{ TeV}$).

Vamos discutir o caso do oxigênio. A Fig. 43 (a) mostra uma colisão pO utilizando as UGDs GBW NEW e rcBK, por meio da mudança da escala de saturação com a fatorização k_T , para as duas funções de onda desse trabalho. Para essa colisão, não podemos desprezar a contribuição de fluxo de fótons vindo do próton, como feito para Pb, pois o oxigênio tem número atômico pequeno [88]. Em (b), temos a colisão OO. Nos dois casos, a banda de incerteza entre modelos fica entre GBW NEW + coulomb e rcBK + gaussiana, como ocorre para PbPb na Fig. 41, mas podemos esperar que, em mais altas energias, considerando o comportamento da seção de choque γO na Fig. 40, as duas UGDs se aproximem comparando mesmas funções de onda.

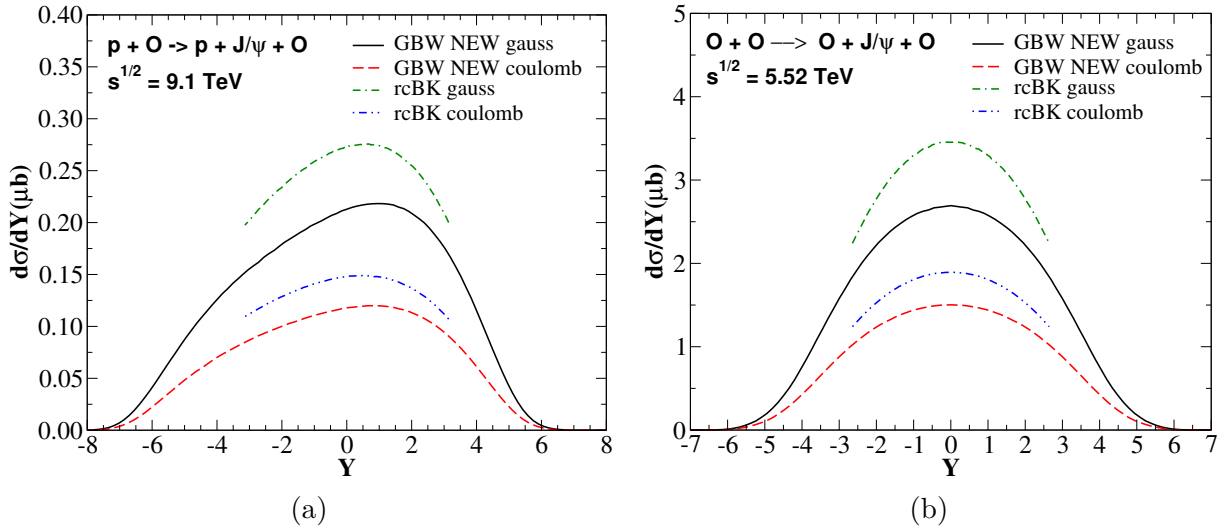


Figura 43 – Distribuições de rapidez em colisões pO para $\sqrt{s} = 9.1$ TeV e OO para $\sqrt{s} = 5.52$ TeV produzindo J/Ψ com a fatorização k_T .

Como essas colisões ainda serão realizadas, não temos dados experimentais e, dessa forma, vamos comparar nossos resultados com alguns trabalhos recentes de produção exclusiva em colisões envolvendo oxigênio. Para isso, integramos as seções de choque nos intervalos do ALICE ($-2.5 \leq Y \leq 2.5$) e LHCb ($2.0 \leq Y \leq 4.5$), e os resultados estão presentes na Tab. 11. Em 2023, calculamos as seções de choque integradas usando o formalismo de dipolo para algumas configurações de modelo de dipolo e função de onda [88], e podemos comparar com nossos resultados da Tab. 11. Para colisões OO no ALICE, foram calculados valores entre 7.01 e 8.06 μb . Neste trabalho, as duas UGDs combinadas com as funções de onda coulombiana estão próximas desses resultados. Para OO no LHCb, as seções de choque ficaram entre 1.88 e 2.15 μb , com nossos resultados para a coulombiana novamente estando mais próxima com o GBW NEW.

No caso de colisões pO (Op) no LHCb, o artigo traz valores entre 0.23 (0.23) e 0.31 (0.28) μb . Vemos, nesse caso, a coulombiana + GBW NEW ficando mais próxima. No caso do ALICE, foram calculadas seções de choque entre 0.63 e 0.75 μb , com GBW NEW + coulomb e rcBK + coulomb ficando mais comparável aos valores. Com isso, vemos que nossos cálculos concordam com resultados usando formalismo de dipolo, com trabalho já

ALICE ($-2.5 \leq Y \leq 2.5$)	OO	pO
GBW NEW coulomb	6.82	0.56
GBW NEW gauss	12.2	1.02
rcBK coulomb	8.52	0.70
rcBK gauss	15.5	1.29
LHCb ($2.0 \leq Y \leq 4.5$)	OO	pO (Op)
GBW NEW coulomb	1.88	0.21 (0.21)
GBW NEW gauss	3.38	0.39 (0.37)

Tabela 11 – Seções de choque totais em μb com a fatorização k_T nos intervalos do ALICE e LHCb. A rcBK não foi calculada para o intervalo do LHCb por não termos a curva completa no intervalo de rapidez.

publicado. Além disso, atestamos novamente a sensibilidade do formalismo da fatorização k_T para escolha de UGD e função de onda.

Podemos ainda comparar nossos resultados com outro artigo da literatura que utilizou fatorização colinear, com evolução DGLAP, para cálculo de distribuições de rapidez com correções além da ordem dominante [89]. Um dos resultados obtidos pelos autores está presente na Fig. 44 (b). Como eles calcularam as distribuições de rapidez para energias de centro de massa diferentes das que apresentamos até o momento, fizemos uma distribuição com a mesma energia de (b), presente na Fig. 44 (a). Comparando os dois resultados, sendo a curva contínua (azul) a de interesse no nosso caso, vemos que as curvas estão em mesma ordem de grandeza, o que indica que nossos resultados concordam com outros formalismos. Além disso, o resultado dos autores está presente dentro da banda de incerteza definida pelas funções de onda coulombiana e gaussiana do nosso caso. Isso demonstra, mais uma vez, como a descrição de colisões nucleares com a abordagem da mudança de escala de saturação utilizada, com a fatorização k_T , fornece resultados robustos. Dados experimentais para os regimes ainda não medidos poderão fortalecer os resultados obtidos para o tratamento nuclear.

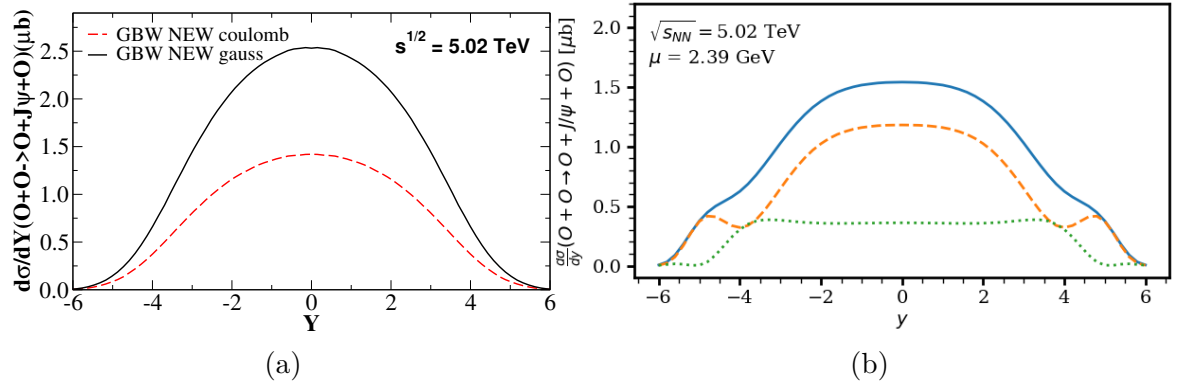


Figura 44 – Distribuição de rapidez em colisão OO produzindo J/Ψ com (a) fatorização k_T e (b) fatorização colinear [89], em que a curva pontilhada (verde) é a contribuição imaginária da amplitude de espalhamento, tracejada (laranja) a contribuição real e a curva contínua (azul) a soma das duas.

7 CONCLUSÕES

Tendo em vista o estudo da estrutura interna do próton em altas energias, neste trabalho analisamos a produção exclusiva de mésons vetoriais em colisões ultraperiféricas. Como as seções de choque para esse tipo de processo são proporcionais ao quadrado da distribuição de glúons, o estudo da saturação partônica tem seus efeitos ampliados em relação às equações sem saturação. Para além disso, vimos a necessidade de equações de evolução não lineares para que limites físicos importantes, como a unitariedade da matriz de espalhamento, não fossem violados. Considerando isso, calculamos os observáveis físicos que são medidos em colisores de altas energias.

Assim, utilizamos o formalismo da fatorização k_T para obter as seções de choque. No caso γp , utilizamos as distribuições de glúons não integradas GBW NEW, rcBK e aBK para descrever a dinâmica gluônica em momento transversal e x de Bjorken, junto das funções de onda do méson vetorial formado. Vimos que o formalismo apresenta uma grande sensibilidade para escolha dessas quantidades, com consideráveis bandas de incerteza nas curvas, porém com dados de J/Ψ e Υ sendo descritos. Para as distribuições de rapidez pp e pPb , obtidas pela aproximação de fótons equivalentes, em colisões já medidas no LHC diferentes modelos descrevem dados experimentais. Com isso, calculamos as distribuições de rapidez para futuras colisões do LHC, que operará com energia de centro de massa de 14 TeV para pp e 8.8 TeV para pPb , e do FCC, com 100 TeV em pp . Com colisões em energias mais altas, temos aumento das distribuições de rapidez e maior probabilidade de medir a produção de mésons.

Para o caso nuclear, fizemos uma comparação entre a fatorização k_T e o formalismo de dipolo. Em interações γPb , utilizamos a fatorização k_T com mudança na escala de saturação no GBW NEW e rcBK, enquanto que no caso do dipolo utilizamos o formalismo de Glauber-Gribov. Vimos que as duas abordagens fornecem boas descrições das seções de choque e das distribuições de glúons. A proposta de mudança de escala de saturação é menos robusta que o formalismo de Glauber-Gribov, pelas suas limitações de validade, mas obtivemos grande concordância com os dados em PbPb. Considerando isso, fizemos previsões para distribuições de rapidez pO , OO e $PbPb$, que estão previstas para o LHC nos próximos anos, além de comparar nossos resultados com outras abordagens de trabalhos recentes, como o formalismo de dipolo e fatorização colinear.

Nossos resultados, considerando a física de saturação, se mostraram relevantes e de grande interesse experimental em diversos regimes cinemáticos. Cabe salientar que os modelos de UGDs utilizados nesta dissertação foram ajustados aos dados de HERA. Nossos cálculos para os observáveis do LHC foram obtidos sem nenhum novo ajuste, de forma que os resultados podem ser considerados como previsões dos referidos modelos. Para perspectivas futuras, pretendemos calcular observáveis para estados excitados dos mésons J/Ψ , o $\psi(2S)$, e Υ , o $\Upsilon(2S)$ e $\Upsilon(3S)$. A descrição desses estados é de grande

interesse em altas energias, pois pode discriminar efeitos de saturação nos colisores [90]. Pretendemos também estudar a produção de mésons leves com outras abordagens para o tratamento das funções de onda [91]. A produção de mésons leves pode ser bastante útil para o estudo de efeitos de saturação [91, 92]. No caso nuclear, pretendemos utilizar o formalismo de Glauber-Gribov na fatorização k_T [78], de modo a comparar os resultados com uma prescrição mais simples como a alteração na escala de saturação. Além disso, ao considerar UGDs dependentes do parâmetro de impacto, podemos calcular distribuições no quadrado do 4-momento transferido t e, por fim, aplicar o formalismo da fatorização k_T em colisões periféricas, pois tem sido, nos últimos anos, de grande interesse experimental e fenomenológico [93, 94].

REFERÊNCIAS

- 1 GONÇALVES, V. et al. Color dipole predictions for the exclusive vector meson photoproduction in pp, pPb, and PbPb collisions at run 2 LHC energies. *Physical Review D*, APS, v. 96, n. 9, p. 094027, 2017.
- 2 BALTZ, A. et al. The physics of ultraperipheral collisions at the LHC. *Physics reports*, Elsevier, v. 458, n. 1-3, p. 1–171, 2008.
- 3 IVANOV, I. P. *Diffraction production of vector mesons in Deep Inelastic Scattering within k_T -factorization approach*. Tese (Doutorado) — Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2002.
- 4 GOLEC-BIERNAT, K.; WÜSTHOFF, M. Saturation in diffractive deep inelastic scattering. *Physical Review D*, APS, v. 60, n. 11, p. 114023, 1999.
- 5 ALBACETE, J. L. et al. Nonlinear QCD meets data: A global analysis of lepton-proton scattering with running coupling Balitsky-Kovchegov evolution. *Physical Review D*, APS, v. 80, n. 3, p. 034031, 2009.
- 6 CAI, Y.; WANG, X.; CHEN, X. Analytic solution of the Balitsky-Kovchegov equation with a running coupling constant using the homogeneous balance method. *Physical Review D*, APS, v. 108, n. 11, p. 116024, 2023.
- 7 JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- 8 BERESTETSKII, V. B.; LIFSHITZ, E. M.; PITAEVSKII, L. P. *Quantum Electrodynamics: Volume 4*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1982. v. 4.
- 9 GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field quantization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1996.
- 10 THOMSON, M. *Modern particle physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- 11 IOFFE, B. L.; FADIN, V. S.; LIPATOV, L. N. *Quantum chromodynamics: Perturbative and nonperturbative aspects*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- 12 FEYNMAN, R. P. Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev.*, v. 76, p. 769–789, 1949.
- 13 SCHMITZ, W. *Particles, Fields and Forces: A Conceptual Guide to Quantum Field Theory and the Standard Model*. [S.l.]: Springer, 2019.
- 14 DEVENISH, R.; COOPER-SARKAR, A. *Deep inelastic scattering*. [S.l.]: OUP Oxford, 2011.
- 15 MOREIRA, B. D. *Produção de Mésons Vetoriais em Processos Foto-Induzidos no LHC*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2017.
- 16 WORKMAN, R. L. et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, v. 2022, p. 083C01, 2022.

- 17 PERKINS, G. J. *A Measurement of the Ratio of Neutral Current to Charged Current Deep Inelastic Muon Neutrino Scattering Interactions in a Fine Grained Neutrino Detector at FNAL*. Tese (Doutorado) — Fermi National Accelerator Lab.(FNAL), Batavia, IL (United States), 1992.
- 18 CASTRO, R. K. *Implicações fenomenológicas da alta densidade partônica na produção de diléptons para energias de raios cósmicos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pelotas, 2012.
- 19 BARONE, V.; PREDAZZI, E. *High-energy particle diffraction*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2002.
- 20 HALZEN, F.; MARTIN, A. D. *Quark & Leptons: An introductory course in modern particle physics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- 21 SANTOS, G. S. *Investigando a produção de mésons vetoriais e fótons diretos em colisões envolvendo íons pesados no Large Hadron Collider*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016.
- 22 BJORKEN, J. D. Asymptotic sum rules at infinite momentum. *Physical Review*, APS, v. 179, n. 5, p. 1547, 1969.
- 23 MARAGE, P. Hadronic structure, low x physics and diffraction. *arXiv preprint hep-ph/9911426*, 1999.
- 24 AARON, F. D. et al. Combined measurement and QCD analysis of the inclusive $e \pm p$ scattering cross sections at HERA. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2010, n. 1, p. 1–63, 2010.
- 25 ADLOFF, C.; COLLABORATION, H. Deep-inelastic inclusive ep scattering at low x and a determination of α_s . *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, Springer, v. 21, n. 1, p. 33–61, 2001.
- 26 CAI, Y.; WANG, X.; CHEN, X. Analytic solution of the Balitsky-Kovchegov equation with a running coupling constant using the homogeneous balance method. *Physical Review D*, APS, v. 108, n. 11, p. 116024, 2023.
- 27 FADIN, V. S.; KURAEV, E.; LIPATOV, L. On the Pomeranchuk singularity in asymptotically free theories. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 60, n. 1, p. 50–52, 1975.
- 28 KURAEV, E. A.; LIPATOV, L.; FADIN, V. S. Multiregion processes in the Yang-Mills theory. *Zhurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki*, v. 71, n. 9, p. 840–855, 1976.
- 29 KURAEV, E. A.; LIPATOV, L.; FADIN, V. S. Pomeranchuk singularity in nonabelian gauge theories. *Sov. Phys.-JETP (Engl. Transl.); (United States)*, Institute for Nuclear Physics, Siberian Division, USSR Academy of Sciences ..., v. 45, n. 2, 1977.
- 30 BALITSKY, Y. Y.; LIPATOV, L. The Pomeranchuk singularity in quantum chromodynamics. *Yad. Fiz.*, v. 28, p. 1597–1611, 1978.
- 31 PIRES, D. S. *Espalhamento Compton Profundamente Virtual em Colisões Elétron-Próton e Elétron-Núcleo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2014.

- 32 KOVCHegov, Y. V.; LEVIN, E. *Quantum chromodynamics at high energy*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- 33 FROISSART, M. Asymptotic behavior and subtractions in the Mandelstam representation. *Physical Review*, APS, v. 123, n. 3, p. 1053, 1961.
- 34 MARTIN, A. Unitarity and high-energy behavior of scattering amplitudes. *Physical Review*, APS, v. 129, n. 3, p. 1432, 1963.
- 35 GRIBOV, L. V.; LEVIN, E. M.; RYSKIN, M. G. Semihard processes in QCD. *Physics Reports*, Elsevier, v. 100, n. 1-2, p. 1–150, 1983.
- 36 MUELLER, A. H.; QIU, J. Gluon recombination and shadowing at small values of x . *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 268, n. 2, p. 427–452, 1986.
- 37 FORSHAW, J. R. et al. *Quantum chromodynamics and the pomeron*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997.
- 38 NIKOLAEV, N. N.; ZAKHAROV, B. G. Color transparency and scaling properties of nuclear shadowing in deep inelastic scattering. *Z. Phys. C*, v. 49, p. 607–618, 1991.
- 39 GOLEC-BIERNAT, K.; WÜSTHOFF, M. Saturation effects in deep inelastic scattering at low Q^2 and its implications on diffraction. *Physical Review D*, APS, v. 59, n. 1, p. 014017, 1998.
- 40 BALITSKY, I. Operator expansion for high-energy scattering. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 463, n. 1, p. 99–157, 1996.
- 41 KOVCHegov, Y. V. Small- x F_2 structure function of a nucleus including multiple pomeron exchanges. *Physical Review D*, APS, v. 60, n. 3, p. 034008, 1999.
- 42 SOUZA, M. S. K. *Dipolos de cor e interações a altas energias*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2007.
- 43 KOVCHegov, Y. V. Brief Review of Saturation Physics. *Acta Phys. Polon. B*, v. 45, n. 12, p. 2241–2256, 2014.
- 44 KOVCHegov, Y. V. et al. Subleading- N_c corrections in non-linear small- x evolution. *Nuclear Physics A*, Elsevier, v. 823, n. 1-4, p. 47–82, 2009.
- 45 STAŚTO, A.; GOLEC-BIERNAT, K.; KWIECIŃSKI, J. Geometric scaling for the total γ^*p cross section in the low x region. *Physical Review Letters*, APS, v. 86, n. 4, p. 596, 2001.
- 46 ABRAMOWICZ, H.; CALDWELL, A. C. HERA collider physics. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 71, n. 5, p. 1275, 1999.
- 47 SAKURAI, J. J. Theory of strong interactions. *Annals Phys.*, v. 11, p. 1–48, 1960.
- 48 KOWALSKI, H.; MOTYKA, L.; WATT, G. Exclusive diffractive processes at HERA within the dipole picture. *Physical Review D*, APS, v. 74, n. 7, p. 074016, 2006.
- 49 CAZAROTO, E. R. *Espalhamento inelástico profundo em colisões elétron-íon*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2009.

- 50 IVANOV, I. P.; NIKOLAEV, N.; SAVIN, A. A. Diffractive vector meson production at HERA: From soft to hard QCD. *Physics of Particles and Nuclei*, Springer, v. 37, p. 1–85, 2006.
- 51 CISEK, A. *Exclusive processes with large rapidity gaps in the formalism of unintegrated gluon distributions*. Tese (Doutorado) — PhD thesis, The Henryk Niewodniczanski Institute of Nuclear Physics, Polish, 2012.
- 52 GOLEC-BIERNAT, K.; SAPETA, S. Saturation model of DIS: an update. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2018, n. 3, p. 1–17, 2018.
- 53 SCHAUMANN, M. Potential performance for Pb-Pb, p-Pb, and p-p collisions in a future circular collider. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, APS, v. 18, n. 9, p. 091002, 2015.
- 54 CERN Future Circular Collider. Disponível em: <<https://home.cern/science/accelerators/future-circular-collider>>. Acesso em: 21 dez 2023.
- 55 FERMI, E. On the Theory of the impact between atoms and electrically charged particles. *Z. Phys*, v. 29, n. 1, p. 315–327, 1924.
- 56 WEIZSACKER, C. V. Radiation emitted in collisions of very fast electrons. *Z. Phys*, v. 88, n. 612, p. 95, 1934.
- 57 WILLIAMS, E. Nature of the high energy particles of penetrating radiation and status of ionization and radiation formulae. *Physical Review*, APS, v. 45, n. 10, p. 729, 1934.
- 58 WILLIAMS, E. J. Applications of the method of impact parameter in collisions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 139, n. 837, p. 163–186, 1933.
- 59 WILLIAMS, E. J. Correlation of certain collision problems with radiation theory. (*No Title*), 1935.
- 60 FRANCENER, R. *Fotoprodução de estados ligados de léptons em colisores hadrônicos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina, 2022.
- 61 KŁUSEK-GAWENDA, M.; SZCZUREK, A. Exclusive muon-pair production in ultrarelativistic heavy-ion collisions: Realistic nucleus charge form factor and differential distributions. *Physical Review C*, APS, v. 82, n. 1, p. 014904, 2010.
- 62 AAIJ R., A. B. et al. Measurement of the exclusive Υ production cross-section in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV and 8 TeV. *Journal of High Energy Physics*, 2015, Vol. 2015, No. 9 (Setembre), Springer, 2015.
- 63 SIRUNYAN, A. et al. Measurement of exclusive Υ photoproduction from protons in pPb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 79, n. 277, 2019.
- 64 BERNET, R. et al. Updated measurements of exclusive J/ψ and $\psi(2S)$ production cross-sections in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 41, p. 055002, 2014.

- 65 ABELEV, B. et al. Exclusive J/ψ photoproduction off protons in ultraperipheral p-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. *Physical Review Letters*, APS, v. 113, n. 23, p. 232504, 2014.
- 66 KHOZE, V.; MARTIN, A.; RYSKIN, M. Diffraction at the LHC. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 73, n. 7, p. 2503, 2013.
- 67 RYBARSKA, A.; SCHÄFER, W.; SZCZUREK, A. Exclusive photoproduction of Υ : From HERA to Tevatron. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 668, n. 2, p. 126–132, 2008.
- 68 JONES, S. et al. Probes of the small x gluon via exclusive J/Ψ and Υ production at HERA and the LHC. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2013, n. 11, p. 1–18, 2013.
- 69 GUZEY, V.; ZHALOV, M. Exclusive J/Ψ production in ultraperipheral collisions at the LHC: constraints on the gluon distributions in the proton and nuclei. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2013, n. 10, p. 1–20, 2013.
- 70 ALBERO, A. A. et al. Central exclusive production of J/ψ and $\psi(2S)$ mesons in pp collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 13$ TeV. *Journal of High Energy Physics*, 2018, vol. 2021, num. 8, p. 1–28, Springer Verlag, 2018.
- 71 CERN. *CMS Luminosity - Public Results*. 2023. Disponível em: <https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/CMSPublic/LumiPublicResults#2016_proton_lead_collisions_at_8>. Acesso em: 02 julho 2023.
- 72 High-Luminosity Large Hadron Collider (HL-LHC): Preliminary Design Report. 12 2015.
- 73 MANGANO, M. *Physics potential of a low-energy FCC-hh*. [S.l.], 2019.
- 74 ACHARYA, S. et al. Energy dependence of exclusive J/ψ photoproduction off protons in ultra-peripheral p-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 79, n. 402, 2019.
- 75 ALICE et al. Exclusive and dissociative J/ψ photoproduction, and exclusive dimuon production, in p-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 8.16$ TeV. *arXiv preprint arXiv:2304.12403*, 2023.
- 76 ARMESTO, N.; SALGADO, C. A.; WIEDEMANN, U. A. Relating high-energy lepton-hadron, proton-nucleus, and nucleus-nucleus collisions through geometric scaling. *Physical Review Letters*, APS, v. 94, n. 2, p. 022002, 2005.
- 77 JAGER, C. D.; VRIES, H. D.; VRIES, C. D. Nuclear charge-and magnetization-density-distribution parameters from elastic electron scattering. *Atomic data and nuclear data tables*, Elsevier, v. 14, n. 5-6, p. 479–508, 1974.
- 78 MORIGGI, L. S. *A produção de hádrons no formalismo de fatorização kT e o impacto das funções de glúons não integradas com efeitos de saturação partônica em colisões pp e AA*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande de Sul, 2021.
- 79 GLAUBER, R. et al. Lectures in theoretical physics. Interscience, New York London, 1959.

- 80 GRIBOV, V. Interaction of gamma quanta and electrons with nuclei at high-energies. *Sov. Phys. JETP*, v. 30, p. 709, 1970.
- 81 ACHARYA, S. et al. Energy dependence of coherent photonuclear production of J/ψ mesons in ultra-peripheral Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2023, 2023.
- 82 KHACHATRYAN, V. et al. Coherent J/ψ photoproduction in ultra-peripheral PbPb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV with the CMS experiment. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 772, p. 489–511, 2017.
- 83 ABELEV, B. et al. Coherent J/ψ photoproduction in ultra-peripheral Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 718, n. 4-5, p. 1273–1283, 2013.
- 84 ABBAS, E. et al. Charmonium and e^+e^- pair photoproduction at mid-rapidity in ultra-peripheral Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 73, n. 11, p. 1–18, 2013.
- 85 ACHARYA, S. et al. Coherent J/ψ and ψ' photoproduction at midrapidity in ultra-peripheral Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, Springer, v. 81, n. 8, p. NA–NA, 2021.
- 86 BURSCHE, A. et al. Study of coherent J/ψ production in lead-lead collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5$ TeV with the LHCb experiment. *Nuclear Physics A*, Elsevier, v. 982, p. 247–250, 2019.
- 87 AAIJ, R. et al. Study of exclusive photoproduction of charmonium in ultra-peripheral lead-lead collisions. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2023, n. 6, p. 1–25, 2023.
- 88 GONÇALVES, V. P.; MOREIRA, B. D.; SANTANA, L. Exclusive ρ and J/ψ photoproduction in ultraperipheral pO and OO collisions at energies available at the CERN Large Hadron Collider. *Physical Review C*, APS, v. 107, n. 5, p. 055205, 2023.
- 89 ESKOLA, K. J. et al. Next-to-leading order perturbative QCD predictions for exclusive J/ψ photoproduction in oxygen-oxygen and lead-lead collisions at energies available at the CERN Large Hadron Collider. *Physical Review C*, APS, v. 107, n. 4, p. 044912, 2023.
- 90 PEREDO, M. A.; HENTSCHINSKI, M. Ratio of J/Ψ and $\psi(2S)$ exclusive photoproduction cross sections as an indicator for the presence of nonlinear QCD evolution. *Phys. Rev. D*, v. 109, n. 1, p. 014032, 2024.
- 91 SOUZA, C. H. de. *Exclusive photo and electroproduction of vector mesons in proton and nuclear targets within the color dipole model*. Tese (Doutorado) — Santa Catarina U., 2023.
- 92 GONCALVES, V. P.; MOREIRA, B. D.; SANTANA, L. Probing the spatial distribution of gluons within the proton in the coherent vector meson production at large $|t|$. *arXiv preprint arXiv:2404.02746*, 2024.
- 93 AAIJ, R. et al. J/ψ photoproduction in Pb-Pb peripheral collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5$ TeV. *Physical Review C*, APS, v. 105, n. 3, p. L032201, 2022.

- 94 BAUR, G. et al. Coherent $\gamma\gamma$ and γA interactions in very peripheral collisions at relativistic ion colliders. *Physics Reports*, Elsevier, v. 364, n. 5, p. 359–450, 2002.
- 95 BARONE, V.; RATCLIFFE, P. G. *Transverse spin physics*. [S.l.]: World Scientific, 2003.
- 96 COLLINS, J. Light-cone variables, rapidity and all that. *arXiv preprint hep-ph/9705393*, 1997.
- 97 STEGUN, M. A. I. *Handbook of Mathematical Functions Dover New York*. [S.l.: s.n.], 1965.
- 98 ŁUSZCZAK, A.; ŁUSZCZAK, M.; SCHÄFER, W. Unintegrated gluon distributions from the color dipole cross section in the BGK saturation model. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 835, p. 137582, 2022.

APÊNDICE A – TEOREMA ÓPTICO

O teorema óptico estabelece que a seção de choque total de um processo é dada por apenas um elemento da matriz S , o espalhamento elástico $1+2 \longrightarrow 1+2$ na direção frontal de espalhamento [19]. Ou seja, a seção de choque para o espalhamento em todos os canais¹ elásticos e inelásticos é proporcional a parte imaginária da amplitude de espalhamento elástico [31].

Os cálculos a seguir são baseados na Ref. [19]. Vamos começar mostrando como os elementos da matriz S estão relacionados às seções de choque. Subtraindo a matriz identidade de S , em que $\mathbb{1}$ representa que nenhum espalhamento ocorreu, obtemos a matriz de transição T ,

$$S = \mathbb{1} + iT. \quad (\text{A.0.1})$$

Ao extrair um elemento da matriz S , temos

$$S_{if} \equiv \langle f | S | i \rangle = \langle f | i \rangle + i \langle f | T | i \rangle = \delta_{if} + iT_{if} \quad (\text{A.0.2})$$

e, em termos da delta de conservação de quadrimomento,

$$T_{if} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) A(i \rightarrow f), \quad (\text{A.0.3})$$

sendo $A(i \rightarrow f)$ a amplitude de espalhamento relativística. Portanto,

$$S_{if} = \delta_{if} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) A(i \rightarrow f). \quad (\text{A.0.4})$$

Utilizando a unitariedade da matriz S , podemos escrever

$$S^\dagger S = (\mathbb{1} - iT^\dagger)(\mathbb{1} + iT) = \mathbb{1}, \quad \Rightarrow \quad i(T^\dagger - T) = T^\dagger T, \quad (\text{A.0.5})$$

e, selecionando um elemento de matriz $\langle f | (\dots) | i \rangle$ em relação aos estados inicial e final,

$$i \langle f | (T^\dagger - T) | i \rangle = \langle f | T^\dagger T | i \rangle. \quad (\text{A.0.6})$$

Inserindo em uma base completa de estados intermediários $\mathbb{1} = \sum_{[n]} |n\rangle \langle n|$, obtemos

$$i \langle f | (T^\dagger - T) | i \rangle = \langle f | T^\dagger \left\{ \sum_{[n]} |n\rangle \langle n| \right\} T | i \rangle. \quad (\text{A.0.7})$$

Podemos definir que

$$T_{if} = \langle f | \hat{T} | i \rangle, \quad (\text{A.0.8})$$

$$T_{if}^* = \langle i | \hat{T}^\dagger | f \rangle, \quad \Rightarrow \quad T_{fi}^* = \langle f | \hat{T}^\dagger | i \rangle. \quad (\text{A.0.9})$$

¹ Diferentes formas que um conjunto de partículas pode ir a outro por um processo de espalhamento [31].

Sabendo que

$$\begin{cases} f(z) &= \text{Re } f(z) + i \text{Im } f(z), \\ f^*(z) &= \text{Re } f(z) - i \text{Im } f(z), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2i \text{Im } f(z) = f(z) - f^*(z),$$

é possível mostrar que

$$\begin{aligned} 2 \text{Im } T_{if} &= \sum_{[n]} \langle f | \hat{T}^\dagger | n \rangle \langle n | \hat{T} | i \rangle, \\ &= \sum_{[n]} T_{fn}^* T_{in}, \end{aligned} \quad (\text{A.0.10})$$

onde

$$\sum_{[n]} \rightarrow \sum_n \int \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \mathbf{q}_j}{(2\pi)^3 2E_j}. \quad (\text{A.0.11})$$

Usando a Eq. (A.0.3), temos

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) 2 \text{Im } A(i \rightarrow f) &= \sum_n \int \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \mathbf{q}_j}{(2\pi)^3 2E_j} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_n) A^*(f \rightarrow n) \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_n) A(i \rightarrow n). \end{aligned} \quad (\text{A.0.12})$$

Já que $\delta^{(4)}(p_f - p_n) \delta^{(4)}(p_i - p_n) = \delta^{(4)}(p_f - p_i) \delta^{(4)}(p_f - p_i)$ podemos escrever

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) 2 \text{Im } A(i \rightarrow f) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \sum_n \int \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \mathbf{q}_j}{(2\pi)^3 2E_j} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \\ &\quad \times A^*(f \rightarrow n) A(i \rightarrow n). \end{aligned} \quad (\text{A.0.13})$$

Definindo

$$d\Pi_n \equiv \prod_j^n \frac{d^3 \mathbf{q}_j}{(2\pi)^3 2E_j} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i), \quad (\text{A.0.14})$$

escrevemos

$$2 \text{Im } A(i \rightarrow f) = \sum_n \int d\Pi_n A^*(f \rightarrow n) A(i \rightarrow n). \quad (\text{A.0.15})$$

As Eqs. (A.0.15) e (A.0.10) são graficamente representadas na Fig. 45.

Se os estados inicial e final são idênticos, isto é, os momenta individuais das partículas não são alterados após a colisão, então

$$|i\rangle = |f\rangle$$

que, para uma colisão $2 \rightarrow 2$, é o caso do espalhamento elástico frontal, caracterizado por

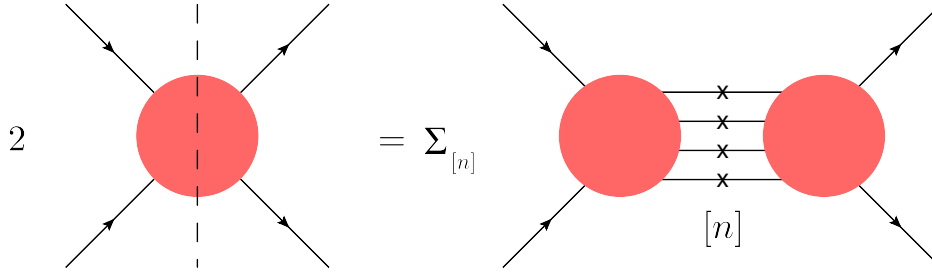


Figura 45 – Representação gráfica das equações de unitariedade. No lado esquerdo, a linha tracejada caracteriza a descontinuidade na amplitude, enquanto que no lado direito as linhas no meio representam todos os processos intermediários possíveis [19].

momento transferido nulo. Portanto, utilizando a Eq. (A.0.15) ao fazer $2 \operatorname{Im} A(i \rightarrow i) = 2 \operatorname{Im} A_{\text{el}}(s, t = 0)$, temos

$$2 \operatorname{Im} A_{\text{el}}(s, t = 0) = \sum_n \int d\Pi_n A^*(i \rightarrow n) A(i \rightarrow n), \quad (\text{A.0.16})$$

$$= \sum_n \int d\Pi_n |A(i \rightarrow n)|^2. \quad (\text{A.0.17})$$

Como a seção de choque total de um processo pode ser escrita como

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{\phi} \sum_n \int d\Pi_n |A(i \rightarrow n)|^2, \quad (\text{A.0.18})$$

sendo ϕ o fator de fluxo incidente, então

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{2}{\phi} \operatorname{Im} A_{\text{el}}(s, t = 0). \quad (\text{A.0.19})$$

No limite de altas energias, o fator de fluxo será $\phi = 2s$, de forma que

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{s} \operatorname{Im} A_{\text{el}}(s, t = 0), \quad (\text{A.0.20})$$

e essa expressão está representada graficamente na Fig. 46. Assim, o teorema óptico relaciona a seção de choque total com a parte imaginária da amplitude de espalhamento elástica. Além disso, na região de pequeno ângulo, a amplitude de espalhamento é dominada pela sua parte imaginária, tendo menor contribuição da parte real.

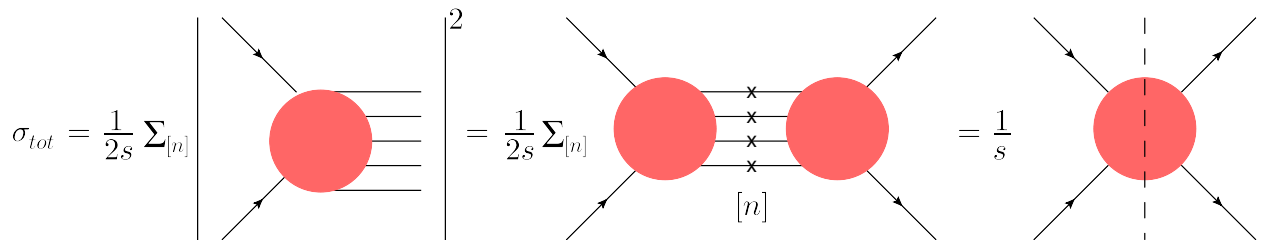


Figura 46 – Representação gráfica do teorema óptico [19].

APÊNDICE B – RESSOMA NA QCD

Na QCD perturbativa, qualquer observável físico pode ser escrito em termos de uma série de potências em α_s . No contexto do DIS, um α_s pequeno é multiplicado por logaritmos que podem se tornar grandes, de forma que precisam ser ressomados. A ressona é o processo de levar em conta esses termos utilizando as equações de grupo de renormalização. Os logaritmos aqui considerados são $\ln Q^2$, em que Q^2 é grande no DIS e $\ln(1/x)$, grande em colisões em altas energias. Dependendo dos tipos de log's somados, obtemos diferentes equações de evolução.

Na Aproximação de $\ln Q^2$ Dominante (LLA), são ressomados termos do tipo $\alpha_s^n \ln^n Q^2$, em que em cada ordem perturbativa apenas a maior potência em $\ln Q^2$ é considerada [19], ou seja,

$$\text{LLA} : \sum_n \alpha_s^n \ln^n Q^2 \left(\ln^n \frac{1}{x} + \ln^{n-1} \frac{1}{x} + \dots \right) \quad (\text{B.0.1})$$

e temos um forte ordenamento nos momentos transversos,

$$Q^2 \gg \kappa_\perp^2 \gg k_{1\perp}^2 \gg k_{2\perp}^2 \gg \dots \gg k_{n\perp}^2,$$

enquanto que o momento longitudinal é normalmente ordenado

$$x < x_1 < x_2 < \dots < 1.$$

A LLA nos leva às equações DGLAP. Temos também a Aproximação de Duplo Logaritmo Dominante (DLLA), que considera termos dominantes em $\ln Q^2$ e $\ln 1/x$ [19], então

$$\text{DLLA} : \sum_n \alpha_s^n \ln^n Q^2 \ln^n \frac{1}{x} \quad (\text{B.0.2})$$

e temos um forte ordenamento nos momentos transversos e longitudinais

$$Q^2 \gg \kappa_\perp^2 \gg k_{1\perp}^2 \gg k_{2\perp}^2 \gg \dots \gg k_{n\perp}^2, \\ x \ll x_1 \ll x_2 \ll \dots \ll 1.$$

Na DLLA, temos apenas escadas de glúons, pois são os pártons dominantes em pequeno x . Além disso, temos uma Aproximação de $\ln 1/x$ Dominante (LL_xA) [19], em que

$$\text{LL}_x\text{A} : \sum_n \alpha_s^n \ln^n \frac{1}{x} \left(\ln^n Q^2 + \ln^{n-1} Q^2 + \dots \right). \quad (\text{B.0.3})$$

Com essa aproximação, obtemos a equação BFKL, que ressona escadas de glúons com forte ordenamento nos momentos longitudinais, mas nenhum ordenamento nos momentos transversos

$$x \ll x_1 \ll x_2 \ll \cdots \ll 1,$$

$$\kappa_{\perp}^2 \simeq k_{1\perp}^2 \simeq k_{2\perp}^2 \simeq \cdots \simeq k_{n\perp}^2.$$

Podemos notar que há uma simetria entre a LLA e a LL_xA na troca $Q^2 \leftrightarrow 1/x$. No limite de $1/x \rightarrow \infty$ as ressonâncias relevantes são a DLLA e a LL_xA .

APÊNDICE C – FATORIZAÇÃO k_T NO DIS

Vamos desenvolver os cálculos para obter a Eq. (3.4.1), seguindo a Ref. [19]. A seção de choque fóton-próton é escrita como

$$\sigma^{\gamma^*p}(x, Q^2) = \frac{1}{2W^2} \int d\Pi \overline{\sum} \mathcal{A}^\mu \mathcal{G}_\mu \mathcal{A}^{\nu*} \mathcal{G}_{\nu*}, \quad (\text{C.0.1})$$

sendo $\overline{\sum}$ uma média sobre spins e polarizações e \mathcal{A}^μ e \mathcal{G}_μ amplitudes de espalhamento, conforme Fig. 47. O propagador do glúon está presente em \mathcal{G}_μ . Temos

$$d\Pi = \frac{d^4\kappa_1}{(2\pi)^3} \delta(\kappa_1^2) \frac{d^4\kappa_2}{(2\pi)^3} \delta(\kappa_2^2) d\Pi_X = \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{d^4\kappa_1}{(2\pi)^2} \delta(\kappa_1^2) \delta(\kappa_2^2) \right] d\Pi_X,$$

em que

$$d\Pi_X = \frac{d^3\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta^4(P - P_X - k).$$

Podemos rearranjar a seção de choque,

$$\sigma^{\gamma^*p}(x, Q^2) = \frac{1}{2W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A^{\mu\nu}(q, k) G_{\mu\nu}(P, k), \quad (\text{C.0.2})$$

com

$$A^{\mu\nu}(q, k) = \overline{\sum} \int \frac{d^4\kappa_1}{(2\pi)^4} \delta(\kappa_1^2) \delta(\kappa_2^2) \mathcal{A}^\mu \mathcal{A}^{\nu*}, \quad (\text{C.0.3})$$

$$G_{\mu\nu}(P, k) = \overline{\sum} \int d\Pi_X \mathcal{G}^\mu \mathcal{G}^{\nu*}, \quad (\text{C.0.4})$$

sendo $A^{\mu\nu}$ e $G^{\mu\nu}$ relacionados com o espalhamento γ^* -glúon e glúon-N, respectivamente. Na representação de Sudakov (ver Apêndice D.1), o 4-momento dos núcleons é P , e usando P^2 como nulo, podemos definir convenientemente o vetor $q' = q + xP$. Assim, o glúon trocado tem 4-momento dado por

$$k = \beta P - \alpha q' + k_\perp = \beta P + \frac{k_\perp^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{\beta W^2} q' + k_\perp, \quad (\text{C.0.5})$$

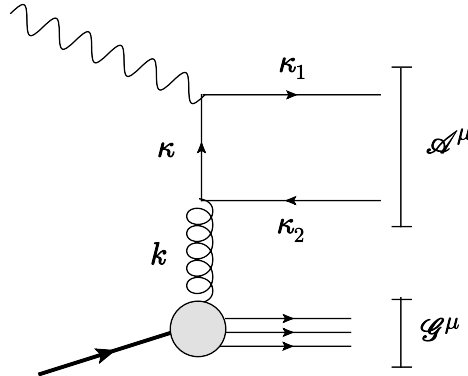


Figura 47 – Diagrama contribuindo para o DIS em pequeno x [19].

em que α, β são parâmetros da representação de Sudakov e $k_\perp = (0, \mathbf{k}, 0) \rightarrow k_\perp^2 = -\mathbf{k}^2$. A contribuição dominante para a integral sobre k vem da região de pequeno β , com $\mathbf{k}^2 \ll W^2$ fixo e $k^2 \simeq -\mathbf{k}^2$, então podemos escrever

$$k \simeq \beta P + k_\perp. \quad (\text{C.0.6})$$

É interessante citar que a fatorização k_T implica que $k = \beta P + k_\perp$ enquanto que na fatorização colinear assumimos $k_\perp = 0$.

Sendo $A^{\mu\nu}$ uma corrente conservada invariante de gauge, portanto satisfazendo $k_\mu A^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} k_\nu = 0$, podemos decompor como

$$A^{\mu\nu}(q, k) = A_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) - \frac{1}{k^2} A_2 \left(k^\mu - \frac{k^2}{q \cdot k} q^\mu \right) \left(k^\nu - \frac{k^2}{q \cdot k} q^\nu \right), \quad (\text{C.0.7})$$

como foi feito com o tensor hadrônico na Seção 2.4. No limite de pequeno β e grande W^2 , que domina a seção de choque em altas energias, $A^{\mu\nu}$ tende a [19]

$$A^{\mu\nu} \rightarrow \frac{4\mathbf{k}^2}{\beta^2 W^4} q^\mu q^\nu A_2. \quad (\text{C.0.8})$$

Portanto, nossa seção de choque dada pela Eq. (C.0.2) usando $\int d^4k = (W^2/2) \int d\alpha d\beta d^2\mathbf{k}$ e a relação anterior fica

$$\sigma_\lambda^{*\gamma p}(x, Q^2) = \int \frac{d\alpha d\beta d^2\mathbf{k}}{\beta^2 W^4} \mathbf{k}^2 A_2(q, k) q^\mu q^\nu G_{\mu\nu}(P, k) \quad (\text{C.0.9})$$

A seção de choque para glúons fora da camada de massa é

$$\hat{\sigma}_\lambda^{*\gamma g}(\beta, \mathbf{k}^2, Q^2) = \frac{1}{\text{flux}} (-g^{\mu\nu}) A_{\mu\nu} = \frac{1}{2\beta W^2} (-g^{\mu\nu}) A_{\mu\nu} = \frac{1}{\beta W^2} A_2 = \frac{\beta}{W^2 \mathbf{k}^2} P_\mu P_\nu A^{\mu\nu}. \quad (\text{C.0.10})$$

em que a última igualdade foi obtida invertendo (C.0.8) com o projetor $P_\mu P_\nu$. Usando o penúltimo termo na seção de choque, temos

$$\sigma_\lambda^{*\gamma p}(x, Q^2) = \int \frac{d\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2} \int \frac{d\beta}{\beta} F(\beta, \mathbf{k}^2) \hat{\sigma}_\lambda^{*\gamma g}(\beta, \mathbf{k}^2, Q^2), \quad (\text{C.0.11})$$

com a distribuição de glúons não integrada relacionada a $G^{\mu\nu}$ por

$$F(\beta, \mathbf{k}^2) = \int d\alpha \frac{\pi \mathbf{k}^4}{W^2} q^\mu q^\nu G_{\mu\nu}(P, k). \quad (\text{C.0.12})$$

Dessa forma, obtemos a seção de choque da Eq. (3.4.1), sendo $\beta \equiv x/x'$ a fração do momento longitudinal do próton carregada pelo glúon.

Vamos trabalhar em uma expressão para $\hat{\sigma}_\lambda^{*\gamma g}(\beta, \mathbf{k}^2, Q^2)$. A seção de choque $\gamma^* g$ é dada por

$$\hat{\sigma}_\lambda^{*\gamma g}(\beta, \mathbf{k}^2, Q^2) = \frac{\beta}{W^2 \mathbf{k}^2} \epsilon_\alpha^{(\lambda)} \epsilon_\beta^{(\lambda)*} P_\mu P_\nu A^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (\text{C.0.13})$$

onde, considerando $\kappa = q - \kappa_1 = \kappa_2 - k$ e $\kappa = -wP + zq' + \kappa_\perp$ com $d^4\kappa = (W^2/2) dw dz d^2\kappa$,

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu\alpha\beta}(q, k) &= \overline{\sum} \int \frac{d^4\kappa_1}{(2\pi)^2} \delta(\kappa_1^2) \delta(\kappa_2^2) \mathcal{A}^{\alpha\mu} \mathcal{A}^{\beta\nu*}, \\ &= \overline{\sum} \int \frac{d^4\kappa}{(2\pi)^2} \delta((q - \kappa)^2) \delta((k + \kappa)^2) \mathcal{A}^{\alpha\mu} \mathcal{A}^{\beta\nu*}. \end{aligned} \quad (\text{C.0.14})$$

A amplitude $\mathcal{A}^{\alpha\mu}$ que descreve o processo $\gamma^*(q) + g(k) \rightarrow q(\kappa_1) + \bar{q}(\kappa_2)$ é a soma de dois termos, as contribuições dos canais t e u¹, de acordo com a Fig. 48, ou seja,

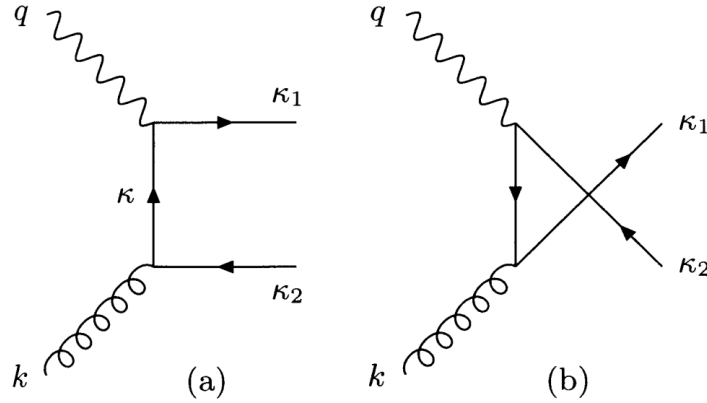


Figura 48 – Diagramas para o espalhamento $\gamma^* g \rightarrow q\bar{q}$ no (a) canal t e (b) canal u [19].

$$\mathcal{A}^{\alpha\mu} = \mathcal{A}_{(t)}^{\alpha\mu} + \mathcal{A}_{(u)}^{\alpha\mu},$$

em que, utilizando as regras de Feynman, temos

$$\mathcal{A}_{(t)}^{\alpha\mu} = -ig_s e_q e t_{ij}^a \bar{u}(\kappa_1) \gamma^\alpha \frac{\not{k} - \not{k}_2}{(k - \kappa_2)^2} \gamma^\mu v(\kappa_2), \quad (\text{C.0.15})$$

$$\mathcal{A}_{(u)}^{\alpha\mu} = -ig_s e_q e t_{ij}^a \bar{u}(\kappa_1) \gamma^\alpha \frac{\not{k}_2 - \not{k}}{(\kappa_1 - k)^2} \gamma^\mu v(\kappa_2). \quad (\text{C.0.16})$$

A amplitude $A^{\mu\nu\alpha\beta}$ pode ser reescrita como

$$A^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi W^2} \overline{\sum} \int \frac{dz}{z(1-z)} d^2\kappa \delta\left(\beta - \frac{z\kappa^2 + (1-z)(\kappa + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2}{z(1-z)W^2}\right) \mathcal{A}^{\alpha\mu} \mathcal{A}^{\beta\nu*}, \quad (\text{C.0.17})$$

em que $\epsilon^2 \equiv Q^2 z(1-z)$. Tomando o quadrado de $\mathcal{A}^{\alpha\mu}$, temos

$$\mathcal{A}^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \overline{\sum} \mathcal{A}^{\alpha\mu} \mathcal{A}^{\beta\nu*} = 2 \left(\mathcal{A}_{(a)}^{\mu\nu\alpha\beta} + \mathcal{A}_{(b)}^{\mu\nu\alpha\beta} \right), \quad (\text{C.0.18})$$

com o fator 2 vindo dos outros dois diagramas ao inverter as linhas de férmions, na Fig. 49. Essa figura é interessante pois mostra os dipolos da interação fóton-gluon, ou seja, o par quark-antiquark.

Combinando (C.0.13) e (C.0.17) obtemos

¹ Sendo u também uma variável de Mandelstam.

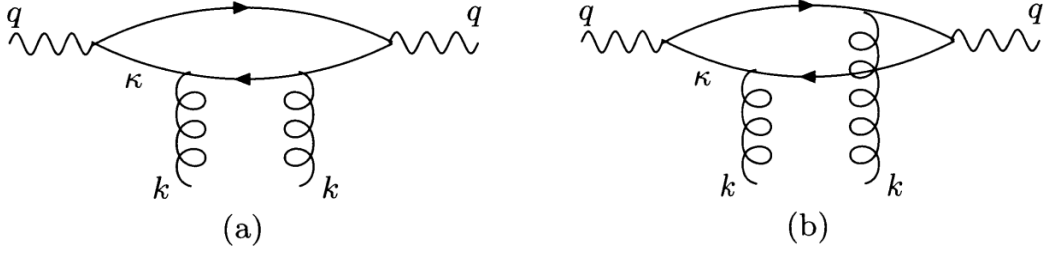


Figura 49 – Dois dos quatro diagramas que contribuem para $\mathcal{A}^{\mu\nu\alpha\beta}$. Os outros dois diagramas são obtidos invertendo as linhas de férmions [19].

$$\hat{\sigma}_\lambda^{\gamma^*g} = \frac{\beta}{8\pi^2 W^4 \mathbf{k}^2} \int \frac{dz}{z(1-z)} \int d^2\boldsymbol{\kappa} \delta\left(\beta - \frac{z\boldsymbol{\kappa}^2 + (1-z)(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2}{z(1-z)W^2}\right) d_{\alpha\beta}^{(\lambda)} P_\mu P_\nu \mathcal{A}^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (\text{C.0.19})$$

sendo $d_{\alpha\beta}^{(\lambda)}$ as projeções nas polarizações do fóton [19]. Os fatores de impacto são obtidos integrando a seção de choque sobre β , ou seja,

$$\Phi_\lambda = \frac{1}{4\pi^2 W^4} \int \frac{dz}{z(1-z)} \int d^2\boldsymbol{\kappa} d_{\alpha\beta}^{(\lambda)} P_\mu P_\nu \mathcal{A}^{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (\text{C.0.20})$$

Após alguns passos para calcular $d_{\alpha\beta}^{(\lambda)} P_\mu P_\nu \mathcal{A}^{\alpha\beta\mu\nu}$ (ver Ref. [19] para mais detalhes) e substituindo (C.0.19) em (C.0.11), a seção de choque da fatorização k_T no DIS fica

$$\sigma_{L,T}^{*p}(x, Q^2) = \frac{\alpha_{em}}{\pi Q^2} \sum_q e_q^2 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^4} \int_0^1 dz \int d^2\boldsymbol{\kappa} \alpha_s(\mu^2) F(\beta, \mathbf{k}^2) \times \left\{ \frac{N_\lambda(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa})}{(\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2)^2} + \frac{N_\lambda(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})}{[(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]^2} - \frac{2N_\lambda(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})}{(\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2)[(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]} \right\}, \quad (\text{C.0.21})$$

sendo

$$N_L(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 4z^2(1-z)^2 Q^4, \\ N_T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = Q^2[z^2 + (1-z)^2] \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2.$$

APÊNDICE D – CONVENÇÕES MATEMÁTICAS

D.1 PARAMETRIZAÇÃO DE SUDAKOV

A parametrização de Sudakov é uma importante ferramenta matemática para a física de altas energias [19, 95]. Vamos introduzir os vetores de Sudakov p e n ,

$$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda, 0, 0, \Lambda), \quad (\text{D.1.1})$$

$$n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda^{-1}, 0, 0, -\Lambda^{-1}), \quad (\text{D.1.2})$$

sendo Λ um número arbitrário. Esses vetores satisfazem

$$p^2 = n^2 = 0, \quad p \cdot n = 1. \quad (\text{D.1.3})$$

Na decomposição no cone de luz, temos

$$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda, 0, \mathbf{0}_\perp), \quad (\text{D.1.4})$$

$$n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \Lambda^{-1}, \mathbf{0}_\perp). \quad (\text{D.1.5})$$

Um vetor genérico A^μ pode ser parametrizado como

$$A^\mu = \alpha p^\mu + \beta n^\mu + A_\perp^\mu, \quad (\text{D.1.6})$$

$$= (A \cdot n)p^\mu + (A \cdot p)n^\mu + A_\perp^\mu, \quad (\text{D.1.7})$$

com $A_\perp^\mu = (0, \mathbf{A}_\perp, 0)$. A Eq. (D.1.6) é a decomposição de Sudakov. O quadrado de A^μ é

$$A^2 = 2\alpha\beta - \mathbf{A}_\perp^2. \quad (\text{D.1.8})$$

A parametrização de Sudakov é interessante em altas energias já que, perto da velocidade da luz e com as direções dos eixos de coordenadas escolhidos de forma apropriada, quando β for grande, α será quase zero e vice-versa.

D.2 VARIÁVEIS NO CONE DE LUZ

O uso das variáveis no cone de luz são muito comuns no tratamento de espalhamentos em altas energias, particularmente em colisões lépton-hádron e hádron-hádron. As coordenadas no cone de luz são definidas por uma troca de variáveis do usual (t, x, y, z) [96]. Em componentes contravariantes cartesianas, escrevemos um quadrivetor A^μ como [19]

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \mathbf{A}_\perp, A^3) = (A^0, \mathbf{A}). \quad (\text{D.2.1})$$

Os componentes no cone de luz de A^μ são definidos como

$$A^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^0 \pm A^3), \quad (\text{D.2.2})$$

em que A^{μ} é

$$A^{\mu} = (A^+, A^-, \mathbf{A}_{\perp}). \quad (\text{D.2.3})$$

A norma de A^{μ} é dada por

$$A^2 = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2 = 2A^+A^- - \mathbf{A}_{\perp}^2 \quad (\text{D.2.4})$$

e, finalmente, o produto escalar de dois quadrivetores A^{μ} e B^{μ} é

$$A \cdot B = A^0B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^+B^- + A^-B^+ - \mathbf{A}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp}. \quad (\text{D.2.5})$$

O uso dessas coordenadas, que depende de uma escolha particular do eixo z , é interessante em processos de espalhamento em altas energias. Nesse caso, há uma escolha natural de eixo, o eixo de colisão, e é comum que seja necessário mudar de referencial nessas colisões, relacionados por boosts ao longo do eixo. Alguns referenciais comuns são o de repouso das partículas incidentes ou o referencial de centro de massa da colisão [96].

APÊNDICE E – RELAÇÕES IMPORTANTES

E.1 RELAÇÃO ENTRE MOMENTO TRANSVERSO E RAIOS TRANSVERSO DO DIPOLO

Para obter a seção de choque γp no formalismo de dipolo, podemos utilizar expressões que relacionam o momento transverso do dipolo com o raio r na seção de choque da fatorização k_T , no DIS. Vamos demonstrar como obtivemos as seções de choque de dipolo utilizando as Eqs. (3.5.12) e (3.5.13). Para o caso longitudinal em (3.5.10), precisamos

$$I_1 = \int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}}{(\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2)^2}; \quad I_2 = \int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}}{[(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]^2}; \quad I_3 = \int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}}{(\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2) [(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]}. \quad (\text{E.1.1})$$

Podemos argumentar que I_2 pode ser reduzida a I_1 ao fazer uma troca de variáveis $\boldsymbol{\kappa}' = \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k}$, de forma que

$$I_2 = \int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}}{(\boldsymbol{\kappa}'^2 + \epsilon^2)^2} = I_1, \quad (\text{E.1.2})$$

que é possível pois as integrações se estendem ao infinito. Além disso, I_3 recai em I_1 e I_2 para $\mathbf{k} = 0$. Assim, podemos resolver apenas I_3 . Chamado $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_1$ e $\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k} = \boldsymbol{\kappa}_2$, temos

$$I_3 = \int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}_1}{(\boldsymbol{\kappa}_1^2 + \epsilon^2)} \int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}_2}{(\boldsymbol{\kappa}_2^2 + \epsilon^2)} \delta^{(2)}(\boldsymbol{\kappa}_1 + \mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa}_2), \quad (\text{E.1.3})$$

já que a delta retorna para a equação original. Então,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}_1}{(\boldsymbol{\kappa}_1^2 + \epsilon^2)} \int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}_2}{(\boldsymbol{\kappa}_2^2 + \epsilon^2)} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{r} e^{i\mathbf{r} \cdot (-\boldsymbol{\kappa}_2 + \mathbf{k} + \boldsymbol{\kappa}_1)}, \\ &= \int d^2\mathbf{r} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} \left| \frac{1}{2\pi} \int d^2\boldsymbol{\kappa} \frac{e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2} \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{E.1.4})$$

Vamos calcular a integral em $\boldsymbol{\kappa}$, sendo $d^2\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa} d\boldsymbol{\kappa} d\phi$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int d^2\boldsymbol{\kappa} \frac{e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\boldsymbol{\kappa} d\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2} \int_0^{2\pi} d\phi e^{ir\kappa \cos \phi}, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\boldsymbol{\kappa} d\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2} [2\pi J_0(r\kappa)], \\ &= \int_0^\infty \frac{\boldsymbol{\kappa} d\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2} J_0(r\kappa). \end{aligned} \quad (\text{E.1.5})$$

Utilizando a relação [97]

$$\int_0^\infty dt \frac{t^{\nu+1} J_\nu(at)}{(t^2 + z^2)^{\mu+1}} = \frac{a^\mu z^{\nu-\mu}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(az) \quad (\text{E.1.6})$$

com μ e ν iguais a zero, podemos escrever (E.1.5) como

$$\int_0^\infty \frac{\boldsymbol{\kappa} d\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2} J_0(r\kappa) = K_0(\epsilon r). \quad (\text{E.1.7})$$

Substituindo a expressão acima em (E.1.4), temos

$$I_3 = \int \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}}{(\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2) [(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]} = \int d^2 \mathbf{r} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} K_0^2(\epsilon r). \quad (\text{E.1.8})$$

Fazendo $\mathbf{k} = 0$, obtemos I_1 e I_2 ,

$$I_1 = I_2 = \int d^2 \mathbf{r} K_0^2(\epsilon r). \quad (\text{E.1.9})$$

Vamos trabalhar agora no caso transversal em (3.5.11), em que

$$I'_1 = \int \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}}{(\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2)^2}; \quad I'_2 = \int \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa} (\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k}) \cdot (\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})}{[(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]^2}; \quad I'_3 = \int \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\kappa} \cdot (\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})}{(\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2) [(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k})^2 + \epsilon^2]}. \quad (\text{E.1.10})$$

Faremos uso do mesmo procedimento anterior, em que a integral I'_2 leva à integral I'_1 com uma transformação de coordenadas, com a I'_3 recaindo nas duas primeiras no caso particular de $\mathbf{k} = 0$. Também usaremos as mesmas substituições de $\boldsymbol{\kappa}_1$ e $\boldsymbol{\kappa}_2$. Portanto, para I'_3 ,

$$\begin{aligned} I'_3 &= \left(\int \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_1}{(\boldsymbol{\kappa}_1^2 + \epsilon^2)} \boldsymbol{\kappa}_1 \right) \cdot \left(\int \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_2}{(\boldsymbol{\kappa}_2^2 + \epsilon^2)} \boldsymbol{\kappa}_2 \right) \delta^{(2)}(\boldsymbol{\kappa}_1 + \mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa}_2), \\ &= \left(\int \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_1}{(\boldsymbol{\kappa}_1^2 + \epsilon^2)} \boldsymbol{\kappa}_1 \right) \cdot \left(\int \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}_2}{(\boldsymbol{\kappa}_2^2 + \epsilon^2)} \boldsymbol{\kappa}_2 \right) \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \mathbf{r} e^{i\mathbf{r} \cdot (-\boldsymbol{\kappa}_2 + \mathbf{k} + \boldsymbol{\kappa}_1)}, \\ &= \int d^2 \boldsymbol{\rho} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} \left| \frac{1}{2\pi} \int d^2 \boldsymbol{\kappa} \frac{\boldsymbol{\kappa} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2} \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{E.1.11})$$

Podemos reescrever o termo do módulo como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int d^2 \boldsymbol{\kappa} \frac{\boldsymbol{\kappa} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2} &= \frac{1}{2\pi i} \int d^2 \boldsymbol{\kappa} \frac{\boldsymbol{\nabla} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2}, \\ &= \frac{1}{2\pi i} \boldsymbol{\nabla} \left[\int_0^\infty \frac{\boldsymbol{\kappa} d\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i r \boldsymbol{\kappa} \cos \phi} \right], \\ &= \frac{1}{i} \boldsymbol{\nabla} \left[\int_0^\infty \frac{\boldsymbol{\kappa} d\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2} J_0(r\boldsymbol{\kappa}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.1.12})$$

A relação acima é a mesma que a Eq. (E.1.7), de forma que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int d^2 \boldsymbol{\kappa} \frac{\boldsymbol{\kappa} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \epsilon^2} &= \frac{1}{i} \boldsymbol{\nabla} [K_0(\epsilon r)], \\ &= -\frac{1}{i} \epsilon K_1(\epsilon r) = i \epsilon K_1(\epsilon r). \end{aligned} \quad (\text{E.1.13})$$

Então a integral I'_3 , em (E.1.11), fica

$$I'_3 = \int d^2 \mathbf{r} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} \epsilon^2 K_1^2(\epsilon r). \quad (\text{E.1.14})$$

Tomando $\mathbf{k} = 0$, temos

$$I'_1 = I'_2 = \int d^2\mathbf{r} \, \epsilon^2 K_1^2(\epsilon r). \quad (\text{E.1.15})$$

Assim, obtivemos as relações necessárias para escrever a seção de choque no formalismo de dipolo.

E.2 DISTRIBUIÇÃO DE GLÚONS NÃO INTEGRADA A PARTIR DA SEÇÃO DE CHOQUE DE DIPOLO

Para obter as distribuições de glúons não integradas, podemos fazer uma transformada de Fourier na seção de choque de dipolo, em termos do raio do dipolo r , para o espaço dos momentos k , que nos fornece a dinâmica de distribuição partônica a partir da fatorização k_T . A transformada de Fourier é escrita como

$$f(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{k} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{E.2.1})$$

e conforme Eq. (3.5.15), temos

$$\sigma(x, \mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^4} \alpha_s F(x, \mathbf{k}) (1 - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}).$$

Multiplicando por $e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}$,

$$\sigma(x, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} = \int d^2\mathbf{k} \left(\frac{4\pi\alpha_s}{3} \frac{F(x, \mathbf{k})}{\mathbf{k}^4} \right) e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} - \int d^2\mathbf{k} \left(\frac{4\pi\alpha_s}{3} \frac{F(x, \mathbf{k})}{\mathbf{k}^4} \right) e^{i\mathbf{r}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \quad (\text{E.2.2})$$

Chamando $\epsilon(x, \mathbf{k}) = \left(\frac{4\pi\alpha_s}{3} \frac{F(x, \mathbf{k})}{\mathbf{k}^4} \right)$ e integrando a expressão (E.2.2) em $d^2\mathbf{r}$, temos

$$\begin{aligned} \int d^2\mathbf{r} \sigma(x, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} &= \int d^2\mathbf{k} \epsilon(x, \mathbf{k}) \int d^2\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} - \int d^2\mathbf{k} \epsilon(x, \mathbf{k}) \int d^2\mathbf{r} e^{i\mathbf{r}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \\ &= \int d^2\mathbf{k} \epsilon(x, \mathbf{k}) \int d^2\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} - \int d^2\mathbf{k} \epsilon(x, \mathbf{k}) (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &= \int d^2\mathbf{k} \epsilon(x, \mathbf{k}) \int d^2\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} - (2\pi)^2 \epsilon(x, \mathbf{k}') \end{aligned}$$

O termo $\int d^2\mathbf{k} \epsilon(x, \mathbf{k})$, para grandes dipolos, é σ_0 [98]. Dessa forma

$$\begin{aligned} \epsilon(x, \mathbf{k}') &= \int \frac{d^2\mathbf{r}}{(2\pi)^2} \sigma_0 e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} - \int \frac{d^2\mathbf{r}}{(2\pi)^2} \sigma(x, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \\ \frac{4\pi\alpha_s}{3} \frac{F(x, \mathbf{k})}{\mathbf{k}^4} &= \sigma_0 \int \frac{d^2\mathbf{r}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \left[1 - \frac{\sigma(x, \mathbf{r})}{\sigma_0} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.2.3})$$

e, como $\sigma(x, \mathbf{r})/\sigma_0$ é a amplitude de espalhamento de dipolo $\mathcal{N}(x, \mathbf{r})$, então podemos escrever

$$F(x, \mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}^4 N_c}{4\pi\alpha_s} \sigma_0 \int \frac{d^2\mathbf{r}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} [1 - \mathcal{N}(x, \mathbf{r})] \quad (\text{E.2.4})$$

APÊNDICE F – DEDUÇÃO DA APROXIMAÇÃO DE FÓTONS EQUIVALENTES

Vamos fazer a derivação quântica da aproximação de fótons equivalentes seguindo as Refs. [8, 15, 60]. A derivação clássica pode ser consultada, por exemplo, na Ref. [7]. Vamos comparar os processos presentes na Fig. 50. Em (a), temos a colisão de uma partícula de momento q (massa m) com um fóton real de momento k , de forma que um conjunto de partículas com momento Q é produzido. Em (b), temos o espalhamento de uma partícula q por outra partícula com momento p e massa M , de forma que o mesmo conjunto de partículas Q é produzido enquanto a outra partícula adquire momento p' . O segundo processo é equivalente a colisão de uma partícula q com um fóton virtual. Se o quadrado do momento do fóton k^2 é pequeno, então a diferença entre fóton reais e virtuais é pequena, e a seção de choque do processo em (a) pode ser expressa em termos da seção de choque de (b).

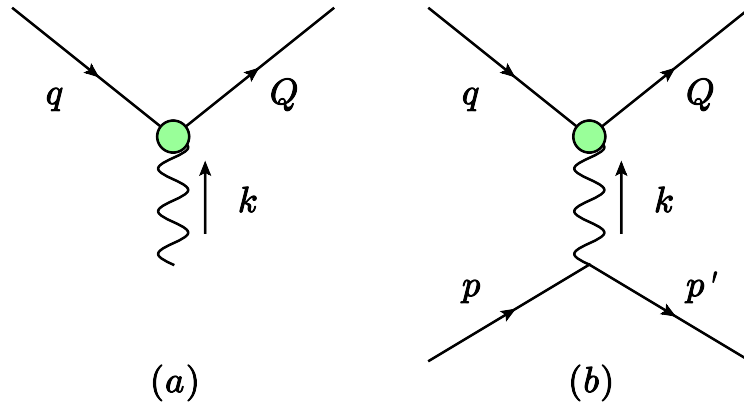


Figura 50 – Interação fóton-próton.

Suponhamos uma partícula de massa M ultra-relativística, com energia $\epsilon \gg M$ no referencial de repouso da partícula de massa m . Sendo A_r a amplitude invariante do processo em (a), com o fóton real, temos

$$A_r = -ee_\mu J^\mu, \quad (\text{F.0.1})$$

sendo e_μ o quadrivetor polarização do fóton e J_μ a corrente de transição. A amplitude A do processo em (b) é

$$A = Ze^2 \frac{1}{k^2} j_\mu J^\mu \quad (\text{F.0.2})$$

e j_μ é a corrente de transição da partícula de massa M no vértice inferior, Ze sua carga (sendo Z o número atômico) e J_μ depende de $k = Q - q$, diferindo do caso anterior em que $k^2 = 0$. Se no segundo caso $|k|^2 \ll m^2$, podemos tomar J para $k^2 = 0$.

Considerando a mudança no momento da partícula de massa M quando um fóton virtual é emitido ($\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{k}$) pequena comparada com $|\mathbf{p}| \approx \epsilon$, podemos tomar $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ na

corrente j . Vamos considerar que a partícula M tem movimento uniforme, em linha reta, de forma que é quase clássico e a corrente é independente do spin da partícula,

$$j^\mu = 2p^\mu. \quad (\text{F.0.3})$$

Vamos agora obter as relações para as amplitudes invariantes A e A_r . Considerando o momento no eixo x e usando a condição de que a corrente seja transversa, sabendo que $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$, temos

$$j^\mu k_\mu = 2(\epsilon\omega - p_x k_x) = 0 \quad \therefore \quad \omega = \frac{p_x}{\epsilon} k_x = v k_x. \quad (\text{F.0.4})$$

Podemos escrever também o quadrado do quadrimomento do fóton como

$$\begin{aligned} -k^2 &= -(\omega^2 - k_x^2 - \mathbf{k}_\perp^2) = -\omega^2 + \frac{\omega^2}{v^2} + \mathbf{k}_\perp^2 = \frac{\omega^2}{v^2}(1 - v^2) + \mathbf{k}_\perp^2, \\ -k^2 &\approx \omega^2(1 - v^2) + \mathbf{k}_\perp^2, \end{aligned} \quad (\text{F.0.5})$$

sendo $\mathbf{k}_\perp^2 = k_y^2 + k_z^2$. Dessa forma, a condição $|k|^2 \ll m^2$ equivale a $|\mathbf{k}_\perp| \ll m$ e $\omega \ll \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma m$.

Para a corrente ser transversa, é necessário que $J^\mu k_\mu = 0$. Assim, com $J^\mu = (J_0, \mathbf{J})$, obtemos

$$J^\mu k_\mu = J_0\omega - J_x k_x - \mathbf{J}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp = 0 \quad \therefore \quad J_0 = \frac{J_x}{v} + \frac{\mathbf{J}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp}{\omega}. \quad (\text{F.0.6})$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} j_\mu J^\mu &= 2(\epsilon, p_x \hat{i}) \cdot (J_0, \mathbf{J}) = 2(\epsilon J_0 - p_x J_x), \\ &= 2 \left[\epsilon \left(\frac{J_x}{v} + \frac{\mathbf{J}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp}{\omega} \right) - p_x J_x \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.0.7})$$

Usando a Eq. (F.0.4), temos

$$\begin{aligned} j_\mu J^\mu &= 2 \left(\epsilon^2 \frac{J_x}{p_x} + \epsilon \frac{\mathbf{J}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp}{\omega} - p_x J_x \right), \\ &= 2 \left[\frac{(\epsilon^2 - p_x^2)}{p_x} J_x + \epsilon \frac{\mathbf{J}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp}{\omega} \right]. \end{aligned}$$

Usando a expressão da energia relativística $\epsilon^2 - p_x^2 = M^2$ e tomando $p_x \approx \epsilon$,

$$j_\mu J^\mu \approx \frac{2\epsilon}{\omega} \left(\frac{\omega M^2}{\epsilon^2} J_x + \mathbf{J}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp \right). \quad (\text{F.0.8})$$

Portanto, temos o invariante de Lorentz para a Eq. (F.0.2). Falta obtermos a contração $e_\mu J^\mu$ em (F.0.1). Nesse caso, temos que $e^\mu = (0, \mathbf{e})$ e $e^\mu k_\mu = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{k} = 0$, de forma que

$$\begin{aligned} (0, \mathbf{e}) \cdot (\omega, \mathbf{k}) &= 0, \\ -e_x k_x - \mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp &= 0, \end{aligned}$$

ou ainda

$$e_x = -\frac{\mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp}{k_x} \approx -\frac{\mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp}{\omega}, \quad (\text{F.0.9})$$

ao usarmos $\omega = vk_x$ e $v \approx 1$ no último sinal de igualdade. Dessa forma,

$$\begin{aligned} e_\mu J^\mu &= - \left[\left(-\frac{\mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp}{\omega} \right) J_x + \mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{J}_\perp \right], \\ &= -\mathbf{e}_\perp \cdot \left(-\frac{\mathbf{k}_\perp}{\omega} J_x + \mathbf{J}_\perp \right). \end{aligned} \quad (\text{F.0.10})$$

Assumindo na Eq. (F.0.10) que o fóton é polarizado no plano de \mathbf{x} e \mathbf{k} , temos que $\mathbf{e}_\perp \parallel \mathbf{k}_\perp$. Ainda, a condição $|\mathbf{k}_\perp| \ll \omega$ implica em $\mathbf{e}_\perp^2 \approx \mathbf{e}^2 = 1$, já que e^μ satisfaz

$$e^{\mu*} e_\mu = -1 \quad \rightarrow \quad -|\mathbf{e}|^2 = -1 \quad \rightarrow \quad |\mathbf{e}|^2 = 1.$$

Analisando as Eqs. (F.0.8) e (F.0.10), vemos que são proporcionais se o primeiro termo em cada uma for desprezível. A corrente J pertence ao vértice superior do diagrama (b), de forma que não depende da direção de \mathbf{p} , portanto J_x e \mathbf{J}_\perp devem ser da mesma ordem. Para os termos serem desprezíveis, devemos ter $|\mathbf{k}_\perp| \ll \omega$ e $\omega \ll \epsilon^2 \frac{|\mathbf{k}_\perp|}{M^2}$, condições compatíveis com as impostas anteriormente para ω e \mathbf{k}_\perp . Dessa forma, podemos combinar as amplitudes (F.0.2) com (F.0.8) e (F.0.1) com (F.0.10) para escrever

$$A_r = -e(-\mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{J}_\perp), \quad (\text{F.0.11})$$

$$A = Ze^2 \frac{1}{k^2} \left(\frac{2\epsilon}{\omega} \mathbf{J}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp \right), \quad (\text{F.0.12})$$

porém

$$\hat{k}_\perp = \mathbf{e}_\perp = \frac{\mathbf{k}_\perp}{|\mathbf{k}_\perp|} \quad \rightarrow \quad \mathbf{k}_\perp = \mathbf{e}_\perp |\mathbf{k}_\perp|,$$

então

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\epsilon}{\omega} \frac{Ze}{k^2} |\mathbf{k}_\perp| (e \mathbf{J}_\perp \cdot \mathbf{e}_\perp), \\ &= \frac{2\epsilon}{\omega} \frac{Ze}{-k^2} |\mathbf{k}_\perp| A_r. \end{aligned} \quad (\text{F.0.13})$$

Finalmente, podemos obter as seções de choque [19] dos processos em (a) e (b), que serão dadas por

$$d\sigma_r = |A_r|^2 \frac{(2\pi)^4}{4m\omega} \delta^4(P_f - P_i) d\rho_Q, \quad (\text{F.0.14})$$

$$d\sigma = |A|^2 \frac{(2\pi)^4}{4m\epsilon} \delta^4(P_f - P_i) \frac{d^3 p'}{2\epsilon(2\pi)^3} d\rho_Q, \quad (\text{F.0.15})$$

onde $d\rho_Q$ é o espaço de fase do sistema de partículas Q . Para o fóton real, temos que $P_f - P_i = Q - k - q$ e para o fóton virtual $P_f - P_i = Q + p' - p - q$, sendo $-k = p' - p$. Considerando o caso em que o fóton virtual tem $k^2 \approx 0$, as duas delta acima são iguais. Retomando a Eq. (F.0.5), temos

$$(-k^2)^2 = \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_\perp^2 \right)^2$$

e, tomando o módulo quadrado de (F.0.13)

$$|A|^2 = \frac{4\epsilon^2}{\omega^2} \frac{Z^2 e^2}{(-k^2)^2} \mathbf{k}_\perp^2 |A_r|^2, \quad (\text{F.0.16})$$

podemos combinar as duas últimas expressões,

$$|A|^2 = \frac{4\epsilon^2}{\omega^2} \frac{Z^2 e^2}{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_\perp^2 \right)^2} \mathbf{k}_\perp^2 |A_r|^2. \quad (\text{F.0.17})$$

Vamos substituir a Eq. (F.0.17) em (F.0.15),

$$d\sigma = \left[\frac{4\epsilon^2}{\omega^2} \frac{Z^2 e^2}{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_\perp^2 \right)^2} \mathbf{k}_\perp^2 |A_r|^2 \right] \frac{(2\pi)^4}{4m\epsilon} \delta^4(P_f - P_i) \frac{d^3 p'}{2\epsilon(2\pi)^3} d\rho_Q$$

e, como temos a expressão de $d\sigma_r$ em $d\sigma$, podemos escrever

$$d\sigma = \frac{2}{\omega} \frac{Z^2 e^2}{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_\perp^2 \right)^2} \mathbf{k}_\perp^2 d\sigma_r \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3}.$$

Usando $e^2 = 4\pi\alpha_{em}$, reescrevemos

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{2}{\omega} \frac{Z^2 4\pi\alpha_{em}}{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_\perp^2 \right)^2} \mathbf{k}_\perp^2 d\sigma_r \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3}, \\ &= \frac{Z^2 \alpha_{em}}{\pi^2 \omega} \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_\perp^2 \right)^2} d\sigma_r d^3 p'. \end{aligned} \quad (\text{F.0.18})$$

Definindo

$$n(\mathbf{k}) = \frac{Z^2 \alpha_{em}}{\pi^2} \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_\perp^2 \right)^2}, \quad (\text{F.0.19})$$

obtemos finalmente

$$d\sigma = d\sigma_r \frac{n(\mathbf{k})}{\omega} d^3 p', \quad (\text{F.0.20})$$

de forma que a seção de choque total de interação eletromagnética pode ser fatorada em termos da seção de choque de interação fóton-partícula somada sobre todos os fótons. Nessas equações, $d\sigma_r$ é a seção de choque do processo (a), devido a uma colisão entre um fóton real e uma partícula em repouso, sendo formado um sistema de partículas de momento Q ; $d\sigma$ é devido ao processo (b), em que é formado o mesmo sistema e partículas Q quando uma partícula rápida de massa M colide com a partícula de massa m em repouso, perdendo momento $\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{k}$. Ainda, $n(\mathbf{k})$ é o fluxo de fótons equivalente ao campo eletromagnético da partícula rápida no espaço de momentos \mathbf{k} do fóton.

Com a Eq. (F.0.20), vamos utilizar $d^3\mathbf{k} = dk_x d^2\mathbf{k}_\perp \approx d\omega d^2\mathbf{k}_\perp$, já que a integração em d^3p' equivale a integração em $d^3\mathbf{k}$, além de que $\omega = vk_x$ ($v \approx 1$), e escrever

$$d\sigma = d\sigma_r \frac{n(\mathbf{k})}{\omega} d\omega d^2\mathbf{k}_\perp. \quad (\text{F.0.21})$$

Sendo $d^2\mathbf{k}_\perp = |\mathbf{k}_\perp| d|\mathbf{k}_\perp| d\phi$, temos

$$d\sigma = d\sigma_r \frac{n(\mathbf{k})}{\omega} d\omega |\mathbf{k}_\perp| d|\mathbf{k}_\perp| d\phi. \quad (\text{F.0.22})$$

Vamos integrar em $d|\mathbf{k}_\perp|$ e $d\phi$. Com $r_{min} = R$, e do princípio da incerteza $r_{min} = 1/p_{min}$, temos que $|\mathbf{k}_\perp| \leq 1/R$ e

$$d\sigma = d\sigma_r \int_0^{2\pi} \int_0^{1/R} \frac{Z^2 \alpha_{em}}{\pi^2} \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_\perp^2\right)^2} |\mathbf{k}_\perp| d|\mathbf{k}_\perp| d\phi \frac{d\omega}{\omega}. \quad (\text{F.0.23})$$

A integração em ϕ é trivial, e definindo

$$n(\omega) = \int_0^{1/R} \frac{2Z^2 \alpha_{em}}{\pi} \frac{|\mathbf{k}_\perp|^3}{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_\perp^2\right)^2} d|\mathbf{k}_\perp|, \quad (\text{F.0.24})$$

temos

$$d\sigma = d\sigma_\gamma \frac{n(\omega)}{\omega} d\omega, \quad (\text{F.0.25})$$

ou ainda

$$\sigma = \int d\omega \frac{n(\omega)}{\omega} \sigma_\gamma, \quad (\text{F.0.26})$$

em que fizemos $\sigma_r = \sigma_\gamma$. Essa é a expressão para a aproximação de fótons equivalentes, utilizada neste trabalho.

Voltando para a Eq. (F.0.24), temos que a integral em $d|\mathbf{k}_\perp|$ diverge de forma logarítmica quando $|\mathbf{k}_\perp|$ é grande, nos possibilitando obter o resultado em aproximação logarítmica. Dessa forma, obtemos uma distribuição de frequência de fótons equivalentes simples dada por

$$n(\omega) = \frac{2}{\pi} Z^2 \alpha_{em} \ln \left(\frac{\gamma}{R\omega} \right). \quad (\text{F.0.27})$$

A Eq. (F.0.27) expressa que a distribuição de fótons é inversamente proporcional ao valor da energia do fóton ω , de forma que temos uma distribuição com muitos fótons de baixas energias.

Vamos trabalhar mais um pouco com a Eq. (F.0.24). Dividindo os dois lados da expressão por ω , temos

$$\frac{n(\omega)}{\omega} = \frac{4Z^2\alpha_{em}}{\omega} \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_\perp^2\right)^2}. \quad (\text{F.0.28})$$

Podemos inserir o fator de forma nuclear F e obter

$$\frac{n(\omega)}{\omega} = \frac{4Z^2\alpha_{em}}{\omega} \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \left[\frac{F\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_\perp^2\right)}{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{k}_\perp^2\right)^2} \right]^2 \mathbf{k}_\perp^2. \quad (\text{F.0.29})$$

Como a amplitude invariante de um processo pode ser interpretada como o potencial entre partículas no espaço de momento, podemos incluir o fator de forma F ao quadrado [20].