

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO – MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA**

**RODRIGO REINERT DA SILVA**

**PERFIS DE PULSO DE ESTRELAS DE NÊUTRONS COM COLUNAS DE ACREÇÃO**

**JOINVILLE**

**2022**

**RODRIGO REINERT DA SILVA**

**PERFIS DE PULSO DE ESTRELAS DE NÊUTRONS COM COLUNAS DE ACREÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Dr Rafael Camargo Rodrigues de Lima

Coorientador: Dr Edgard Pacheco Moreira Amorim

**JOINVILLE**

**2022**

Silva, Rodrigo Reinert da  
Perfis de Pulso de Estrelas de Nêutrons com Columnas  
de Acreção / Rodrigo Reinert da Silva. - Joinville,  
2022.  
56 p. : il. ; 30 cm.

Orientador: Dr Rafael Camargo Rodrigues de Lima.  
Coorientador: Dr Edgard Pacheco Moreira Amorim.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado  
de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,  
Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2022.

1. Estrelas de nêutrons 2. Objetos compactos 3.  
Columnas de acréscimo 4. 1A0535+262 I. Lima, Rafael  
Camargo Rodrigues de. II. Amorim, Edgard Pacheco Moreira.  
III. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro  
de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em  
Física. IV. Perfis de Pulso de Estrelas de Nêutrons com  
Columnas de Acreção.

**RODRIGO REINERT DA SILVA**

**PERFIS DE PULSO DE ESTRELAS DE NÊUTRONS COM COLUNAS DE ACREÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Dr Rafael Camargo Rodrigues de Lima

Coorientador: Dr Edgard Pacheco Moreira Amorim

**BANCA EXAMINADORA:**

**ORIENTADOR:**

Prof. Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima  
UDESC - CCT

**Membros:**

Prof. Dr. Júlio César Sagás  
UDESC - CCT

Prof. Dr. Jaziel Goulart Coelho  
UTFPR, INPE

Joinville, 17 de dezembro de 2021

## RESUMO

Pulsares são objetos compactos com emissão caracterizada pelo feixe de radiação emitido dos seus pólos magnéticos. Em sistemas binários pode haver a acreção de matéria da estrela companheira nos pólos magnéticos do pulsar, formando o que chamamos de colunas de acréscimo. O presente estudo busca reproduzir o perfil da emissão na faixa dos raios-X dessas colunas de acréscimo, em uma estrela com duas colunas em posições independentes, levando em consideração um espaço tempo de Schwarzschild, *redshift* gravitacional, efeito Doppler relativístico, e, para estrelas de menor período, atraso temporal. A simulação cria a estrutura tridimensional das colunas, monitorando as posições de cada subdivisão do objeto. Paralelamente, criamos uma tabela por integração com os resultados das geodésicas dos fótons. Por interpolação bilinear dos dados da tabela, encontramos o ângulo de emissão e o parâmetro de impacto referente a cada ponto de emissão da coluna. A simulação resultante está em acordo com outros estudos realizados, e comparamos seus aspectos para diferentes alturas das colunas, períodos de rotação, forma e posições da coluna, assim como o raio da estrela. Utilizamos então algoritmos de amostragem (Algoritmo Genético e Markov Chain Monte Carlo) para determinar os melhores parâmetros que descrevem o perfil de pulso da fonte 1A0535+262.

**Palavras-chave:** Estrelas de Nêutrons; Objetos Compactos; Colunas de Acréscimo; 1A0535+262.

## ABSTRACT

Pulsars are compact objects with emission characterized by the beam of radiation emitted from their magnetic poles. In binary systems there can be accretion of matter from the companion star to the magnetic poles of the pulsar, forming what we call accretion columns. The present study seeks to reproduce the emission profile in the X-ray range of these accretion columns, in a star with two columns in independent positions, taking into account a Schwarzschild spacetime, gravitational redshift, relativistic Doppler effect, and, for stars of shorter period, time delay. A simulation creates a three-dimensional structure of the columns, monitoring the positions of each subdivision of the object. At the same time, we created a table from integration with results of the photon geodesics. By bilinear interpolation of the table data, we find the emission angle and the impact parameter for each column emission point. The resulting simulation is in agreement with other studies carried out, and we compared its aspects for different column heights, rotation periods, column shape and positions, as well as the star radii. We then use algorithms for sampling (Genetic Algorithm and Markov Monte Carlo Chain) to determine the best parameters that describe the pulse profile of the source 1A0535 + 262.

**Keywords:** Neutron Star; Accretion Column; Compact Objects; 1A0535+262.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO . . . . .</b>	<b>14</b>
2.1	ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD . . . . .	14
2.2	GEODÉSICAS . . . . .	15
2.3	TIPOS DE ÓRBITAS . . . . .	18
2.4	TRAJETÓRIAS . . . . .	20
2.5	ATRASO TEMPORAL . . . . .	23
2.6	REDSHIFT GRAVITACIONAL . . . . .	25
2.7	EFEITO DOPPLER RELATIVÍSTICO E ABERRAÇÃO . . . . .	26
2.8	FLUXO . . . . .	27
2.9	SISTEMA DE COORDENADAS . . . . .	29
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA . . . . .</b>	<b>32</b>
3.1	OBJETO . . . . .	32
3.2	MAPPING . . . . .	34
3.3	INTERPOLAÇÃO . . . . .	36
<b>3.3.1</b>	<b>Exatidão da interpolação . . . . .</b>	<b>36</b>
3.4	TIPOS DE TRAJETÓRIA . . . . .	37
3.5	FLUXO . . . . .	38
3.6	ALGORITMOS DE AMOSTRAGEM . . . . .	39
<b>3.6.1</b>	<b>Algoritmo Genético . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>3.6.2</b>	<b>Markov Chain Monte Carlo (MCMC) . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .</b>	<b>43</b>
4.1	SIMULAÇÃO . . . . .	43
4.2	MCMC . . . . .	51
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>54</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>55</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As ENs são remanescentes de estrelas de alta massa ( $8M_{\odot} < M < 20M_{\odot}$ ), conhecidas por suas altas densidades ( $\rho \propto 10^{17} kg/m^3$ ) da ordem de núcleos atômicos, intensos campos magnéticos ( $B \propto 10^8 \sim 10^{15}$ ) maiores que qualquer um produzido na Terra, e pequenos períodos de rotação, podendo chegar à ordem de 1 ms, com velocidades tangenciais na superfície próximas às da luz. O que observamos desses objetos são seus perfis de pulso, um gráfico como o da Figura 1, proporcional à quantidade de fótons observados para cada fase de rotação do objeto.

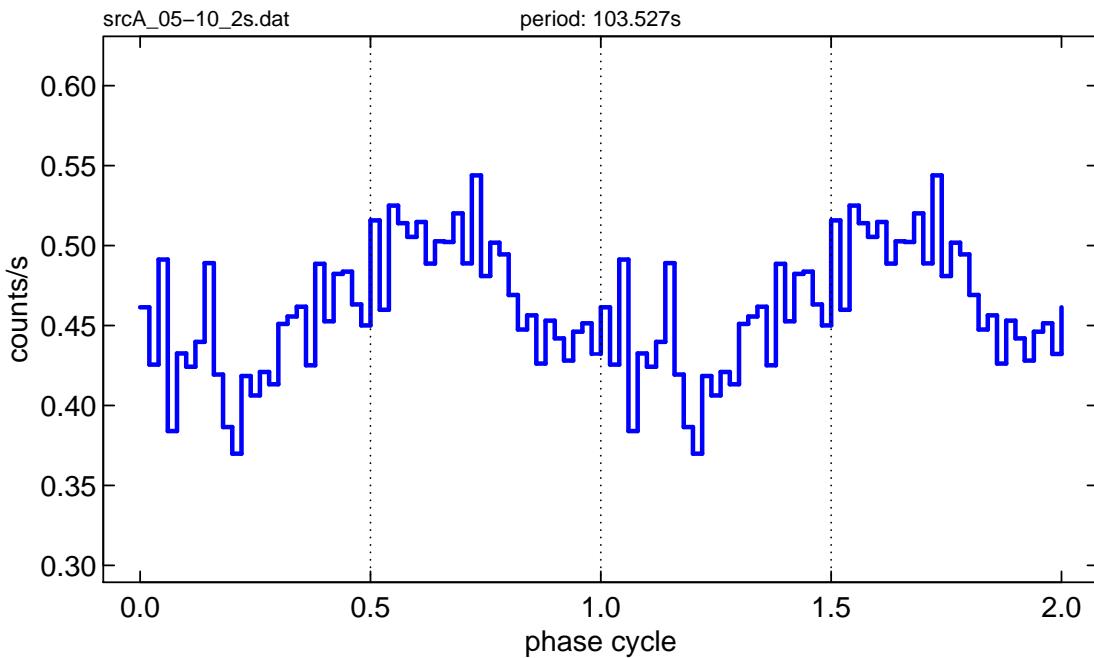


Figura 1 – Perfil de pulso observado da fonte 1A0535+262 na banda [0.5, 10keV].

Em estudo recente, de Lima et al. (2020) mostraram que um modelo de Estrelas de Nêutrons (EN) com um campo magnético multipolar produz um fluxo luminoso muito mais condizente com dados experimentais da fonte SGR J1745–2900 (LIMA et al., 2020). O mesmo foi encontrado por Bilous et al. (2019), estudo em que utilizaram dados do NICER da fonte PSR J0030+0451 (BILOUS et al., 2019).

O modelo consiste em determinar quais fótons emitidos dos *hot spots* chegam no observador. Para uma dada localização e tamanho dos *spots*, o modelo utiliza a métrica do espaço-tempo ao redor da estrela para obter seu parâmetro de impacto no plano do observador. Beloborodov montou esse modelo utilizando a métrica de Schwarzschild, para objetos esféricos e estáticos, além disso desenvolveu uma aproximação das equações de movimento (BELOBORODOV, 2002). Em seu estudo, considerou também efeitos de redshift gravitacional. Posteriormente, ele e

Poutanen desenvolveram um modelo para pulsares de milissegundo, onde consideravam também efeito Doppler resultante da rápida rotação da estrela e o atraso temporal de observação devido às diferenças no comprimento das trajetórias (POUTANEN; BELOBORODOV, 2006).

E foi através desse modelo que os estudos mencionados inicialmente foram capazes de inferir que o campo magnético das ENs pode ser multipolar, uma das configurações dos *spots* encontrada por Lima et al. (2020) está apresentada na Figura 2. Entretanto, existem diversas classes de ENs, em particular nas chamadas *Low Mass X-Ray Binaries* (LMXBs) e *High Mass X-Ray Binaries* (HMXBs) em que temos a formação de estruturas nos *spots*, chamadas de colunas de acreção.

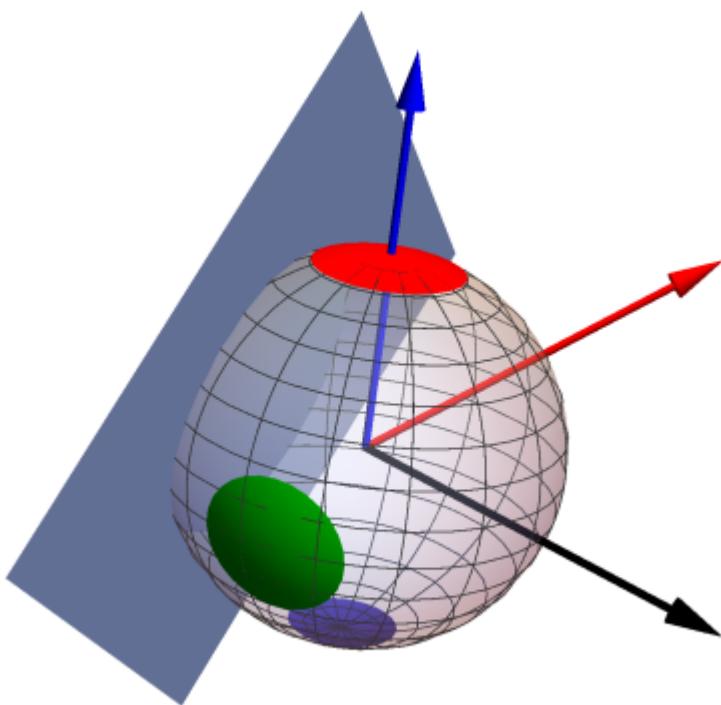


Figura 2 – Possível configuração dos hot spots que explica o fluxo do SGR J1745–2900. A seta azul representa o eixo polar do spot em vermelho, a seta vermelha o eixo de rotação e a preta a direção do observador. O plano que corta a estrela na figura representa o ângulo máximo de visão. (LIMA et al., 2020)

Em ambos os casos, temos ENs compondo um sistema binário com outra estrela. Nas LMXBs, suas companheiras são estrelas de baixa massa, como gigantes vermelhas, anãs brancas ou outra estrela de baixa massa da sequência principal. Neles as ENs possuem períodos de rotação que pode chegar à ordem de ms e seus campos magnéticos são mais fracos ( $B \sim 10^8$  G) que o comum em ENs. Nesses sistemas, a matéria da companheira pode ser acretada na EN, pelo transbordamento do lóbulo de Roche (HARDING, 2013). O lóbulo de Roche é a região na qual a matéria está gravitacionalmente ligada à estrela companheira. Quando a matéria excede essa região ela pode fluir através ponto Lagrangeano interno, ponto onde o potencial gravitacional

é nulo, podendo então cair no campo gravitacional da estrela principal formando um disco de acreção (MARTÍNEZ-PAÍS; SHAHBAZ; VELÁZQUEZ, 2012).

Já nas HMXBs, as estrelas companheiras possuem massa  $M \gtrsim 5 M_{\odot}$ , seus campos magnéticos são, em torno de, quatro ordens de grandeza maiores que das LMXBs, e possuem períodos de rotação  $P \sim 1 - 1000$  s (HARDING, 2013). Neles, a matéria pode ser acretada por dois mecanismos distintos, transbordamento do lóbulo de Roche atmosférico e transferência de massa de vento.

No primeiro, a camada atmosférica da companheira atinge o lóbulo de Roche antes de sua fotosfera, sendo comum em estrelas com uma camada atmosférica maior, o que não acontece quando se trata de estrelas de baixa massa da sequência principal. E a transferência de massa de vento ocorre quando a companheira possui fortes ventos solares, fenômeno comum em estrelas mais massivas, cuja massa cai no campo gravitacional da EN (MARTÍNEZ-PAÍS; SHAHBAZ; VELÁZQUEZ, 2012).

Ao se aproximar da EN, a matéria chega a uma distância chamada de raio de Alfvén, no qual a pressão magnética exercida pelo campo magnético da EN é capaz de parar o fluxo de matéria. A matéria que passa o raio de Alfvén é, então, canalizada ao longo das linhas de campo magnético até a superfície da estrela, onde a maior parte da radiação é produzida. Nesse processo, a forma como ocorre a conexão da matéria com as linhas de campo são cruciais na geometria da coluna de acréscimo, formada nos polos magnéticos.

Desconsiderando qualquer instabilidade nessa conexão, as formas mais esperadas são a de um funil cheio (Figura 3a) ou de uma coluna oca. Enquanto que, quando temos um contato incompleto, apenas segmentos do funil são formados (Figura 3b). Ainda, se as instabilidades ocorrem nas proximidades do *hot spot*, a coluna pode ser quebrada em panquecas ou espaguete (Figura 3c e 3d) (MÉSZÁROS, 1984).

As colunas de funil cheio estão relacionadas com a queda da matéria radialmente com simetria esférica, mais próximo do que ocorre na acreção por ventos solares. Enquanto que a formação de segmentos de funis ocorre quando acreção é feita por discos de acreção, quando há transbordamento do lóbulo de Roche (BASKO; SUNYAEV, 1976).

Em pulsares muito brilhantes, quando o fluxo de radiação supera a pressão do gás, o gás em acreção passa por um choque dominado pela radiação ao se aproximar da superfície da estrela. Nela, nos *hot spots*, está o que chamamos de monte térmico, a partir do qual a maioria dos fótons emitidos da colunas são produzidos. Esse fótons são então espalhados para cima no choque, para depois serem difundidos pelas paredes da coluna. Nesse processo, a radiação de alta energia freia a partículas em queda até o repouso na superfície (BECKER; WOLFF, 2007) (BECKER; WOLFF, 2005). Esse processo está representado na Figura 4.

Esse espalhamento dos fótons com sua emissão pelas paredes das colunas formam o que chamamos de *fan beam*. Enquanto que, quando a taxa de acreção de matéria for pequena, a maior parte dos fótons deixa a estrela ao longo das linhas do campo magnético, o que chamamos de *pencil beam* (ROTHSCHILD et al., 2014). A Figura 5 mostra a formação das colunas e essas

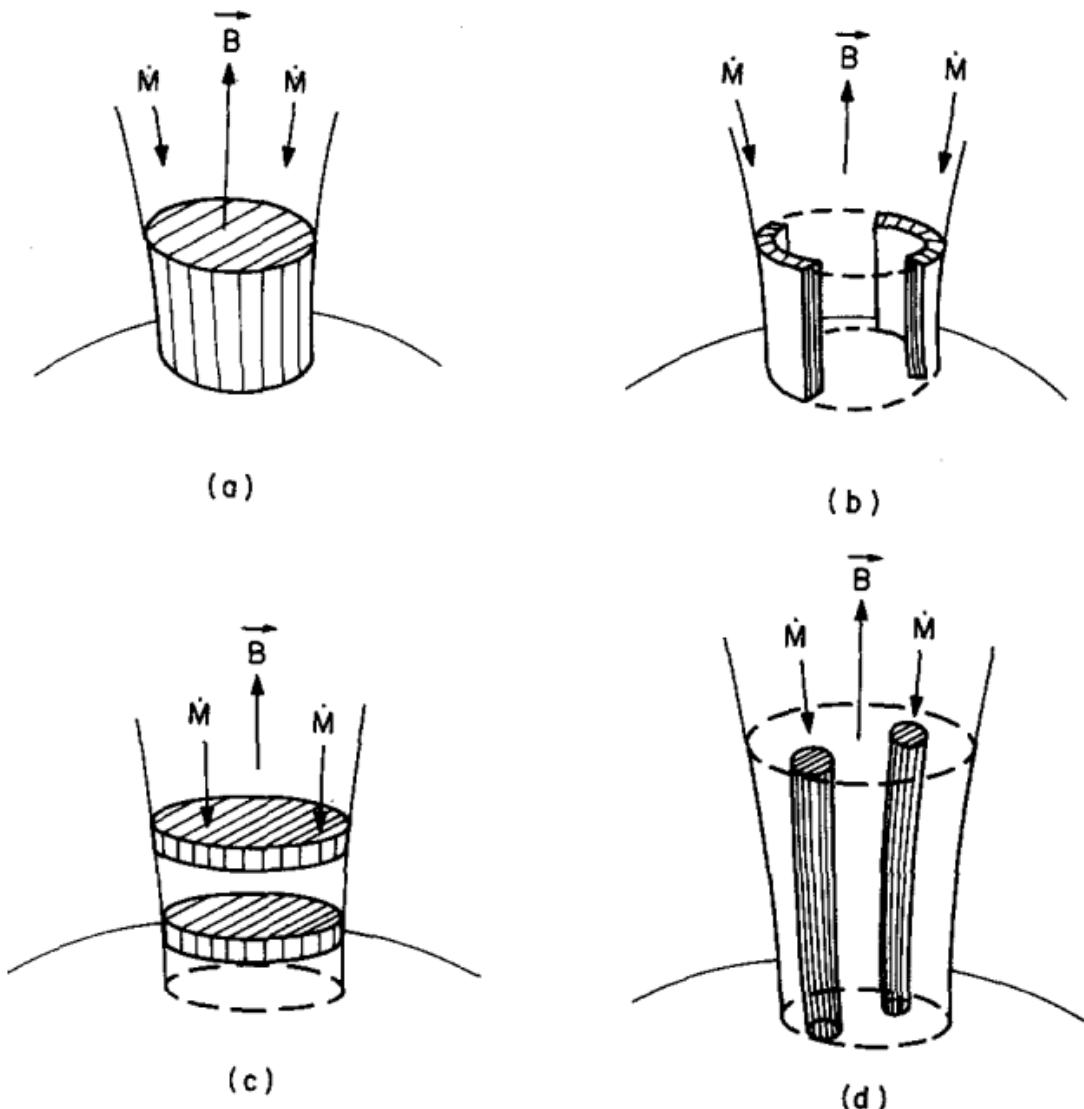


Figura 3 – Diferentes geometrias para colunas de acreção. (a) Funil cheio. (b) Funil oco seccional. (c) Panquecas. (d) Espaguete (MéSZÁROS, 1984).

duas formas de emissão. (WHITE; SWANK; HOLT, 1983) examinou perfis de pulso de sistemas com luminosidade acima de  $10^{37}$  ergs  $s^{-1}$  e observou características associáveis à esse tipo de emissão. Também chegou a mencionar que modelos que consideram uma combinação de *fan beam* e *pencil beam* não podem ser descartados.

O espetro nos raios-X observado de fontes alimentadas por acreção é costumeiramente bem explicado por uma combinação de espetro de lei de potência mais uma componente de corpo negro em temperaturas da ordem de keV. Há também aspectos de emissão ciclotron e linhas de emissão de ferro em inúmeras fontes (BECKER; WOLFF, 2005).

Falkner (2012) desenvolveu uma simulação de colunas de acréscimo antipodais com forma de funil cheio na qual ele utiliza o modelo de Beloborodov para calcular o perfil de pulso emitido por ENs. Um detalhe destacado por ele é que deve-se levar em conta trajetórias em

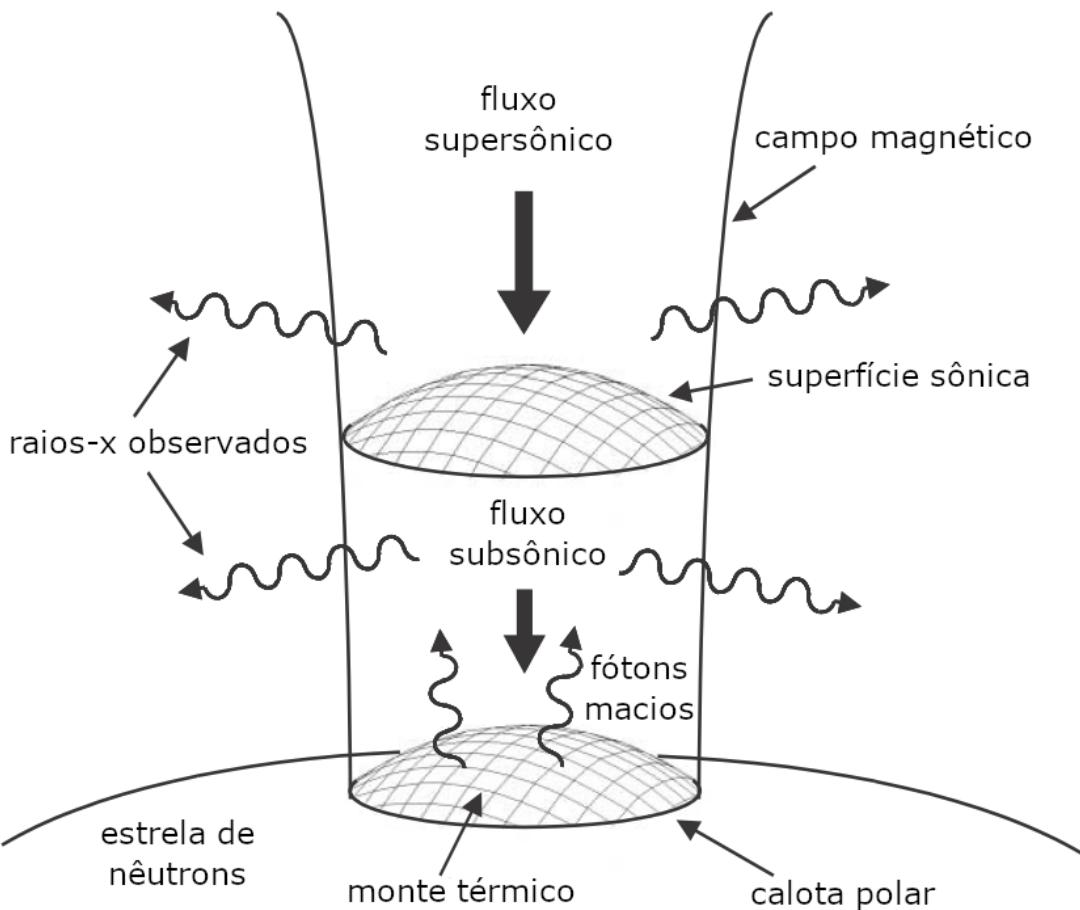


Figura 4 – Emissão de raios-X a partir das colunas de acreção por meio de choques radiativos.  
(BECKER; WOLFF, 2005)

que o fóton se aproxima da estrela, antes de se afastar, o que deixa o problema um pouco mais complexo, o que será discutido em mais detalhes. As colunas também aumentam a visibilidade dos spots, alargando os picos observados como se observa em seus resultados na Figura 6, ao comparar apenas o *pencil beam* com a emissão total de uma das colunas.

Entretanto, essas simulações ainda não foram comparadas com dados experimentais como aconteceu em Lima et al. (2020) e Bilous et al. (2019), sendo um de nossos objetivos aqui. Utilizamos dados da mais longa observação da fonte 1A0535+262, retirados do arquivo de dados da missão NuSTAR (HARRISON et al., 2013). Com as observações ocorridas no dia 26 de dezembro de 2018 (ObsID 90401370001), por cerca de 33 horas, com tempo de exposição de cerca de 15 horas.

Os dados foram reduzidos seguindo os procedimentos padrões da NuSTAR *Data Analysis Software* (*NUSTARDAS pipeline v2.0*) com os arquivos de calibragem retirados de CALDB versão 20210427. A fonte e fundo usados para gerar a curva de luz foram extraídos, respectivamente, a partir de uma região de  $\sim 75$  arcseg centrada na posição da fonte e, a partir de uma região livre de fontes, no mesmo detector de  $\sim 95$  arcseg. Além disso, foi realizado uma correção de baricentro com a FTOOL *barycorr*.

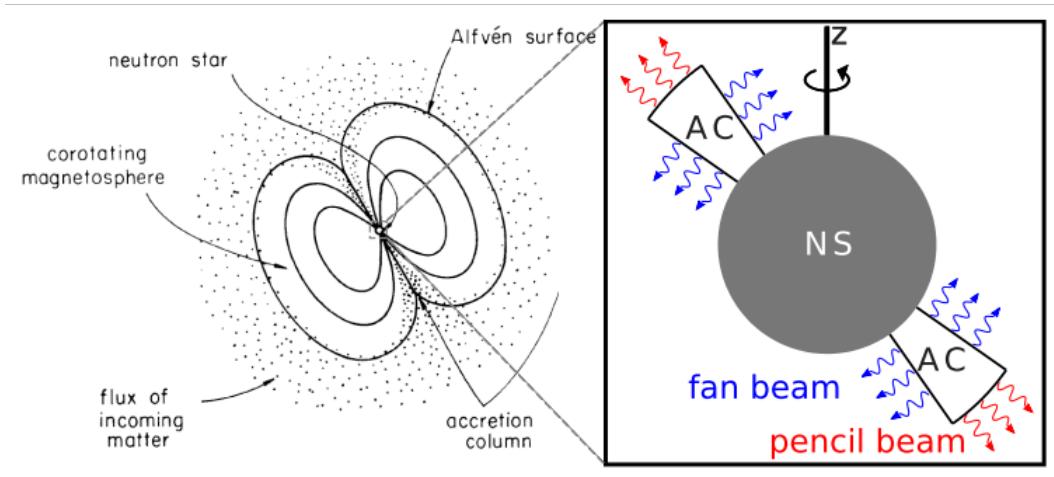


Figura 5 – Esquerda: Matéria acretando nos polos magnéticos de uma estrela de nêutrons, formando as colunas de acréscimo. A matéria ionizada segue as linhas de campo magnético na superfície de Alfvén. Direita: As duas formas de emissão de uma coluna de acréscimo (AC). (FALKNER, 2012)

A 1A0535+262 é uma binária de raios-X composta por uma estrela de nêutrons e uma companheira óptica, a HDE245770. Possui período orbital de  $P_{orb} = 111.1 \pm 0.3$  d, período de rotação de  $P \sim 103$ s e emissão quiescente de raios-X com luminosidades de  $L_X \lesssim 10^{35-36}$  erg s $^{-1}$  (CABALLERO et al., 2011). Essa HMXB já foi analisada por Caballero et al. (2011), na qual realizaram uma decomposição dos perfis de pulso em séries de Fourier, onde assumiu-se colunas ocas e de altura  $h = 0,5$ km e não havia liberdade nos parâmetros da massa e raio, tomados como  $M = 1.4 M_\odot$  e  $R = 10$  km.

Assim, neste trabalho, pretendemos reproduzir a simulação desenvolvida por Falkner (2012), comparando nossos resultados com a simulação dele e, usando dados do pulsar 1A0535+262 na faixa dos raios-X para comparar com Caballero et al. (2011). Em nosso modelo adotaremos colunas com geometria de funil cheio com emissão de corpo negro, emitindo *fan beam* e *pencil beam* ao mesmo tempo. Os dados da fonte utilizados foram na banda 0.5 à 10 keV.

As equações das trajetórias na métrica de Schwarzschild, o redshift gravitacional e como calcular o fluxo será mostrado na seção 2. Na seção 3 discutimos detalhes da simulação, como criar o objeto, como resolver as equações, como calcular o fluxo e como comparar com dados observados. E na seção 4 apresentamos os perfis de pulsos obtidos, assim como os parâmetros que melhor se adéquam aos dados observados.

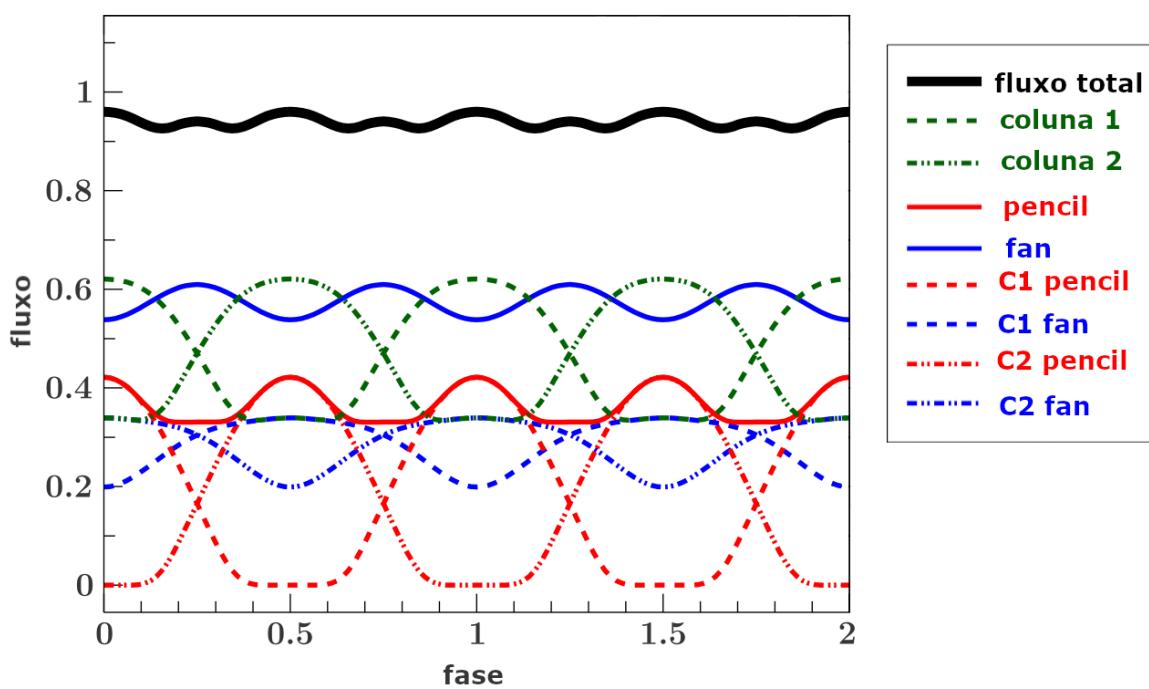


Figura 6 – Perfil de fluxo normalizado obtido por Falkner (2012). Aqui C1, C2, pencil e fan se referem à coluna 1, coluna 2, pencil beam e fan beam, respectivamente. As condições utilizadas aqui foram de  $R = 10\text{km}$ ,  $M = 1.35M_{\odot}$ ,  $P = 1\text{s}$ ,  $i = 90^\circ$ ,  $\theta_0 = 17.2^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$  e  $H = 3\text{km}$ , cujos significados serão explorados posteriormente.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

No caminho dos fótons, ao deixarem uma estrela de nêutrons, alguns deles chegam no satélite e como isso obtemos um perfil de pulso. Mas para fazer uma simulação desses processos precisamos entender como se comporta o espaço-tempo ao longo do trajeto, como determinar quais chegam no observador e como, a partir disso, podemos calcular o perfil de pulso. Com base em Falkner (2012) e Schutz (2009), destacamos nessa seção os aspectos teóricos da simulação realizada.

### 2.1 ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD

A EN canônica possui uma massa de  $1,4 M_{\odot}$  e um raio de 10 km. O raio de Schwarzschild (1) é o raio mínimo que a estrela deveria ter tal que a luz não escapasse dela. Para uma EN canônica obtemos que esse vale  $r_s = 4,1$  km, o que corresponde à 41% de seu raio.

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (1)$$

Para comparação, uma anã branca, o objeto mais denso após uma EN, possui  $R = 0,0103 R_{\odot} = 7,2 \times 10^3$  km e  $M = 0,55 M_{\odot}$ , o que por (1) nos dá  $r_s = 1,6$  km. Isso corresponde à 22% de seu raio. Quanto mais perto o raio de uma estrela se encontra do raio de Schwarzschild maior é a distorção da geometria do espaço-tempo ao seu redor. Portanto, é a teoria da relatividade geral que nos fornecerá as equações das trajetórias dos fótons nas proximidades de uma estrela de nêutrons.

A expressão geral de um elemento de linha no espaço-tempo é dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (2)$$

Onde  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico, fornecendo a curvatura do espaço-tempo, e  $dx^{\mu}$  é um quadrvetor cujas componentes são elementos do espaço-tempo. Considerando uma estrela esféricamente simétrica e estática, ou seja, considerando a métrica de Schwarzschild, esta expressão se torna

$$ds^2 = -(1 - \frac{r_s}{r})dt^2 + (1 - \frac{r_s}{r})^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Psi^2) \quad (3)$$

Nessa expressão e para todas a partir daqui utilizamos um sistema de unidades naturais, no qual  $c = G = 1$ . E onde  $r_s = 2M$  é o raio de Schwarzschild de uma estrela de massa  $M$ . Com  $\theta$  como o ângulo polar e  $\Psi$  o azimute.

Note que aqui desconsideramos efeitos de rotação da estrela e seu consequente achataamento. Cadeau et al realizaram comparações entre o uso dessa métrica e a métrica de Kerr (na

qual efeitos de rotação são considerados) para o cálculo das curvas de luz nas proximidades de EN. Seus resultados mostram que não há muita diferença na forma das geodésicas (CADEAU et al., 2007).

No mesmo estudo, verificou o efeito do achatamento das EN sobre as curvas de luz, e observou que para frequências de rotação maiores que 300 Hz houve enormes desvios em comparação com a estrela esférica. Felizmente, a fonte 1A0535+262 possui uma frequência de rotação muito lenta, sendo assim, a métrica de Schwarzschild é uma boa abordagem para nosso problema.

## 2.2 GEODÉSICAS

Definida a geometria do espaço-tempo do problema, precisamos agora descrever como será a trajetória dos raios de luz que deixam a estrela. A grande vantagem aqui é que como a métrica de Schwarzschild possui diversas simetrias, as grandezas conservadas acabam por determinar por completo as trajetórias. As simetrias em questão são:

- **Independência do Tempo**

Isso indica que a energia  $E$  é constante ao longo da trajetória, assim, a primeira componente do 4-momento  $p_\mu$  fica:

$$p_0 = -E \tag{4}$$

- **Simetria Esférica**

Com isso as trajetórias ficam confinadas em um plano de  $\theta$  constante, portanto escolhemos o plano no qual  $\theta = \pi/2$  com a finalidade de facilitar os cálculos.

- **Independência de  $\Psi$**

O que implica na conservação do momento angular  $L$ .

$$p_\Psi = L \tag{5}$$

O 4-momento está agora quase completamente definido. Sendo  $\lambda$  um parâmetro da curva, temos:

$$p^0 = \frac{dt}{d\lambda} = g^{00} p_0 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} E \tag{6}$$

$$p^r = \frac{dr}{d\lambda} \tag{7}$$

$$p^\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \quad (8)$$

$$p^\Psi = g^{\Psi\Psi} p_\Psi = \frac{d\Psi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2} \quad (9)$$

Ainda não temos uma expressão para  $p^r$ , mas usando a relação válida para fótons  $p^\mu p_\mu = 0$ . Encontramos

$$p^\mu p_\mu = -E^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} + \frac{L^2}{r^2} = 0 \quad (10)$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} \quad (11)$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = - \left[ E^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} \quad (12)$$

Na equação (9),  $\Psi$  cresce com a variação de lambda, portanto expressa um fóton chegando na estrela, como pode ser observado pela Figura. Queremos estudar a situação contrária, mas a reversibilidade das trajetórias nos permite usar a mesma equação para ambos os casos. Para um fóton que chega na estrela a raiz da equação (12) deve ser negativa. Agora queremos utilizar essas equações de movimento para determinar quais fótons chegarão ao observador. Como já mencionado, as trajetórias se encontram todas em um plano, o qual é descrito pelas variáveis  $R$ , a distância até o centro de estrela, e  $\Psi$ , o ângulo entre a linha de visão (LOS) e uma posição da trajetória.

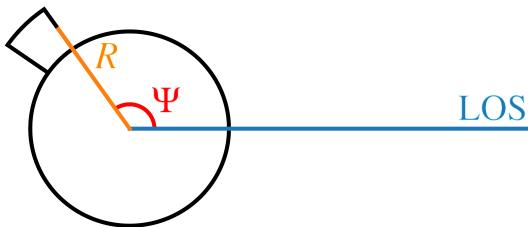


Figura 7 – Coordenadas em um plano pelo qual o fóton percorre.

Dividindo a expressão (9) por (12) e integrando temos

$$\Psi(R) = \int_{\infty}^R d\Psi = - \int_R^{\infty} \frac{d\Psi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr} dr \quad (13)$$

$$\Psi(R) = \int_R^\infty \frac{1}{r^2} \left[ \frac{E^2}{L^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2} dr \quad (14)$$

Olharemos primeiro para o caso particular no qual um fóton se afasta a partir de um ponto onde  $r \gg r_s$ . Nesse caso, o elemento de linha da equação (3) se torna equivalente a expressão de um espaço-tempo plano, ou seja, nesse caso as geodésicas são linhas retas. A integral em (14) se torna

$$\Psi(R) = \int_R^\infty \frac{1}{r^2} \left[ \frac{E^2}{L^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2} dr \quad (15)$$

Chamando  $b = L/E$  podemos reescrever como

$$\Psi(R) = b \int_R^\infty \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - b^2}} dr \quad (16)$$

com solução analítica

$$\Psi(R) = \arcsen\left(\frac{b}{R}\right) \quad (17)$$

A figura a seguir representa essa situação

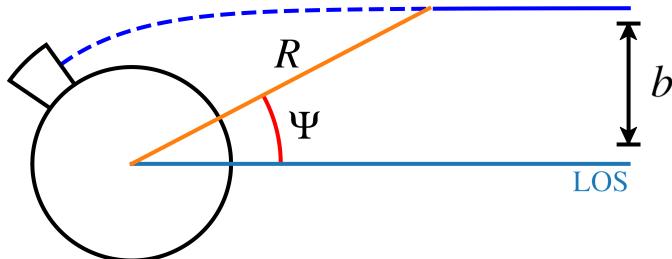


Figura 8 – Trajetória de um fóton que deixa uma coluna de acréscimo, destacando seu aspecto linear quando muito afastado da estrela ( $R \gg r_s$ ).

Como mostra a Figura 8 a distância da LOS até a trajetória do fóton é

$$R \operatorname{sen}(\Psi(R)) = b \quad (18)$$

Portanto,  $b = L/E$  é o parâmetro de impacto, o qual é constante ao longo da trajetória, uma vez que  $L$  e  $E$  são constantes.

### 2.3 TIPOS DE ÓRBITAS

Antes de discutir a solução da integral (14), vamos primeiramente analisar seu integrando. Para que exista um solução precisamos que

$$\frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{r^2} > 0 \quad (19)$$

Definindo o potencial efetivo como

$$V^2(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{r^2} \quad (20)$$

Como  $b$  é sempre positivo, as soluções válidas são aquelas nas quais  $1/b^2$  está acima da curva mostrada na Figura 9. Isso, portanto, já nos fornece uma condição para que haja a emissão de um fóton a partir superfície da estrela. Vale destacar que valores abaixo de  $r = r_s$  não nos interessam, uma vez que fótons nunca escapam dessa região.

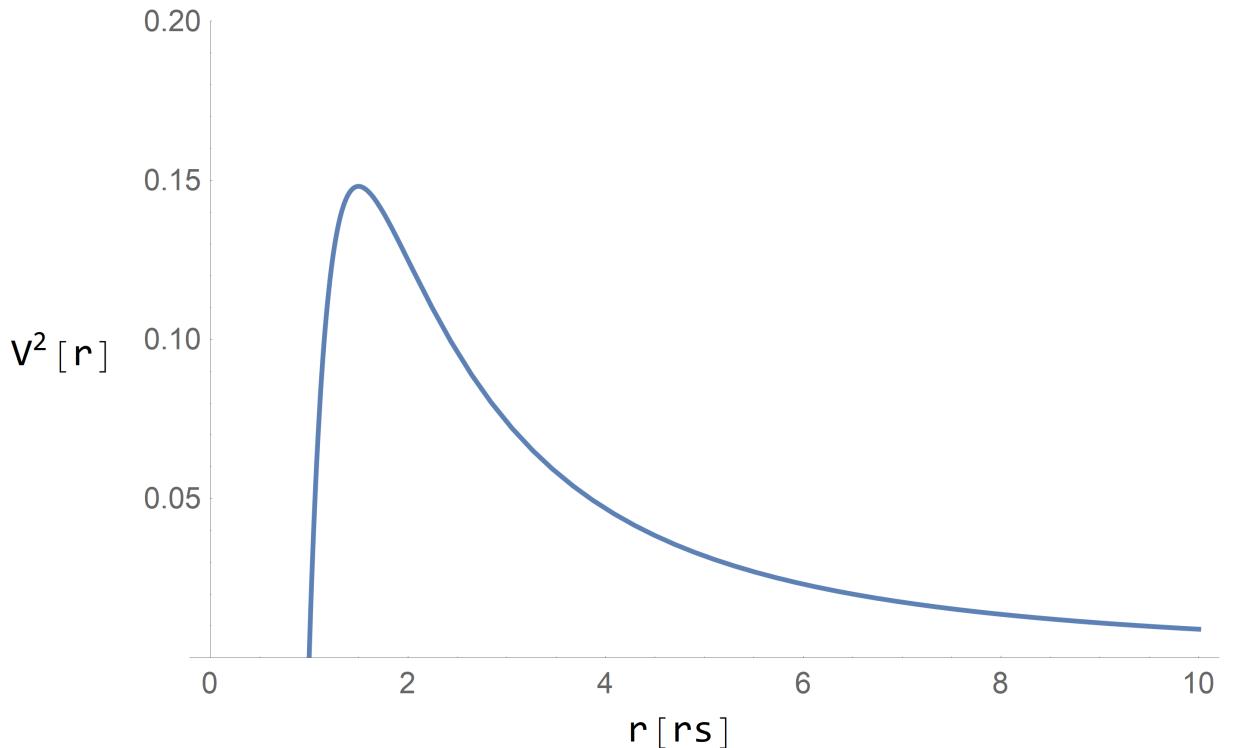


Figura 9 – Potencial efetivo com a distância ao centro da estrela em raios de Schwarzschild.

Quando um fóton se encontra em um ponto dessa curva temos que  $1/b^2 = V^2$  e pela equação (11),  $(dr/d\lambda)^2 = 0$ . Diferenciando essa equação com relação à  $\lambda$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} V^2(r) \quad (21)$$

Comparando tal expressão com a relação entre uma força  $\vec{F}$  e seu potencial  $\phi$

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi \quad (22)$$

Podemos relacionar  $V^2/2$  com um potencial de uma força, e a partir daí tirar conclusões sobre as órbitas dos fótons. Órbitas circulares ocorrem em pontos de máximo e de mínimo, temos um único ponto para o qual esta órbita é possível, porém, por se tratar de um ponto de máximo, esta órbita é instável. Para órbitas elípticas, precisaríamos de algum poço de potencial, o qual não está presente. Logo, para todos os valores de  $b$ , com exceção de um ponto instável, as órbitas são hiperbólicas, se afastando da estrela para o infinito.

Para estrelas com colunas de acréscimo, o fóton nem sempre irá deixar a estrela a partir de sua superfície, o que faz necessário uma olhada mais a fundo em suas trajetórias. Para a estrela de nêutrons canônica, já calculamos que a mesma possui um raio de Schwarzschild de  $r_s = 4,1 \text{ km}$  e portanto um raio de  $R = 10/4,1 = 2,4 r_s$ .

Na Figura 10 temos uma linha indicando a superfície dessa estrela. Supondo um fóton que deixa essa estrela a partir de um raio de  $r = 4r_s$  e  $1/b^2 = 0,08$ , uma trajetória possível seria a aproximação do fóton até o ponto em que ele incide na curva em  $r_p = 2,85 r_s$  e seu posterior afastamento até o infinito. Ou seja, para fótons que deixam as colunas de acréscimo, podemos ter primeiramente um aproximação até o **periastre**, seu ponto de máxima aproximação.

Caso o fóton deixe a estrela com um valor de  $1/b^2$  maior que o valor de  $V^2$  na superfície, a geodésica não possui periastre, pois colidirá com a estrela ao se aproximar. Para raios maiores que  $1r_s$  e menores que o raio correspondente ao máximo de  $V^2$  o fóton só deve deixar a estrela se  $1/b^2 > V_{max}^2$ . Calculando o valor máximo encontramos que ele ocorre em  $r = 1,5r_s$ , um raio muito pequeno para estrelas de nêutrons. Assim, só iremos nos preocupar com raios maiores que esse.

Para uma dada geodésica, o periastre da mesma (quando houver) pode ser encontrada quando  $1/b^2 = V^2$ , ou seja

$$\frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{r^2} = 0. \quad (23)$$

Multiplicando por  $r^3 b^2$

$$r^3 - rb^2 + b^2 r_s = 0. \quad (24)$$

Existem três soluções para essa equação, mas limitando para apenas aquela em que  $r > 1,5r_s$  (FALKNER, 2012) ficamos com a expressão

$$r_p(b) = -2\sqrt{\frac{b^2}{3}} \cos \left[ \frac{\arccos \left( \frac{3\sqrt{3}r_s}{2b} \right) + 2\pi}{3} \right]. \quad (25)$$

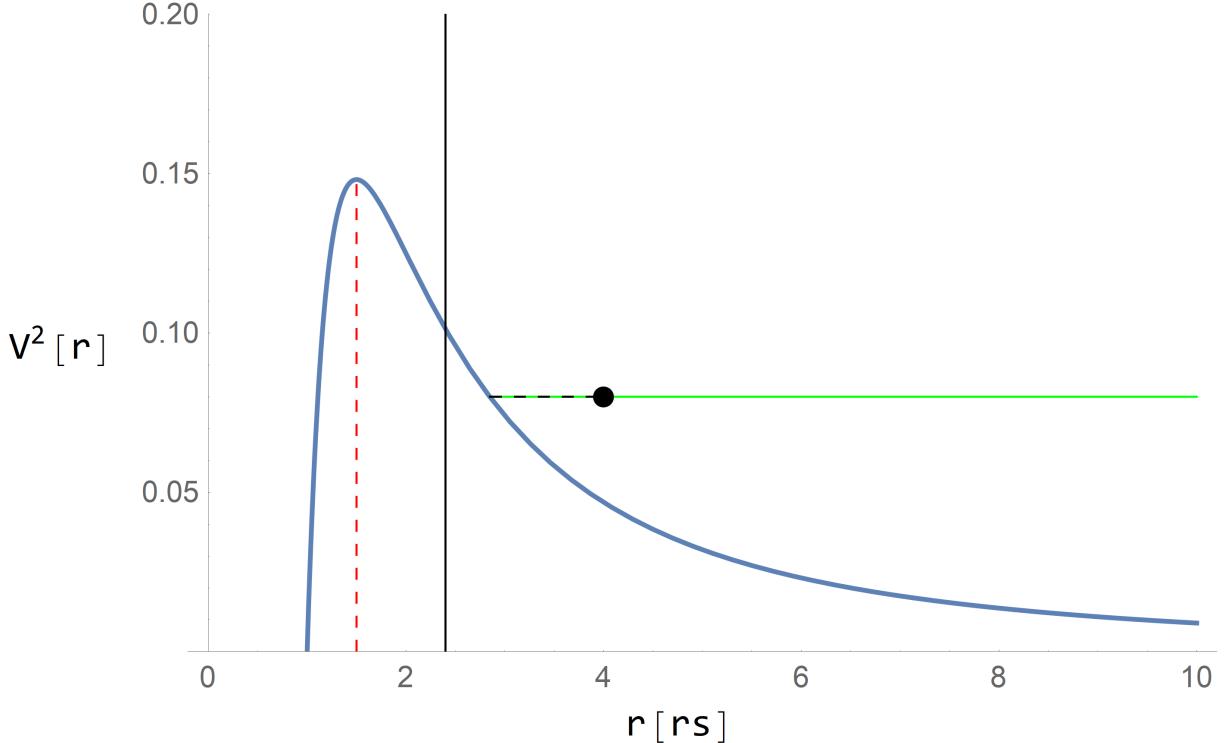


Figura 10 – Potencial efetivo com a distância ao centro da estrela em raios de Schwarzschild. A linha contínua preta é onde se localiza a superfície de uma estrela de raio  $R = 2,4r_s$ . Um fóton que saia do ponto em preto pode se aproximar da estrela (linha tracejada preta) e, ao encontrar com o potencial efetivo, se afasta indefinidamente (linha verde). A linha vermelha tracejada em  $r = 1,5r_s$  indica o ponto de máximo da curva.

Observe que essa equação só é válida se

$$b > \frac{3\sqrt{3}}{2}r_s. \quad (26)$$

Esse limite se justifica uma vez que esse é o valor de  $b$  no pico da Figura 10, e para valores menores de  $b$  não existem trajetórias com periastrón.

## 2.4 TRAJETÓRIAS

Voltemos agora para a equação (14). Agora sabemos que existem dois tipos de trajetória que os fótons podem seguir, sem ou com periastrón. Para a primeira, basta resolver essa integral e para a segunda precisamos dividir a integral em duas partes.

$$\Psi^*(R) = - \int_R^{r_p} I(r) dr + \int_{r_p}^{\infty} I(r) dr \quad (27)$$

com

$$I(r) = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2} \quad (28)$$

A primeira integral de (27) representa a trajetória até o periastron  $r_p$  e a segunda do periastron até o infinito. O sinal negativo na primeira integral é necessário, pois o resultado é positivo apenas em trajetórias que se afastam da estrela. O sobreíndice \* indica que se trata de um trajeto com periastron. A segunda integral é simplesmente  $\Psi(r_p)$ . Somando e substraindo  $\Psi(r_p)$  de (27) temos

$$\Psi^*(R) = 2\Psi(r_p) - \left( \int_{r_p}^{\infty} I(r)dr - \int_{r_p}^R I(r)dr \right), \quad (29)$$

$$\Psi^*(R) = 2\Psi(r_p) - \int_R^{\infty} I(r)dr, \quad (30)$$

$$\Psi^*(R) = 2\Psi(r_p) - \Psi(R), \quad (31)$$

A Figura 11 mostra a trajetória deste fóton. Note que ela é simétrica com relação ao periastron.

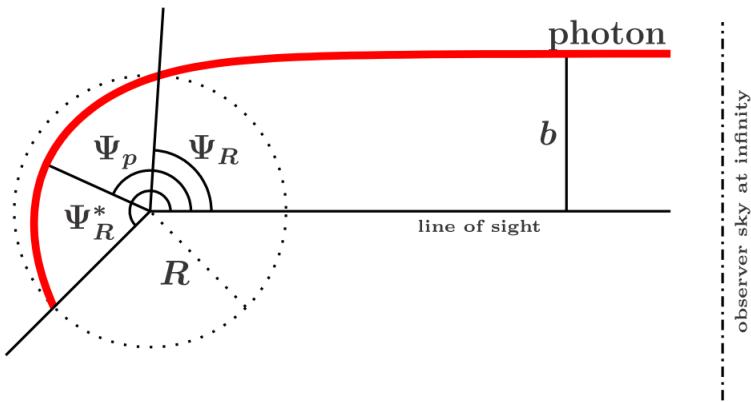


Figura 11 – Trajetória de um fóton que deixa a coluna de acréscimo em  $\Psi^*(R)$  e se aproxima da estrela, possuindo um periastron em  $\Psi(r_p)$ . O fóton volta a atingir o raio R em  $\Psi(R)$  e segue para o observador no infinito. (Falkner, 2012)

Até agora vimos que o parâmetro  $b$  é importante para definirmos a trajetória do fóton, e para encontrá-la precisaríamos medir a distância com relação à linha de visão. Mas existe outra forma de definí-lo usando apenas as condições iniciais de emissão. Para isso usaremos o ângulo  $\alpha$  entre a direção radial à estrela  $\hat{n}$  e a direção de emissão do fóton  $\hat{k}_0$ , indicado na Figura 12.

Através da geometria do sistema, podemos determinar  $\alpha$  dividindo o módulo de (9) e (12)

$$\tg(\alpha) = \frac{|p^\Psi|}{|p^r|} = \frac{p^\Psi p_\Psi}{p^r p_r} = \left[ \frac{R^2}{b^2} \left( 1 - \frac{r_s}{R} \right)^{-1} - 1 \right]^{-1/2} \quad (32)$$

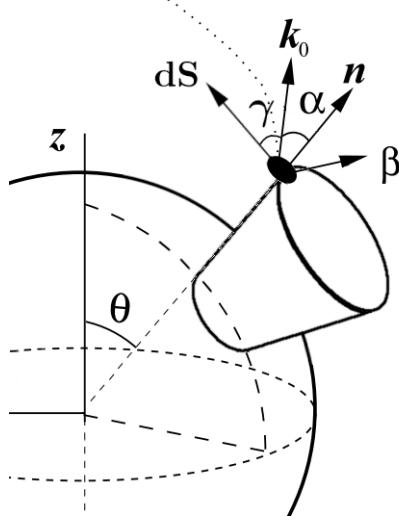


Figura 12 – Fóton deixando uma coluna de acréscimo, com ângulo de emissão  $\alpha$  entre o vetor radial  $\hat{n}$  e  $\hat{k}_0$ . Note que, para o caso de emissão de uma coluna de acréscimo, o vetor radial não é o vetor normal à superfície  $d\vec{S}$ .

Ou ainda,

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{R} \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}} \quad (33)$$

Substituindo o valor de  $b$  no periastron, ou seja, substituindo o valor de  $b$  que resolve (23) nessa equação, observamos que  $\operatorname{sen}(\alpha) = 1$ . Assim, para valores menores de  $b$ , e consequentemente de  $\alpha$ , não há periastron. O que equivale a dizer que trajetórias com um periastron serão aquelas em que  $\alpha > 90^\circ$ .

Pela simetria da trajetória com relação ao periastron, é possível notar a seguinte relação entre o valor desse ângulo no ponto de emissão  $\alpha^*$  e seu valor  $\alpha$  quando ele volta a atingir o mesmo raio

$$\alpha^* = \pi - \alpha \quad (34)$$

Daí vemos que  $\operatorname{sen}(\alpha^*) = \operatorname{sen}(\alpha)$ . A Figura 13 destaca os ângulos mencionados em uma trajetória com periastron.

Usando o menor valor que  $b$  pode assumir de (26), o qual chamaremos de  $b_c$ , obtemos o maior valor de  $\alpha$  usando (33) e (34)

$$\alpha_{\max}(u) = \pi - \operatorname{arcsen} \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} u \sqrt{1-u} \right), \quad (35)$$

onde chamamos  $u = r_s/R$ . Dessa forma, o maior ângulo de emissão pode ser calculado

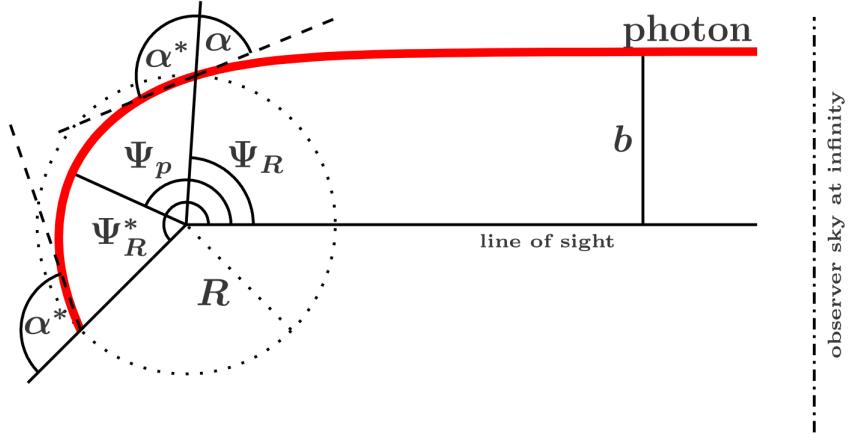


Figura 13 – Trajetória de um fóton com periastron emitido a partir de uma coluna de acréscimo. Na figura estão destacados os ângulos de emissão  $\alpha^*$  e o ângulo correspondente na sua contraparte simétrica  $\alpha$ . (FALKNER, 2012)

de

$$\Psi_{max}(u) = \Psi^*(u) \Big|_{b=b_c}. \quad (36)$$

## 2.5 ATRASO TEMPORAL

Ao observar algumas das trajetórias de fótons desenhadas até aqui notamos que seus comprimentos são diferentes. Isso é importante porque ao detectar o sinal com um satélite, o mesmo é contuído pelos fótons que chegam em um determinado instante. Assim, dependendo do ponto de emissão, um fóton pode chegar mais atrasado que outro e aqui mostraremos como calcular esse atraso.

O tempo de viagem pode ser calculado dividindo (6) por (12) e integrando as expressões

$$\begin{aligned} t(R) = \int_0^t dt' &= \int_{\infty}^R \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr} dr \\ &= \int_R^{\infty} dr \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (37)$$

O tempo que qualquer objeto leva para percorrer um caminho de comprimento infinito é, obviamente, infinito. Entretanto, o que nos interessa é o atraso entre um fóton e outro. Tomando como referência o fóton que atinge o observador com  $b = 0$ , coincidindo com o LOS, temos

$$\begin{aligned} \Delta t(R) &= t(R) - t(R) \Big|_{b=0} \\ &= \int_R^{\infty} dr \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left\{ \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]^{-1/2} - 1 \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

Note que na equação acima consideramos o atraso entre fótons que saem do mesmo raio e atingem o observador em pontos diferentes. Há também o atraso pela emissão a partir de diferentes raios

$$\begin{aligned}
 \delta t(R_1, R_2) &= t(R_1) \Big|_{b=0} - t(R_2) \Big|_{b=0} \\
 &= \int_{R_1}^{R_2} dr \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \\
 &= r_s \ln \left( \frac{R_2 - r_s}{R_1 - r_s} \right) + R_2 - R_1
 \end{aligned} \tag{39}$$

Por fim, atraso total entre dois fótons emitidos simultaneamente pode ser calculado a partir de

$$\begin{aligned}
 \Delta t(R) &= \Delta t(R) + \delta t(R_{ref}, R) \\
 &= \int_R^\infty dr \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left\{ \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]^{-1/2} - 1 \right\} \\
 &\quad + r_s \ln \left( \frac{R - r_s}{R_{ref} - r_s} \right) + R - R_{ref}
 \end{aligned} \tag{40}$$

onde  $R_{ref}$  é qualquer raio de referência desde que  $R_{ref} > r_s$ . Podemos trabalhar com essa expressão da mesma forma que fizemos com (14) para o caso de uma trajetória com periastron e obtivemos (27). O que nos fornece

$$\Delta T^*(R) = 2\Delta T(r_p) - \Delta T(R) \tag{41}$$

A figura a seguir ilustra cada tipo de atraso temporal.

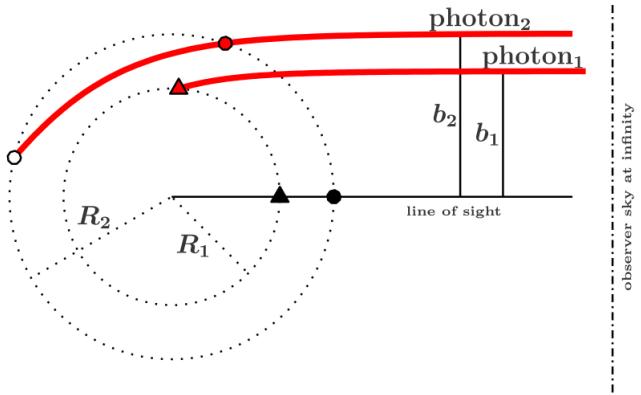


Figura 14 – Dois fótons deixando a estrela a partir de raios diferentes,  $R_1$  e  $R_2$ , com diferentes parâmetros de impacto,  $b_1$  e  $b_2$ .  $\Delta t$  mede a diferença no tempo de chegada de um fóton que sai de uma das formas (triângulo ou círculo) preenchidas em vermelho em comparação com suas respectivas formas preenchidas em preto. Já  $\delta t$  compara aquelas emitidas das formas diferentes. (FALKNER, 2012)

## 2.6 REDSHIFT GRAVITACIONAL

O *redshift* gravitacional prevê que um fóton que se afasta de uma fonte gravitacional deve ter sua frequência reduzida. Quanto mais intenso é o campo gravitacional da fonte, maior é o *redshift*, o que faz com que ele seja um elemento crucial da simulação de EN. A frequência  $\nu$  observada de um fóton, que segue uma trajetória  $x^\mu(\lambda)$  mensurada por um observador com quadri-velocidade  $U^\mu$  é obtida por meio de

$$\nu = -g_{\mu\nu} U^\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (42)$$

A quadri-velocidade satisfaz a relação

$$U_\mu U^\mu = -1 \quad (43)$$

E, considerando um observador estacionário ( $U^i = 0$ , com  $i = 1, 2, 3$ ) na métrica de Schwarzschild temos

$$\begin{aligned} U_\mu U^\mu &= g_{00} U^0 U^0 \\ -1 &= (U^0)^2 \left[ -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \right] \end{aligned} \quad (44)$$

$$U^0 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} \quad (45)$$

Aplicando isso e (6) na equação (42), e observando que na métrica de Schwarzschild  $g_{0i} = 0$

$$\begin{aligned}
v &= -g_{00} U^0 \frac{dt}{d\lambda} \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} E \\
&= E \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}
\end{aligned} \tag{46}$$

A razão entre a frequência do fóton emitido em  $R$  e a observada em  $r \rightarrow \infty$ , lembrando que a energia se conserva na trajetória é

$$\frac{v_{obs}}{v} = \left(1 - \frac{r_s}{R}\right)^{1/2} \tag{47}$$

## 2.7 EFEITO DOPPLER RELATIVÍSTICO E ABERRAÇÃO

Algumas estrelas de nêutrons podem rotacionar muito rapidamente, com períodos da ordem de milisegundos, sendo assim necessário levar em consideração efeitos da relatividade especial para uma maior exatidão da simulação. Vale destacar, entretanto, que esse procedimento não é necessário para a fonte analisada neste trabalho, a 1A0535+262, pelo seu longo período de rotação de 103,527 s.

Considere uma estrela, vista de cima, rotacionando em sentido anti-horário. Um fóton deixa a sua superfície, ou um ponto da coluna de acréscimo, com direção  $\hat{k}_0$ , nesse ponto a velocidade tangencial vale  $\vec{\beta}$ , com ângulo entre esses vetores de  $\xi$ . A situação está descrita na Figura 15.

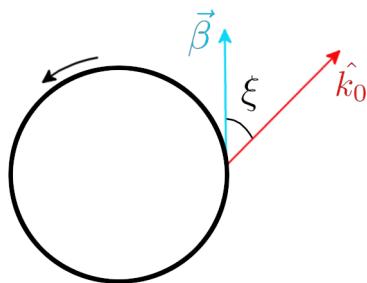


Figura 15 – Representação de um fóton deixando uma Estrela de Nêutrons vista de cima, rotacionando em sentido anti-horário.

As variáveis estão definidas em um referencial estacionário. Um observador nesse referencial mede o fóton com energia  $E$  e no referencial corotacional mede  $E'$ . Definindo a direção de emissão do fóton como o eixo  $x$  de um sistema de coordenadas, e usando a relação  $p^\mu p_\mu = 0$  temos o quadri-momento no referencial estacionário definido por  $p^0 = E$ ,  $p^x = E$ , e  $p^y = p^z = 0$ . Assim, usando a transformação de Lorentz temos

$$\begin{aligned}
E' &= p'^0 = p^\mu \Lambda^0_\mu \\
&= \gamma E - \gamma p^x \beta_x \\
&= \gamma E (1 - \beta \cos \xi)
\end{aligned} \tag{48}$$

com  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ . Sabendo que a energia se relaciona com a frequência do fóton pela expressão  $E = h\nu$ , logo, podemos escrever

$$\delta = \frac{E}{E'} = \frac{\nu}{\nu'} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos \xi} \tag{49}$$

Temos ainda a relação

$$\cos \alpha' = \delta \cos \alpha \tag{50}$$

cuja dedução será mostrada posteriormente, que nos indica que a emissão é direcionada ao longo da direção do rotação, efeito chamado de aberração.

## 2.8 FLUXO

Identificados os efeitos que influenciam na trajetória e frequência do fóton observado, iremos agora calcular o fluxo observado de uma EN. O fluxo espectral de um feixe de fótons de energia  $E$  é dado pela expressão

$$dF_E = I_E d\Omega, \tag{51}$$

onde  $I_E$  é a intensidade radiativa específica e  $d\Omega$  o elemento de ângulo sólido no referencial do observador. De maneira geral, podemos definir o elemento de ângulo sólido por

$$d\Omega = \cos \gamma \frac{dS}{D^2}, \tag{52}$$

onde  $D$  é a distância entre a estrela e o observador.  $dS \cos \gamma$  é o elemento de área perpendicular à direção de emissão, sendo  $dS$  a área desse elemento e  $\gamma$  o ângulo entre a direção de emissão  $\hat{k}_0$  e o vetor normal à área  $\vec{dS}$ . O que pode ser escrito como

$$dS \cos \gamma = \vec{dS} \cdot \hat{k}_0. \tag{53}$$

Note que, a secção transversal de um feixe de fótons é um invariante de Lorentz, ou seja, podemos escrever que

$$dS \cos \gamma = dS' \cos \gamma' \quad (54)$$

Onde as variáveis linhas são medidas em um referencial corotacional com a estrela. Assim, podemos escrever a equação (52) como

$$d\Omega = \cos \gamma' \frac{dS'}{D^2} \quad (55)$$

Essa forma da expressão é mais interessante para a simulação, uma vez que os elementos de área estão definidos no referencial corotacional e seria mais trabalhoso calcular seu valor no referencial do observador, do que a variável  $\gamma'$ . A intensidade radiativa específica a ser usada neste trabalho é a emitida por um corpo negro, ou seja,

$$I_E = B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (56)$$

onde  $h$  é a constante de Planck,  $k$  a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura da coluna. Note que não há dependência com o ângulo de emissão  $\gamma$ , sendo a emissão tomada como isotrópica e homogênea. Como os perfis de pulso utilizados cobrem uma faixa de frequência, para uma dada temperatura  $T$  e para um dado intervalo de frequência  $\nu_1, \nu_2$  temos a intensidade

$$I = \int_{\nu_1}^{\nu_2} B_\nu(T, \nu) d\nu. \quad (57)$$

A relação entre a intensidade observada e a intensidade emitida em dada frequência é dada por

$$I_E = \left( \frac{E}{E'} \right)^3 I'_{E'} \quad (58)$$

uma vez que  $I/E^3$  é invariante de Lorentz (Rybicki, 1985). Integrando sobre as frequências

$$I = \left( \frac{E}{E'} \right)^4 I' \quad (59)$$

A razão  $E/E'$  é dada pelo redshift gravitacional e efeito Doppler relativístico

$$\frac{E}{E'} = \delta \sqrt{1-u} \quad (60)$$

onde  $u = r_s/R$ . Logo, o fluxo bolométrico, observado para um elemento da coluna de acréscimo é

$$dF = I' \delta^4 (1-u)^2 \cos \gamma' \frac{dS'}{D^2} \quad (61)$$

Nesse contexto, devemos ainda implementar a equação (40) do atraso temporal  $\Delta T$ . Um fóton suficientemente atrasado será detectado em uma fase seguinte dada por

$$\Delta\phi = 2\pi f \Delta T, \quad (62)$$

onde  $f$  é a frequência de rotação da estrela.

## 2.9 SISTEMA DE COORDENADAS

Na seção anterior definimos uma expressão para calcular o fluxo, porém, ficamos com algumas variáveis a definir como o vetor  $\hat{k}_0$ , que indica a direção de emissão do fóton no referencial corotacional, e o ângulo  $\xi$ , necessário para calcular o efeito Doppler relativístico. Para isso adotaremos o sistema de coordenadas utilizado por (POUTANEN; BELOBORODOV, 2006), destacado na Figura 16.

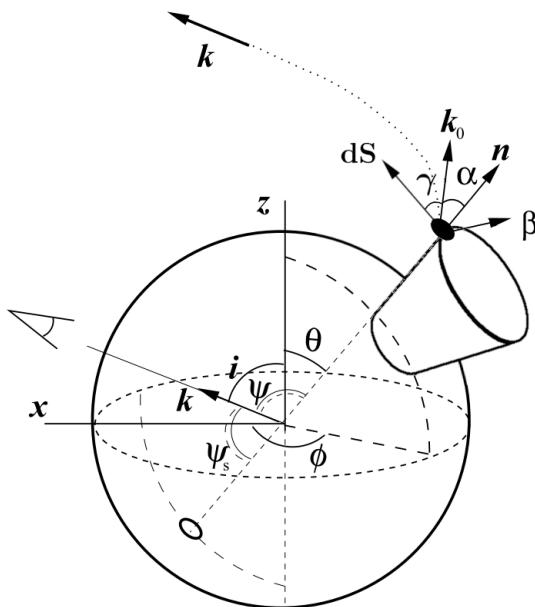


Figura 16 – Sistema de coordenadas mostrando a emissão de um fóton na direção  $\hat{k}_0$ .

Nesse sistema,  $\hat{n}$  é o vetor unitário radial, o eixo  $z$  é também o eixo de rotação,  $\vec{\beta}$  é o vetor velocidade tangencial,  $i$  o ângulo entre o eixo de rotação e a linha de visão e  $\Psi$  o ângulo entre o ponto de emissão e a linha de visão. Agora podemos definir o valor da velocidade tangencial que é dada por

$$\begin{aligned}\beta &= 2\pi R f' \sin \theta \\ &= 2\pi R \frac{f}{\sqrt{1-u}} \sin \theta,\end{aligned}\quad (63)$$

onde  $f'$  é a frequência de rotação no referencial corotacional e  $f$  no referencial do observador. Agora, para determinar o ângulo  $\xi$  entre  $\vec{\beta}$  e  $\hat{k}_0$  escrevemos  $\hat{k}$  como

$$\hat{k} = \cos \Psi \hat{n} + \sin \Psi \hat{n}_{\perp}, \quad (64)$$

onde  $\hat{n}_{\perp}$  é o vetor unitário perpendicular à  $\hat{n}$ . Isso nos permite escrever a direção inicial de propagação como

$$\begin{aligned}\hat{k}_0 &= \cos \alpha \hat{n} + \sin \alpha \hat{n}_{\perp} \\ &= \cos \alpha \hat{n} + \left( \sin \Psi \frac{\sin \alpha}{\sin \Psi} \hat{n}_{\perp} + \cos \Psi \frac{\sin \alpha}{\sin \Psi} \hat{n} \right) - \cos \Psi \frac{\sin \alpha}{\sin \Psi} \hat{n} \\ &= [\sin \alpha \hat{k} + \sin (\Psi - \alpha) \hat{n}] / \sin \Psi.\end{aligned}\quad (65)$$

De forma explícita podemos escrever, observando a Figura 16,

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (66)$$

$$\hat{k} = \begin{pmatrix} \sin i \\ 0 \\ \cos i \end{pmatrix}, \quad (67)$$

e

$$\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (68)$$

A partir disso, podemos determinar  $\xi$

$$\cos \xi = \hat{k}_0 \cdot \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = \frac{\sin \alpha}{\sin \Psi} \hat{k} \cdot \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = -\frac{\sin \alpha}{\sin \Psi} \sin \phi \sin i, \quad (69)$$

onde usamos que  $\hat{n} \cdot \vec{\beta} = 0$ . Agora, o fator de Doppler da expressão (49) está completamente definido. Em seguida, precisamos definir o vetor unitário  $\hat{k}'_0$ . Para isso, como feito por

Poutanen e Beloborodov (2006) iremos reescrever  $\hat{k}_0$  em um sistema de coordenadas onde o eixo z é o vetor radial  $\hat{n}$ , o eixo y ao longo da direção de rotação, ou seja, na direção de  $\vec{\beta}$  e o eixo x ao longo do meridiano sentido polo sul. Esse sistema de coordenadas está representado na Figura 17.

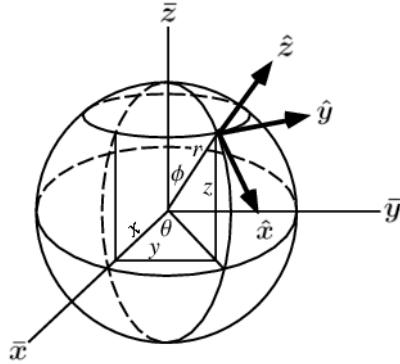


Figura 17 – Sistema de coordenadas na superfície de uma esfera imaginária concêntrica com a estrela. Os eixos barrados representam nosso sistema de coordenadas anterior e os vetores unitários  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  o atual.

Nesse sistema de coordenadas,

$$\hat{k}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha}{\sin \Psi} (\sin i \cos \theta \cos \phi - \cos i \sin \theta) \\ \cos \xi \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (70)$$

Isso nos facilita para realizar uma transformação de Lorentz nesse vetor, trazendo  $\hat{k}_0$  para o referencial corotacional da estrela, uma vez que a direção de movimento local é no próprio eixo y. Nesse referencial,

$$\hat{k}'_0 = \delta \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha}{\sin \Psi} (\sin i \cos \theta \cos \phi - \cos i \sin \theta) \\ \gamma(\cos \xi - \beta) \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (71)$$

Em que  $\delta$  está definido na equação (49) e  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ . Vale lembrar que ao utilizar essa expressão para  $\hat{k}'_0$  no fluxo em (61) e consequentemente em (53),  $d\vec{S}$  deve ser descrito nas coordenadas da Figura 17. Podemos notar ainda que a última componente desse vetor pode ser escrita como  $\cos \alpha'$ , o que resultaria na aberração indicada na equação (50).

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 OBJETO

O primeiro passo do programa é, através dos parâmetros fornecidos, construir uma estrela de nêutrons com colunas de acréscimo. Este procedimento é realizado utilizando a biblioteca pymesh, que nos permite criar objetos tridimensionais e extrair propriedades como coordenadas e área dos elementos que compõem uma superfície. Para criar a estrela com colunas de acréscimo utilizamos o comando *pymesh.generate\_icosphere* que gera uma esfera, fornecidos seu raio e posição de seu centro, e *pymesh.generate\_cylinder* que gera um tronco de cone, fornecidas as posições e raios do centro superior e inferior do tronco.

A primeira linha do fluxograma da Figura 18 mostra as estruturas criadas com esses comandos. Para simular uma coluna de acréscimo, queremos um tronco de cone na superfície da esfera, com superfície superior de uma calota esférica e que suas paredes sigam na direção radial da estrela assim como representado na Figura 7.

Para modelar objeto dessa forma usamos o comando *pymesh.boolean* que nos permite fazer operações envolvendo dois objetos criados. Dado uma estrela de raio  $R$  e coluna de altura  $H$ , criamos uma esfera de raio  $R+H$  e um tronco de cone que vá do interior da estrela até acima da coluna, ajustando os raios superior e inferior para que estejam paralelos à direção radial. Então usamos a função *boolean* com a operação de intersecção, que tem como saída aquilo que está no interior de ambos os objetos utilizados.

Ainda resta uma região da coluna contida no interior da estrela, para removê-la usamos o comando *pymesh.submesh*, que cria um novo objeto com os segmentos fornecidos. Em nosso caso, identificamos todos os segmentos em que sua posição  $r$  fosse tal que  $r > R$ . Poderíamos em princípio pular esta etapa e apenas não contabilizar o fluxo emitido por essas subdivisões dentro da estrela, entretanto haveria um aumento no tempo de execução do programa. O fluxograma na Figura 18 representa esse processo de modelagem da coluna de acréscimo.

Para os comandos de geração de objetos como *generate\_icosphere* e *generate\_cylinder*, podemos ainda informar um parâmetro que determina o número de subdivisões utilizadas. Quanto maior o número de subdivisões mais suave são as superfícies, ao custo de um maior tempo de execução, uma vez que temos de avaliar os fôtons que saem de cada subdivisão. A Figura 19 nos mostra como esses parâmetros alteram a forma dos objetos. Observe que, no caso da coluna, mesmo aumentando número de subdivisões, os centros das subdivisões da parede do tronco de cone sempre ficam localizados em duas alturas, não aumentando as divisões ao longo da coluna.

Isso pode afetar a sensibilidade da simulação com relação a altura das colunas, portanto utilizamos o comando *split\_long\_edges*, cuja função é dividir subdivisões maiores que um tamanho fornecido. O resultado da aplicação desse comando pode ser observado na Figura 19.

Com *pymesh* podemos obter as coordenadas do baricentro de cada triângulo que compõe o objeto para verificar se fôtons que deixam esse elemento de área chegam ao observador. O vetor área  $\vec{dS}$  para cada elemento, necessário para o cálculo do fluxo, também é facilmente obtido.

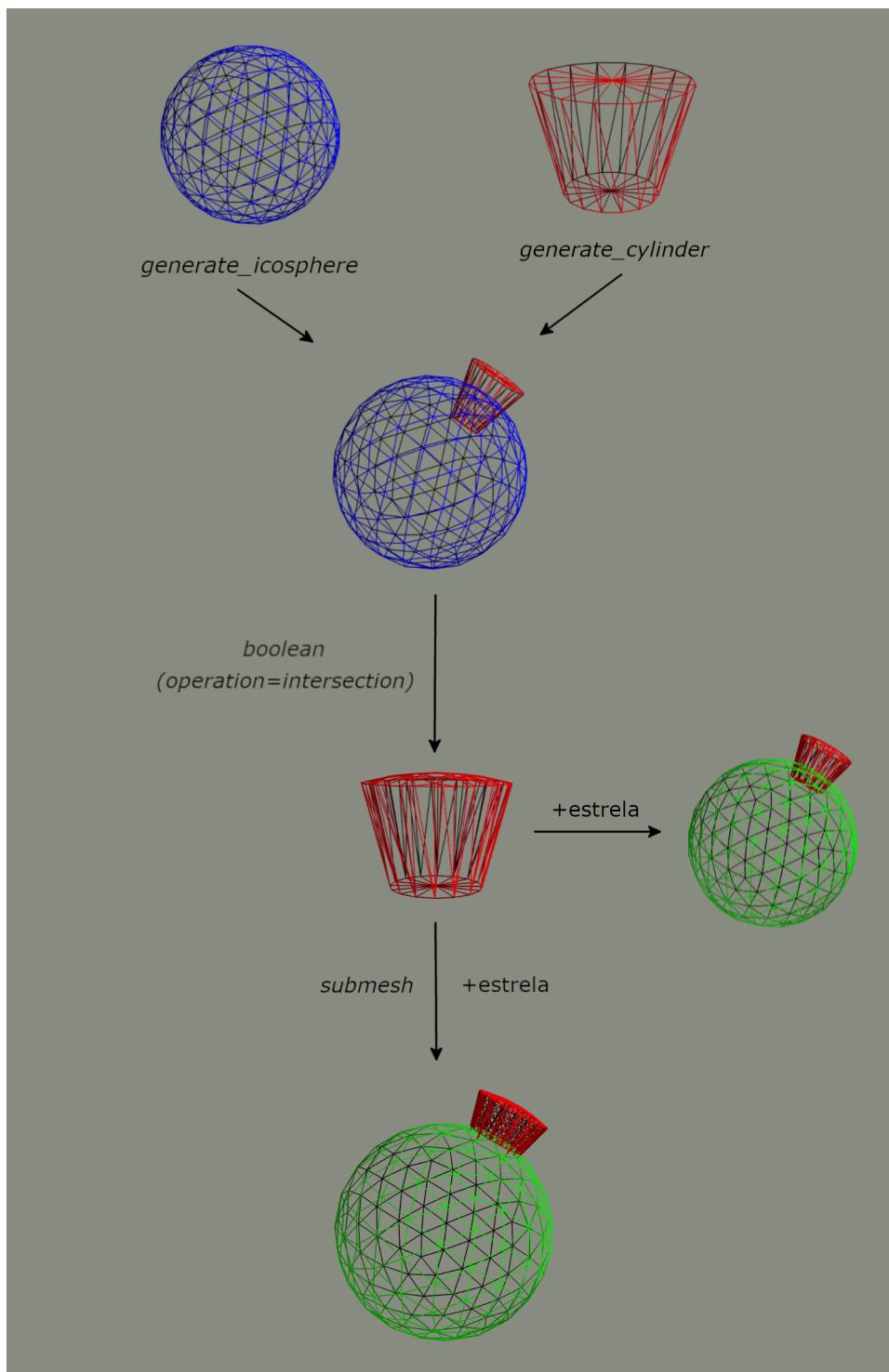


Figura 18 – Fluxograma mostrando o processo de modelagem do objeto usando a biblioteca `pymesh`. A intersecção de uma esfera com um tronco de cone através de `boolean` formam a coluna, note que após a intersecção o topo do tronco adquire forma esférica. A esfera em verde, adicionada posteriormente, representa a superfície da estrela. Ao formar a coluna ainda temos parte dela dentro da estrela, o que é removido através do comando `submesh`. Observe que a coluna na última figura está com mais subdivisões, isso acontece, pois, logo antes da última etapa, aumentamos o número de subdivisões com o comando `split_long_edges`.

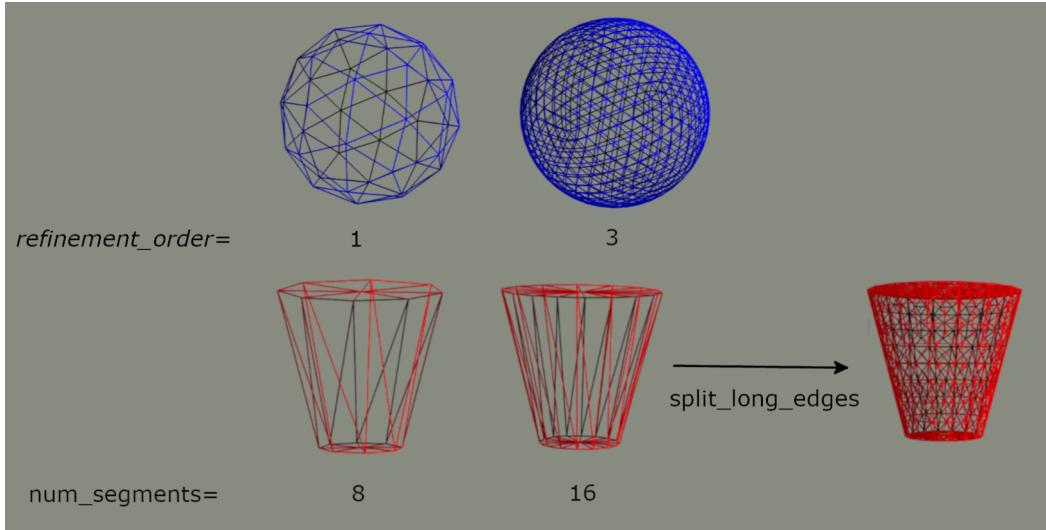


Figura 19 – Objetos criados com diferentes números de subdivisões. Os comandos à esquerda se referem aos respectivos parâmetros de cada objeto para alterar esse número de subdivisões. No inferior direito temos a aplicação do comando *split\_long\_edges*, gerando um tronco de cone com mais subdivisões ao longo de sua altura.

Para cada fase da rotação atua-se com operadores de rotação sobre os vetores posição e área dos pontos de emissão.

### 3.2 MAPPING

Fornecidos os parâmetros  $R$  e  $\Psi$  de um ponto do objeto, não é possível determinar diretamente  $\alpha$  e  $b$  se trajetórias com periastron são permitidas. Isso ocorre por não conseguirmos obter  $r_p$  e consequentemente  $\Psi_p$  de antemão, já que o primeiro necessita do valor de  $b$  de acordo com a equação (25). Para contornar esse problema, criamos uma tabela contendo valores de  $R$ ,  $\Psi$ ,  $\alpha$  e  $b$  dentro de um intervalo. Assim, consultando a tabela, conseguimos determinar cada valor de  $\alpha$  e  $b$  partindo de  $R$  e  $\Psi$ .

A tabela ainda traz a vantagem de diminuir o tempo computacional do programa, já que não é mais necessário resolver uma integral para cada ponto de emissão de fôtons. Para varrermos todo o espaço de possíveis trajetórias de fôtons que chegam ao observador, a tabela é construída tomando um valor de raio de emissão  $R$  e um valor de ângulo de emissão  $\alpha$  entre 0 e  $\alpha_{max}$  calculado a partir de (35). Então, usamos a equação (33) para obter  $b$  e (14) para obter  $\Psi$ .

Utilizamos  $nr$  valores equidistantes de  $R$ , mas para os  $na$  valores de  $\alpha$ , não tomamos valores equidistantes. Isso porque, caso esses fossem equidistantes, teríamos valores de  $\Psi$  concentrados nos menores ângulos, e os ângulos maiores de  $\Psi$  mais espaçados. Portanto, utilizamos a seguinte função para determinar o tamanho dos espaços entre cada  $\alpha$

$$\alpha_n = \alpha_{max}(R) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{n}{na-1} \right)^{ashape} \right], \quad (72)$$

onde  $n$  se encontra no intervalo  $[0, na - 1]$  e usamos  $ashape=1.65$ , por ser o melhor valor de acordo com Falkner (2012). A Figura 20 compara graficamente a distribuição de pontos para alfa com divisões constantes e com o uso da equação (72). Para resolver a integral da equação (14) numericamente, a reescrevemos da seguinte forma

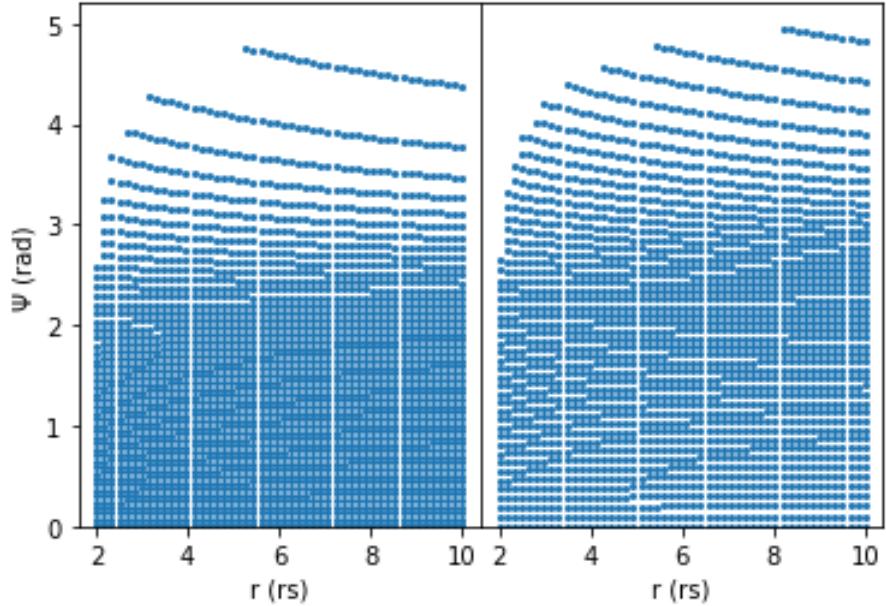


Figura 20 – Comparaçāo entre duas formas de se dividir os intervalos entre valores de  $\alpha$  consecutivos. Nos pontos da esquerda, as divisões foram realizadas de forma constante. No da direita, utilizou-se a equação 72 para determinar o tamanho das divisões. No primeiro caso, os pontos ficam mais concentrados em valores mais baixos de  $\Psi$  comparado com o segundo. Para ambos os gráficos utilizou-se  $na = nr = 50$ .

$$\Psi = \int_0^1 dz f_{u,\alpha}(z) \quad (73)$$

onde  $z = \sqrt{1 - R/r}$ ,  $u = r_s/R$  e

$$f_{u,\alpha} = 2z \sin \alpha \{ \cos^2 \alpha (1-u) + z^2 \sin^2 \alpha [(2-z^2)(1-u) - u(1-z^2)^2] \}^{-1/2} \quad (74)$$

Essa alteraçāo se faz necessária por conta da divergência do integrando em (14) quando  $r \rightarrow r_p$ . O integrando (74) é bem comportado dentro dos intervalos de cada parâmetro, dessa forma, podemos usar um método de integração simples, como o método de romberg para a integração numérica (veja (JOHANSSON, 2018)). Tal método conseguiu resolver a integral (73) com grande exatidão, além de realizar a tarefa com rapidez.

Os gráficos da Figura 21 mostram os valores da tabela  $(R, \Psi, b, \alpha)$  construída com os valores de  $\Psi$  obtidos por essa integração.

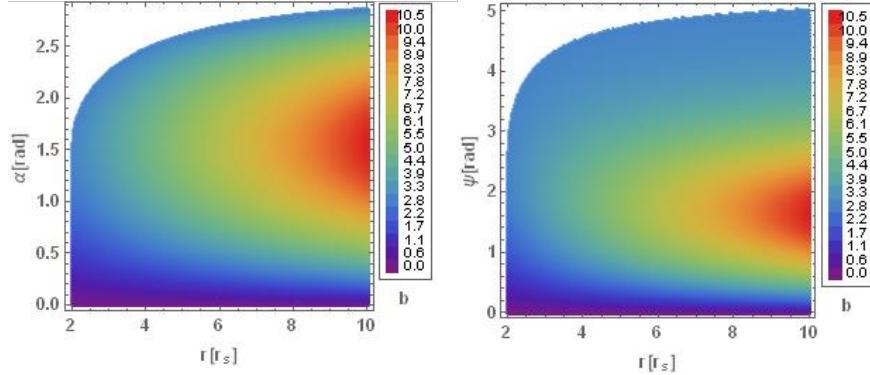


Figura 21 – Gráficos da tabela de parâmetros  $(R, \Psi, b, \alpha)$ . Os gráficos mostram a distribuição de pontos no plano  $r - \alpha$  e  $r - \Psi$ , respectivamente. As cores dos pontos indicam os valores do parâmetro de impacto  $b$  de acordo com a escala ao lado. Neste exemplo,  $na = nr = 500$ .

### 3.3 INTERPOLAÇÃO

Com a tabela pronta, queremos obter os valores de  $\alpha$  e  $b$  a partir de  $R$  e  $\Psi$  de um ponto de emissão. Para isso, consultamos a tabela e realizamos o procedimento de interpolação bilinear. A Figura 22 é o gráfico da direita da Figura 21 ampliado, mostrando o procedimento de interpolação. Sabendo  $R$  e  $\Psi$  do ponto marcado com um  $x$ , para determinar  $\alpha$  e  $b$ , pegamos dois pontos em que  $r_1 < R$  com  $\Psi_1 < \Psi$  e  $\Psi_2 > \Psi$ , as bolinhas pretas.

Partindo desses pontos, encontramos agora três pontos, bolinhas vermelhas, em que  $r_2 > R$  com  $\Psi_{22} > \Psi_2$ ,  $\Psi_1 < \Psi_{21} < \Psi_2$  e  $\Psi_{11} < \Psi_1$ . Realizando um interpolação entre as duas bolinhas vermelhas superiores e as duas inferiores, obtemos  $(r_2, \Psi_1)$  e  $(r_2, \Psi_2)$ , os quadrados pretos. Fazendo mais uma interpolação entre o quadrado e a bolinha preta superior, e outra nos inferiores, obtemos  $(R, \Psi_1)$  e  $(R, \Psi_2)$ , os losangos azuis. Através de uma interpolação final obtemos o valor de  $\alpha$  e  $b$  em  $R$  e  $\Psi$ .

A representação da direita na Figura 22, mostra um caso onde  $\Psi$  é muito próximo de  $\Psi_{max}$ , fazendo-se necessário uma extrapolação. A diferença ocorre nos pontos iniciais, onde agora os dois pontos são menores que  $\Psi$ . E a operação final, envolvendo os losangos, é uma extrapolação.

#### 3.3.1 Exatidão da interpolação

Como indicado acima, as trajetórias com periastros nos impediu de resolver a integral (14) para cada ponto de emissão, o que nos fez optar pelo método de interpolação para obtenção de  $\alpha$  e  $b$ . Uma forma de mensurar o quanto esse método afeta nos valores obtidos seria, partindo de valores de  $(R, \alpha)$  fornecidos, calcular por interpolação  $(\alpha_I, b_I)$  e, a partir destes, calcular  $b(R, \alpha_I)$  pela equação (33) e  $\Psi_I(R, \alpha_I)$  pela integral (14).

De antemão, já esperamos um desvio maior quando  $\Psi \rightarrow \Psi_{max}$ , isso fica claro ao olharmos para o gráfico da direita na Figura 20. No gráfico, observamos que, mesmo utilizando a equação

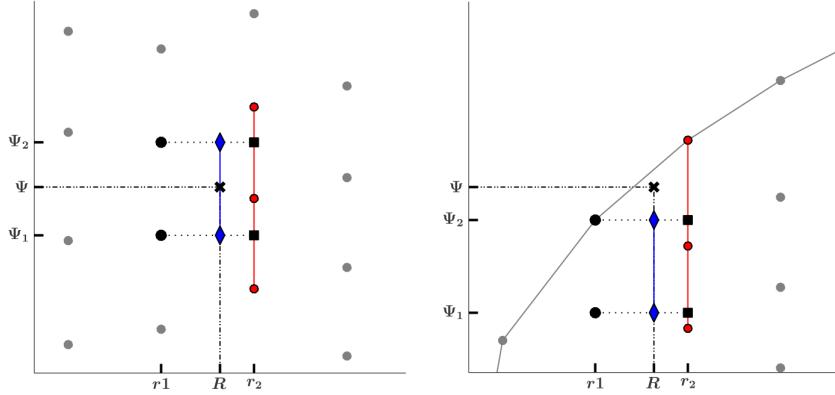


Figura 22 – Representação do processo de interpolação bilinear. Os pontos são um aumento de escala do gráfico da direita de Figura 21. Na esquerda, temos as interpolações consecutivas para obter os valores de  $\alpha$  e  $b$  do conjunto  $(R, \Psi)$ . Na direita, temos o caso de um ponto próximo de  $\Psi_{max}$ , fazendo-se necessária a aplicação de uma extrapolação. (FALKNER, 2012)

(72), ainda temos intervalos maiores entre os valores de  $\Psi$  nessa região. A Figura 23 mostra a comparação entre valores fornecidos e os calculados pela interpolação para diferentes números de pontos. No gráfico da direita superior, além do erro maior para  $\Psi \rightarrow \Psi_{max}$ , notamos um desvio maior em valores intermediários. Esses picos correspondem aos pontos onde  $\alpha = \pi/2$ , e ocorrem pela diferença na expressão utilizada para trajetórias com periastron e sem periastron.

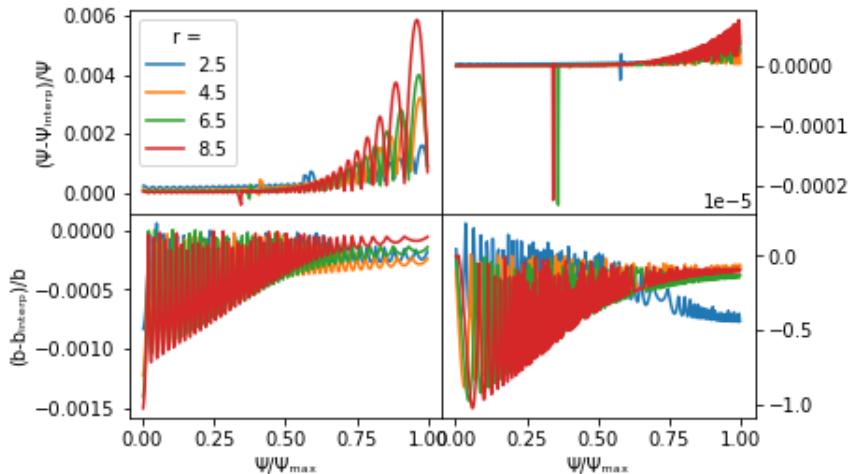


Figura 23 – Desvios relativos de  $\Psi$  e  $b$  para diferentes valores de  $r$ . Nos gráficos da esquerda temos  $nr = na = 50$  e no da direita  $nr = na = 500$

### 3.4 TIPOS DE TRAJETÓRIA

O gráfico da direita na Figura 21, além dos parâmetros da tabela, nos mostra o valor máximo de  $\Psi$  para cada raio  $r$  de emissão. Entretanto, se iremos observar esses fôtons ou não depende da altura  $H$  das colunas e o raio  $R$  da estrela. Isso porque quanto maior o valor de  $\Psi$ , menor o raio do periastron  $r_p$  e uma colisão com a estrela se torna possível.

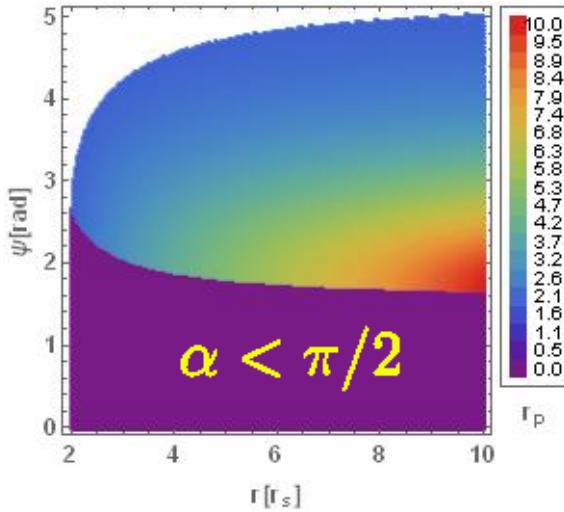


Figura 24 – Gráfico de  $r$  vs  $\Psi$  da tabela de parâmetros, com a escala de cores indicando o raio do periastron  $r_p$ . Na região roxa temos trajetórias sem periastron, ou seja,  $\alpha < \pi/2$ . Para concentrar trajetórias na faixa  $2r_s < r < 10r_s$ , excluímos aquelas com  $r_p < 2r_s$ .

A Figura 24 nos traz o mesmo gráfico, mas agora com os valores de  $r_p$  no lugar de  $b$ . Do gráfico, notamos que podemos observar um fóton que parte de  $\Psi > \pi$ . Nesses casos, precisamos também verificar a possibilidade de uma emissão a partir de  $\Psi_2 = 2\pi - \Psi$ . Isso não significa que dois fôtons do mesmo elemento chegarão ao observador, mas que para cada ponto, devemos verificar a emissão por cada um dos lados. A Figura 25 mostra uma emissão de cada tipo.

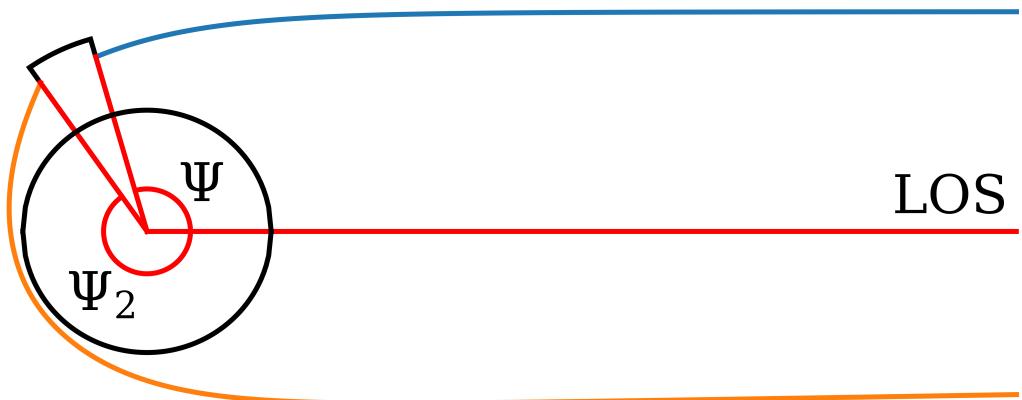


Figura 25 – Representação da trajetória de fóton que deixa a coluna de acréscimo na direção contrária, trajetória amarela, para esta usamos o ângulo  $\Psi_2$ . Em contraste com trajetórias que usam o menor ângulo  $\Psi$ , trajetória azul. Na figura também está indicado a direção do observador (LOS).

### 3.5 FLUXO

Na simulação, portanto, fornecemos o conjunto de parâmetros ( $R, M, i, P, \theta_{10}, \theta_1, \phi_1, H_1, T_1, \theta_{20}, \theta_2, \phi_2, H_2, T_2$ ):

- $R$ : Raio da Estrela
- $M$ : Massa da Estrela
- $i$ : Ângulo entre a linha da visão e o eixo de rotação
- $P$ : Período de rotação
- $\theta_0$ : Ângulo de semi-abertura da coluna
- $\theta$ : Colatitude da Coluna
- $\phi$ : Longitude da Coluna
- $H$ : Altura da Coluna
- $T$ : Temperatura da Coluna

onde os subíndices 1 e 2 indicam cada uma das colunas. Esses parâmetros são então utilizados para criar o objeto, do qual para cada ponto de emissão, definido pelos baricentros de cada subdivisão, calculamos seu valor de  $R$  e  $\Psi$ , verificando  $\Psi_2$ , e, com esses, por interpolação, calculamos o valor de  $\alpha$  e  $b$ . Que então, usando as expressões da seção 2.9 e (61), calculamos o fluxo  $dF$  desse elemento.

Somando-se  $dF$  para cada fluxo, encontramos o fluxo  $F$  em dada fase de rotação, rotacionamos os vetores posições e normais das subdivisões, e calculamos o fluxo para a fase seguinte. Para a apresentação dos gráficos, realizou-se uma normalização do fluxo dada pela expressão

$$F_{norm} = \frac{F}{(F_{max} + F_{min})/2} \quad (75)$$

onde  $F_{max}$  e  $F_{min}$  são, respectivamente, o máximo e o mínimo do fluxo. O que torna os fluxos independentes da distância do objeto  $D$ .

### 3.6 ALGORITMOS DE AMOSTRAGEM

Com os dados da fonte e a simulação em mãos, buscamos encontrar o conjunto de parâmetros que melhor descreve o perfil de pulso observado. Pela grande quantidade de parâmetros e um tempo considerável de execução da simulação, se torna inviável testar todas as combinações possíveis de parâmetros para determinar o melhor perfil, é aí que entram os algoritmos de amostragem. Foram utilizados dois desses algoritmos, o Algoritmo Genético e o Markov Chain Monte Carlo (MCMC).

### 3.6.1 Algoritmo Genético

O Algoritmo Genético foi inspirado na teoria da evolução. Nele, cada parâmetro ( $R$  ou  $M$  por exemplo) é um gene, e o conjunto de parâmetros formam um cromossomo. Os fenótipos desses cromossomos são os perfis de pulso gerados pelo conjunto de parâmetros. O algoritmo consiste em seis passos (LIMA et al., 2020):

1. Inicialização: Gera-se um conjunto de cromossomos (população);
2. Avaliação Fenotípica: Compara-se o fenótipo com os dados de interesse;
3. Seleção das melhores soluções: Separa-se as soluções com melhor resultado na avaliação;
4. Reprodução: Mistura-se os genes das melhores soluções;
5. Mutação: Aleatoriamente muda-se alguns genes dos novos cromossomos;
6. Substituição de população: Os cromossomos novos são utilizados como população, retornando ao item 2.

As iterações dos itens 2 ao 6 são chamadas de gerações. A avaliação fenotípica é realizada por meio da *goodness-of-fit* ( $\chi^2$ ), que é expressa pela soma sobre o período de rotação dos desvios quadráticos entre o fluxo simulado e o observado, ou seja,

$$\chi^2 = \sum_k [F_k^{SIM} - F_k^{OBS}]^2 \quad (76)$$

em que  $F_k^{SIM}$  é a soma do fluxo emitido por cada subdivisão (equação 61) do objeto em um dado instante  $k$ , e  $F_k^{OBS}$  é o fluxo observado no instante  $k$ , ambos normalizados. Quanto mais próximo o fluxo simulado está do observado, menor é o  $\chi^2$  e as mutações servem para evitar um mínimo local. Assim, o objetivo do algoritmo genético é minimizar  $\chi^2$ . A Figura 26 ilustra todos os passos do algoritmo.

### 3.6.2 Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

O MCMC é uma análise estatística Bayesiana, sendo, portanto, centrada no teorema de Bayes, que pode ser expresso da seguinte forma

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (77)$$

onde

- $P(A|B)$ : Probabilidade de ocorrer o evento A dado que o evento B ocorreu

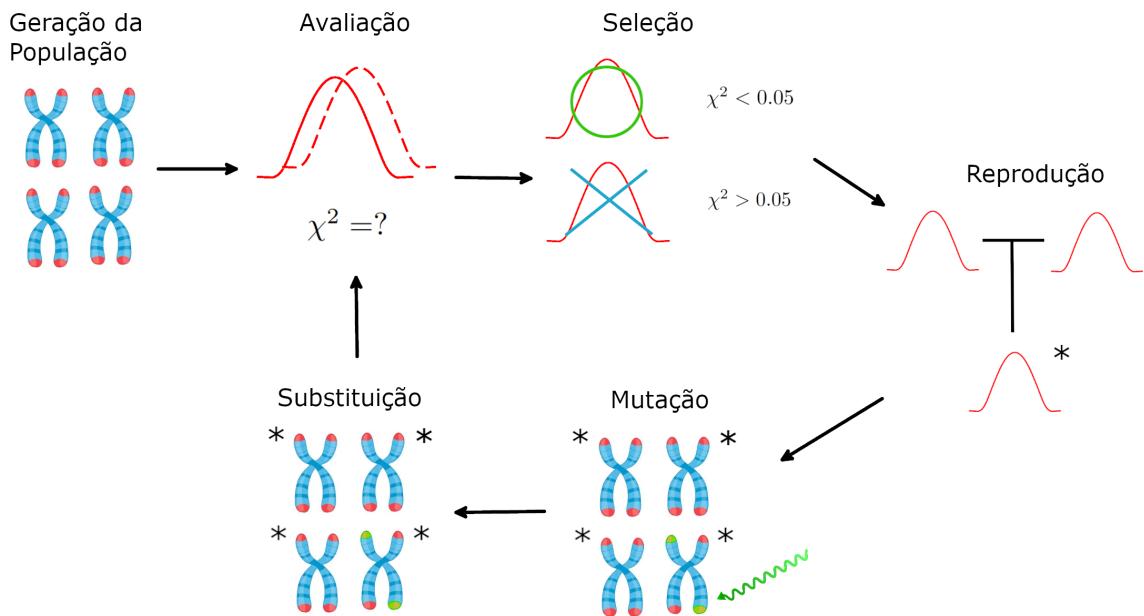


Figura 26 – Etapas do algoritmo genético. O '\*' representa os membros novos da população e as condições de seleção são meramente ilustrativas.

- $P(B|A)$ : Probabilidade de ocorrer o evento B dado que o evento A ocorreu
- $P(A)$ : Probabilidade de ocorrer evento A
- $P(B)$ : Probabilidade de ocorrer evento B

Vejamos um exemplo: suponha que 60% dos sistemas estelares numa galáxia muito longe possuem um planeta como a Terra, logo, 40% não possuem um planeta como a Terra. Além disso, suponha que todo sistema que tem um planeta como a Terra possui um planeta como Júpiter, enquanto que apenas metade dos sistemas que não possuem um planeta como a Terra possui um planeta como Júpiter. Se observarmos um sistema com um planeta como Júpiter, qual a probabilidade desse mesmo sistema possuir um planeta como a Terra (HILBE; SOUZA; ISHIDA, 2017).

Pelo teorema de Bayes, queremos saber a probabilidade do sistema possuir uma Terra sabendo que ele possui um Júpiter, i.e.  $P(T|J)$ . A probabilidade de um sistema possuir uma Terra é  $P(T) = 60/100$ . A probabilidade de um sistema que possui uma Terra possuir um Júpiter é  $P(J|T) = 1$ . Já a probabilidade de um sistema qualquer possuir um Júpiter é:

$$\begin{aligned}
 P(J) &= P(T)P(J|T) + P(nT)P(J|nT) \\
 &= \frac{60}{100} \times 1 + \frac{40}{100} \times \frac{1}{2} \\
 &= 0,8
 \end{aligned} \tag{78}$$

Onde  $nT$  é a situação em que não há uma Terra. Assim, segundo o teorema de Bayes, temos

$$\begin{aligned}
 P(T|J) &= \frac{P(J|T)P(T)}{P(J)} \\
 &= \frac{1 \times 0,6}{0,8} \\
 &= 0,75
 \end{aligned} \tag{79}$$

Assim, a probabilidade de encontrarmos um planeta como Júpiter nesse sistema que observamos é de 0,75.

Na linguagem do algoritmo, chamamos  $P(A)$  de *prior*,  $P(B|A)$  de *likelihood* e  $P(A|B)$  de *posterior*. O *prior* é a informação que temos a respeito do parâmetro de antemão, em nosso caso, por exemplo, sabemos como é a distribuição das massas de EN. Assim,  $P(M)$  é uma função de distribuição de probabilidade da massas de EN, e  $P(M=1,4M_{\odot})$  a probabilidade da massa de uma EN ser  $1,4M_{\odot}$ . O *likelihood* é como achamos que nossas amostras estão distribuídas dado um conjunto de parâmetros.

Gerado um conjunto de amostras, no qual a mais recente é  $\theta_k$ , fazemos o seguinte para gerar a próxima amostra:

1. Amostragem: Propostas (conjunto de parâmetros)  $\theta'$  são retiradas de uma função de distribuição de probabilidades (*proposal*);
2. Avaliação: Verificamos se o novo valor  $\theta'$  do parâmetro é mais provável pela razão  $\frac{f(\theta')}{f(\theta_k)}$ ;
3. Seleção: Se  $\theta'$  for mais provável,  $\theta_{k+1} = \theta'$ , caso contrário, existe uma probabilidade de se aceitar  $\theta'$  ou não;

onde  $f(\theta) = likelihood \times prior$ . Repete-se esse ciclo até que o valor do parâmetro  $\theta$  deixe de variar (HOGG; FOREMAN-MACKEY, 2018). Dois algoritmos de amostragem são necessários pela dificuldade de se fornecer um *proposal* adequado para iniciar o MCMC. Se fôssemos inserir na mão o *proposal* poderíamos estar sujeitos à um viés inicial, e o Algoritmo Genético também fornece um distribuição que evolui mais rapidamente. Por isso, utilizamos o Algoritmo Genético para gerar o *proposal* que então foi inserido no MCMC.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção iremos comparar os fluxos obtidos da simulação para diferentes parâmetros da estrela, destacando os principais aspectos observados. Em seguida, os parâmetros que melhor se adequam à estrela 1A0535262. Os fluxos apresentados nesta secção estão todos normalizados de acordo com a equação 75.

### 4.1 SIMULAÇÃO

Fornecida uma combinação dos parâmetros ( $R, M, i, P, \theta_{10}, \theta_1, \phi_1, H_1, T_1, \theta_{20}, \theta_2, \phi_2, H_2, T_2$ ), a simulação gera o perfil de pulso da estrela. Para melhor visualização dos efeitos de cada parâmetro sobre os perfis de pulso, os gráficos apresentados mostram apenas uma coluna de acréscimo. Em alguns momentos separamos o fluxo emitido do topo da coluna (*pencil beam*), do fluxo emitido pelas paredes (*fan beam*), visando melhor entendimento do fenômeno. A Figura 27 nos mostra um perfil de pulso com suas componentes.

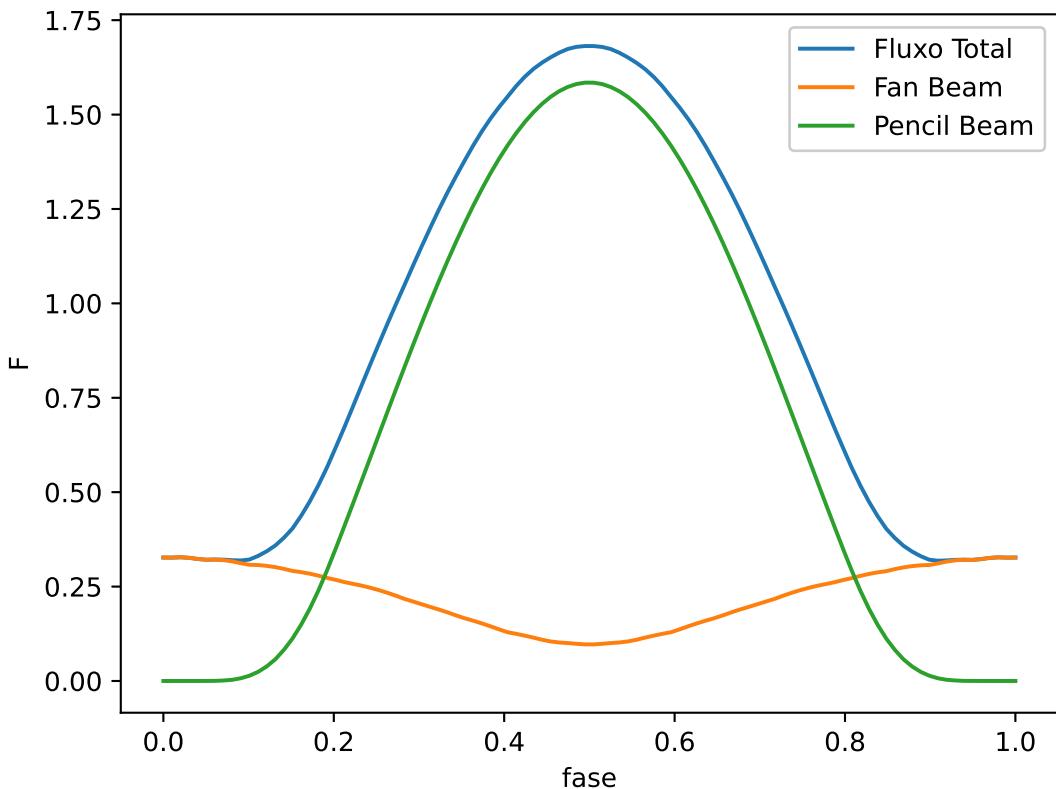


Figura 27 – perfil de pulso com suas componentes, *fan beam* e *pencil beam*. Parâmetros:  $M = 1.4M_\odot, R = 12\text{ km}, i = 90^\circ, P = 1\text{ s}, \theta_{10} = 15^\circ, \theta_1 = 45^\circ, \phi_1 = 180^\circ, H_1 = 1\text{ km}, T_1 = 0.7\text{ keV}$

Como já explicado, para estrelas de nêutrons usamos um espaço-tempo curvo, mais especificamente o espaço-tempo de Schwarzschild. Uma característica dessa métrica é que longe

da fonte de massa, o espaço-tempo é plano. Para testar como a forma do espaço-tempo afeta a fluxo podemos simplesmente comparar estrelas de diferentes raios de Schwarzschild  $r_s$ .

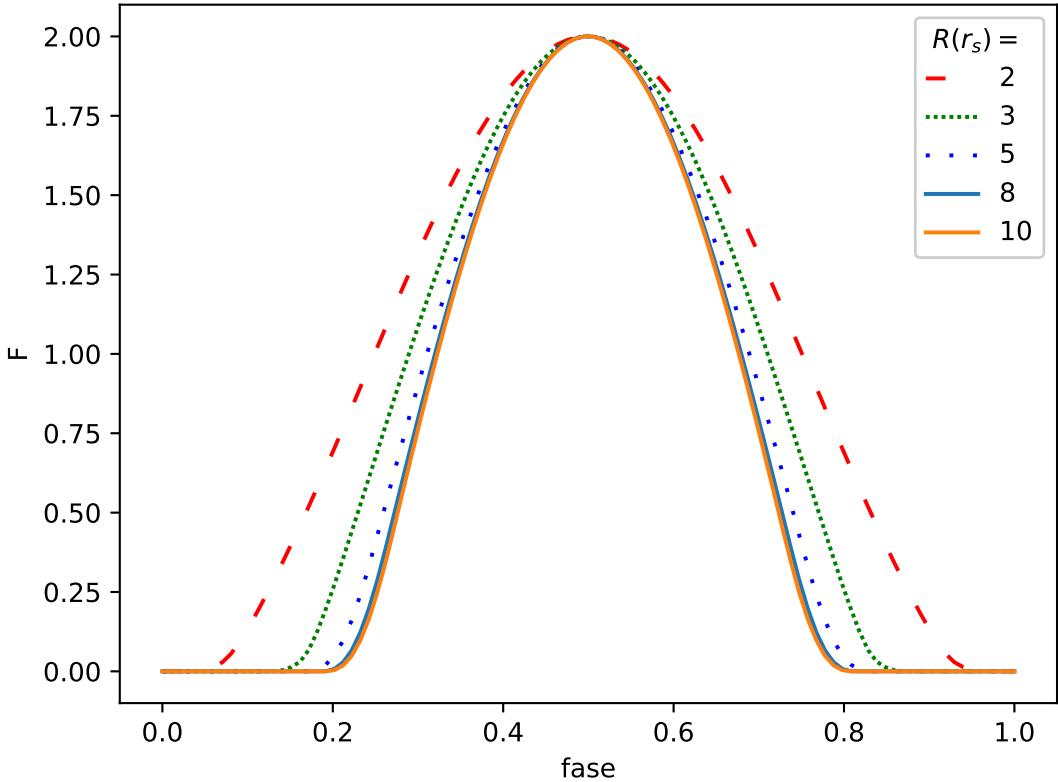


Figura 28 – Perfis de pulso para diferentes raios da EN, com  $M = 1.4M_\odot$ ,  $i = 90^\circ$ ,  $P = 1\text{ s}$ ,  $\theta_{10} = 15^\circ$ ,  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\phi_1 = 180^\circ$ ,  $H_1 = 0\text{ km}$ ,  $T_1 = 0.7\text{ keV}$ .

Como podemos ver pela Figura 28, para menores  $r_s$ , ou seja, espaço-tempo mais curvo, há uma alargamento do fluxo. Isso ocorre porque o ângulo máximo em que podemos observar um fóton da superfície aumenta. Fazendo agora essa comparação para um *spot* com coluna de acréscimo, Figura 29, o *pencil beam*, apresenta o mesmo comportamento de antes, alargando o fluxo para um espaço-tempo mais curvo. Entretanto, o *fan beam* apresenta um aumento no fluxo, o que ocorre por termos uma maior porção da parede da coluna observada em um mesmo instante em um espaço-tempo curvo.

Podemos observar ainda, que para o caso de maior curvatura do espaço-tempo, a coluna fica visível ao longo de sua trajetória completa. Lembrando que nesse caso ( $i = 90^\circ$ ,  $\theta_0 = 15^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$ ), o ângulo máximo de afastamento da coluna é  $\Psi_{amax} = i + \theta - \theta_0 = 120^\circ$ .

O gráfico da Figura 30 nos mostra como o perfil de pulso varia com a altura das colunas acréscimo. Podemos observar um aumento da visibilidade da coluna ao longo do período de rotação, alargando o pico de emissão. A diminuição da amplitude do pico é consequência da normalização do fluxo, que leva em conta o menor valor medido do fluxo, o qual é maior nas colunas mais altas.

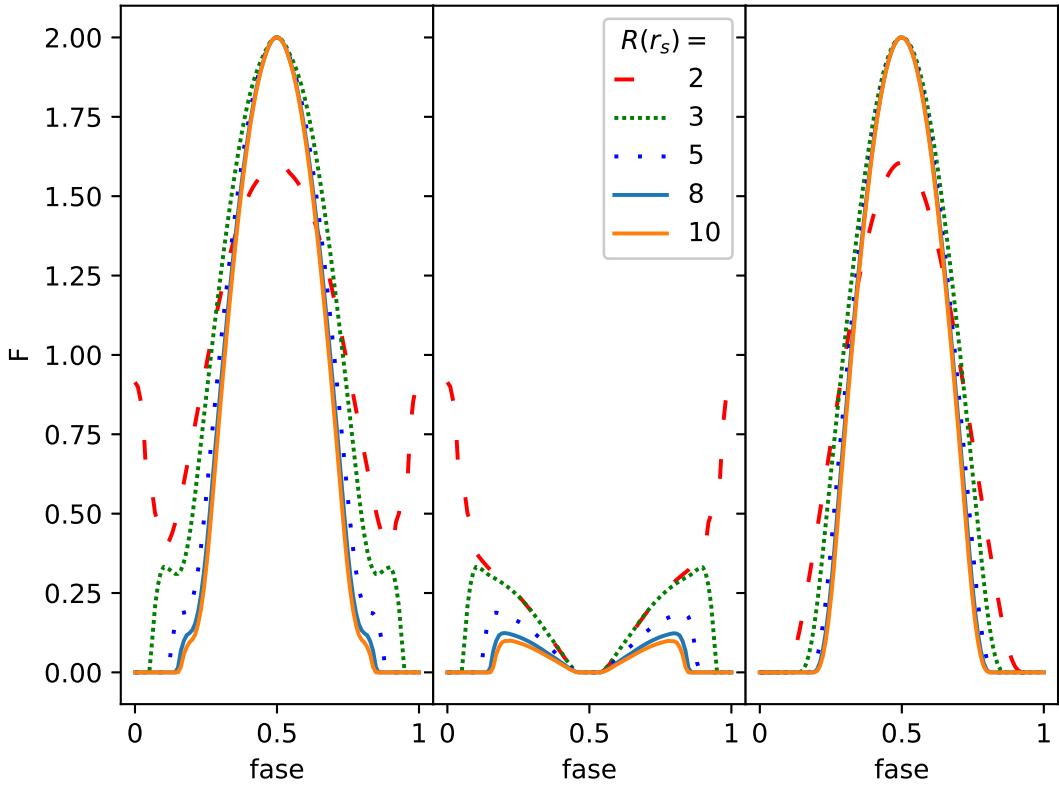


Figura 29 – Da esquerda para direita temos, os perfis de pulso, os *fan beam* e os *pencil beam*, respectivamente, para diferentes raios de Schwarzschild de uma EN com coluna de acréscimo. Parâmetros:  $M = 1.4M_{\odot}$ ,  $i = 90^\circ$ ,  $P = 1$  s,  $\theta_{10} = 15^\circ$ ,  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\phi_1 = 180^\circ$ ,  $H_1 = 1$  km,  $T_1 = 0.7$  keV.

A coluna apresentada em Falkner (2012) se assemelhava mais a um cilindro do que a um tronco de cone, a Figura 31 mostra essas duas formas. Pela alteração dos parâmetros do tronco de cone podemos também obter uma coluna em forma de cilindro. A comparação dos perfis de pulso para cada uma das formas está apresentado na Figura 32. Na forma de cone há um leve aumento no fluxo observado, o que deve ser uma consequência da maior área de emissão do cone em comparação com o cilindro.

Até aqui as EN simuladas foram todas com período de rotação  $P = 1$  s. Entretanto, os efeitos de *time delay*, e a modificação relativística do vetor da direção de emissão  $\hat{k}_0$  são mais impactantes em *milisecond pulsars*, ou seja, estrelas com  $P \sim 1$  ms. A Figura 33 traz uma comparação de estrelas com diferentes  $P$ . Os parâmetros utilizados foram os mesmo do Poutanen e Beloborodov (2006), e a curva da simulação teve o mesmo comportamento que o deles.

Variando-se os ângulos  $i$  e  $\theta$ , do ângulo da linha de visão e da posição do *spot*, observamos uma variação da porção da fase na qual a coluna é observável, como mostra a Figura 34. Destaca-se o caso em que  $i = \theta = 90^\circ$ , no qual a coluna atinge o maior ângulo com o LOS, ali, temos um intervalo no qual o *fan beam* se sobressai no perfil de pulso.

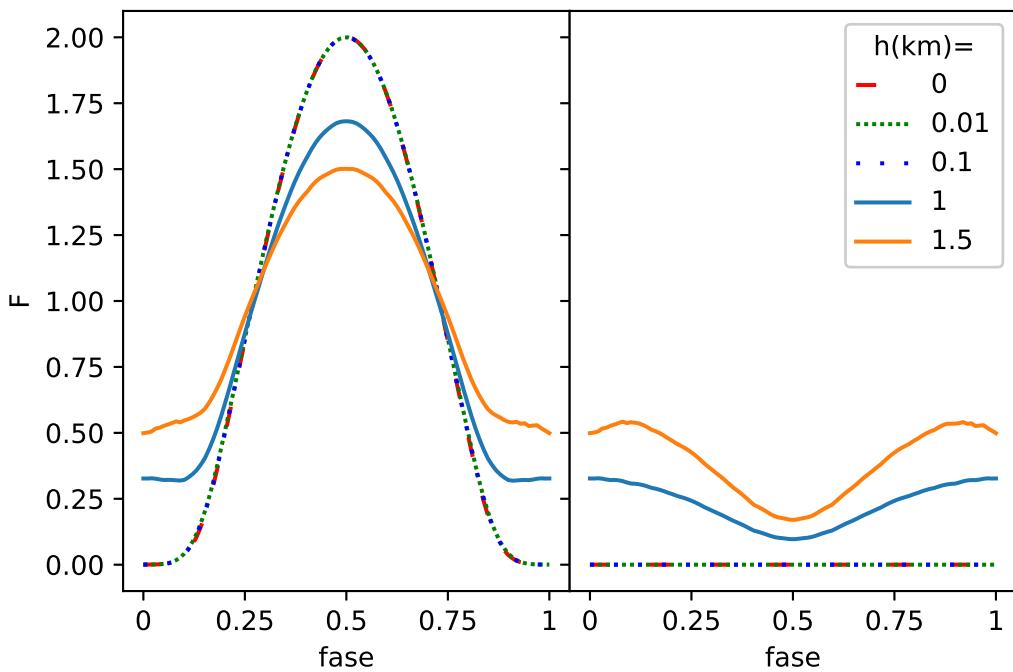


Figura 30 – Na esquerda temos os perfis de pulso para várias alturas da colunas de acréscimo. Na direita seus respectivos *fan beams*. Parâmetros:  $M = 1.4M_{\odot}$ ,  $R = 12\text{ km}$ ,  $i = 90^\circ$ ,  $P = 1\text{ s}$ ,  $\theta_{10} = 15^\circ$ ,  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\phi_1 = 180^\circ$ ,  $T_1 = 0,7\text{ keV}$ .

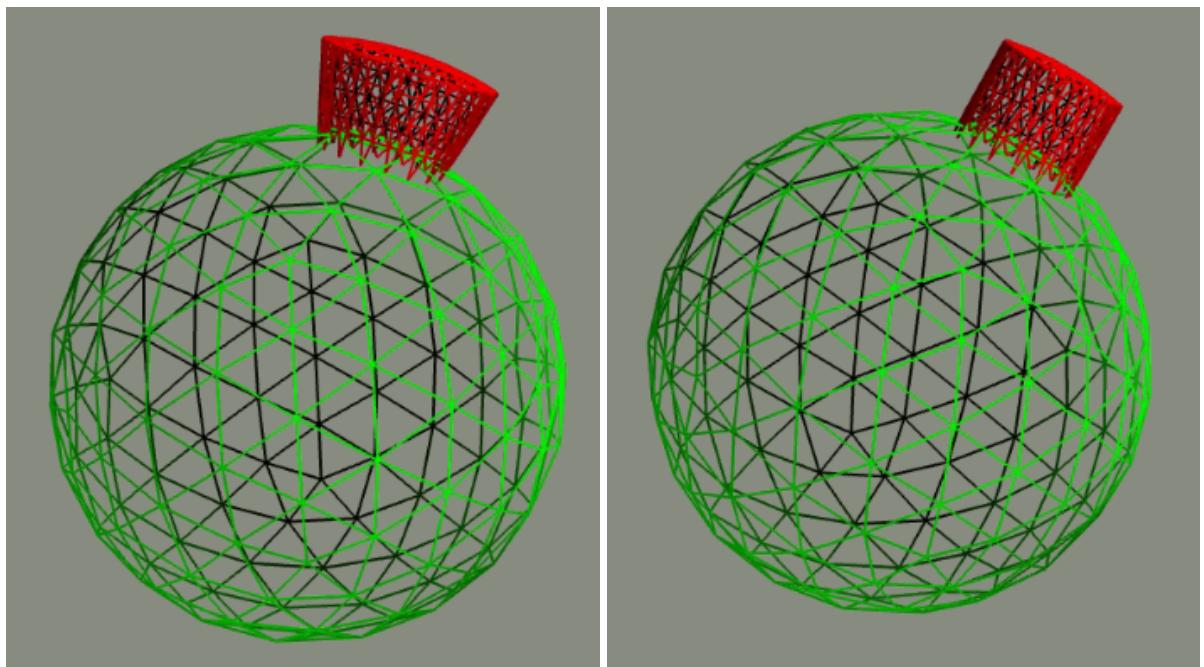


Figura 31 – Duas formas de colunas, à esquerda temos a forma de cone, utilizada nesta dissertação, à direita, a forma de cilindro.

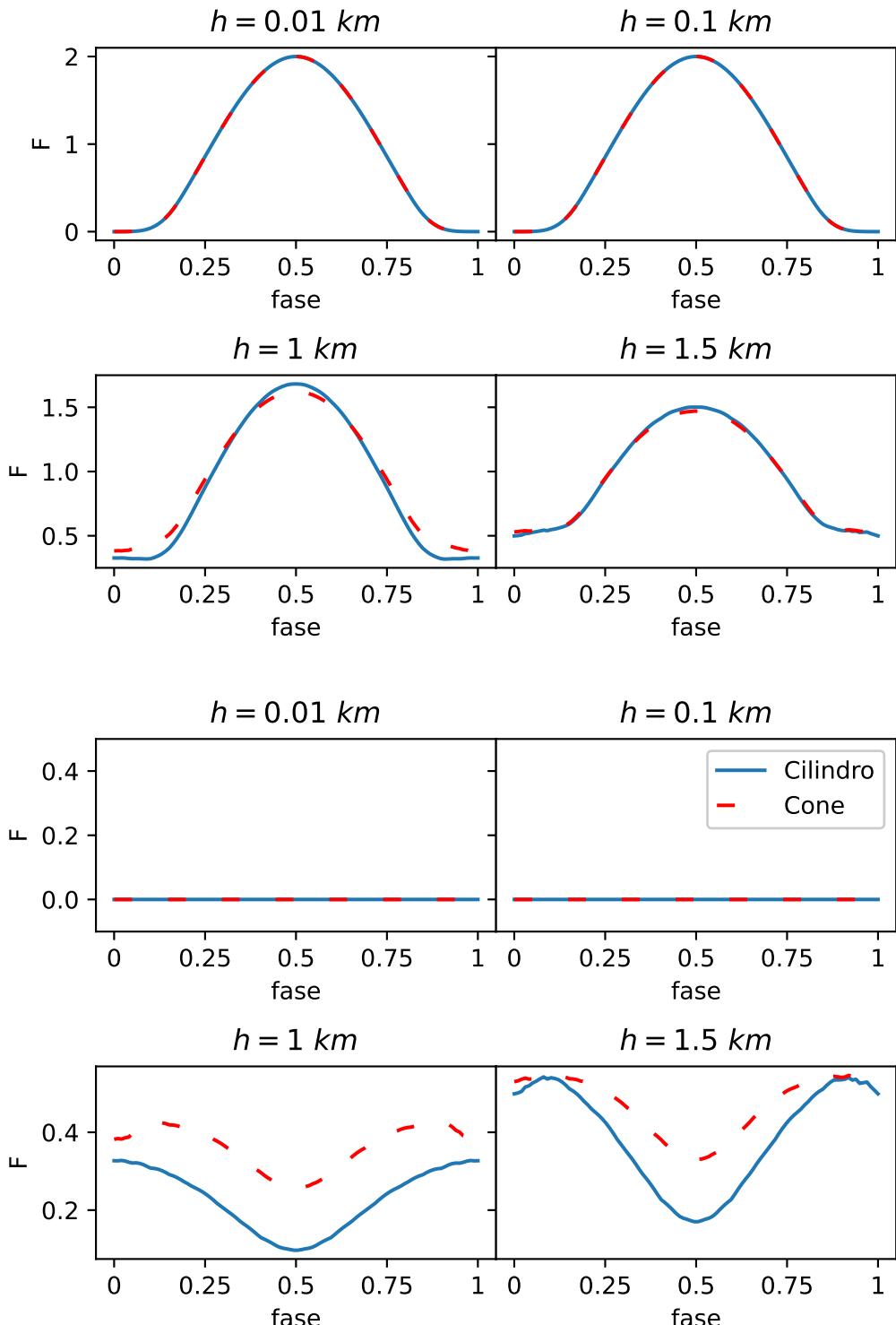


Figura 32 – Nos quatro gráficos acima: perfis de pulso para as formas de cilindro e cone. Nos quatro gráficos abaixo: *fan beam* para as formas de cilindro e cone. Parâmetros:  $M = 1.4\text{M}_\odot$ ,  $R = 12\text{km}$ ,  $i = 90^\circ$ ,  $P = 1\text{s}$ ,  $\theta_{10} = 15^\circ$ ,  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\phi_1 = 180^\circ$ ,  $T_1 = 0.7\text{keV}$ .

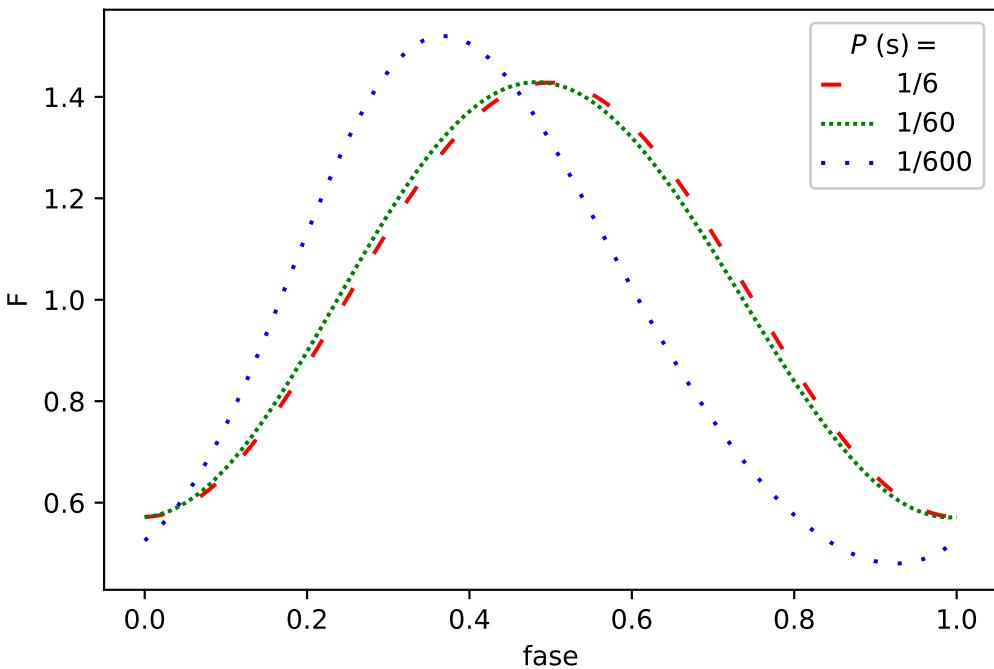


Figura 33 – Perfis de pulso para diferentes valores do período de rotação ( $P$ ). Parâmetros:  $M = 1.4M_{\odot}$ ,  $R = 2r_s$ ,  $i = 45^\circ$ ,  $\theta_{10} = 2^\circ$ ,  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\phi_1 = 180^\circ$ ,  $H_1 = 0$ km,  $T_1 = 0,7$ keV.

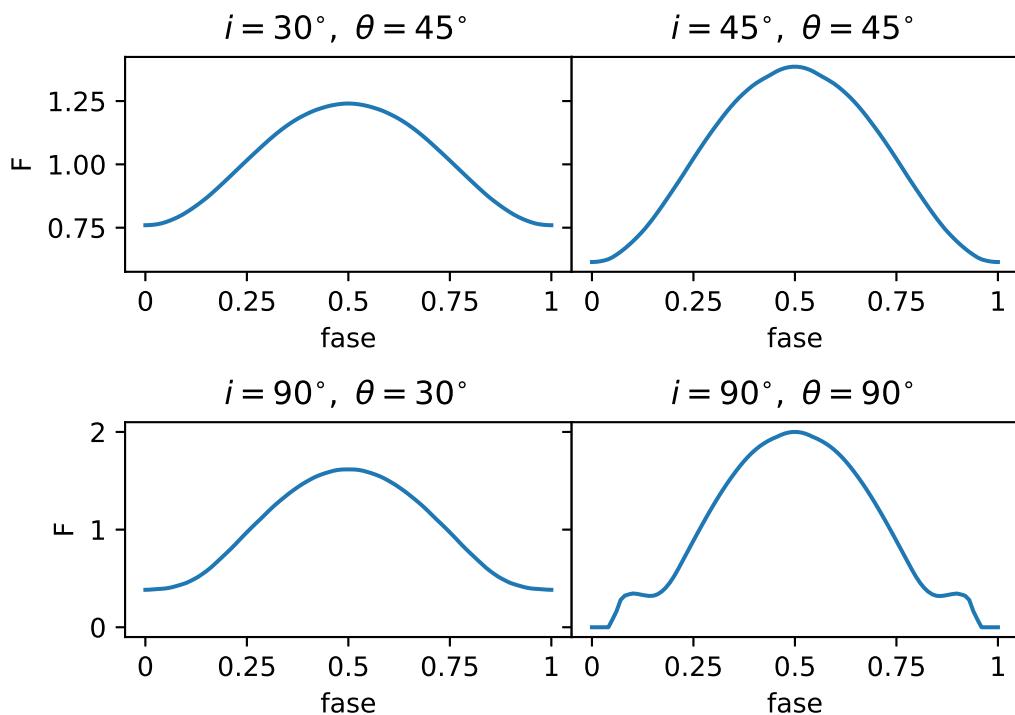


Figura 34 – Perfis de pulso para algumas combinações do parâmetros  $i$  e  $\theta$ . Parâmetros:  $M = 1.4M_{\odot}$ ,  $R = 12$ km,  $P = 1$ s,  $\theta_{10} = 15^\circ$ ,  $\phi_1 = 180^\circ$ ,  $H_1 = 1$ km,  $T_1 = 0,7$ keV.

Observemos agora o que ocorre quando variamos o ângulo de abertura das colunas, mostrado na Figura 35. Para estrelas sem colunas, há um leve alargamento do perfil de pulso conforme aumentamos  $\theta_0$ , isso porque há uma diminuição do ângulo máximo de afastamento do spot  $\Psi_{max} = i + \theta - \theta_0$ , e o spot fica visível por mais tempo. No caso com colunas, para  $\theta_0$  pequenos, a proporção entre a área do topo e a área das paredes diminui, e o *fan beam* ganha mais destaque. Nos  $\theta_0$  mais altos, a curva retorna ao padrão observado para estrelas sem colunas.

Um perfil de pulso de uma estrela com duas colunas de acréscimo pode ser vista na Figura 36, destacando suas componentes. Podemos ver que o mesmo possui características muito similares com a apresentada na Figura 6 do Falkner (2012).

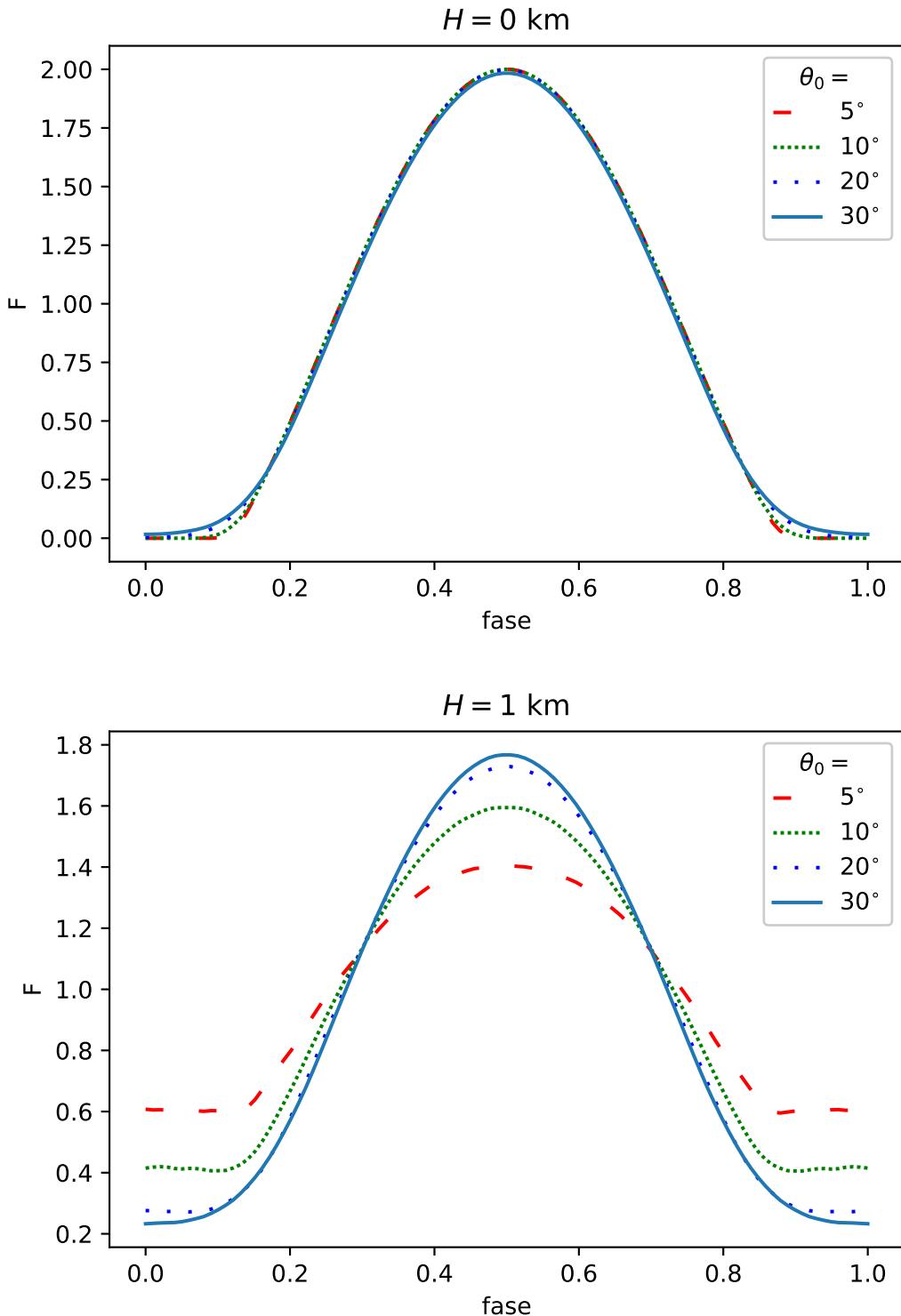


Figura 35 – Perfis de pulso para diversos valores de  $\theta_{01}$ . De cima para baixo temos perfis com  $H_1 = 0 \text{ km}$  e  $H_1 = 1 \text{ km}$ , respectivamente. Parâmetros:  
 $M = 1.4M_\odot, R = 12 \text{ km}, i = 90^\circ, P = 1 \text{ s}, \theta_1 = 45^\circ, \phi_1 = 180^\circ, T_1 = 0,7 \text{ keV}$ .

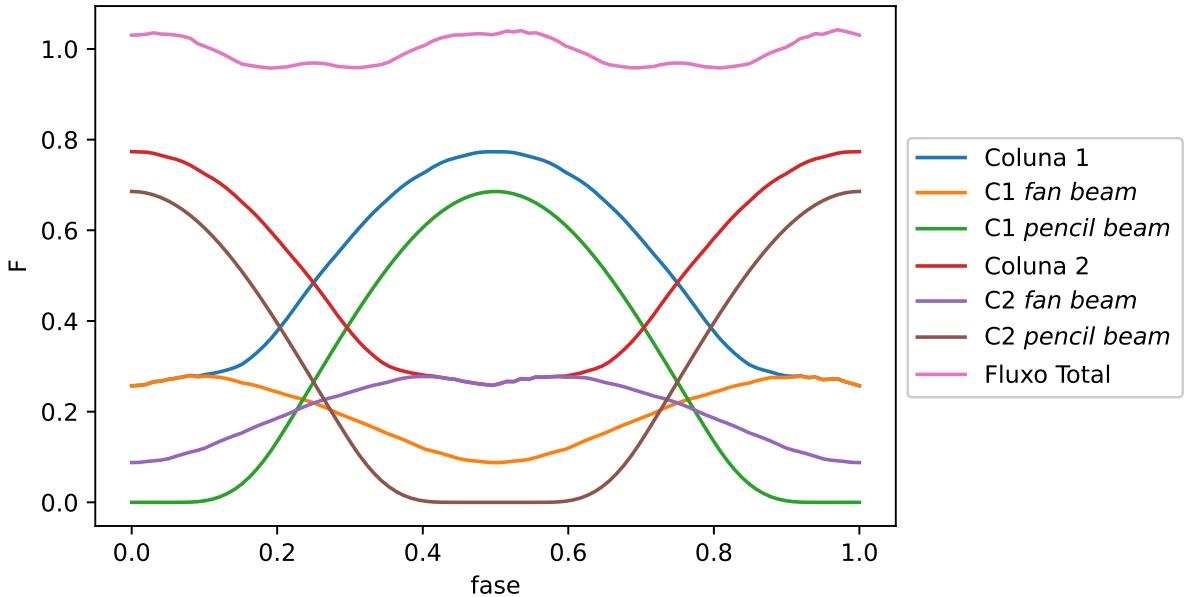


Figura 36 – Fluxo normalizado na condições  $R = 12\text{km}$ ,  $M = 1.4M_{\odot}$ ,  $P = 1\text{s}$ ,  $i = 90^{\circ}$ ,  $\theta_0 = 15^{\circ}$ ,  $\theta = 45^{\circ}$  e  $H = 1,5\text{km}$ , com duas colunas iguais antipodais. O gráfico separa o fluxo referente a cada elemento, destacado no gráfico, onde C1 e C2 se referem às colunas 1 e 2, respectivamente.

#### 4.2 MCMC

A simulação da forma como aqui apresentada foi utilizada em algoritmos de amostragem (Algoritmo Genético e MCMC) na busca pelo melhor conjunto de parâmetros que descrevem a emissão em raios-X do pulsar 1A0535+262. O melhor perfil de pulso encontrado, junto com os dados da fonte está apresentado na Figura 37. Note que, apesar do perfil encontrado não estar em bom acordo com os dados no início da fase, a curva está bem inserida no resto dos dados.

Os parâmetros encontrados estão sumarizados na Tabela 1. Note que na tabela não há um valor para a altura  $H_1$ , isso porque não houve convergência para esse parâmetro. A única altura encontrada foi a da segunda coluna, e bem menor que a sugestão utilizada por Caballero et al. (2011) de  $H = 0,5\text{km}$ . Os outros parâmetros também ficaram longe dos encontrados por eles, mas vale lembrar que no estudo em questão as colunas eram ocas e a metodologia foi a de análise de decomposição, bem diferente da utilizada aqui.

Os parâmetros com seus devidos desvios padrão, assim como o gráfico de suas funções distribuição de probabilidades obtidas pelo MCMC podem ser encontradas na Figura 38.

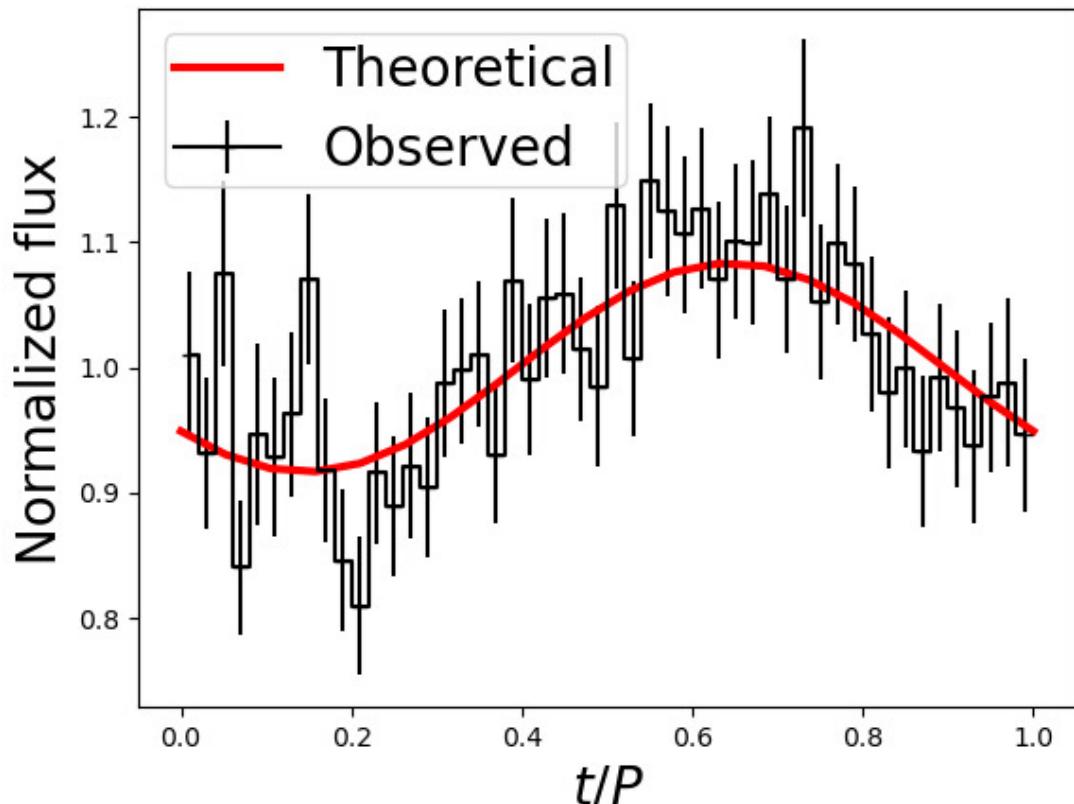


Figura 37 – Melhor perfil de pulso com os dados da fonte 1A0535+262.

Melhores Soluções	
M ( $M_{\odot}$ )	1,488
R (km)	12,49
i	4,85
H <sub>1</sub> (km)	-
$\theta_{01}$	18,09°
$\theta_1$	154,44°
T <sub>1</sub> (keV)	0,58
H <sub>2</sub> (km)	0,007
$\theta_{02}$	6,24°
$\theta_2$	62,14°
$\phi_2$	127,54°
T <sub>2</sub> (keV)	0,887

Tabela 1 – Melhores soluções encontradas para a fonte 1A0535+262.

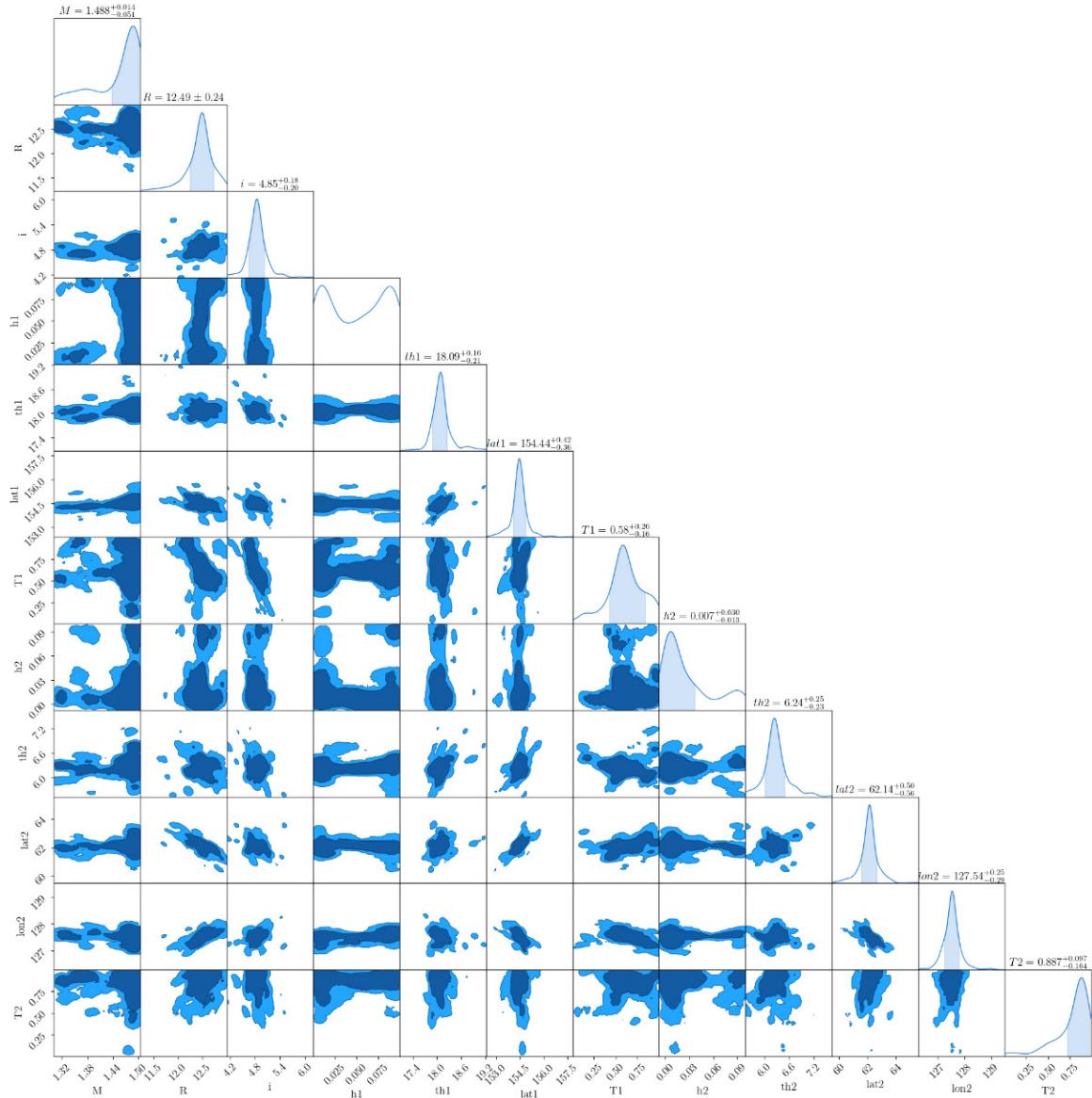


Figura 38 – Distribuição dos parâmetros obtidos pelo MCMC. Na figura, algumas variáveis estão com nomes apresentados de maneira diferente, e elas correspondem à  $th \rightarrow \theta_0$ ,  $lat \rightarrow \theta$  e  $lon \rightarrow \phi$ .

## 5 CONCLUSÕES

Desenvolvemos uma simulação que calcula o perfil de pulso de uma estrela de nêutrons com duas colunas de acréscimo. Os perfis de pulso obtidos nos mostram que o *fan beam* possui um mínimo quando a coluna está diretamente direcionada para o observador. As mudanças observadas na curva quando tomados períodos de rotação curtos concordam com o observador em Poutanen e Beloborodov (2006) e o perfil para duas colunas de acréscimo é similar com o de Falkner (2012).

Nas condições de EN mais compactas, colunas com menor ângulo de abertura, colunas com maior afastamento angular com o LOS, e colunas mais altas, o efeito das colunas sobre o perfil de pulso é intensificado. A mudança de forma de uma coluna de tronco de cone para uma coluna cilíndrica, não causou grandes efeitos sobre o perfil de pulso observado.

Os melhores parâmetros encontrados para a fonte 1A0535+262 foram  $M = 1,488 M_{\odot}$ ,  $R = 12,49 \text{ km}$ ,  $i = 4,85^\circ$ ,  $\theta_{01} = 18,09^\circ$ ,  $\theta_1 = 154,44^\circ$ ,  $T_1 = 0,58 \text{ keV}$ ,  $H_2 = 0,007 \text{ km}$ ,  $\theta_{02} = 6,24^\circ$ ,  $\theta_2 = 62,14^\circ$ ,  $\phi_2 = 127,54^\circ$ ,  $T_1 = 0,887 \text{ keV}$ . Os erros das medidas podem ser observados na Figura 38. Os parâmetros obtidos possuem pouca concordância com o obtido por Caballero et al. (2011), entretanto, em nosso caso deixamos mais parâmetros livres e lá assumiu-se colunas com altura de 0,5 km, e colunas ocas.

Com boa parte da estrutura do programa pronta, podemos agora buscar os melhores parâmetros para outras fontes. Podemos ainda alterar pequenas partes do programa, como inserir casos de três colunas de acréscimo, como sugerido por Lima et al. (2020) e Bilous et al. (2019). Ou ainda testar outras formas de colunas, como colunas de acréscimo ocas, ou outras formas de emissão, que não seja de um corpo negro.

## REFERÊNCIAS

- BASKO, M. M.; SUNYAEV, R. A. The limiting luminosity of accreting neutron stars with magnetic fields. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 175, p. 395–417, 5 1976. ISSN 0035-8711. Citado na página 9.
- BECKER, Peter A.; WOLFF, Michael T. Spectral formation in x-ray pulsars: Bulk comptonization in the accretion shock. **The Astrophysical Journal**, v. 630, 9 2005. ISSN 0004-637X. Citado 3 vezes nas páginas 9, 10 e 11.
- BECKER, Peter A.; WOLFF, Michael T. Thermal and bulk comptonization in accretion-powered x-ray pulsars. **The Astrophysical Journal**, v. 654, 1 2007. ISSN 0004-637X. Citado na página 9.
- BELOBORODOV, Andrei M. Gravitational bending of light near compact objects. **The Astrophysical Journal**, v. 566, 2 2002. ISSN 0004637X. Citado na página 7.
- BILOUS, A. V. et al. A *< i>nicer</i>* view of psr j0030+0451: Evidence for a global-scale multipolar magnetic field. **The Astrophysical Journal**, v. 887, 12 2019. ISSN 2041-8213. Citado 3 vezes nas páginas 7, 11 e 54.
- CABALLERO, I. et al. Analyzing x-ray pulsar profiles: Geometry and beam pattern of a 0535+26. **Astronomy and Astrophysics**, v. 526, 2 2011. ISSN 00046361. Citado 3 vezes nas páginas 12, 51 e 54.
- CADEAU, Coire et al. Light curves for rapidly rotating neutron stars. **The Astrophysical Journal**, v. 654, 1 2007. ISSN 0004-637X. Citado na página 15.
- FALKNER, Sebastian. **Light Bending around neutron stars**. [S.l.: s.n.], 2012. Citado 12 vezes nas páginas 10, 12, 13, 14, 19, 23, 25, 35, 37, 45, 49 e 54.
- HARDING, Alice K. The neutron star zoo. **Frontiers of Physics**, v. 8, p. 679–692, 12 2013. ISSN 2095-0462. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 9.
- HARRISON, Fiona A. et al. The *< i>nuclear spectroscopic telescope array</i>* ( *< i>nustar</i>* ) high-energy x-ray mission. **The Astrophysical Journal**, v. 770, p. 103, 5 2013. ISSN 0004-637X. Citado na página 11.
- HILBE, Joseph M.; SOUZA, Rafael S. de; ISHIDA, Emille E. O. **Bayesian Models for Astrophysical Data**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. Citado na página 41.
- HOGG, David W.; FOREMAN-MACKEY, Daniel. Data analysis recipes: Using markov chain monte carlo. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 236, p. 11, 5 2018. ISSN 1538-4365. Citado na página 42.
- JOHANSSON, Robert. **Numerical python: Scientific computing and data science applications with numpy, SciPy and matplotlib, Second edition**. [S.l.]: Apress Media LLC, 2018. 1-700 p. ISBN 9781484242469. Citado na página 35.
- LIMA, Rafael C. R. de et al. Evidence for a multipolar magnetic field in sgr j1745-2900 from x-ray light-curve analysis. **The Astrophysical Journal**, v. 889, 2 2020. ISSN 1538-4357. Citado 5 vezes nas páginas 7, 8, 11, 40 e 54.

- MARTÍNEZ-PAÍS, Ignacio González; SHAHBAZ, Tariq; VELÁZQUEZ, Jorge Casares. **Accretion processes in astrophysics: XXI Canary Islands winter school of astrophysics.** [S.l.: s.n.], 2012. v. 9781107030190. Citado na página 9.
- MÉSZÁROS, P. Radiation from accreting magnetized neutron stars. **Space Science Reviews**, v. 38, 1984. ISSN 00386308. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- POUTANEN, J.; BELOBORODOV, A. M. Pulse profiles of millisecond pulsars and their fourier amplitudes. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 373, 12 2006. ISSN 0035-8711. Citado 5 vezes nas páginas 8, 29, 31, 45 e 54.
- ROTHSCHILD, Richard E. et al. **Decadal Review White Paper Physics of the Accretion Mound at the Magnetic Poles of Neutron Stars.** 2014. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/260387881>>. Citado na página 9.
- SCHUTZ, Bernard. **A First Course in General Relativity.** 2. ed. Cambridge University Press, 2009. ISBN 9780511984181. Disponível em: <<http://ebooks.cambridge.org/ref/id/CBO9780511984181>>. Citado na página 14.
- WHITE, N. E.; SWANK, J. H.; HOLT, S. S. Accretion powered x-ray pulsars. **The Astrophysical Journal**, v. 270, p. 711, 7 1983. ISSN 0004-637X. Citado na página 10.