

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – PPGF**

JOÃO VITOR ZASTROW

EFEITO DE MARÉ EM ESTRELAS DE NÊUTRONS

JOINVILLE

2024

JOÃO VITOR ZASTROW

EFEITO DE MARÉ EM ESTRELAS DE NÊUTRONS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Rafael Camargo Rodrigues de Lima

Coorientador: Jonas Pedro Pereira

JOINVILLE

2024

Ficha catalográfica elaborada pelo(a) autor(a), com
auxílio do programa de geração automática da
Biblioteca Setorial do CCT/UDESC

Zastrow, João Vitor
Efeito de maré em estrelas de nêutrons / João Vitor
Zastrow. -- 2024.
150 p.

Orientador: Rafael Camargo Rodrigues de Lima
Coorientador: Jonas Pedro Pereira
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado
de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2024.

1. Estrelas de nêutrons. 2. Estrelas de quarks. 3.
Estrelas híbridas. 4. Efeito de maré. 5. Número de
Love. I. Lima, Rafael Camargo Rodrigues de. II. Pereira,
Jonas Pedro. III. Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Física. IV. Título.

JOÃO VITOR ZASTROW

EFEITO DE MARÉ EM ESTRELAS DE NÊUTRONS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Rafael Camargo Rodrigues de Lima

Coorientador: Jonas Pedro Pereira

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima (Presidente/Orientador)
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membros:

Prof. Dr. Jaziel Goulart Coelho
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Alexandre Miers Zabot
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Bruno Duarte da Silva Moreira
Universidade do Estado de Santa Catarina

Prof. Dr. Edgard Pacheco Moreira Amorim
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 16 de julho de 2024

AGRADECIMENTOS

Gostaria de estender meus agradecimentos a todos que fizeram parte dessa jornada na realização da minha dissertação de mestrado.

Ao meu orientador, Rafael Camargo Rodrigues de Lima, pela orientação, paciência e apoio, que foram fundamentais para chegar até aqui.

Ao meu coorientador, Jonas Pedro Pereira, pela sua valiosa contribuição, orientação e percepções que enriqueceram significativamente este trabalho.

A todos os professores do curso que me inspiraram, especialmente ao Professor Edgard Pacheco Moreira Amorim, que me incentivou a ingressar no mestrado e tornou esta conquista possível.

À minha família e amigos, por sempre acreditarem em mim e me apoiarem ao longo do caminho.

Aos colegas de pesquisa, em especial à Caroline Meurer de Liz, pela constante troca de ideias e pelo ambiente colaborativo que enriqueceu minha pesquisa.

Por fim, agradeço à UDESC e à CAPES pelo suporte financeiro que tornou tudo isso viável.

RESUMO

Estrelas de nêutrons (ENs) são objetos compactos que não colapsam em buracos negros (BNs) devido à pressão de degenerescência dos nêutrons, apresentando densidades, campos gravitacionais e campos magnéticos extremamente altos. Este trabalho tem como objetivo investigar as propriedades das ENs e a natureza da matéria em seu interior, utilizando equações de estado (EdEs) para matéria hadrônica, de quarks e híbrida. Desenvolvemos algoritmos numéricos para resolver o sistema de equações de *Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)* e a equação da perturbação, utilizada no cálculo do número de Love e da deformabilidade de maré, que quantificam a deformação das ENs em sistemas binários, característica detectável em sinais de ondas gravitacionais (OGs). Os limites observacionais adotados foram: massa máxima das ENs (M_{max}) entre $2.13 M_{\odot}$ e $2.33 M_{\odot}$, raio da EN canônica ($R_{canonical}$, com massa igual a $1.4 M_{\odot}$) entre 10.00 km e 13.25 km , e deformabilidade de maré da EN canônica ($\Lambda_{canonical}$) menor que 970 . Para estrelas de nêutrons hadrônicas (ENHs) utilizando a EdE *Brussels-Montreal Skyrme 24 (BSk24)*, os resultados mostraram uma massa máxima de aproximadamente $2.279 M_{\odot}$, um raio da EN canônica de 12.589 km e uma deformabilidade de maré da estrela canônica de 520.7 . Para estrelas de quarks (EQs), os limites dos parâmetros livres da EdE foram $0.70 \text{ MeV} < a_2^{1/2} < 198.13 \text{ MeV}$, $0.48 < a_4 < 0.79$, e $116.87 \text{ MeV} < B^{1/4} < 140.59 \text{ MeV}$, com propriedades correspondentes: $2.13 M_{\odot} < M_{max} < 2.31 M_{\odot}$, $11.47 \text{ km} < R_{canonical} < 12.22 \text{ km}$, e $645.70 < \Lambda_{canonical} < 967.55$. Para estrelas híbridas (EHs), os parâmetros livres foram $0.10 \text{ MeV} < a_2^{1/2} < 532.09 \text{ MeV}$, $0.38 < a_4 < 1.00$, e $0.01 \text{ MeV} < B^{1/4} < 309.21 \text{ MeV}$, com propriedades: $2.13 M_{\odot} < M_{max} < 2.28 M_{\odot}$, $R_{canonical} \approx 12.59 \text{ km}$, e $\Lambda_{canonical} \approx 520.71$. Os resultados indicam que as características das ENs compostas por matéria hadrônica, de quarks e híbrida estão em concordância com os dados observacionais atuais. Estas descobertas apoiam a viabilidade da hipótese de Bodmer-Witten e a existência de EHs. Futuros estudos, com dados observacionais mais restritos e técnicas de modelagem aprimoradas, podem refinar ainda mais as estimativas dos parâmetros livres das EdEs e propriedades das estrelas. As implicações teóricas deste estudo são significativas para a astrofísica e a física de partículas, oferecendo percepções sobre a estrutura interna das ENs e a matéria em densidades extremas, além de orientar futuras observações.

Palavras-chave: estrelas de nêutrons; estrelas de quarks; estrelas híbridas; efeito de maré; número de Love.

ABSTRACT

Neutron stars (NSs) are compact objects that do not collapse into black holes (BHs) due to neutron degeneracy pressure, exhibiting extremely high densities and gravitational and magnetic fields. This work aims to investigate the properties of NSs and the nature of matter within them, utilizing equations of state (EoSs) for hadronic, quark, and hybrid matter. We developed numerical algorithms to solve the Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) system of equations and the perturbation equation, used in the calculation of the Love number and tidal deformability, which quantify the deformation of NSs in binary systems, a feature detectable in gravitational wave (GW) signals. The observational limits adopted were: maximum NS mass (M_{max}) between $2.13 M_{\odot}$ and $2.33 M_{\odot}$, canonical NS radius ($R_{canonical}$, with mass equal to $1.4 M_{\odot}$) between 10.00 km and 13.25 km , and canonical NS tidal deformability ($\Lambda_{canonical}$) less than 970. For hadronic neutron stars (HNSs) using the Brussels-Montreal Skyrme 24 (BSk24) EoS, the results showed a maximum mass of approximately $2.279 M_{\odot}$, a canonical NS radius of 12.589 km , and a canonical tidal deformability of 520.7. For quark stars (QSSs), the free parameter limits of the EoS were $0.70 \text{ MeV} < a_2^{1/2} < 198.13 \text{ MeV}$, $0.48 < a_4 < 0.79$, and $116.87 \text{ MeV} < B^{1/4} < 140.59 \text{ MeV}$, with corresponding properties: $2.13 M_{\odot} < M_{max} < 2.31 M_{\odot}$, $11.47 \text{ km} < R_{canonical} < 12.22 \text{ km}$, and $645.70 < \Lambda_{canonical} < 967.55$. For hybrid stars (HSs), the free parameters were $0.10 \text{ MeV} < a_2^{1/2} < 532.09 \text{ MeV}$, $0.38 < a_4 < 1.00$, and $0.01 \text{ MeV} < B^{1/4} < 309.21 \text{ MeV}$, with properties: $2.13 M_{\odot} < M_{max} < 2.28 M_{\odot}$, $R_{canonical} \approx 12.59 \text{ km}$, and $\Lambda_{canonical} \approx 520.71$. The results indicate that the characteristics of NSs composed of hadronic, quark, and hybrid matter agree with current observational data. These findings support the viability of the Bodmer-Witten hypothesis and the existence of HSs. Future studies, with more stringent observational data and improved modeling techniques, can further refine the estimates of the free parameters of the EoSs and the properties of the stars. The theoretical implications of this study are significant for astrophysics and particle physics, offering insights into the internal structure of NSs and matter at extreme densities while guiding future observations.

Keywords: neutron stars; quark stars; hybrid stars; tidal effect; Love number.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- | | | |
|----------|--|----|
| Figura 1 | – Nebulosa do Caranguejo e seu pulsar. A série de imagens à direita mostra uma sequência temporal do pulsar, um mosaico de 33 intervalos de tempo, ordenados de cima para baixo e da esquerda para a direita. Cada fatia representa aproximadamente um milissegundo no período do pulsar. Dados obtidos com a Matriz de Contagem de Fótons de Kitt Peak (<i>Kitt Peak Photon Counting Array - KPCA</i>). | 27 |
| Figura 2 | – Diagrama da evolução estelar. Anãs marrons não iniciam a fusão nuclear, tornando-se anãs negras. Anãs vermelhas evoluem para ABs. Estrelas semelhantes ao Sol se expandem em gigantes vermelhas, antes de se tornarem ABs, liberando parte de seus interiores como nebulosas planetárias. Estrelas massivas terminam em supernovas, dando origem à ENs ou BNs. | 28 |
| Figura 3 | – Diagrama de Hertzsprung-Russell, obtido por uma seleção de estrelas no catálogo de segunda liberação da Gaia. As estrelas são traçadas de acordo com sua temperatura (no eixo horizontal) e luminosidade (no eixo vertical) e são agrupadas em diferentes regiões do diagrama, dependendo principalmente de suas massas, composição química, idades e estágios no ciclo de vida estelar. | 29 |
| Figura 4 | – Diagrama $P-\dot{P}$ com as ENs sem acreção incluídas no catálogo de pulsares da Instalação Nacional do Telescópio da Austrália (<i>Australia Telescope National Facility - ATNF</i>) v.1.66. Triângulos verdes, pontos azuis, diamantes cinzas, quadrados laranjas e estrelas vermelhas representam magnetares, <i>RPPs</i> , <i>RRATs</i> , <i>XDINSs</i> e <i>CCOs</i> , respectivamente. Também estão traçadas linhas de campo magnético dipolar constante B_{dip} (linhas sólidas) e idade característica τ_c (linhas tracejadas). | 33 |
| Figura 5 | – Configurações de pasta nuclear produzidas em simulações de dinâmica molecular com 51.200 núcleons: (a) nhoque, (b) espaguete, (c) waffles, (d) lasanha, (e) defeitos, (f) anti-espaguete e (g) anti-nhoque. | 34 |
| Figura 6 | – Efeito de lente gravitacional causado pelo aglomerado de galáxias SMACS J0723.3-7327. Imagem capturada pelo telescópio espacial James Webb. | 37 |

| | |
|--|----|
| Figura 7 – Simulação de relatividade numérica de um sistema binário de ENs mostrando o sinal da OG e a evolução do sistema. Painel superior: Sinal da OG emitida durante as fases <i>inspiral</i> , <i>merger</i> , e <i>postmerger</i> da coalescência do binário de ENs. Painéis inferiores: Evolução da densidade de massa de repouso para as fases <i>inspiral</i> (primeiro painel), <i>merger</i> (segundo painel), e <i>postmerger</i> após a formação de um BN (terceiro painel). | 51 |
| Figura 8 – Sinal de OG da parte final da fase <i>inspiral</i> de duas ENs com rotações nulas e de massas iguais para diferentes valores de $\tilde{\Lambda}$ | 53 |
| Figura 9 – Um esboço esquemático do diagrama de fases da <i>QCD</i> , onde T é a temperatura e μ o potencial químico. A fase de Plasma de Quarks e Glúons (<i>Quark-Gluon Plasma - QGP</i>) é acessível por meio de experimentos de colisão de partículas como o Grande Colisor de Hâdrons (<i>Large Hadron Collider - LHC</i>), e corresponde a temperaturas altas. Já a fase Cor-Sabor-Fixos (<i>Color-Flavor-Locked - CFL</i>) e a fase intermediária denominada não- <i>CFL</i> (<i>non-CFL</i>) podem estar presentes em ENs, que possuem potenciais químicos elevados, e consequentemente densidades de energia elevadas, e correspondem a fases da matéria de quarks. | 65 |
| Figura 10 – Número de Love em relação à compacidade para a EdE Politrópica com $n = 1$, comparando resultados obtidos (em azul) e esperados (em laranja). | 74 |
| Figura 11 – Massa em relação ao raio para a EdE <i>BSk20</i> , comparando resultados obtidos (em azul) e esperados (em laranja). | 74 |
| Figura 12 – Número de Love em relação à compacidade para a EdE <i>BSk20</i> , comparando resultados obtidos (em azul) e esperados (em laranja). | 75 |
| Figura 13 – Massa em relação ao raio para a EdE <i>BSk24</i> , comparando resultados obtidos (em azul) e esperados (em laranja). | 75 |
| Figura 14 – Número de Love em relação à compacidade para a EdE <i>BSk24</i> , comparando resultados obtidos (em azul) e esperados (em laranja). | 76 |
| Figura 15 – Logaritmo da pressão em relação ao logaritmo da densidade para a EdE <i>BSk24</i> | 78 |
| Figura 16 – Velocidade do som em relação ao logaritmo da densidade para a EdE <i>BSk24</i> | 79 |
| Figura 17 – Propriedades relacionadas à estrutura interna de uma estrela em relação à coordenada radial para a EdE <i>BSk24</i> : pressão (em azul), função massa (em laranja), função métrica (em verde), e densidade (em vermelho). | 79 |
| Figura 18 – Perturbação em relação à coordenada radial de uma estrela para a EdE <i>BSk24</i> | 80 |
| Figura 19 – Massa em relação ao raio para a EdE <i>BSk24</i> | 80 |
| Figura 20 – Número de Love em relação à compacidade para a EdE <i>BSk24</i> | 81 |

| | |
|---|----|
| Figura 21 – Logaritmo da deformabilidade de maré em relação à massa para a EdE <i>BSk24</i> | 81 |
| Figura 22 – Massa em relação à densidade central para a EdE <i>BSk24</i> | 82 |
| Figura 23 – Raio em relação à densidade central para a EdE <i>BSk24</i> | 82 |
| Figura 24 – Compacidade em relação à densidade central para a EdE <i>BSk24</i> | 83 |
| Figura 25 – Número de Love em relação à densidade central para a EdE <i>BSk24</i> | 83 |
| Figura 26 – Logaritmo da deformabilidade de maré em relação à densidade central para a EdE <i>BSk24</i> | 84 |
| Figura 27 – Pressão em relação à densidade para a EdE de quarks. | 84 |
| Figura 28 – Velocidade do som em relação à densidade para a EdE de quarks. | 85 |
| Figura 29 – Propriedades relacionadas à estrutura interna de uma estrela em relação à coordenada radial para a EdE de quarks: pressão (em azul), função massa (em laranja), função métrica (em verde), e densidade (em vermelho). | 85 |
| Figura 30 – Perturbação em relação à coordenada radial de uma estrela para a EdE de quarks. | 86 |
| Figura 31 – Massa em relação ao raio para a EdE de quarks. | 86 |
| Figura 32 – Número de Love em relação à compacidade para a EdE de quarks. | 87 |
| Figura 33 – Logaritmo da deformabilidade de maré em relação à massa para a EdE de quarks. | 87 |
| Figura 34 – Massa em relação à densidade central para a EdE de quarks. | 88 |
| Figura 35 – Raio em relação à densidade central para a EdE de quarks. | 88 |
| Figura 36 – Compacidade em relação à densidade central para a EdE de quarks. | 89 |
| Figura 37 – Número de Love em relação à densidade central para a EdE de quarks. | 89 |
| Figura 38 – Logaritmo da deformabilidade de maré em relação à densidade central para a EdE de quarks. | 90 |
| Figura 39 – Espaço de parâmetros da EdE de quarks. EQs são formadas na região entre as superfícies $B_{min}^{1/4}$ (em azul) e $B_{max}^{1/4}$ (em vermelho). | 91 |
| Figura 40 – Pontos de amostragem no espaço de parâmetros da EdE de quarks utilizados na análise da EdE de quarks. | 91 |
| Figura 41 – Massa máxima em relação a $a_2^{1/2}$ para as EQs. | 92 |
| Figura 42 – Massa máxima em relação a a_4 para as EQs. | 92 |
| Figura 43 – Deformabilidade canônica em relação a a_4 para as EQs. | 93 |
| Figura 44 – Massa máxima em relação a $B^{1/4}$ para as EQs. | 93 |
| Figura 45 – Deformabilidade canônica em relação a $B^{1/4}$ para as EQs. | 94 |
| Figura 46 – Logaritmo da pressão em relação ao logaritmo da densidade para a EdE híbrida com <i>BSk24</i> | 95 |
| Figura 47 – Velocidade do som em relação ao logaritmo da densidade para a EdE híbrida com <i>BSk24</i> | 96 |

| | |
|--|-----|
| Figura 48 – Propriedades relacionadas à estrutura interna de uma estrela em relação à coordenada radial para a EdE híbrida com $BSk24$: pressão (em azul), função massa (em laranja), função métrica (em verde), e densidade (em vermelho). | 97 |
| Figura 49 – Perturbação em relação à coordenada radial de uma estrela para a EdE híbrida com $BSk24$ | 97 |
| Figura 50 – Massa em relação ao raio para a EdE híbrida com $BSk24$ | 98 |
| Figura 51 – Número de Love em relação à compacidade para a EdE híbrida com $BSk24$ | 98 |
| Figura 52 – Logaritmo da deformabilidade de maré em relação à massa para a EdE híbrida com $BSk24$ | 99 |
| Figura 53 – Massa em relação à densidade central para a EdE híbrida com $BSk24$. . | 99 |
| Figura 54 – Raio em relação à densidade central para a EdE híbrida com $BSk24$. . | 100 |
| Figura 55 – Compacidade em relação à densidade central para a EdE híbrida com $BSk24$ | 100 |
| Figura 56 – Número de Love em relação à densidade central para a EdE híbrida com $BSk24$ | 101 |
| Figura 57 – Logaritmo da deformabilidade de maré em relação à densidade central para a EdE híbrida com $BSk24$ | 101 |
| Figura 58 – Espaço de parâmetros da EdE quarks. EHs são formadas na região acima das superfícies $\tilde{B}_{lim}^{1/4}$ (em azul) e $B_{lim}^{1/4}$ (em vermelho). | 102 |
| Figura 59 – Pontos de amostragem no espaço de parâmetros da EdE de quarks utilizados na análise da EdE híbrida. | 102 |
| Figura 60 – Massa máxima em relação a $a_2^{1/2}$ para as EHs. | 103 |
| Figura 61 – Tipo da EdE em relação a $a_2^{1/2}$ para as EHs. | 103 |
| Figura 62 – Raio canônico em relação a a_4 para as EHs. | 104 |
| Figura 63 – Tipo da EdE em relação a a_4 para as EHs. | 104 |
| Figura 64 – Deformabilidade canônica em relação a $B^{1/4}$ para as EHs. | 105 |
| Figura 65 – Tipo da EdE em relação a $B^{1/4}$ para as EHs. | 105 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|-----|
| Tabela 1 – Os estágios consecutivos de queima no núcleo de uma estrela da sequência principal com massa de $15 M_{\odot}$. | 30 |
| Tabela 2 – Coeficientes das EdEs <i>BSk20</i> (POTEKHIN et al., 2013) e <i>BSk24</i> (PE- ARSON et al., 2018), presentes na equação (130). | 64 |
| Tabela 3 – Limites dos observáveis das ENs. | 76 |
| Tabela 4 – Limites dos parâmetros da EdE de quarks para EQs. | 94 |
| Tabela 5 – Limites das propriedades das EQs. | 94 |
| Tabela 6 – Limites das propriedades da EdE de quarks. | 95 |
| Tabela 7 – Limites dos parâmetros da EdE de quarks para EHs. | 106 |
| Tabela 8 – Limites das propriedades das EHs. | 106 |
| Tabela 9 – Limites das propriedades da EdE híbrida. | 106 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|--------------|--|
| AB | Anã Branca |
| <i>ATNF</i> | <i>Australia Telescope National Facility</i> (Instalação Nacional do Telescópio da Austrália) |
| BN | Buraco Negro |
| <i>BSk</i> | <i>Brussels-Montreal Skyrme</i> (Família de EdEs) |
| <i>CCO</i> | <i>Central Compact Object</i> (Objeto Compacto Central) |
| <i>CFL</i> | <i>Color-Flavor-Locked</i> (Cor-Sabor-Fixos) |
| EdE | Equação de Estado |
| EH | Estrela Híbrida |
| EN | Estrela de Nêutrons |
| ENH | Estrela de Nêutrons Hadronica |
| EQ | Estrela de Quarks |
| <i>FRB</i> | <i>Fast Radio Burst</i> (Explosão Rápida de Rádio) |
| <i>GRB</i> | <i>Gamma-Ray Burst</i> (Explosão de Raios-Gama) |
| <i>HMXB</i> | <i>High-Mass X-ray Binary</i> (Binário de Raios-X de Alta Massa) |
| <i>KAGRA</i> | <i>Kamioka Gravitational Wave Detector</i> (Detector de Ondas Gravitacionais de Kamioka) |
| <i>KPCA</i> | <i>Kitt Peak Photon Counting Array</i> (Matriz de Contagem de Fóttons de Kitt Peak) |
| <i>LHC</i> | <i>Large Hadron Collider</i> (Grande Colisor de Hâdrons) |
| <i>LIGO</i> | <i>Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory</i> (Observatório de Ondas Gravitacionais com Interferômetro Laser) |
| <i>LMXB</i> | <i>Low-Mass X-ray Binary</i> (Binário de Raios-X de Baixa Massa) |
| <i>LVK</i> | <i>LIGO-Virgo-KAGRA</i> |
| <i>MIT</i> | <i>Massachusetts Institute of Technology</i> (Instituto de Tecnologia de Massachusetts) |
| OG | Onda Gravitacional |
| <i>QCD</i> | <i>Quantum Chromodynamics</i> (Cromodinâmica Quântica) |
| <i>QGP</i> | <i>Quark-Gluon Plasma</i> (Plasma de Quarks e Glúons) |
| RE | Relatividade Especial |
| RG | Relatividade Geral |

| | |
|--------------|---|
| RMC | Referencial Momentaneamente Co-móvel |
| <i>RPP</i> | <i>Rotation-Powered Pulsar</i> (Pulsar Alimentado por Rotação) |
| <i>RRAT</i> | <i>Rotating Radio-Transient</i> (Transiente de Rádio Rotativo) |
| <i>SGRB</i> | <i>Short Gamma-Ray Burst</i> (Explosão Curta de Raios-Gama) |
| <i>TOV</i> | <i>Tolman-Oppenheimer-Volkoff</i> |
| <i>XDINS</i> | <i>X-ray Dim Isolated Neutron Star</i> (Estrela de Nêutrons Isolada e Fraca em Raios-X) |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---------------|--|
| M_{\odot} | Massa solar |
| γ | Fóton |
| n | Nêutron |
| p^+ | Próton |
| e^- | Elétron |
| ν_e | Neutrino elétron |
| $\bar{\nu}_e$ | Antineutrino elétron |
| T_F | Temperatura de Fermi |
| P | Período de rotação do pulsar |
| \dot{P} | Taxa de variação do período de rotação do pulsar |
| B_{dip} | Campo magnético dipolar do pulsar |
| τ_c | Idade característica do pulsar |
| S | Entropia |
| V | Volume |
| N_i | Número de partículas da espécie i |
| T | Temperatura |
| p | Pressão |
| μ_i | Potencial químico da espécie i |
| U | Energia interna |
| H | Entalpia |
| F | Energia livre de Helmholtz |
| G | Energia livre de Gibbs |
| Ω | Grande potencial |
| N | Número de partículas total |
| ρ | Densidade de energia |
| n | Densidade de número de partículas total |
| s | Entropia por partícula |
| Y_i | Abundância da partícula de espécie i |
| W | Trabalho |
| Q | Calor |

| | |
|--------------------------|--|
| G | Constante gravitacional universal |
| c | Velocidade da luz no vácuo |
| (t, x, y, z) | Parâmetros das coordenadas cartesianas |
| Δs^2 | Intervalo de espaço-tempo |
| \vec{U} | Quadrivelocidade |
| \vec{p} | Quadrimomento |
| g | Tensor métrico |
| $\eta_{\mu\nu}$ | Componentes da métrica de Minkowski |
| δ_{ij} | Delta de Kronecker |
| ds^2 | Intervalo infinitesimal de espaço-tempo |
| $T_{\mu\nu}$ | Componentes do tensor energia-momento |
| m | Massa |
| g | Aceleração da gravidade na superfície da Terra |
| v | Velocidade |
| E | Energia |
| ν | Frequência |
| $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ | Símbolos de Christoffel |
| $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ | Componentes do tensor de Riemann |
| $R_{\mu\nu}$ | Componentes do tensor de Ricci |
| R | Escalar de Ricci |
| $G_{\mu\nu}$ | Componentes do tensor de Einstein |
| Φ | Potencial gravitacional newtoniano |
| Λ | Constante cosmológica |
| $h_{\mu\nu}$ | Componentes da perturbação da métrica |
| (t, r, θ, ϕ) | Parâmetros das coordenadas esféricas |
| $d\Omega^2$ | Elemento de ângulo sólido |
| $\nu(r)$ | Função presente na componente g_{tt} de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico |
| $\lambda(r)$ | Função presente na componente g_{rr} de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico |
| $m(r)$ | Função massa, definida em termos de $\lambda(r)$ |
| R | Raio total da estrela |

| | |
|-------------------------|--|
| M | Massa total da estrela |
| C | Compacidade |
| R_S | Raio de Schwarzschild |
| p_c | Pressão no centro da estrela |
| ρ_c | Densidade no centro da estrela |
| ϵ_{rel} | Erro relativo máximo permitido na solução numérica |
| r_{max} | Raio inicial máximo utilizado na integração numérica |
| c_s | Velocidade do som |
| Ψ | Fase da onda gravitacional |
| f | Frequência da onda gravitacional |
| t_c | Tempo da coalescência |
| ϕ_c | Fase da coalescência |
| η | Massa reduzida do sistema binário |
| u | Variável proporcional à $f^{1/3}$ utilizada na expressão da fase da onda gravitacional |
| M_b | Massa total do sistema binário |
| $f(\eta)$ | Função presente na expressão da fase da onda gravitacional |
| $g(\eta)$ | Função presente na expressão da fase da onda gravitacional |
| β | Contribuição de spin-órbita para a fase da onda gravitacional |
| σ | Contribuição de spin-spin para a fase da onda gravitacional |
| $\tilde{\Lambda}$ | Parâmetro associado ao termo dominante da correção de maré |
| Λ | Deformabilidade de maré adimensional |
| k_2 | Número de Love para $l = 2$ (termo dominante) |
| h | Número de Love que descreve os deslocamentos radiais elásticos |
| k | Número de Love que descreve a modificação do potencial causado pela deformação |
| l | Número de Love que descreve o deslocamento tangencial elástico |
| \mathcal{E}_{ij} | Campo de maré quadrupolar estático externo |
| \mathcal{Q}_{ij} | Momento de quadrupolo induzido |
| $\mathcal{O}()$ | Notação O-grande |
| λ | Razão entre o quadrupolo induzido e o campo de maré externo |
| \mathcal{Y}_{ij}^{lm} | Tensores simétricos de traço nulo |

| | |
|--------------------|---|
| Y_{lm} | Harmônicos esféricos |
| $g^{(0)}_{\mu\nu}$ | Componentes da métrica de fundo |
| z | Constante utilizada para indicar a ordem da perturbação |
| $H_0(r)$ | Função presente na componente h_{tt} da perturbação |
| $H_2(r)$ | Função presente na componente h_{rr} da perturbação |
| $K(r)$ | Função presente nas componentes $h_{\theta\theta}$ e $h_{\phi\phi}$ da perturbação |
| (0) | Símbolo sobreescrito utilizado para indicar a parte não perturbada de tensores e escalares |
| δ | Símbolo utilizado para indicar a parte perturbativa de primeira ordem de tensores e escalares |
| $k^{\mu\nu}$ | Componentes da inversa da perturbação $h_{\mu\nu}$ |
| $H(r)$ | Função que descreve a perturbação |
| l | Índice presente nos harmônicos esféricos. Usamos $l = 2$ para obter o número de Love k_2 |
| $y(r)$ | Função que descreve a perturbação, necessária para calcular o número de Love |
| $\Gamma(z)$ | Função Gamma |
| $J_\alpha(x)$ | Funções de Bessel do 1º tipo |
| $Y_\alpha(x)$ | Funções de Bessel do 2º tipo |
| $j_l(x)$ | Funções de Bessel esféricas do 1º tipo |
| $P_l^m(x)$ | Funções associadas de Legendre do 1º tipo |
| $Q_l^m(x)$ | Funções associadas de Legendre do 2º tipo |
| $P_l(x)$ | Funções de Legendre do 1º tipo |
| $Q_l(x)$ | Funções de Legendre do 2º tipo |
| y_s | Valor da perturbação y na superfície da estrela |
| p_d | Pressão em uma descontinuidade de $\rho(p)$ |
| $\theta(x)$ | Função degrau unitário |
| $\delta(x)$ | Função generalizada delta de Dirac |
| s | Símbolo sobreescrito utilizado para indicar a parte singular de uma expressão |
| r_d | Coordenada radial em uma descontinuidade de $\rho(p)$ |
| ϵ | Valor infinitesimal |

| | |
|-----------------------|---|
| K | Constante de proporcionalidade da EdE politrópica |
| n | Índice politrópico |
| Γ | Índice adiabático |
| ξ | Logaritmo da densidade |
| ζ | Logaritmo da pressão |
| \hbar | Constante de Planck reduzida |
| n_i | Densidade de número de partículas da espécie i |
| ω | Densidade do grande potencial |
| g | Energia livre de Gibbs por partícula |
| a_2 | Parâmetro livre da EdE da matéria de quarks relacionado ao emparelhamento de quarks |
| a_4 | Parâmetro livre da EdE da matéria de quarks relacionado à interação entre os quarks |
| B | Parâmetro livre da EdE da matéria de quarks relacionado à pressão da transição quark-hádron |
| B_{lim} | Limite do parâmetro B relacionado à transição de fase da matéria de quarks <i>strange</i> para a matéria hadrônica |
| \tilde{B}_{lim} | Limite do parâmetro B relacionado à transição de fase da matéria de quarks <i>strange</i> para a matéria de quarks <i>up-down</i> |
| r_{init} | Raio inicial utilizado na integração numérica |
| $p_{surface}$ | Pressão na superfície da estrela |
| M_{max} | Massa máxima da família de estrelas |
| $R_{canonical}$ | Raio da estrela canônica |
| k_{2max} | Número de Love máximo da família de estrelas |
| $\Lambda_{canonical}$ | Deformabilidade de maré da estrela canônica |

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 22 |
| 2 | ESTRELAS DE NÊUTRONS | 25 |
| 2.1 | MODELO TEÓRICO | 25 |
| 2.2 | DESCOBERTA | 26 |
| 2.3 | FORMAÇÃO | 27 |
| 2.4 | CLASSIFICAÇÃO | 32 |
| 2.5 | ESTRUTURA INTERNA | 33 |
| 2.6 | EQUAÇÃO DE ESTADO | 35 |
| 3 | RELATIVIDADE GERAL | 37 |
| 3.1 | RELATIVIDADE ESPECIAL | 38 |
| 3.2 | RELAÇÃO ENTRE CURVATURA E GRAVIDADE | 41 |
| 3.3 | VARIEDADES CURVAS | 42 |
| 3.4 | EQUAÇÕES DE EINSTEIN | 45 |
| 3.5 | ONDAS GRAVITACIONAIS | 46 |
| 3.6 | ESTRELAS COM SIMETRIA ESFÉRICA | 47 |
| 3.6.1 | Condições de contorno | 48 |
| 3.6.2 | Solução em séries de potências | 49 |
| 3.6.3 | Condições de estabilidade | 49 |
| 4 | COALESCÊNCIA E EFEITO DE MARÉ | 51 |
| 4.1 | O NÚMERO DE LOVE NEWTONIANO | 53 |
| 4.2 | CÁLCULO DO NÚMERO DE LOVE RELATIVÍSTICO | 54 |
| 4.2.1 | Expansão multipolar da métrica | 54 |
| 4.2.2 | Perturbação do espaço-tempo estático e esfericamente simétrico | 55 |
| 4.2.3 | Equações de Einstein perturbadas | 55 |
| 4.2.3.1 | <i>Tensor Energia-Momento perturbado</i> | 55 |
| 4.2.3.2 | <i>Tensor de Einstein perturbado</i> | 56 |
| 4.2.3.3 | <i>Equação diferencial da perturbação</i> | 56 |
| 4.2.4 | Solução da equação diferencial da perturbação | 57 |
| 4.2.4.1 | <i>Solução interna</i> | 57 |
| 4.2.4.2 | <i>Solução externa e solução assintótica</i> | 58 |
| 4.2.4.3 | <i>O número de Love</i> | 58 |
| 4.2.4.4 | <i>Descontinuidade na densidade</i> | 59 |
| 4.3 | LIMITES DO NÚMERO DE LOVE | 61 |
| 5 | EQUAÇÕES DE ESTADO | 63 |
| 5.1 | MATÉRIA HADRÔNICA | 63 |

| | | |
|--------------|--|------------|
| 5.2 | TRANSIÇÕES DE FASE | 64 |
| 5.3 | MATÉRIA DE QUARKS | 66 |
| 6 | METODOLOGIA | 71 |
| 6.1 | CÓDIGO NUMÉRICO | 71 |
| 6.1.1 | Validação | 73 |
| 6.2 | DADOS EXPERIMENTAIS | 76 |
| 7 | RESULTADOS E DISCUSSÕES | 78 |
| 7.1 | ESTRELAS DE NÊUTRONS HADRÔNICAS | 78 |
| 7.1.1 | Família de estrelas | 80 |
| 7.2 | ESTRELAS DE QUARKS | 84 |
| 7.2.1 | Família de estrelas | 86 |
| 7.2.2 | Análise no espaço de parâmetros | 91 |
| 7.3 | ESTRELAS HÍBRIDAS | 95 |
| 7.3.1 | Família de estrelas | 96 |
| 7.3.2 | Análise no espaço de parâmetros | 102 |
| 8 | CONCLUSÕES | 107 |
| | REFERÊNCIAS | 109 |
| | APÊNDICE A – POTENCIAIS TERMODINÂMICOS | 117 |
| | APÊNDICE B – ESTRELAS COM SIMETRIA ESFÉRICA | 119 |
| B.1 | ESPAÇOS-TEMPOS ESTÁTICOS ESFERICAMENTE SIMÉTRICOS | 119 |
| B.2 | EQUAÇÕES DE EINSTEIN PARA FLUIDOS PERFEITOS | 121 |
| B.3 | SOLUÇÃO EXTERNA E A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD | 123 |
| B.4 | CONDIÇÕES DE CONTORNO | 124 |
| B.5 | SOLUÇÃO EM SÉRIES DE POTÊNCIAS | 125 |
| | APÊNDICE C – CÁLCULO DO NÚMERO DE LOVE RELATIVÍSTICO | 129 |
| C.1 | EXPANSÃO MULTIPOLAR DA MÉTRICA | 129 |
| C.2 | PERTURBAÇÃO DO ESPAÇO-TEMPO ESTÁTICO E ESFERICAMENTE SIMÉTRICO | 130 |
| C.3 | EQUAÇÕES DE EINSTEIN PERTURBADAS | 131 |
| C.3.1 | Tensor Energia-Momento perturbado | 131 |
| C.3.2 | Tensor de Einstein perturbado | 134 |
| C.3.3 | Equação diferencial da perturbação | 135 |
| C.4 | SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA PERTURBAÇÃO | 139 |
| C.4.1 | Solução interna | 139 |
| C.4.2 | Solução externa e solução assintótica | 142 |
| C.4.3 | O número de Love | 145 |

| | | |
|-------|---|-----|
| C.4.4 | Descontinuidade na densidade | 146 |
| | APÊNDICE D – COMPONENTES DA PERTURBAÇÃO DO TEN- | |
| | SOR DE EINSTEIN | 149 |

1 INTRODUÇÃO

As estrelas de nêutrons (ENs) são os objetos mais compactos do universo que não colapsam para buracos negros (BNs), devido à pressão de degenerescência dos nêutrons (VINK, 2020; SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008). Por esse motivo, estas estrelas possuem características extremas como densidades maiores que a densidade de saturação nuclear ($\sim 2.7 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$), campos gravitacionais intensos, da ordem de 10^{12} m s^{-2} na superfície, e campos magnéticos da ordem de 10^8 G a 10^{15} G , condições extremas que se assemelham às condições do universo primitivo (SCHAFFNER-BIELICH, 2020; SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008). Estes objetos compactos são formados durante o colapso de estrelas com massas maiores que aproximadamente $8 M_\odot$ ao final do ciclo de fusão nuclear, em explosões conhecidas como supernovas de colapso de núcleo, e servem de laboratórios para investigar estados extremos da matéria (VINK, 2020; BURROWS; VARTANYAN, 2021; SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008).

Esta matéria exótica presente no interior das ENs pode ser modelada por meio de uma equação de estado (EdE), uma expressão que relaciona a pressão e a densidade (ABDELSALHIN, 2019; SCHAFFNER-BIELICH, 2020). Neste trabalho, utilizamos a EdE *Brussels-Montreal Skyrme 24* (*BSk24*) (PEARSON et al., 2018) para descrever a matéria nuclear presente no interior de estrelas de nêutrons hadrônicas (ENHs). Para a matéria de quarks *up*, *down* e *strange* livres, presente no interior de estrelas de quarks (EQs), empregamos uma EdE paramétrica (PEREIRA; FLORES; LUGONES, 2018; ALFORD et al., 2005; ALFORD et al., 2008). Essa abordagem é fundamentada na hipótese de Bodmer-Witten, que sugere a existência de tal estado da matéria em altas densidades (SCHAFFNER-BIELICH, 2020; BODMER, 1971; WITTEN, 1984). Consideramos também a combinação das EdEs hadrônica e de quarks por meio de uma transição de fase para descrever estrelas híbridas (EHs), outra possível configuração da matéria em altas densidades (SCHAFFNER-BIELICH, 2020). Além disso, utilizamos o formalismo da relatividade geral (RG) para obter as equações *Tolman-Oppenheimer-Volkoff* (*TOV*), cujas soluções descrevem a estrutura interna e as características das ENs (MISNER et al., 2017; CARROLL, 2019; DERUELLE; UZAN; FORCRAND-MILLARD, 2018; SCHUTZ, 2009).

As características físicas das ENs são estimadas por meio de observações de raios-X, levando a restrições na massa (ROMANI et al., 2022) e raio (PANG et al., 2023), por exemplo. Porém, com as recentes detecções de ondas gravitacionais (OGs) emitidas por sistemas binários compactos por meio de interferômetros a laser (ABBOTT et al., 2017), como os detectores da colaboração *LIGO-Virgo-KAGRA* (*LVK*) (LVK, 2024), temos mais uma forma de restringir as características das ENs e consequentemente a EdE: deformações de maré.

Mais precisamente, quando duas ENs formam um sistema binário, o movimento orbital distorce o espaço-tempo, emitindo OGs. Além disso, quando essas estrelas se

aproximam, devido à dissipação de energia para as OGs, cada estrela causa uma deformação de maré na companheira (ABDELSALHIN, 2019; DIETRICH; HINDERER; SAMAJDAR, 2021). Esta deformação de maré é quantificada pelo número de Love e pela deformabilidade de maré, que podem ser obtidos por meio de uma equação diferencial deduzida utilizando o formalismo perturbativo em conjunto com a RG, e dependem da estrutura interna das ENs (HINDERER, 2008; DAMOUR; NAGAR, 2009). Por fim, como as deformabilidades de maré das ENs afetam diretamente o sinal da OG, temos uma forma de estimar a deformabilidade de maré (CHATZIOANNOU, 2020).

Atualmente não sabemos a real natureza da matéria em densidades altas presente no interior das ENs (SCHAFFNER-BIELICH, 2020; SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008). E como experimentos terrestres não conseguem replicar essas condições extremas, nos resta utilizar observações astronômicas e de OGs de sistemas binários com ENs (ABBOTT et al., 2017). Sendo assim, o objetivo principal deste trabalho é investigar as propriedades das ENs e a natureza da matéria no interior destas estrelas, utilizando os limites dos seguintes observáveis: massa máxima das ENs (M_{max}), raio da EN canônica ($R_{canonical}$), aquela que possui uma massa de $1.4 M_{\odot}$, e a deformabilidade de maré da EN canônica ($\Lambda_{canonical}$). Para isso, temos os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver algoritmos numéricos para:
 - (a) Resolver as equações TOV e a equação da perturbação para uma estrela parametrizada pela densidade central, a fim de obter o raio R , a massa M , e a deformabilidade de maré Λ desta estrela, utilizando uma EdE escolhida;
 - (b) Resolver as equações TOV e a equação da perturbação para uma família de estrelas para obter a massa máxima M_{max} , o raio da estrela canônica $R_{canonical}$, e a deformabilidade de maré da estrela canônica $\Lambda_{canonical}$;
 - (c) Obter M_{max} , $R_{canonical}$, e $\Lambda_{canonical}$ para um conjunto de parametrizações diferentes da EdE, filtrar as parametrizações por meio dos limites observacionais, e obter os limites dos parâmetros livres da EdE e das propriedades da família de estrelas.
- Executar os algoritmos numéricos (a) e (b) para a EdE hadrônica, e os algorítimos (a), (b), e (c) para as EdEs de quarks e híbrida;
- Analisar os resultados obtidos, verificando quais tipos de EdEs se adéquam aos limites observacionais.

A relevância deste trabalho é justificada também por meio da revisão de trabalhos anteriores. Alguns estudos analisam ENHs utilizando EdEs paramétricas como a politrópica por partes (ALSING; SILVA; BERTI, 2018) ou a parametrização espectral (LINDBLOM;

INDIK, 2012), ou ainda abordagens não paramétricas, como o processo Gaussiano (LANDRY; ESSICK; CHATZIOANNOU, 2020). Outros trabalhos focam na análise de EdEs de quarks (ARBAÑIL; MALHEIRO, 2015; POSTNIKOV; PRAKASH; LATTIMER, 2010; LI; YAN; PING, 2021), e alguns analisam EdEs híbridas (PEREIRA et al., 2022; ALFORD et al., 2005; ANNALA et al., 2020; HAN; STEINER, 2019). Além disso, alguns estudos analisam aspectos não abordados neste trabalho, como o efeito da elasticidade (GITTINS; ANDERSSON; PEREIRA, 2020; PEREIRA et al., 2020; PEREIRA et al., 2021) e perturbações dependentes do tempo (PEREIRA; FLORES; LUGONES, 2018; ARBAÑIL et al., 2023), por exemplo. Também nos deparamos com alguns trabalhos utilizando análises estatísticas das EdEs (MIAO et al., 2021; ALSING; SILVA; BERTI, 2018; LANDRY; ESSICK; CHATZIOANNOU, 2020), mostrando o potencial e a importância desta área de pesquisa.

Por fim, a estrutura do trabalho está dividida da seguinte forma:

- No capítulo 2 são abordados alguns aspectos gerais das ENs, englobando o modelo teórico, a descoberta, formação em supernovas, classificação dos tipos de ENs, e por fim algumas informações sobre a estrutura interna e EdEs das ENs;
- No capítulo 3 são expostos os fundamentos da RG relevantes para o estudo de ENs;
- No capítulo 4 são discutidos os números de Love, contendo uma introdução histórica ao número de Love newtoniano, e a dedução da expressão para o número de Love relativístico;
- No capítulo 5 são abordadas as EdEs barotrópicas utilizadas no decorrer do trabalho, e discutidos os aspectos relacionados às EQs e EHs;
- No capítulo 6 são mostrados os métodos utilizados, incluindo uma descrição geral do código numérico desenvolvido, os testes utilizados para a validação do código, e por fim os dados experimentais utilizados para restringir os parâmetros das EdEs de quarks e híbrida;
- No capítulo 7 são analisados os resultados das simulações realizadas para ENs formadas com EdEs hadrônica, de quarks, e híbrida;
- No capítulo 8 são discutidas as conclusões e perspectivas futuras.

2 ESTRELAS DE NÊUTRONS

As estrelas de nêutrons (ENs) são formadas em supernovas de colapso de núcleo, que ocorrem durante o colapso de estrelas com massas maiores que aproximadamente $8 M_{\odot}$ ao final do ciclo de fusão nuclear, e resistem ao colapso total por meio da pressão de degenerescência dos nêutrons (VINK, 2020; BURROWS; VARTANYAN, 2021; SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008). Esses objetos compactos possuem massas da ordem de $1 M_{\odot}$ a $3 M_{\odot}$ (ALSING; SILVA; BERTI, 2018; REZZOLLA; MOST; WEIH, 2018), e raios da ordem de 10 km a 13 km no modelo canônico, que possui massa de $1.4 M_{\odot}$ (PANG et al., 2023). Além disso, possuem densidades centrais maiores que a densidade nuclear ($\sim 2.7 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$), campos gravitacionais intensos, da ordem de 10^{12} m s^{-2} na superfície, e campos magnéticos da ordem de 10^8 G a 10^{15} G , condições extremas que se assemelham às condições do universo primitivo (SCHAFFNER-BIELICH, 2020; SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008). Assim, as ENs podem ser utilizadas como laboratórios para investigar estados extremos da matéria, permitindo avanços em diversas áreas da física, tais como a física nuclear e de partículas, astrofísica e cosmologia (CAMENZIND, 2007; SCHAFFNER-BIELICH, 2020; SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008; GLENDENNING, 2012).

Neste capítulo, serão abordados alguns aspectos gerais das ENs, englobando o modelo teórico, a descoberta, formação em supernovas, classificação dos tipos de ENs, e por fim algumas informações sobre a estrutura interna e equações de estado (EdEs) das ENs.

2.1 MODELO TEÓRICO

A existência do nêutron foi prevista em 1920 por Rutherford, e comprovada experimentalmente por Chadwick em 1932, inspirado pelo trabalho de Curie e Joliot, após várias tentativas fracassadas. Os experimentos envolveram o bombardeio de núcleos de berílio com partículas alfa, resultando na ejeção de produtos de reação neutros. Inicialmente interpretados por outros como raios-gama, Chadwick conduziu um experimento semelhante com equipamentos aprimorados, e identificou corretamente os produtos da reação neutra como nêutrons, e não como raios-gama. Ao aplicar princípios de conservação de energia e momento, Chadwick conseguiu estimar a massa do nêutron, que descobriu ser semelhante à do próton (YAKOVLEV et al., 2013).

No entanto, a teorização de estrelas densas, onde os núcleos atômicos estariam em contato próximo, foi inicialmente proposta por Landau em um artigo escrito em 1931 (antes da confirmação experimental da existência do nêutron) e publicado em 1932. Além disso, atribui-se a primeira previsão explícita de ENs à Baade e Zwicky, que reportaram seus estudos em 1933 em uma conferência em Stanford, onde buscavam explicar a origem da energia liberada em explosões de supernova (YAKOVLEV et al., 2013).

Em 1939, Tolman, Oppenheimer e Volkoff deduziram um modelo para objetos

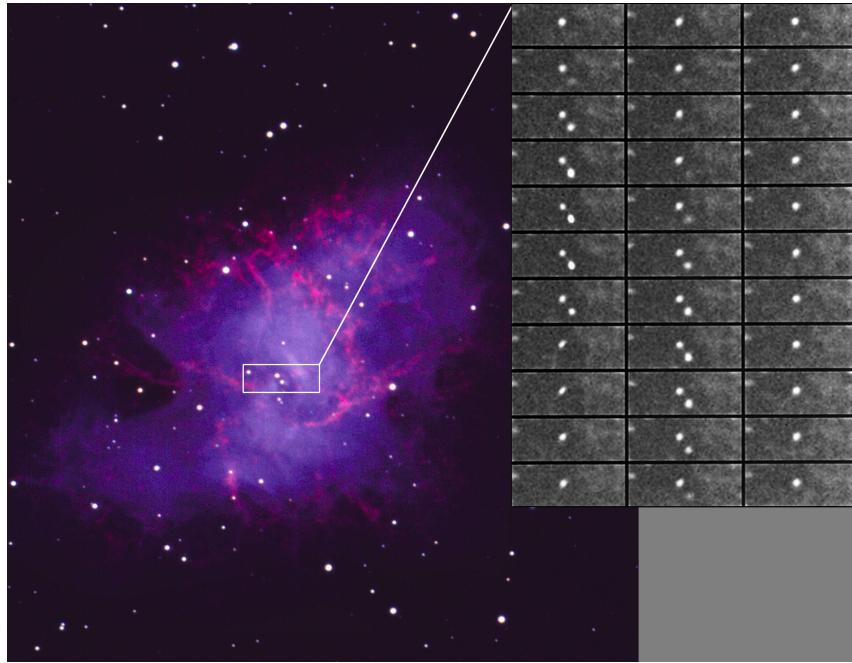
compactos, aplicando as equações de Einstein para o interior de uma estrela estática e esfericamente simétrica, e obtendo as equações *Tolman-Oppenheimer-Volkoff* (*TOV*), como conhecidas atualmente, extremamente importantes no estudo de ENs. Aplicando as equações *TOV* junto a uma EdE de nêutrons degenerados não interagentes, sendo um modelo aproximado da estrutura interna para as ENs, eles estimaram a massa e o raio máximos dessas estrelas em torno de $0.7 M_{\odot}$ e 9.5 km , respectivamente (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939). Como veremos adiante, as massas das ENs são maiores que esta estimativa inicial, pois a EdE utilizada não é realística para ENs.

2.2 DESCOBERTA

Na década de 60, Hewish e colaboradores desenvolveram um radiotelescópio capaz de registrar variações rápidas, com o intuito de estudar cintilações de fontes pontuais, tais como quasares, causadas pelo plasma interestelar e o vento solar. A maioria das observações era de flutuações irregulares, conforme esperado, mas Jocelyn Bell, uma doutoranda da equipe de Hewish, notou flutuações periódicas com período de aproximadamente 1.337 s . Essa descoberta foi publicada pela equipe de Hewish em 1968 (HEWISH et al., 1968). Nos anos seguintes, várias outras fontes foram detectadas, e a partir de então denominadas pulsares (LORIMER; KRAMER, 2005).

A explicação mais plausível para o fenômeno apresentado é que os pulsares são ENs altamente magnetizadas que giram rapidamente, irradiando energia de seus polos magnéticos. Os pulsos observados são produzidos quando o eixo magnético cruza nossa linha de visão. Essa explicação se tornou universalmente aceita com a descoberta de um pulsar de período curto (33 ms) na Nebulosa do Caranguejo em 1968, conforme ilustra a Figura 1, já que densidades extremas são necessárias para a estrela suportar tais velocidades de rotação. A nebulosa é a remanescente de uma explosão de supernova próxima testemunhada por astrônomos chineses em 1054. Isso também confirmou a previsão de Baade e Zwicky de que as ENs estariam associadas às remanescentes de supernovas (STAELIN; REIFENSTEIN, 1968; LORIMER; KRAMER, 2005).

Figura 1 – Nebulosa do Caranguejo e seu pulsar. A série de imagens à direita mostra uma sequência temporal do pulsar, um mosaico de 33 intervalos de tempo, ordenados de cima para baixo e da esquerda para a direita. Cada fatia representa aproximadamente um milissegundo no período do pulsar. Dados obtidos com a Matriz de Contagem de Fóttons de Kitt Peak (*Kitt Peak Photon Counting Array - KPCA*).



Fonte: NOIRLab (2020).

2.3 FORMAÇÃO

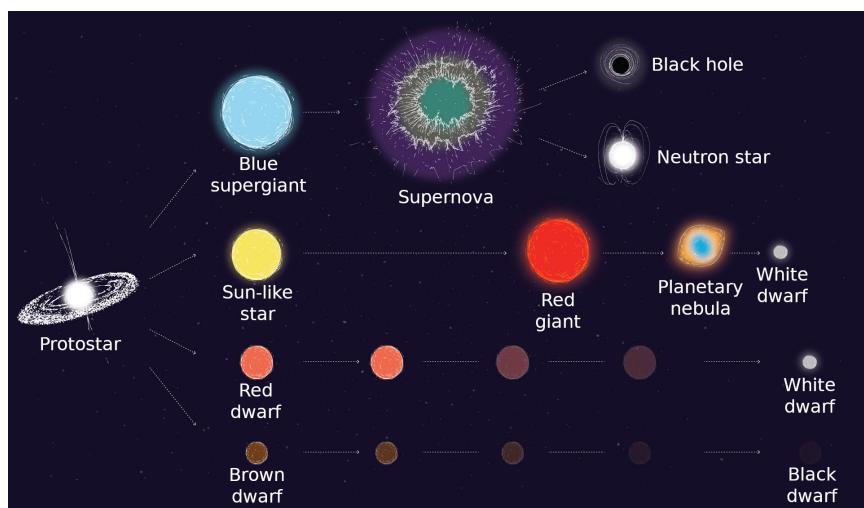
A formação estelar começa em nuvens moleculares densas, compostas por poeira e gás. Perturbações gravitacionais, magnéticas e outros fatores levam à concentração de gás em aglomerados, que contraem devido à força gravitacional. Esse processo aumenta a temperatura, até que a radiação térmica equilibre a gravidade, formando uma protoestrela. Esta continua a contrair e aquecer mais lentamente enquanto perde energia pela superfície (GLENDENNING, 2012).

Esta estrela em formação tem alguns possíveis destinos, ilustrados na Figura 2. Protoestrelas com massas entre $0.01 M_{\odot}$ e $0.08 M_{\odot}$ não são suficientemente quentes para iniciar a fusão nuclear e tornam-se anãs marrom, que resfriam com o tempo. Caso a protoestrela inicie a fusão nuclear, formará uma estrela da sequência principal e, dependendo de sua massa, terá um ciclo de vida diferente (MURDIN, 2001). Anãs vermelhas, com massas entre $0.08 M_{\odot}$ e $0.4 M_{\odot}$, se transformam em anãs brancas (ABs). Estrelas semelhantes ao Sol, com massas entre $0.4 M_{\odot}$ e $8 M_{\odot}$, passam por uma fase gigante vermelha, quando conseguem fundir hélio, e então expelem parte de suas massas em forma de nebulosas planetárias, deixando uma estrela AB como remanescente (SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

Estrelas com massas entre $8 M_{\odot}$ e $10 M_{\odot}$ conseguem fundir carbono, formando um

núcleo degenerado de neônio, oxigênio e magnésio, que eventualmente colapsa para uma EN durante uma supernova. Já as estrelas com massas entre $10 M_{\odot}$ e $25 M_{\odot}$ conseguem fundir silício, formando um núcleo degenerado de ferro, que também colapsa para uma EN durante uma supernova. Por fim, estrelas com massas maiores que $25 M_{\odot}$, sendo este um limite incerto, finalizam a sua vida em uma supernova, deixando como remanescente um buraco negro (BN) (SCHAFFNER-BIELICH, 2020; VINK, 2020).

Figura 2 – Diagrama da evolução estelar. Anãs marrons não iniciam a fusão nuclear, tornando-se anãs negras. Anãs vermelhas evoluem para ABs. Estrelas semelhantes ao Sol se expandem em gigantes vermelhas, antes de se tornarem ABs, liberando parte de seus interiores como nebulosas planetárias. Estrelas massivas terminam em supernovas, dando origem à ENs ou BNs.

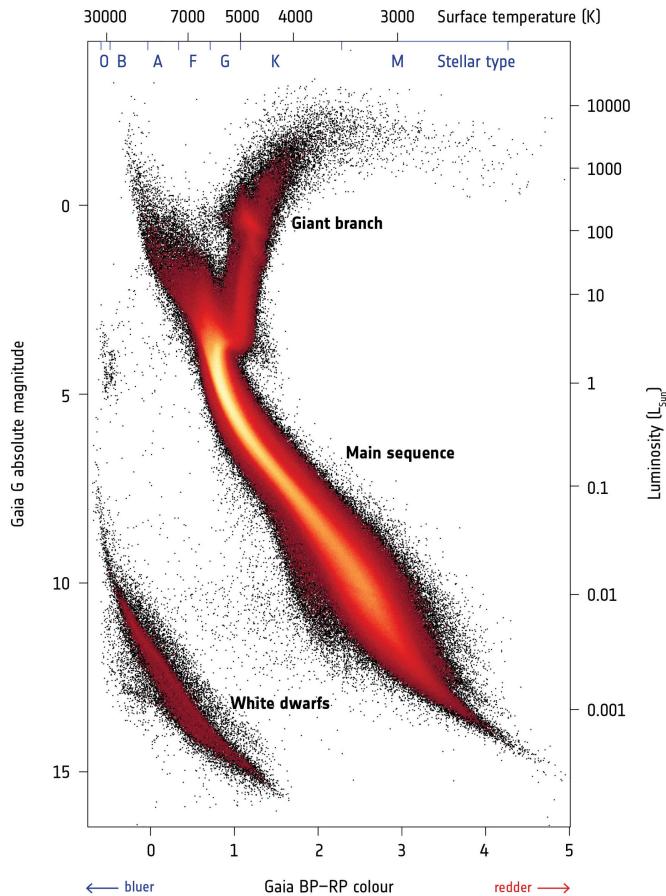


Fonte: ESA (2018b).

Os diferentes tipos de estrelas ficam evidentes no diagrama de Hertzsprung-Russell, no qual as estrelas são traçadas de acordo com sua temperatura (no eixo horizontal) e luminosidade (no eixo vertical), conforme ilustrado na Figura 3. Na região central do diagrama encontram-se as estrelas da sequência principal, aquelas em fase de fusão nuclear de hidrogênio. As estrelas ABs, caracterizadas por sua baixa luminosidade e alta temperatura superficial, ocupam uma posição distinta no canto inferior esquerdo. Por fim, as estrelas gigantes, que representam o estágio final da evolução de estrelas semelhantes ao Sol, são identificadas por uma ramificação na parte superior da sequência principal, indicando uma fase de expansão e resfriamento (MURDIN, 2001).

Na sequência, será abordada a evolução de estrelas com massas superiores à $10 M_{\odot}$, que passam por vários estágios de fusão nuclear. O primeiro estágio é aquele com maior duração, e consiste na fusão de hidrogênio, produzindo hélio e formando o núcleo da estrela. Quando a pressão e temperatura no centro da estrela forem grandes o suficiente, outros elementos mais pesados começam a ser fundidos na sequência em escalas de tempos decrescentes, devido ao aumento na temperatura e menor quantidade de combustível disponível. Assim, se forma uma estrutura de cascas concêntricas no interior da estrela,

Figura 3 – Diagrama de Hertzsprung-Russell, obtido por uma seleção de estrelas no catálogo de segunda liberação da Gaia. As estrelas são traçadas de acordo com sua temperatura (no eixo horizontal) e luminosidade (no eixo vertical) e são agrupadas em diferentes regiões do diagrama, dependendo principalmente de suas massas, composição química, idades e estágios no ciclo de vida estelar.



Fonte: ESA (2018a).

com regiões mais externas fundindo elementos mais leves, e regiões mais próximas do núcleo fundindo elementos mais pesados (GLENDENNING, 2012; VINK, 2020).

A segunda etapa consiste na fusão do hélio, produzindo carbono e oxigênio, iniciando a formação de outro núcleo na estrela. A próxima etapa é a fusão do carbono, produzindo neônio e magnésio. Em sequência, inicia-se o estágio de fusão do neônio, produzindo oxigênio e magnésio. Em seguida, o oxigênio e o magnésio são fundidos em diversos processos diferentes produzindo elementos do grupo do silício. Por fim, a última etapa consiste na fusão do silício, dando origem a elementos do grupo do ferro. Como a fusão de elementos mais pesados, incluindo o ferro, são processos endotérmicos, a fusão nuclear cessa no núcleo. Estes estágios de fusão nuclear e suas escalas de tempo ficam evidentes na Tabela 1 (VINK, 2020).

A partir de então, o núcleo composto de elementos do grupo do ferro cresce rapidamente, sendo impedido de colapsar devido à pressão de degenerescência dos elétrons

Tabela 1 – Os estágios consecutivos de queima no núcleo de uma estrela da sequência principal com massa de $15 M_{\odot}$.

| Estágio | Duração | Comb. | Produto | Temp. ($10^9 K$) | Densidade ($g cm^{-3}$) |
|------------|-----------------------|------------------|-------------------------|-----------------------|------------------------------|
| Hidrogênio | 11×10^6 anos | H | He | 0.035 | 5.8 |
| Hélio | 2×10^6 anos | He | C, O | 0.18 | 1390 |
| Carbono | 2000 anos | C | Ne, Mg | 0.81 | 2.8×10^5 |
| Neônio | 0.7 anos | Ne | O, Mg | 1.6 | 1.2×10^7 |
| Oxigênio | 2.6 anos | O, Mg | Si, S, Ar, Ca, \dots | 1.9 | 8.8×10^6 |
| Silício | 18 dias | Si | Fe, Ni, Cr, Ti, \dots | 3.3 | 4.8×10^7 |
| Colapso | ~ 1 s | Fe, Ni, Cr, Ti | EN | > 7.1 | $> 7.3 \times 10^9$ |

Fonte: Vink (2020).

presentes nesse núcleo. Porém, existe uma massa máxima que essa pressão consegue suportar, conhecida como limite de Chandrasekhar, em torno de $1.4 M_{\odot}$. Quando a massa do núcleo ultrapassa o limite de Chandrasekhar, o colapso é inevitável (VINK, 2020; CARROLL; OSTLIE, 2017).

Esse limite pode ser compreendido por meio da análise dos processos microscópicos envolvidos. Quando o núcleo começa a contrair, os fôtons adquirem energia suficiente para destruir os elementos presentes no núcleo da estrela, devido à alta temperatura. Esse processo é conhecido como fotodesintegração (VINK, 2020), cujas equações são



onde ${}_{26}^{56}Fe$ e ${}_2^4He$ representam os elementos ferro e hélio, respectivamente, e γ , n e p^+ representam o fóton, o nêutron e o próton, respectivamente. Além disso, inicia-se o processo de captura de elétrons pelos prótons (VINK, 2020; CARROLL; OSTLIE, 2017), tal que



onde e^- e ν_e representam o elétron e o neutrino elétron, respectivamente. Com isso, a pressão de degenerescência dos elétrons, a responsável por manter o núcleo da estrela estável, cai rapidamente, resultando no colapso do núcleo. Para estrelas com massas maiores que aproximadamente $25 M_{\odot}$ o núcleo da estrela colapsa para um BN, sendo esse limite de massa apenas uma estimativa. Já para estrelas com massas entre $10 M_{\odot}$ e $25 M_{\odot}$, o colapso resulta em uma EN (VINK, 2020).

No caso de estrelas com massas entre $10 M_{\odot}$ e $25 M_{\odot}$, durante o colapso, o núcleo reduz de tamanho rapidamente, atingindo densidades elevadas, até que a pressão de degenerescência dos nêutrons consegue impedir o colapso total, formando uma protoestrela de nêutrons e gerando uma onda de choque. Essa onda de choque se propaga em direção

ao material mais externo da estrela, que está em queda livre em direção ao centro, e é responsável por desacelerar a onda de choque por um momento (BURROWS; VARTANYAN, 2021; VINK, 2020).

Não se sabe exatamente quais são todos os mecanismos responsáveis pela explosão de supernova que acontece logo depois do colapso. Diversos estudos envolvendo simulações numéricas com modelos magneto-hidrodinâmicos e de interações nucleares e de partículas foram desenvolvidos no decorrer das últimas décadas. Esses estudos indicam que a abundância de neutrinos produzidos no colapso é um dos fatores que iniciam a explosão de supernova. Além disso, estudos recentes baseados em simulações tridimensionais indicam que os campos magnéticos extremos, turbulências e assimetrias apresentam contribuições significativas para a dinâmica da explosão (BURROWS; VARTANYAN, 2021; BOCCIOLI et al., 2023; VINK, 2020).

A explosão de supernova descrita é conhecida como supernova de colapso de núcleo, e consegue forjar átomos mais pesados que o ferro, ejetando violentamente o material externo à estrela colapsada, levando à formação de nebulosidades com grande extensão na região da explosão, conhecidas como remanescentes de supernova (BURROWS; VARTANYAN, 2021; VINK, 2020).

A protoestrela de nêutrons formada é extremamente quente, com temperaturas da ordem de $10^{11} K$. Durante os primeiros dias, a estrela resfria rapidamente emitindo neutrinos por meio do processo de URCA, atingindo temperaturas internas em torno de $10^9 K$ (CARROLL; OSTLIE, 2017), cujas equações são

$$\begin{aligned} n &\rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e, \\ p^+ + e^- &\rightarrow n + \nu_e, \end{aligned} \tag{3}$$

onde $\bar{\nu}_e$ representa o antineutrino elétron. Durante centenas de anos, a temperatura da EN continua caindo, por meio de outros processos que emitem neutrinos, chegando em temperaturas internas da ordem de $10^8 K$, e temperaturas na superfície da ordem de $10^6 K$. O processo de resfriamento se torna muito mais lento, e essas temperaturas se mantêm nesses níveis por milhares de anos (CARROLL; OSTLIE, 2017). Vale ressaltar que a temperatura de Fermi T_F dos nêutrons em densidades típicas de ENs é da ordem de $10^{11} K$ a $10^{12} K$. Assim, temos que a matéria no interior das ENs é altamente degenerada, e podemos considerar que a temperatura interna das ENs é $T = 0 K$ (MISNER et al., 2017; ABDELSALHIN, 2019).

O processo de colapso descrito acima não é seguido por estrelas com massas entre $8 M_\odot$ e $10 M_\odot$. Neste caso, as simulações numéricas indicam que depois da etapa de fusão do carbono, o núcleo formado por oxigênio, neônio e magnésio é suportado pela pressão de degenerescência dos elétrons. Este núcleo atinge o limite de Chandrasekhar, iniciando o processo de captura de elétrons pelos elementos presentes no núcleo, e diminuindo consideravelmente a pressão de degenerescência dos elétrons, levando ao colapso do núcleo

e formação de uma EN. Neste caso, a formação da protoestrela de nêutrons gera uma onda de choque que pode ter energia suficiente para desencadear a explosão de supernova. Este tipo de supernova é chamada de supernova de captura de elétrons e possui algumas evidências observacionais a seu favor (HIRAMATSU et al., 2021; VINK, 2020).

2.4 CLASSIFICAÇÃO

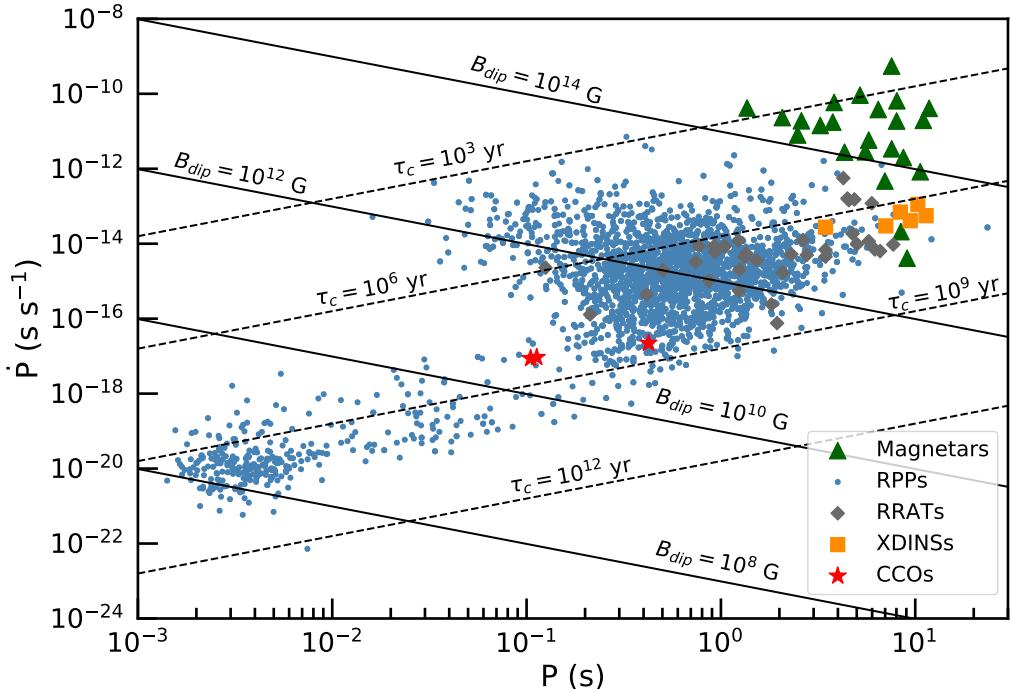
As ENs possuem algumas classificações conforme a sua principal fonte de energia e tipos de emissão (SCHAFFNER-BIELICH, 2020; HARDING, 2013):

- **Pulsares Alimentados por Rotação (*Rotation-Powered Pulsars - RPPs*):** a energia de rotação alimenta a emissão de ondas eletromagnéticas;
- **Magnetares:** extraem sua produção de energia dos enormes campos magnéticos de superfície, da ordem de 10^{14} G a 10^{15} G. Possuem longos períodos de rotação na faixa de alguns segundos e grandes taxas de variação da rotação. Além disso, emitem principalmente raios-X e raios-gama suaves continuamente, porém não possuem estrelas companheiras;
- **Objetos Compactos Centrais (*Central Compact Objects - CCOS*):** são pontos brilhantes de raios-X no centro das remanescentes de supernovas. Eles mostram emissões de raios-X suaves semelhantes às emissões térmicas;
- **Estrelas de Nêutrons Isoladas e Fracas em Raios-X (*X-ray Dim Isolated Neutron Stars - XDINSs*):** emitem radiação de raios-X térmica fraca;
- **Transientes de Rádio Rotativos (*Rotating Radio-Transients - RRATs*):** liberam rajadas curtas e esporádicas de ondas de rádio. Possuem longos períodos de alguns segundos com grandes taxas de variação da rotação;
- **Explosões Rápidas de Rádio (*Fast Radio Bursts - FRBs*):** são eventos de milissegundos de emissão de rádio com alta medida de dispersão, associada à densidade eletrônica ao longo da direção de propagação dos fótons, sugerindo uma fonte extragaláctica;
- **Binários de Raios-X:** são sistemas de acreção que envolvem a emissão de raios-X, subdivididos em duas classes conforme a massa da estrela companheira (M_{com}): Binários de Raios-X de Alta Massa (*High-Mass X-ray Binaries - HMXBs*), onde $M_{com} \sim 20 M_{\odot}$, e Binários de Raios-X de Baixa Massa (*Low-Mass X-ray Binaries - LMXBs*), onde $M_{com} \sim 1 M_{\odot}$.

Essas classificações constituem regiões distintas no diagrama $P-\dot{P}$, que indica a relação entre o período de rotação P e taxa de variação do período de rotação \dot{P} com as

respectivas classificações, conforme ilustrado na Figura 4 (SCHAFFNER-BIELICH, 2020; BORGHESE; ESPOSITO, 2023).

Figura 4 – Diagrama $P-\dot{P}$ com as ENs sem acreção incluídas no catálogo de pulsares da Instalação Nacional do Telescópio da Austrália (*Australia Telescope National Facility - ATNF*) v.1.66. Triângulos verdes, pontos azuis, diamantes cinzas, quadrados laranjas e estrelas vermelhas representam magnetares, *RPPs*, *RRATs*, *XDINSs* e *CCOs*, respectivamente. Também estão traçadas linhas de campo magnético dipolar constante B_{dip} (linhas sólidas) e idade característica τ_c (linhas tracejadas).



Fonte: Borghese e Esposito (2023).

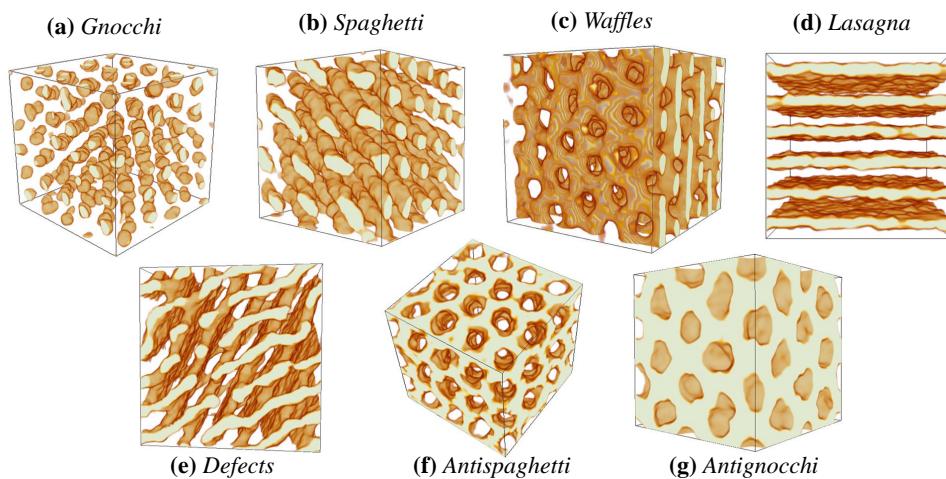
2.5 ESTRUTURA INTERNA

A estrutura interna das ENs é modelada por uma sequência de camadas concêntricas, cada uma com composições e densidades diferentes (ABDELSALHIN, 2019; SCHAFFNER-BIELICH, 2020):

- **Crosta externa:** é a camada mais externa da estrela, com extensão da ordem de 0.5 km, composta por uma rede cristalina de núcleos atômicos pesados, como o ferro, imersa em um gás de elétrons degenerados. A densidade varia de $\rho \sim 10^7 \text{ g/cm}^3$ a $\rho \sim 4 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$, densidade na qual os nêutrons gerados pelo processo de captura de elétrons se tornam livres dos núcleos, que não têm mais estados ligados disponíveis para esses nêutrons;

- **Crosta interna:** com extensão da ordem de $1\ km$ e densidade máxima de $\rho \sim 2.7 \times 10^{14}\ g/cm^3$, consiste numa rede cristalina de núcleos imersa em um gás de elétrons e um superfluido de nêutrons. Conforme a densidade vai aumentando em direção ao centro da estrela, os núcleos vão se aglomerando e formando estruturas conhecidas como fases de pasta nuclear, em formatos de espaguete, lasanha, e outras formas geométricas diferentes até chegar em uma estrutura homogênea, conforme ilustrado na Figura 5 (CAPLAN; HOROWITZ, 2017; KYCIA; KUBIS; WÓJCIK, 2017; SCHNEIDER et al., 2013);
- **Núcleo externo:** com extensão de alguns quilômetros, e densidade máxima de $\rho \sim 5.4 \times 10^{14}\ g/cm^3$, é composta por um fluido homogêneo de nêutrons, prótons e elétrons;
- **Núcleo interno:** se estendendo por alguns quilômetros, é a camada mais central da estrela, com densidade máxima da ordem de $\rho \sim 10^{15}\ g/cm^3$ para as estrelas mais massivas. A composição interna e a correspondente EdE que descreve a matéria nesta região são desconhecidas. Alguns modelos sugerem a formação de híperons, condensados de Bose-Einstein, ou ainda uma transição para matéria de quarks desconfinados, modelo conhecido como estrela híbrida (EH).

Figura 5 – Configurações de pasta nuclear produzidas em simulações de dinâmica molecular com 51.200 núcleons: (a) nhoque, (b) espaguete, (c) waffles, (d) lasanha, (e) defeitos, (f) anti-espaguete e (g) anti-nhoque.



Fonte: Caplan e Horowitz (2017).

Segundo a Cromodinâmica Quântica (*Quantum Chromodynamics - QCD*), a força de acoplamento entre os quarks e glúons diminui com o aumento de temperatura, densidade ou energia, de modo que no limite de altas energias os quarks se tornam livres, condição conhecida como liberdade assintótica. É esse o mecanismo que justifica os modelos de EHs, onde o núcleo da estrela é formado por quarks livres. Além disso, existe a hipótese de

Bodmer-Witten, que propõe a existência de matéria de quarks absolutamente estável, composta por quarks *up*, *down* e *strange* livres. Se a hipótese de Bodmer-Witten for verdadeira, estrelas compostas inteiramente por matéria de quarks podem existir, conhecidas como estrelas de quarks (EQs). Este trabalho foca no estudo de EQs e EHs, que serão detalhadas mais adiante (SCHAFFNER-BIELICH, 2020; BODMER, 1971; WITTEN, 1984).

2.6 EQUAÇÃO DE ESTADO

A ponte entre a microfísica que descreve a matéria em altas densidades e a astrofísica de objetos compactos é a EdE, que será abordada nesta seção (ABDELSALHIN, 2019; SCHAFFNER-BIELICH, 2020). Para isso, são necessárias algumas variáveis e expressões termodinâmicas, abordadas no apêndice A.

Em um referencial localmente inercial co-móvel, a energia interna dU contida em um elemento de fluido com volume dV é dada por

$$dU = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i, \quad (4)$$

onde as variáveis termodinâmicas estão definidas no apêndice A. No interior da EN podemos assumir que o número de partículas N é conservado,

$$N = \sum_i N_i = \text{constante}. \quad (5)$$

Definindo:

$$\begin{cases} \rho := U/V \text{ (densidade de energia)}, \\ n := N/V \text{ (densidade de número de partículas total)}, \\ s := S/N \text{ (entropia por partícula)}, \\ Y_i := N_i/N \text{ (abundância da partícula de espécie } i\text{)}, \end{cases} \quad (6)$$

calculando os diferenciais presentes na equação (4) em termos das novas variáveis definidas na equação (6), sabendo que $dN = 0$ pela equação (5), e substituindo na equação (4), obtemos

$$d\rho = nTds + \frac{\rho + p}{n}dn + n \sum_i \mu_i dY_i. \quad (7)$$

Considerando um sistema em equilíbrio, onde a energia interna não muda ($dU = 0$), que não está realizando trabalho ($dW = pdV = 0$) e que não está trocando calor ($dQ = TdS = 0$), a equação (4) se reduz a

$$\sum_i \mu_i dN_i = 0. \quad (8)$$

Considerando que as reações químicas ocorrem em escalas de tempo cujas outras variáveis termodinâmicas são constantes, a equação (8) é válida dentro da EN, que corresponde a

$$\sum_i \mu_i dY_i = 0. \quad (9)$$

Além disso, como visto anteriormente, podemos considerar que a temperatura interna das ENs é nula, devido à alta degenerescência. Com essa condição e com a condição de equilíbrio químico dado pela equação (9), a equação (7) se reduz a

$$d\rho = \frac{\rho + p}{n} dn. \quad (10)$$

Isolando a pressão, podemos deixar a expressão em termos de funções de n ,

$$p(n) = n \frac{d\rho(n)}{dn} - \rho(n). \quad (11)$$

Podemos então descrever esse sistema por equações $p = p(n)$ e $\rho = \rho(n)$. Isolando n na expressão de $\rho(n)$ e substituindo na expressão de $p(n)$, obtemos a equação

$$p = p(\rho). \quad (12)$$

Esta equação é conhecida como EdE barotrópica, e é o formato necessário para aplicar as equações *TOV*, conforme será abordado adiante.

3 RELATIVIDADE GERAL

A relatividade geral (RG), proposta por Einstein em 1915, representa um marco fundamental na compreensão do universo e consiste em uma teoria do espaço, do tempo e da gravitação, descrita elegantemente utilizando geometria diferencial. Enquanto outras forças naturais são representadas por campos que permeiam o espaço-tempo, a gravidade se distingue ao ser uma propriedade intrínseca do próprio espaço-tempo, revelando-se como a manifestação direta da curvatura do espaço-tempo (CARROLL, 2019).

Desde a sua concepção, a RG tem sido corroborada por diversas evidências experimentais. A primeira delas é a precessão do periélio de Mercúrio, que apresentava uma discrepância quando calculada usando a gravitação newtoniana, mas concordava com os dados experimentais ao ser calculada por Einstein utilizando a RG. Outras evidências notáveis incluem a deflexão da luz por campos gravitacionais, o efeito de *redshift* gravitacional e a recente detecção direta de ondas gravitacionais (OGs), fenômenos que não são contemplados pela teoria da gravitação de Newton (CARROLL, 2019; MIT, 2019). Um exemplo do efeito de lente gravitacional é ilustrado pela Figura 6, onde podemos observar a luz de galáxias mais distantes sendo desviada pelo intenso campo gravitacional de um aglomerado de galáxias mais próximo.

Figura 6 – Efeito de lente gravitacional causado pelo aglomerado de galáxias SMACS J0723.3-7327. Imagem capturada pelo telescópio espacial James Webb.



Fonte: NASA et al. (2023).

Objetos compactos, como anãs brancas (ABs), estrelas de nêutrons (ENs) e buracos negros (BNs), exibem campos gravitacionais intensos, exigindo a aplicação da RG em sua análise (CARROLL, 2019). Além disso, devido aos recentes avanços na área de detecção de OGs emitidas por sistemas binários compostos por objetos compactos, o estudo desses objetos se tornou um tópico central na astrofísica contemporânea (MIT, 2019).

Na sequência serão abordados os aspectos relevantes da RG para o estudo de ENs. Com isso, se faz necessário definir algumas convenções utilizadas no decorrer do texto para facilitar a notação (SCHUTZ, 2009):

- a) Utiliza-se o sistema de unidades geometrizadas: $G = c = 1$;
- b) Índices latinos representam componentes espaciais e assumem valores em $\{1, 2, 3\}$. Índices gregos representam todas as componentes e assumem valores em $\{0, 1, 2, 3\}$;
- c) Convenção de somatório de Einstein: sempre que uma expressão contém um índice repetido, sendo um sobreescrito e outro subscrito, um somatório é implícito sobre todos os valores que o índice pode assumir.

As referências utilizadas neste capítulo são os livros relacionados à RG, referências padrão (MISNER et al., 2017; CARROLL, 2019; DERUELLE; UZAN; FORCRAND-MILLARD, 2018; SCHUTZ, 2009). Qualquer referência diferente é citada no decorrer do texto.

3.1 RELATIVIDADE ESPECIAL

Após Einstein propor a teoria da relatividade especial (RE) em 1905, Minkowski apresentou em 1908 um ponto de vista geométrico para a teoria, mostrando ser muito útil considerar (t, x, y, z) como coordenadas de um espaço de quatro dimensões, que chamamos de espaço-tempo. Foi esse novo ponto de vista geométrico que levou Einstein ao desenvolvimento da RG.

Antes de aprofundar os estudos na RG, é necessário abordar alguns aspectos da RE do ponto de vista geométrico. A RE pode ser deduzida a partir de dois postulados fundamentais:

1. Princípio da relatividade (proposto por Galileu): Não existe uma velocidade absoluta de um observador. O resultado de qualquer experimento realizado por um observador não depende de sua velocidade relativa a outros observadores;
2. Universalidade da velocidade da luz (proposto por Einstein): a velocidade da luz relativa à qualquer observador não acelerado é $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, independente do movimento da fonte de luz relativo ao observador.

A RE está restrita aos observadores inerciais, também chamados de referenciais inerciais, sistemas coordenados para o espaço-tempo que satisfazem as seguintes condições:

1. A distância entre um ponto $P_1 (x_1, y_1, z_1)$ e outro ponto $P_2 (x_2, y_2, z_2)$ é inde-

pendente do tempo;

2. A passagem do tempo é sincronizada em todos os pontos do espaço;
3. A geometria do espaço em qualquer tempo t constante é euclidiana.

Veremos adiante que essa definição implica que observadores inerciais são observadores não acelerados. Vamos agora definir um conceito importante, o intervalo Δs^2 entre quaisquer dois eventos separados por incrementos $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, dado por

$$\Delta s^2 := -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \quad (13)$$

A partir da definição de referencial inercial e utilizando os postulados fundamentais da RE, é possível demonstrar que o intervalo definido pela equação (13) é invariante, ou seja, é o mesmo quando calculado por qualquer observador inercial, sendo esse o ponto de partida utilizado para deduzir a conhecida transformação de Lorentz.

Também podemos definir um referencial inercial para uma partícula acelerada. Para isso, consideramos um referencial inercial que momentaneamente tem a mesma velocidade que a partícula, mas que um momento seguinte não é mais co-móvel com a partícula. Esse referencial é conhecido como referencial momentaneamente co-móvel (RMC).

Definimos então a quadrivelocidade \vec{U} como o vetor tangente à linha-mundo da partícula, que representa a sua trajetória no espaço-tempo, e com comprimento que corresponde a uma unidade de tempo no referencial desta partícula. Ou seja, a quadrivelocidade \vec{U} é definida como o vetor de base \vec{e}_0 do RMC daquele evento. E, analogamente à mecânica newtoniana, definimos o quadrimomento por

$$\vec{p} := m\vec{U}, \quad (14)$$

onde m é a massa de repouso da partícula, ou seja, a massa da partícula medida em seu referencial inercial de repouso.

Uma operação vetorial muito importante é o produto escalar entre vetores arbitrários \vec{A} e \vec{B} , que podemos definir em termos de um tensor, conhecido como tensor métrico \mathbf{g} , por

$$\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{B}) := \vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (15)$$

Na RE, por analogia com o intervalo dado pela equação (13), o produto escalar entre \vec{A} e \vec{B} é definido em um referencial como

$$\vec{A} \cdot \vec{B} := -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3. \quad (16)$$

Notando que os vetores de base de um referencial \mathcal{O} satisfazem

$$g_{\mu\nu} := \mathbf{g}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}, \quad (17)$$

onde $\eta_{00} = -1$, $\eta_{0i} = \eta_{i0} = 0$ e $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, o produto escalar fica

$$\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{B}) = \mathbf{g}(A^\mu \vec{e}_\mu, B^\nu \vec{e}_\nu) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu. \quad (18)$$

Com isso, vemos que $\eta_{\mu\nu}$ são as componentes da métrica no caso da RE, conhecida como métrica de Minkowski. Veremos que na RG as componentes da métrica não são iguais a $\eta_{\mu\nu}$. Além disso, introduziremos uma notação muito utilizada em RG para representar a métrica, por meio do intervalo infinitesimal

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (19)$$

A métrica atua como um mapeamento entre vetores e 1-formas. Por exemplo, considerando a métrica \mathbf{g} e um vetor \vec{V} , a 1-forma \tilde{V} associada é dada por

$$\tilde{V}(\) := \mathbf{g}(\vec{V}, \). \quad (20)$$

Calculando as componentes de \tilde{V} , obtemos

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu. \quad (21)$$

De maneira análoga, podemos utilizar as componentes da métrica inversa para obter as componentes de \vec{V} a partir das componentes de \tilde{V} , tal que

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu. \quad (22)$$

Assim, na prática, utilizamos a métrica para elevar e abaixar índices, operação válida também para tensores mais gerais. Por exemplo, suponha que $T^{\alpha\beta}_\mu$ são componentes de um tensor $(\frac{2}{1})$, então

$$T^\alpha{}_{\mu\nu} = g_{\mu\beta} T^{\alpha\beta}{}_\nu \quad (23)$$

são componentes de um tensor $(\frac{1}{2})$.

Por fim, outro tópico essencial para o posterior desenvolvimento da RG é o tensor energia-momento, que descreve como a energia e o momento estão distribuídos no espaço-tempo, de maneira invariante ao referencial. O tensor energia-momento é definido em termos de seus componentes em algum referencial arbitrário como

$$T^{\mu\nu} := \left\{ \begin{array}{l} \text{fluxo do momento } p^\mu \text{ através} \\ \text{da superfície de } x^\nu \text{ constante} \end{array} \right\}. \quad (24)$$

Podemos expressar a lei da conservação de energia-momento utilizando esse tensor, tal que

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (25)$$

Em um fluido perfeito, uma generalização do gás ideal da termodinâmica, não há condução de calor e a viscosidade é nula, e seu tensor energia-momento no RMC é dado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (26)$$

onde ρ é a densidade de energia, e p é a pressão, funções que podem variar no espaço-tempo.

3.2 RELAÇÃO ENTRE CURVATURA E GRAVIDADE

Em RE assumimos a existência de um referencial inercial global. Verificaremos agora se é possível construir um referencial inercial global em um campo gravitacional não uniforme, por meio de um experimento mental conhecido como experimento do *redshift* gravitacional:

1. Uma partícula de massa de repouso m se encontra no topo de uma torre de altura h , construída na superfície da Terra;
2. A partícula começa a cair em queda livre com aceleração g . Ela chega no chão com velocidade $v = (2gh)^{1/2}$, de modo que a energia E medida pelo experimentador no chão é $E \approx m + mgh = m + mv^2/2$;
3. O experimentador converte toda essa energia em um único fóton com essa mesma energia, e redireciona o fóton para cima;
4. Ao chegar no topo da torre com energia E' , o fóton é novamente convertido para uma partícula de massa de repouso $m' = E'$. Assumindo que máquinas de movimento perpétuo não existem, concluímos que $m' = m$, de modo que $E' = m$.

Assim, o *redshift* gravitacional para o fóton é dado por

$$\frac{E'}{E} = \frac{\nu'}{\nu} \approx \frac{m}{m + mgh} \approx 1 - gh. \quad (27)$$

Portanto, concluímos que um fóton subindo no campo gravitacional da Terra irá perder energia, e consequentemente sofrerá um *redshift*. Isso foi verificado experimentalmente em 1960 pela primeira vez e melhorado em 1965, obtendo uma precisão de 1% na diferença $\nu' - \nu$.

Vamos agora assumir que existe um referencial inercial global na Terra. Considere a luz como uma onda, e observe duas frentes de onda sucessivas enquanto a onda se move para cima na torre do experimento do *redshift* gravitacional. Sendo Δt_{base} o intervalo de tempo medido entre as frentes de onda na base da torre, e sabendo que o campo gravitacional não muda com o tempo, a gravidade deve afetar as duas frentes de onda da mesma forma. Assim, o intervalo de tempo medido entre as frentes de onda no topo da torre é dado por $\Delta t_{topo} = \Delta t_{base}$.

Como $\Delta t = 1/\nu$, temos que $\nu_{topo} = \nu_{base}$. Porém, o experimento nos mostra que, na verdade, temos $\nu_{topo} < \nu_{base}$, e, portanto, $\Delta t_{topo} > \Delta t_{base}$. Assim, concluímos que a premissa está errada. Em outras palavras, não existe um referencial inercial global na Terra, e a RE não é suficiente para descrever o espaço-tempo com gravidade.

Entretanto, neste caso existem referenciais iniciais locais, referenciais em queda livre no campo gravitacional. Este é o princípio da equivalência fraco, onde um referencial local em queda livre é equivalente a um referencial inercial. Além disso, um referencial acelerado é equivalente ao referencial em um campo gravitacional.

Existe ainda o princípio da equivalência forte, ou princípio da equivalência de Einstein, onde as equações diferenciais que descrevem as leis da física tem a mesma forma local em um referencial inercial em queda livre assim como num referencial inercial na RE.

O papel da curvatura fica evidente quando analisamos a trajetória de partículas livres em cada caso. Na RE, duas partículas livres não interagentes possuem linhas-mundo inicialmente paralelas, que permanecem paralelas, não importa o quanto são estendidas. Assim, o espaço de Minkowski é um espaço plano, por satisfazer o axioma do paralelismo de Euclides.

Agora, em um campo gravitacional não uniforme, as linhas-mundo de duas partículas que iniciam paralelas não permanecem paralelas em geral. Portanto, o espaço-tempo gravitacional não é plano. Veremos a seguir que se trata de um espaço curvo Riemanniano, localmente plano, porém, linhas retas paralelas locais, chamadas de geodésicas, não permanecem paralelas globalmente.

3.3 VARIEDADES CURVAS

Uma variedade é um espaço que pode ser continuamente parametrizado, e que localmente se assemelha ao espaço Euclidiano, mas globalmente pode ser muito diferente. O número de parâmetros é a dimensão da variedade e os parâmetros são as coordenadas da variedade.

Uma variedade diferenciável que possui um tensor métrico \mathbf{g} associado que descreve a sua geometria é chamada de variedade Riemanniana. O espaço-tempo da RG é uma variedade pseudo-Riemanniana quadrimensional, que difere de uma variedade Riemanniana, na qual $\mathbf{g}(\vec{V}, \vec{V}) > 0 \forall \vec{V} \neq 0$.

Será definida agora a derivada covariante de um vetor, $\nabla \vec{V}$, que considera a derivada dos vetores de base, necessária em variedades curvas, dada por

$$(\nabla \vec{V})^\mu_\nu = \nabla_\nu V^\mu := \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} V^\alpha, \quad (28)$$

onde os símbolos de Christoffel, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, são definidos por

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \vec{e}_\alpha := \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (29)$$

Os símbolos de Christoffel são calculados usando a métrica, por meio da equação

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (30)$$

Conforme citado anteriormente, uma variedade se assemelha localmente ao espaço Euclidiano. Existe um teorema que formaliza esse conceito, que é enunciado a seguir:

Teorema da planicidade local: Escolha um ponto \mathcal{P} na variedade. Um sistema coordenado $\{x^\mu\}$ cuja origem é \mathcal{P} pode ser encontrado tal que:

$$\begin{cases} g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \eta_{\mu\nu} & \forall \mu, \nu, \\ \partial_\alpha g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = 0 & \forall \alpha, \mu, \nu, \end{cases} \quad (31)$$

mas, de maneira geral, as derivadas de ordem superior não são nulas.

Utilizando o sistema coordenado descrito por esse teorema, vemos pela equação (30) que os símbolos de Christoffel são nulos no ponto \mathcal{P} , de modo que a derivada covariante é igual à derivada parcial em \mathcal{P} . Isso nos dá uma forma de obter as leis físicas válidas para espaços-tempo curvos a partir das equações válidas para espaços-tempo planos, utilizando o princípio da equivalência de Einstein.

Se uma lei válida para a RE, e, portanto, também válida para referenciais inerciais locais, contém derivadas parciais, podemos substituir essas derivadas por derivadas covariantes, já que são iguais em \mathcal{P} . Assim, a lei passa a ter um formato tensorial válido, que é, portanto, válida em qualquer referencial, inclusive para espaços-tempo curvos.

Será definido agora o transporte paralelo, necessário para obter a equação geodésica, que descreve o caminho de partículas livres em um espaço-tempo curvo. Seja \vec{V} um campo vetorial definido em uma variedade, analisemos como ele muda ao longo de uma curva parametrizada por λ , sendo $\vec{U} = d\vec{x}/d\lambda$ o vetor tangente: se os vetores $\vec{V}(\mathcal{P}_n)$ e $\vec{V}(\mathcal{P}_{n+1})$, calculados em pontos \mathcal{P}_n e \mathcal{P}_{n+1} infinitesimalmente próximos, são paralelos e de comprimento igual, então \vec{V} está sendo transportado paralelamente ao longo da curva. Desta forma, em um sistema coordenado localmente inercial em um ponto \mathcal{P} as componentes de \vec{V} devem ser constantes ao longo da curva em \mathcal{P} , tal que

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = U^\nu \partial_\nu V^\mu = 0. \quad (32)$$

Generalizando para outros referenciais, utilizando a derivada covariante, obtemos a equação do transporte paralelo, dada por

$$U^\nu \nabla_\nu V^\mu = 0. \quad (33)$$

No espaço Euclidiano, uma partícula livre percorre uma linha reta, a única curva que transporta paralelamente o seu vetor tangente neste espaço, ou seja, o vetor tangente à curva em um ponto é paralelo ao vetor tangente em um ponto infinitesimalmente próximo. De modo análogo, podemos definir a curva geodésica para variedades curvas, uma reta em

um referencial inercial local, mas que difere globalmente de uma reta, e tem a característica de transportar paralelamente o seu vetor tangente, de modo que

$$U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0. \quad (34)$$

Utilizando λ como o parâmetro da curva, obtemos a equação da geodésica, que descreve como a matéria se move no espaço-tempo curvo,

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (35)$$

É também por meio do transporte paralelo que obtemos informação sobre a curvatura da variedade. Consideremos uma curva fechada infinitesimal em uma variedade, cujos lados são as linhas coordenadas $x^1 = a$, $x^1 = a + \delta a$, $x^2 = b$ e $x^2 = b + \delta b$. Um vetor \vec{V} é definido no ponto (a, b) e transportado paralelamente ao longo desta curva fechada até chegar ao ponto inicial novamente. Após aplicar a equação (35) para cada segmento da curva, obtemos a expressão para a variação das componentes de \vec{V} devido ao transporte paralelo ao longo da curva fechada dada por $\delta a \vec{e}_\mu$ e $\delta b \vec{e}_\nu$, onde x^μ e x^ν são coordenadas gerais, dada por

$$\delta V^\alpha = \delta a \ \delta b \ R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta, \quad (36)$$

onde $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ são as componentes do tensor de Riemann, definidas por

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} := \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\mu}. \quad (37)$$

Uma variedade plana é aquela que possui uma definição global de paralelismo: um vetor pode ser movido paralelamente em uma curva fechada arbitrária de modo que retorne ao ponto inicial sem ser modificado, ou seja, $\delta V^\alpha = 0$. Pela equação (36), como δa , δb e \vec{V} são arbitrários, isto implica que

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0 \iff \text{Variedade plana.} \quad (38)$$

O tensor de Riemann satisfaz algumas propriedades de simetria, dadas por:

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}, \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Devido a essas simetrias, o tensor de Riemann possui apenas 20 componentes independentes. Além disso, ele também satisfaz uma propriedade diferencial, conhecida como identidade de Bianchi, expressa por

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0. \quad (40)$$

Existem duas contrações do tensor de Riemann que são muito úteis. A primeira delas é o tensor de Ricci, definido por

$$R_{\mu\nu} := R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}. \quad (41)$$

A outra contração é o escalar de Ricci, definido por

$$R := R^\mu{}_\mu. \quad (42)$$

A partir disso, podemos definir o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (43)$$

Utilizando a identidade de Bianchi, dada pela equação (40), é possível deduzir que o tensor de Einstein satisfaz a identidade

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0, \quad (44)$$

que será útil posteriormente

3.4 EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Precisamos de uma lei física que descreva como as fontes do campo gravitacional determinam a métrica do espaço-tempo. Na teoria de Newton, a fonte do campo gravitacional é a densidade de massa ρ , que determina o potencial gravitacional Φ por meio da equação

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho. \quad (45)$$

No RMC, a componente T^{00} do tensor energia-momento corresponde à densidade de energia total ρ , que inclui a densidade de massa. Porém, para obter uma teoria válida para qualquer referencial, precisamos utilizar o tensor energia-momento \mathbf{T} completo como fonte do campo gravitacional.

E, por analogia à equação (45), buscamos um operador diferencial de segunda ordem \mathbf{O} no tensor métrico \mathbf{g} que produz um tensor $(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$

$$\mathbf{O}(\mathbf{g}) = k\mathbf{T}, \quad (46)$$

onde k é uma constante. De fato, qualquer tensor na forma

$$O^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} + \alpha g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} \quad (47)$$

satisfaz essas condições, sendo α e Λ constantes. Utilizando a forma generalizada para espaços-tempos curvos da equação (25), dada por

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (48)$$

e considerando a equação (46), vemos que isso implica que

$$\nabla_\nu O^{\mu\nu} = 0. \quad (49)$$

Substituindo a equação (47) na equação (49), e utilizando a equação (44), obtemos

$$\mathbf{O} = \mathbf{G} + \Lambda \mathbf{g}. \quad (50)$$

Por fim, o valor da constante k é obtido exigindo que a equação (46) se reduza à lei da gravitação de Newton no limite de campos gravitacionais distantes e velocidades não-relativísticas, dada pela equação (45), de modo que obtemos a forma final das equações de Einstein

$$\mathbf{G} + \Lambda \mathbf{g} = 8\pi \mathbf{T}, \quad (51)$$

onde a constante Λ é conhecida como constante cosmológica, relacionada à densidade de energia escura, que pode ser desprezada no estudo de objetos compactos.

O lado esquerdo da equação (51) está diretamente relacionado à geometria do espaço-tempo, e o lado direito está diretamente relacionado à distribuição da energia e matéria no espaço-tempo. Ou seja, a equação (51) mostra como a matéria e energia causam a geometria e curvatura do espaço-tempo, enquanto a equação (35) descreve como a matéria se move no espaço-tempo curvo.

3.5 ONDAS GRAVITACIONAIS

Agora temos as ferramentas para entender um pouco mais sobre OGs, o que será útil para a compreensão do presente trabalho. Para entender a natureza das OGs, podemos utilizar uma aproximação, onde consideramos a métrica perturbada no formato

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (52)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Utilizando a definição

$$\bar{h}^{\mu\nu} := h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h^\alpha{}_\alpha, \quad (53)$$

e utilizando o calibre de Lorenz, dado por $\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$, as equações de Einstein, dadas pela equação (51) com $\Lambda = 0$, se tornam

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}, \quad (54)$$

conhecidas como equações de Einstein para campos fracos, onde \square é o operador de d'Alembert, definido por

$$\square := -\partial_t^2 + \nabla^2. \quad (55)$$

As equações de Einstein longe da fonte do campo e no vácuo, onde $T^{\mu\nu} = 0$, ficam

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = (-\partial_t^2 + \nabla^2) \bar{h}^{\mu\nu} = 0. \quad (56)$$

Explicitando c na equação ($t \rightarrow ct$), vemos que se trata da equação de onda, cuja velocidade de propagação é c , expressa por

$$\nabla^2 \bar{h}^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{h}^{\mu\nu}. \quad (57)$$

Assim, temos que $\bar{h}^{\mu\nu}$ é uma OG, que se propaga na velocidade da luz.

3.6 ESTRELAS COM SIMETRIA ESFÉRICA

O objetivo desta seção é obter as equações relativísticas que descrevem a estrutura interna de estrelas com simetria esférica em equilíbrio hidrostático, conhecidas como equações *Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)*, por meio da solução das equações de Einstein. Os detalhes destes cálculos estão expostos no apêndice B. Utilizando a métrica de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico, dada por

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (58)$$

onde utilizamos a seguinte definição para o elemento de ângulo sólido

$$d\Omega^2 := d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (59)$$

e utilizando as componentes do tensor energia-momento para um fluido perfeito, dadas pela equação (26) com índices covariantes

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (60)$$

é possível calcular as componentes não nulas do tensor de Einstein por meio da equação (43), e as componentes não nulas do tensor energia-momento por meio da equação (60). Aplicando a conservação de energia-momento, dada pela equação (48), obtemos a relação

$$\frac{d\nu}{dr} = -\frac{2}{\rho + p} \frac{dp}{dr}. \quad (61)$$

Definindo a função $m(r)$ para substituir $\lambda(r)$, conhecida como função massa

$$m(r) := \frac{1}{2} r \left(1 - e^{-\lambda}\right), \quad (62)$$

aplicando a equação de Einstein, dada pela equação (51), e utilizando a equação (61), obtemos as equações *TOV*:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (63)$$

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{2(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}, \quad (64)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}. \quad (65)$$

Com as equações (63) e (65), junto à equação de estado (EdE) na forma da equação (12), temos três equações que envolvem três variáveis dependentes de r : m , ρ e p .

Resolvendo as equações *TOV* na região externa à estrela, e substituindo na equação (58), obtemos a métrica conhecida como métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (66)$$

onde M é a massa da estrela. Também definimos o raio R da estrela, e a compacidade $C := M/R$, que utilizaremos posteriormente. A métrica de Schwarzschild também é válida para um BN sem rotação e eletricamente neutro, que possui raio $R_S = 2M$, conhecido como raio de Schwarzschild, de modo que a compacidade de BNs é $C_{BN} = M/R = M/2M = 1/2$, sendo este um limite máximo extremo para a compacidade de ENs.

3.6.1 Condições de contorno

Precisamos de condições de contorno para as variáveis ν , m , p e ρ . Para que o espaço-tempo tenha uma geometria suave, precisamos exigir que as funções métricas sejam contínuas na superfície da estrela, de modo que a métrica dada pela equação (58) deve se reduzir à métrica de Schwarzschild dada pela equação (66), na superfície da estrela, em $r = R$. Pelo termo g_{tt} , obtemos a condição de contorno de $\nu(r)$, dada por

$$e^{\nu(R)} = \left(1 - \frac{2M}{R}\right). \quad (67)$$

As condições iniciais para a pressão e densidade representadas por $p(r = 0) = p_c$ e $\rho(r = 0) = \rho_c$, respectivamente, são utilizadas para definir o modelo estelar. Para uma certa EdE $p = p(\rho)$, uma sequência de pressões centrais p_c , ou equivalentemente densidades centrais ρ_c , define uma família de estrelas. Além disso, para a pressão ser contínua, $p = 0$ na superfície da estrela, pois esta é a pressão no vácuo externo à estrela, sendo essa a condição utilizada para interromper a integração das equações e definir o raio da estrela R .

Por fim, para que o espaço-tempo seja plano localmente, temos que $m(r = 0) = 0$, sendo essa a última condição de contorno necessária. Porém, a equação (65) tem uma singularidade em $r = 0$, sendo necessário iniciar a integração em um valor de r pequeno.

Para evitar erros numéricos, podemos utilizar uma solução em série de potências para calcular as condições iniciais para r pequeno, conforme demonstrado na sequência.

3.6.2 Solução em séries de potências

Assumindo a solução na forma de séries de potências para $m(r)$, $p(r)$, e $\rho(r)$, e utilizando a expansão em série de Taylor centrada em ρ_c para a EdE $p = p(\rho)$, é possível obter as soluções das séries truncadas, dadas por (SCOTT, 2016):

$$\begin{cases} m(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_cr^3 - \frac{8}{15}\pi^2\frac{d\rho(p_c)}{dp}(\rho_c + p_c)(\rho_c + 3p_c)r^5, \\ p(r) = p_c - \frac{2}{3}\pi(\rho_c + p_c)(\rho_c + 3p_c)r^2, \\ \rho(r) = \rho_c - \frac{2}{3}\pi\frac{d\rho(p_c)}{dp}(\rho_c + p_c)(\rho_c + 3p_c)r^2. \end{cases} \quad (68)$$

São essas as equações utilizadas para calcular as condições iniciais para r pequeno. O valor r_{max} no qual o erro devido à solução aproximada é menor que o erro máximo desejado é dado por

$$r_{max} = \min \left(r_{max}^{(p)}, r_{max}^{(\rho)} \right), \quad (69)$$

tal que:

$$\begin{cases} r_{max}^{(p)} = \left(\left| \frac{p_c}{p_2} \right| \epsilon_{rel} \right)^{1/2}, \\ r_{max}^{(\rho)} = \left(\left| \frac{\rho_c}{\rho_2} \right| \epsilon_{rel} \right)^{1/2}, \end{cases} \quad (70)$$

onde ϵ_{rel} é o erro relativo máximo permitido, e r_{max} é usado para limitar o raio inicial utilizado na solução numérica das equações *TOV*.

3.6.3 Condições de estabilidade

As densidades centrais das ENs são da ordem de $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ a $10^{15} \text{ g cm}^{-3}$, porém, o valor máximo varia segundo a EdE considerada. Para determinar a densidade central estável máxima de uma EdE, utilizamos a condição de estabilidade dada por (PEREIRA; FLORES; LUGONES, 2018)

$$\frac{dM}{d\rho_c} > 0, \quad (71)$$

que deve ser aplicada após a resolução das equações *TOV*, e determina também o valor de massa máxima da família de estrelas para a EdE utilizada. Este critério é válido para EdEs que descrevem matéria hadrônica, mas características tais como cargas elétricas (ARBAÑIL; MALHEIRO, 2015) e transições de fase para matéria de quarks (PEREIRA; FLORES; LUGONES, 2018) podem resultar em condições de estabilidade diferentes. A análise completa de estabilidade de ENs é mais complexa, e envolve o estudo de oscilações radiais,

assunto que não faz parte do escopo deste trabalho (PEREIRA; FLORES; LUGONES, 2018).

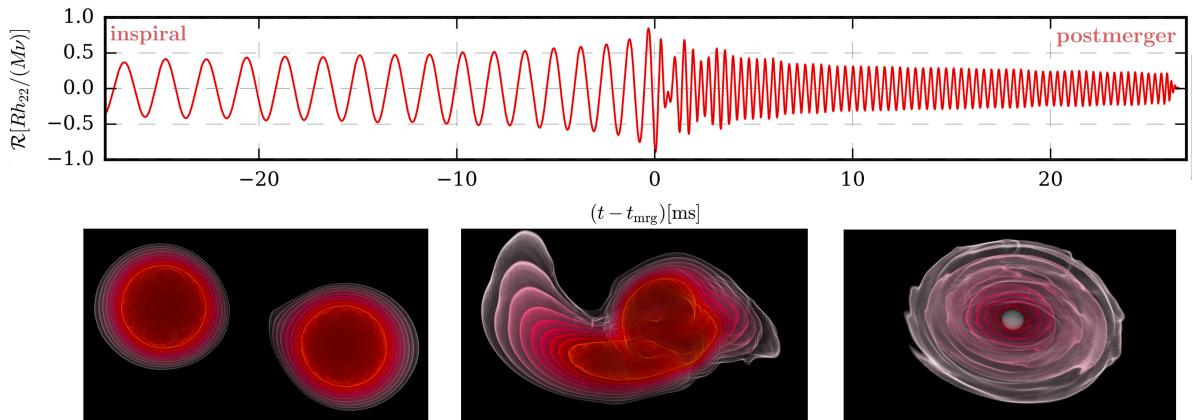
Além disso, precisamos garantir que a velocidade de propagação do som c_s no interior da estrela seja menor que a velocidade da luz, sendo esta conhecida como condição de causalidade, aplicada diretamente na EdE, dada por (SCHAFFNER-BIELICH, 2020)

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} < 1. \quad (72)$$

4 COALESCÊNCIA E EFEITO DE MARÉ

A coalescência de objetos compactos em sistemas binários é uma fonte notável de ondas gravitacionais (OGs), detectadas por interferômetros a laser, como os detectores da colaboração *LIGO-Virgo-KAGRA* (LVK) (LVK, 2024), e carregam informações sobre a estrutura interna dos objetos envolvidos, como veremos adiante. Estamos interessados em sistemas binários de estrelas de nêutrons (ENs), onde as estrelas orbitam o centro de massa do sistema, emitindo OGs e consequentemente perdendo energia no processo. Devido à perda de energia, as componentes do sistema vão se aproximando, diminuindo o momento de inércia do sistema, e devido à conservação do momento angular, a velocidade angular dos corpos aumenta, aumentando assim a frequência da OG emitida até a iminente colisão e fusão das ENs. A evolução desses sistemas binários pode ser dividida em três fases: a fase de coalescência, conhecida como *inspiral*; a fusão dos objetos compactos, fase conhecida como *merger*; e a fase final, conhecida como *postmerger*, onde o objeto compacto resultante, que pode ser uma EN ou um buraco negro (BN), tem suas perturbações suprimidas por emissão de OGs. O sinal correspondente da OG pode ser observado na Figura 7 (ABDELSALHIN, 2019; DIETRICH; HINDERER; SAMAJDAR, 2021).

Figura 7 – Simulação de relatividade numérica de um sistema binário de ENs mostrando o sinal da OG e a evolução do sistema. Painel superior: Sinal da OG emitida durante as fases *inspiral*, *merger*, e *postmerger* da coalescência do binário de ENs. Painéis inferiores: Evolução da densidade de massa de repouso para as fases *inspiral* (primeiro painel), *merger* (segundo painel), e *postmerger* após a formação de um BN (terceiro painel).



Fonte: Dietrich, Hinderer e Samajdar (2021).

Este trabalho está focado na etapa inicial da fase *inspiral*, onde a distância entre as ENs é maior que o raio dos objetos individuais e o efeito de maré é considerável e aproximadamente estático. Deste modo, o sistema pode ser descrito utilizando um formalismo perturbativo conhecido como formalismo pós-newtoniano, onde a correção perturbativa estática é necessária e suficiente para descrever as deformações de maré das ENs. Basicamente, o campo gravitacional de uma EN gera uma deformação de maré

na outra EN, e vice-versa, de modo que as ENs tomam um formato oblato. Além disso, a energia de rotação das ENs é dissipada devido à deformação de maré, de forma que a velocidade de rotação pode ser desconsiderada nas análises (ABDELSALHIN, 2019; CHATZIOANNOU, 2020).

Embora o estudo do formalismo pós-newtoniano não faça parte do escopo deste trabalho, precisamos utilizar alguns resultados para compreender melhor o estudo de deformações de maré. Um destes resultados é a expressão para a fase da OG no domínio da frequência, dada por (CHATZIOANNOU, 2020)

$$\begin{aligned} \Psi(f) = & 2\pi f t_c + \phi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{128\eta u^5} \\ & \left\{ 1 + f(\eta)u^2 + (4\beta - 16\pi)u^3 + [g(\eta) + \sigma]u^4 + \dots \right. \\ & \left. - \frac{39}{2}\tilde{\Lambda}u^{10} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (73)$$

onde f é a frequência da OG, t_c é o tempo da coalescência, ϕ_c é a fase da coalescência, $\eta := M_1 M_2 / M_b^2$ é a massa reduzida, $u := (\pi M_b f)^{1/3}$, $M_b := M_1 + M_2$ é a massa total do binário, e $M_1 > M_2$ são as massas das componentes. As funções $f(\eta)$ e $g(\eta)$ podem ser encontradas em (BLANCHET, 2014), e os termos β e σ representam as contribuições spin-órbita e spin-spin, respectivamente, também disponíveis em (BLANCHET, 2014). O termo proporcional à u^{10} é o termo dominante da correção de maré, expresso por meio do parâmetro $\tilde{\Lambda}$, dado por (CHATZIOANNOU, 2020)

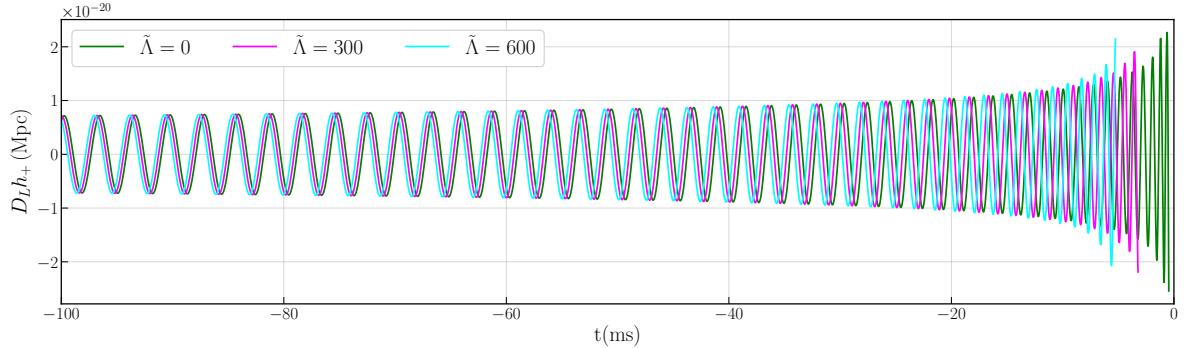
$$\tilde{\Lambda} := \frac{16}{3} \frac{(M_1 + 12M_2)M_1^4\Lambda_1 + (M_2 + 12M_1)M_2^4\Lambda_2}{(M_1 + M_2)^5}, \quad (74)$$

onde Λ_1 e Λ_2 são as deformabilidades de maré adimensionais de cada componente do sistema binário, e Λ está relacionado ao número de Love k_2 , que abordaremos posteriormente, por (CHATZIOANNOU, 2020)

$$\Lambda = \frac{2}{3}k_2 C^{-5}. \quad (75)$$

Assim, as deformabilidades de maré das ENs afetam a fase do sinal da OG, como pode ser observado na Figura 8. Portanto, a deformabilidade $\tilde{\Lambda}$ pode ser medida pelos interferômetros do *LVK*, e como a deformabilidade muda com a equação de estado (EdE) das ENs, como veremos adiante, esta medição pode ser utilizada para validar as EdEs experimentalmente (CHATZIOANNOU, 2020). A seguir serão abordados os números de Love, contendo uma introdução histórica ao número de Love newtoniano, e a dedução da expressão para o número de Love relativístico.

Figura 8 – Sinal de OG da parte final da fase *inspiral* de duas ENs com rotações nulas e de massas iguais para diferentes valores de $\tilde{\Lambda}$.



Fonte: Chatzioannou (2020).

4.1 O NÚMERO DE LOVE NEWTONIANO

Os estudos do efeito de maré se iniciaram com os estudos das marés da Terra, deformações da Terra geradas por efeitos gravitacionais da Lua e do Sol, incluindo o deslocamento da água dos mares, mas também da própria crosta da Terra, embora em menor escala. A formulação de uma teoria física que explicasse o efeito de maré só se tornou possível com o desenvolvimento da lei da gravitação universal de Newton, em 1687. Já em 1783, Euler desenvolveu a teoria estática de marés baseada na expressão da diferença entre o potencial gravitacional devido à Lua no centro de massa da Terra e em um ponto geral de sua superfície (BURSA; TAUER; PEC, 2013).

Lord Kelvin, em cerca de 1876, foi o primeiro a considerar a deformação da Terra rígida, cuja superfície muda devido às forças de maré de forma muito semelhante à superfície do oceano, mas em menor extensão. Progressos adicionais foram feitos na teoria das marés quando Love introduziu em 1909 os parâmetros que fornecem uma descrição completa da resposta elástica da Terra à força de maré. Conhecidos como números de Love, estes parâmetros podem ser calculados a partir de observações de variações da gravidade e variações do deslocamento vertical (BURSA; TAUER; PEC, 2013).

Os parâmetros adimensionais h , k e l pertencem ao conjunto de números de Love que descrevem as deformações de corpos perfeitamente elásticos. Love, em 1909, introduziu os parâmetros h e k , enquanto Shida e Matsuyama, em 1912, e Lambert, em 1943, introduziram o parâmetro l . O parâmetro h descreve os deslocamentos radiais elásticos, k descreve a modificação do potencial causado pela deformação e l descreve o deslocamento tangencial elástico. Os números de Love da Terra são dados por: $h \approx 0.62$, $k \approx 0.30$, e $l \approx 0.08$ (BURSA; TAUER; PEC, 2013; POULSEN, 2009).

Os números de Love introduzidos historicamente fazem parte de um conjunto infinito de parâmetros, que se originam da expansão do potencial de maré em harmônicos esféricos. Porém, estamos interessados apenas nos termos dominantes, que correspondem à $h = h_2$, $k = k_2$ e $l = l_2$ (BURSA; TAUER; PEC, 2013).

Como citado anteriormente, as ENs também sofrem deformações de maré, assim como a Terra, porém, devido aos campos gravitacionais intensos envolvidos, precisamos utilizar a relatividade geral (RG) para deduzir os números de Love relativísticos, assunto que será tratado na próxima seção.

4.2 CÁLCULO DO NÚMERO DE LOVE RELATIVÍSTICO

Nesta seção, o objetivo é obter a expressão explícita para o número de Love relativístico, por meio da solução das equações de Einstein utilizando uma métrica estática e esfericamente simétrica com uma perturbação estática. Os detalhes destes cálculos estão expostos no apêndice C.

4.2.1 Expansão multipolar da métrica

Uma estrela estática e esfericamente simétrica de massa M , quando colocada em um campo de maré quadrupolar estático externo \mathcal{E}_{ij} , desenvolve em resposta um momento de quadrupolo \mathcal{Q}_{ij} . No referencial de repouso assintótico local da estrela, para $r \gg 1$, pode ser demonstrado que a componente g_{tt} da métrica é determinada por (GITTINS; ANDERSSON; PEREIRA, 2020; THORNE, 1980)

$$-\frac{1+g_{tt}}{2} = -\frac{M}{r} - \frac{3}{2r^3}\mathcal{Q}_{ij}\left(n^i n^j - \frac{1}{3}\delta^{ij}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) + \frac{1}{2}r^2\mathcal{E}_{ij}n^i n^j + \mathcal{O}(r^3), \quad (76)$$

onde $n^i = x^i/r$. Esta expansão define \mathcal{E}_{ij} e \mathcal{Q}_{ij} . Considerando que \mathcal{E}_{ij} e \mathcal{Q}_{ij} estão relacionados linearmente, podemos escrever (HINDERER, 2008)

$$\mathcal{Q}_{ij} = -\lambda\mathcal{E}_{ij}, \quad (77)$$

onde λ é uma constante. Pode ser mostrado que λ está relacionada ao número de Love k_2 por (HINDERER, 2008)

$$k_2 = \frac{3}{2}\lambda R^{-5}. \quad (78)$$

É possível deduzir que a equação (76) se reduz a

$$-\frac{1+g_{tt}}{2} = -\frac{M}{r} - \frac{3}{2r^3}\mathcal{Q}_{2m}Y_{2m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) + \frac{1}{2}r^2\mathcal{E}_{2m}Y_{2m} + \mathcal{O}(r^3), \quad (79)$$

onde Y_{lm} são os harmônicos esféricos e

$$\mathcal{Q}_{2m} = -\lambda\mathcal{E}_{2m}. \quad (80)$$

Na sequência utilizaremos essas expressões para deduzir o número de Love k_2 .

4.2.2 Perturbação do espaço-tempo estático e esfericamente simétrico

O objetivo aqui é analisar a configuração de equilíbrio de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico sujeito às perturbações lineares devido a um campo de maré externo. O deslocamento dos elementos de fluido devido ao campo externo, representado pelo campo vetorial $\vec{\xi}(t, r, \theta, \phi)$, causa alterações na métrica, que pode ser descrita por

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + zh_{\mu\nu}, \quad (81)$$

onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, e z é uma constante adicionada para deixar evidente a ordem da perturbação durante os cálculos, quando necessário. Utilizando a equação (58), a métrica de fundo é expressa na forma matricial por

$$(g^{(0)}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (82)$$

Decompondo a perturbação $h_{\mu\nu}$ em harmônicos esféricos, restringindo para perturbações estáticas, e usando o calibre de Regge-Wheeler, pode ser mostrado que a perturbação é representada por (REGGE; WHEELER, 1957; HINDERER, 2008; DAMOUR; NAGAR, 2009)

$$(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} H_0(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda(r)} H_2(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta K(r) \end{pmatrix} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (83)$$

onde $Y_{lm}(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos, e $H_0(r)$, $H_2(r)$ e $K(r)$ são funções da coordenada radial r que caracterizam a perturbação. De agora em diante, omitimos os índices em $Y_{lm}(\theta, \phi)$ e a dependência das funções para simplificar a notação.

4.2.3 Equações de Einstein perturbadas

Pode ser mostrado que a parte perturbativa das equações de Einstein, que resolvemos na sequência, é dada por

$$\delta G^\mu_\nu = 8\pi \delta T^\mu_\nu. \quad (84)$$

4.2.3.1 Tensor Energia-Momento perturbado

A parte perturbativa de primeira ordem do tensor energia-momento de um fluido perfeito é dada por

$$\delta T^\mu{}_\nu = (\delta\rho + \delta p)U^\mu U_\nu + (\rho^{(0)} + p^{(0)})(\delta U^\mu U_\nu + U^\mu \delta U_\nu) + \delta p \delta^\mu{}_\nu. \quad (85)$$

Calculando as componentes não nulas do tensor $\delta\mathbf{T}$, obtemos:

$$\begin{cases} \delta T^t{}_t = -\delta\rho, \\ \delta T^r{}_r = \delta T^\theta{}_\theta = \delta T^\phi{}_\phi = \delta p. \end{cases} \quad (86)$$

4.2.3.2 Tensor de Einstein perturbado

Vamos agora obter o tensor de Einstein perturbado. Para isso, precisamos da expressão para a métrica inversa no formato

$$g^{\mu\nu} = g^{(0)\mu\nu} + zk^{\mu\nu}, \quad (87)$$

onde pode ser mostrado que

$$k^{\mu\nu} = -g^{(0)\mu\alpha} h_{\alpha\beta} g^{(0)\nu\beta}, \quad (88)$$

de modo que podemos expandir o tensor de Einstein em função da métrica de fundo e da perturbação, mantendo apenas os termos perturbativos de primeira ordem.

Substituindo as expressões para $g^{(0)\mu\nu}$ e $g^{(0)\mu\nu}$, obtidas por meio da equação (82), e a expressão para $h_{\mu\nu}$, dada pela equação (83), obtemos as componentes do tensor de Einstein para o problema em questão.

Os termos não perturbativos correspondem às componentes do tensor de Einstein de fundo, sendo as mesmas componentes calculadas durante a dedução das equações *Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)*, expressas na equação (199). Já os termos perturbativos de primeira ordem correspondem às componentes da perturbação do tensor de Einstein, que estão explícitas no apêndice D, onde usamos apóstrofos para denotar derivadas em relação a r .

4.2.3.3 Equação diferencial da perturbação

Com as perturbações $\delta\mathbf{T}$ e $\delta\mathbf{G}$ em mãos, podemos substituir suas componentes na parte perturbativa das equações de Einstein, expressas pela equação (84). Com isso, podemos obter a solução para as funções $H_0(r)$, $H_2(r)$ e $K(r)$, que caracterizam a perturbação $h_{\mu\nu}$. Fazendo isso, é possível mostrar que $H := H_0 = H_2$, e veremos mais adiante que essa função é suficiente para determinar os números de Love. Manipulando as equações resultantes da parte perturbativa das equações de Einstein, obtemos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem para H , dada por

$$H'' + C_1 H' + C_0 H = 0, \quad (89)$$

onde os coeficientes C_0 e C_1 são dados por:

$$C_0 = e^\lambda \left[-\frac{l(l+1)}{r^2} + 4\pi(\rho+p) \frac{d\rho}{dp} + 4\pi(5\rho+9p) \right] - (\nu')^2, \quad (90)$$

$$C_1 = \frac{2}{r} + e^\lambda \left[\frac{2m}{r^2} + 4\pi r(p-\rho) \right]. \quad (91)$$

Definindo uma nova função em termos da derivada logarítmica

$$y(r) := r \frac{d}{dr} \ln(H(r)) = r \frac{H'(r)}{H(r)}, \quad (92)$$

veremos na sequência que precisamos desta função no cálculo de número de Love, e não da função H . Assim, utilizando esta substituição de variáveis, é possível mostrar que a equação (89) se reduz a

$$y' = -C_0 r + \left(\frac{1}{r} - C_1 \right) y - \frac{1}{r} y^2. \quad (93)$$

4.2.4 Solução da equação diferencial da perturbação

O objetivo é resolver a equação diferencial para a perturbação H , dada pela equação (89). No interior da estrela temos as funções p , ρ , m , e ν que dependem da coordenada radial r , determinadas solucionando as equações TOV, dadas pelas equações (63), (64), e (65), junto de uma EdE no formato dado pela equação (12). Assim, no interior da estrela, a equação da perturbação H deve ser solucionada numericamente, já que a EdE pode ter um formato complicado. Precisamos então das condições iniciais para H e H' , determinadas resolvendo analiticamente a equação diferencial da perturbação válida no interior da estrela para $r \ll 1$.

Já na região externa à estrela, temos $p = \rho = 0$ e $m = M$, simplificando a equação (89), possibilitando a solução analítica neste caso. Além disso, podemos obter a expressão assintótica da solução externa, válida distante da estrela, que nos permite determinar a expressão para o número de Love.

4.2.4.1 Solução interna

Aplicando o limite para $r \rightarrow 0$ na equação (89), obtemos

$$r^2 H'' + 2r H' + \left\{ 4\pi \left[(\rho_c + p_c) \frac{d\rho(p_c)}{dp} + 5\rho_c + 9p_c \right] r^2 - l(l+1) \right\} H = 0. \quad (94)$$

Fazendo uma substituição de variáveis, é possível mostrar que esta equação se reduz à equação de Bessel, cuja solução é dada em termos das funções de Bessel. Assim, expressando $H(r)$ em termos das funções de Bessel, e calculando a solução aproximada para $r \ll 1$, obtemos

$$H(r) \approx Br^l. \quad (95)$$

Substituindo na definição da perturbação y , dada pela equação (92), obtemos

$$y(r) \approx r \frac{Blr^{l-1}}{Br^l} = l, \quad (96)$$

e, portanto, podemos desprezar a constante B no cálculo das condições iniciais de H e H' , de modo que:

$$\begin{cases} H(r) \approx r^l, \\ H'(r) \approx lr^{l-1}. \end{cases} \quad (97)$$

4.2.4.2 Solução externa e solução assintótica

O objetivo é verificar o comportamento da equação (89) na região externa à estrela, onde temos $\rho(r) = p(r) = 0$ e $m(r) = m(R) = M$. Simplificando a equação e utilizando a substituição

$$x = \frac{r}{M} - 1, \quad (98)$$

é possível mostrar que esta equação se reduz à equação associada de Legendre

$$(1-x^2)H'' - 2xH' + \left[l(l+1) - \frac{4}{1-x^2} \right] H = 0, \quad (99)$$

cuja solução é dada em termos das funções de associadas de Legendre. Assim, a solução para a equação (99) é dada por

$$H(x) = a_P P_l^2(x) + a_Q Q_l^2(x), \quad (100)$$

onde $P_l^m(x)$ e $Q_l^m(x)$ são as funções associadas de Legendre de 1º e 2º tipo, respectivamente. Restringindo para o caso $l = 2$, e deduzindo a forma explícita das funções, obtemos

$$H(x) = 3(x^2 - 1)a_P + \left[\frac{3}{2}(x^2 - 1) \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + \frac{2x}{x^2 - 1} - 3x \right] a_Q. \quad (101)$$

Calculando o comportamento assintótico para $r \rightarrow \infty$, ou seja, para $x = r/M - 1 \rightarrow \infty$, obtemos

$$H(r) \rightarrow 3 \left(\frac{r}{M} \right)^2 a_P + \frac{8}{5} \left(\frac{M}{r} \right)^3 a_Q. \quad (102)$$

4.2.4.3 O número de Love

Com a expressão assintótica de $H(r)$ em mãos, podemos obter uma expressão semelhante à equação (79), visando compará-las, dada por

$$-\frac{1+g_{tt}}{2} = -\frac{M}{r} - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{M} \right)^2 Y a_P - \frac{4}{5} \left(\frac{M}{r} \right)^3 Y a_Q. \quad (103)$$

Comparando as expressões dadas pelas equações (79) e (103), é possível mostrar que

$$\frac{a_Q}{a_P} = \frac{15}{4} \frac{k_2}{C^5}, \quad (104)$$

onde $C = M/R$ é a compacidade da estrela. A partir da equação (100), escrevendo a solução H em função de r no formato

$$H(r) = a_P P_2^2(r) + a_Q Q_2^2(r), \quad (105)$$

definindo $y_s := y(R) = RH'(R)/H(R)$, simplificando por meio das equações (104) e (105), e isolando k_2 , obtemos

$$k_2 = \frac{4}{15} C^5 \frac{RP_2^{2'}(R) - y_s P_2^2(R)}{y_s Q_2^2(R) - RQ_2^{2'}(R)}. \quad (106)$$

Utilizando as expressões explícitas para P_2^2 e Q_2^2 , obtemos a expressão final para o número de Love k_2 , dada por

$$\begin{aligned} k_2 = & \frac{8}{5} C^5 (1-2C)^2 [2 + 2C(y_s - 1) - y_s] \\ & \times \left\{ 2C[6 - 3y_s + 3C(5y_s - 8)] + 4C^3[13 - 11y_s + C(3y_s - 2) + 2C^2(1+y_s)] \right. \\ & \left. + 3(1-2C)^2[2 - y_s + 2C(y_s - 1)] \ln(1-2C) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (107)$$

4.2.4.4 Descontinuidade na densidade

Em EdEs que possuem transições de fase, ou densidades finitas para pressões nulas, existem descontinuidades na função $\rho(p)$. Vemos que a derivada $d\rho/dp$ está presente na expressão de C_0 , dada pela equação (90), e, portanto, uma descontinuidade em $\rho(p)$ causa uma singularidade em C_0 , e consequentemente em y' , conforme a equação (93). Portanto, precisamos adicionar uma correção Δy , devido à descontinuidade de $\rho(p)$, à solução y , e separar a integração numérica da equação (93) em duas etapas, antes e depois da descontinuidade em $\rho(p)$.

Consideremos o caso em que a densidade $\rho(p)$ possui uma descontinuidade em $p = p_d$. Podemos descrever a densidade $\rho(p)$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} \rho(p) = \rho_1(p), & p < p_d, \\ \rho(p) = \rho_2(p), & p \geq p_d, \end{cases} \quad (108)$$

expressão que pode ser reescrita em termos da função degrau unitário $\theta(x)$, de modo que

$$\rho(p) = \rho_1(p) + \Delta\rho(p)\theta(p - p_d), \quad (109)$$

onde definimos

$$\Delta\rho(p) := \rho_2(p) - \rho_1(p). \quad (110)$$

Calculando $d\rho/dp$, utilizando as equações (109) e (110), mantendo a parte singular, e substituindo na equação (90), mantendo apenas os termos singulares, obtemos a parte singular do coeficiente C_0 . Substituindo esta expressão na equação (93), substituindo a expressão de e^λ , dada pela equação (62), e mantendo apenas os termos singulares, obtemos a parte singular de dy/dr , dada por

$$\frac{dy^s}{dr} = -\frac{4\pi r^2(\rho + p)}{r - 2m}\Delta\rho(p)\delta(p - p_d), \quad (111)$$

onde $\delta(x)$ é a função generalizada delta de Dirac. Também podemos obter uma segunda expressão para dy^s/dr . Calculando dy/dp , utilizando as equações análogas às equações (109) e (110) para y , mantendo a parte singular, utilizando a regra da cadeia, e a derivada dp/dr , dada pela equação (65), a expressão para a parte singular dy^s/dr fica

$$\frac{dy^s}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}\Delta y(p)\delta(p - p_d). \quad (112)$$

Por fim, igualando as duas expressões para dy^s/dr , dadas pelas equações (111) e (112), simplificando e isolando $\Delta y(p)$, obtemos

$$\Delta y(p) = \frac{\Delta\rho(p)}{\frac{m}{4\pi r^3} + p}. \quad (113)$$

Na descontinuidade, expandindo Δy e $\Delta\rho$, mudando as variáveis de p_d para r_d , sabendo que $p(r)$ é monotonicamente decrescente, e isolando $y(r_d + \epsilon)$, obtemos:

$$y(r_d + \epsilon) = y(r_d - \epsilon) + \Delta y(r_d), \quad (114)$$

$$\Delta y(r_d) = \frac{\rho(r_d + \epsilon) - \rho(r_d - \epsilon)}{\frac{m}{4\pi r_d^3} + p_d}, \quad (115)$$

onde $\epsilon \rightarrow 0^+$. Assim, paramos a integração numérica em $y(r_d - \epsilon)$, aplicamos a correção devido à descontinuidade em ρ para calcular $y(r_d + \epsilon)$, dada pelas equações (114) e (115), e continuamos a integração a partir de $y(r_d + \epsilon)$, caso seja uma descontinuidade em ρ no interior da estrela.

Para o caso em que a descontinuidade em ρ é decorrente de uma densidade finita na superfície da estrela, o valor $y(R + \epsilon)$ calculado é aquele que deve ser utilizado para calcular o número de Love, ou seja, $y_s = y(R + \epsilon)$, de modo que as equações (114) e (115) se reduzem a:

$$y(R + \epsilon) = y(R - \epsilon) + \Delta y(R), \quad (116)$$

$$\Delta y(R) = -\frac{4\pi R^3 \rho(R - \epsilon)}{M}. \quad (117)$$

4.3 LIMITES DO NÚMERO DE LOVE

Também podemos calcular os limites da expressão do número de Love k_2 , visando compreender o seu comportamento nos extremos. Calculando a expansão em série de Taylor centrada em $C = 0$ para a expressão do número de Love k_2 , dada pela equação (107), obtemos a expansão de primeira ordem

$$k_2 \approx \frac{2 - y_s}{2(3 + y_s)} + \frac{5(y_s^2 + 2y_s - 6)}{2(3 + y_s)^2} C, \quad (118)$$

utilizada para calcular o valor de k_2 para valores pequenos de compactade, evitando instabilidades que aparecem na expressão original neste caso. Calculando o limite da equação (107) para $C \rightarrow 0$, utilizando a equação (118), obtemos o limite newtoniano k_2^N dado por

$$\lim_{C \rightarrow 0} k_2 = k_2^N = \frac{2 - y_s}{2(3 + y_s)}. \quad (119)$$

Calculando o limite da equação (107) para $C \rightarrow C_{BN} = 1/2$, a compactade de BNs, obtemos

$$\lim_{C \rightarrow 1/2} k_2 = 0. \quad (120)$$

Portanto, quanto mais compacta for a EN, menor será o número de Love k_2 . Também podemos avaliar o comportamento de k_2 para estrelas com raios pequenos. Utilizando a equação (96) para y , válida para $r \ll 1$, vemos que

$$\lim_{R \rightarrow 0} (y_s)_{\Delta y(R)=0} = \lim_{R \rightarrow 0} y(R - \epsilon) = l = 2, \quad (121)$$

onde novamente restringimos para o caso $l = 2$, e consideramos que a densidade na superfície da estrela é zero, resultando em uma correção Δy nula, conforme a equação (117). Considerando o caso em que $R, C \rightarrow 0$, pelas equações (119) e (121), obtemos

$$\lim_{R, C \rightarrow 0} (k_2)_{\Delta y(R)=0} = \lim_{R \rightarrow 0} \left(\frac{2 - y_s}{2(3 + y_s)} \right)_{\Delta y(R)=0} = 0. \quad (122)$$

Assim, estrelas com densidades superficiais nulas, e compactades e raios pequenos terão números de Love pequenos. Já para estrelas com densidades superficiais finitas, precisamos considerar a correção Δy . Calculando o limite de Δy , por meio da equação (117), e utilizando a equação (68) para M , válida para $r \ll 1$, obtemos

$$\lim_{R \rightarrow 0} \Delta y(R) = - \lim_{R \rightarrow 0} \frac{4\pi R^3 \rho(R - \epsilon)}{M} = -3, \quad (123)$$

de modo que, neste caso, substituindo as equações (121) e (123) na equação (116), obtemos

$$\lim_{R \rightarrow 0} y_s = \lim_{R \rightarrow 0} [y(R - \epsilon) + \Delta y(R)] = -1. \quad (124)$$

Considerando o caso em que $R, C \rightarrow 0$, pelas equações (119) e (124), obtemos

$$\lim_{R, C \rightarrow 0} k_2 = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{2 - y_s}{2(3 + y_s)} = \frac{3}{4}. \quad (125)$$

Assim, estrelas com densidades superficiais finitas, e compacidades e raios pequenos terão números de Love próximos a $3/4$.

5 EQUAÇÕES DE ESTADO

Neste capítulo são abordadas as equações de estado (EdEs) barotrópicas utilizadas no decorrer do trabalho, e discutidos os aspectos relacionados às estrelas de quarks (EQs) e estrelas híbridas (EHs).

5.1 MATÉRIA HADRÔNICA

Nesta seção são abordadas as EdEs que representam a matéria hadrônica utilizadas no decorrer do trabalho. A primeira delas é a EdE politrópica, utilizada na validação do código numérico, sendo uma boa aproximação para a matéria presente em estrelas anãs brancas (ABs) e uma primeira aproximação para a matéria em estrelas de nêutrons (ENs) (GLENDENNING, 2012). A EdE politrópica é dada pelas seguintes expressões:

$$p(\rho) = K\rho^{1+\frac{1}{n}} = K\rho^{\Gamma}, \quad (126)$$

$$\rho(p) = \left(\frac{p}{K}\right)^{\frac{n}{n+1}} = \left(\frac{p}{K}\right)^{\frac{1}{\Gamma}}, \quad (127)$$

onde K é uma constante de proporcionalidade, n o índice politrópico, e Γ o índice adiabático. Além disso, precisamos das derivadas das equações (126) e (127), dadas por:

$$\frac{dp}{d\rho} = K\Gamma\rho^{\Gamma-1}, \quad (128)$$

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{K\Gamma} \left(\frac{p}{K}\right)^{\frac{1}{\Gamma}-1}. \quad (129)$$

Embora a EdE politrópica seja um modelo simples, ela é muito utilizada para construir EdEs mais complexas, por meio da utilização de uma série de EdEs politrópicas para faixas diferentes de pressões, sendo esta uma representação paramétrica muito útil (CHATZIOANNOU, 2020).

O desenvolvimento de EdEs mais próximas da EdE real das ENs envolve diversos métodos diferentes de física nuclear, e ajustes em parâmetros livres que dependem de resultados experimentais. Como as condições internas das ENs não podem ser reproduzidas em laboratório, e como existem aproximações nos modelos, existe um número muito grande de EdEs propostas, muitas destas documentadas em formato de tabelas (COMPOSE, 2024a).

As outras duas EdEs utilizadas são a *Brussels-Montreal Skyrme 20* (*BSk20*), utilizada na validação do código numérico, e a *Brussels-Montreal Skyrme 24* (*BSk24*), utilizada tanto na validação do código numérico quanto na análise dos resultados. Elas fazem parte de uma família de EdEs unificadas, que descrevem completamente a matéria em ENs desde o núcleo até a crosta. Esta família de EdEs é baseada na teoria do funcional

da densidade de energia nuclear com forças efetivas generalizadas de *Skyrme*, e possui diversas parametrizações diferentes (GORIELY; CHAMEL; PEARSON, 2010). Neste trabalho, utilizamos a representação analítica das EdEs *BSk20* e *BSk24*, obtida por meio de um método de interpolação abordado em (POTEKHIN et al., 2013) e (PEARSON et al., 2018), dada por

$$\zeta = \frac{a_1 + a_2\xi + a_3\xi^3}{(1 + a_4\xi)\{\exp[a_5(\xi - a_6)] + 1\}} + \frac{a_7 + a_8\xi}{\exp[a_9(a_6 - \xi)] + 1} + \frac{a_{10} + a_{11}\xi}{\exp[a_{12}(a_{13} - \xi)] + 1} \\ + \frac{a_{14} + a_{15}\xi}{\exp[a_{16}(a_{17} - \xi)] + 1} + \frac{a_{18}}{1 + [a_{19}(\xi - a_{20})]^2} + \frac{a_{21}}{1 + [a_{22}(\xi - a_{23})]^2}, \quad (130)$$

onde $\xi = \log_{10}(\rho/g \text{ cm}^{-3})$, $\zeta = \log_{10}(p/dyn \text{ cm}^{-2})$, e os coeficientes a_i estão explícitos na Tabela 2. A EdE *BSk24* foi escolhida para análise por possuir propriedades que estão em conformidade com os dados observacionais, como veremos mais adiante.

Tabela 2 – Coeficientes das EdEs *BSk20* (POTEKHIN et al., 2013) e *BSk24* (PEARSON et al., 2018), presentes na equação (130).

| i | $a_i(BSk20)$ | $a_i(BSk24)$ | i | $a_i(BSk20)$ | $a_i(BSk24)$ |
|-----|--------------|--------------|-----|--------------|--------------|
| 1 | 4.078 | 6.795 | 13 | 14.274 | 14.290 |
| 2 | 7.587 | 5.552 | 14 | 23.560 | 30.08 |
| 3 | 0.00839 | 0.00435 | 15 | -1.5564 | -2.080 |
| 4 | 0.21695 | 0.13963 | 16 | 2.095 | 1.10 |
| 5 | 3.614 | 3.636 | 17 | 15.294 | 14.71 |
| 6 | 11.942 | 11.943 | 18 | 0.084 | 0.099 |
| 7 | 13.751 | 13.848 | 19 | 6.36 | 5.00 |
| 8 | 1.3373 | 1.3031 | 20 | 11.67 | 11.66 |
| 9 | 3.606 | 3.644 | 21 | -0.042 | -0.095 |
| 10 | -22.996 | -30.840 | 22 | 14.8 | 9.1 |
| 11 | 1.6229 | 2.2322 | 23 | 14.18 | 14.15 |
| 12 | 4.88 | 4.65 | | | |

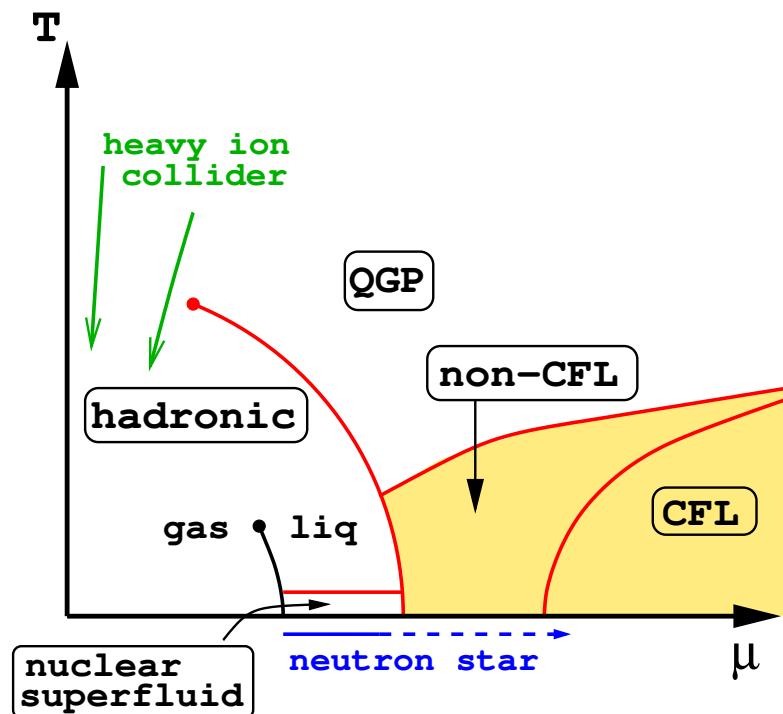
Fonte: Potekhin et al. (2013), Pearson et al. (2018).

5.2 TRANSIÇÕES DE FASE

Segundo a Cromodinâmica Quântica (*Quantum Chromodynamics - QCD*), os hadrons, constituídos por quarks confinados, são energeticamente favorecidos em baixas densidades, e os quarks se tornam não interagentes em altas densidades devido à liberdade assintótica, formando o que chamamos de matéria de quarks, composta por quarks *up*, *down*, e *strange*, que estudaremos em mais detalhes adiante. Portanto, espera-se que dentro das ENs, que possuem densidades elevadas, possa ocorrer esta transição de fase da matéria hadrônica para a matéria de quarks livres, constituindo assim EHs. A Figura 9 ilustra o

diagrama de fases da *QCD* e as transições de fase envolvidas (SCHAFFNER-BIELICH, 2020).

Figura 9 – Um esboço esquemático do diagrama de fases da *QCD*, onde T é a temperatura e μ o potencial químico. A fase de Plasma de Quarks e Glúons (*Quark-Gluon Plasma - QGP*) é acessível por meio de experimentos de colisão de partículas como o Grande Colisor de Hádrons (*Large Hadron Collider - LHC*), e corresponde a temperaturas altas. Já a fase Cor-Sabor-Fixos (*Color-Flavor-Locked - CFL*) e a fase intermediária denominada não-*CFL* (*non-CFL*) podem estar presentes em ENs, que possuem potenciais químicos elevados, e consequentemente densidades de energia elevadas, e correspondem a fases da matéria de quarks.



Fonte: Alford et al. (2008).

No presente trabalho focamos na transição de fase de primeira ordem, que consiste em uma transição abrupta entre as fases, onde a densidade de energia é descontínua. Neste caso, precisamos garantir as seguintes condições termodinâmicas, conhecidas como construção de Maxwell:

$$\begin{cases} p^{(1)}(g^{(1)}) = p^{(2)}(g^{(2)}), \\ g^{(1)} = g^{(2)}, \end{cases} \quad (131)$$

onde $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ são as pressões das fases 1 e 2 na transição, respectivamente, e $g^{(1)}$ e $g^{(2)}$ são as energias livres de Gibbs por partícula das fases 1 e 2 na transição, respectivamente.

Podemos justificar a construção de Maxwell da seguinte forma: caso $p^{(1)} \neq p^{(2)}$, um gradiente de pressão iria surgir, e a fase com maior pressão iria expandir até que as pressões fossem iguais; e caso $g^{(1)} \neq g^{(2)}$, o gradiente de energia resultante faria com que

partículas da fase com maior energia livre se deslocassem para a região da fase com menor energia livre, energeticamente mais favorável, até o sistema atingir o equilíbrio.

5.3 MATÉRIA DE QUARKS

Na presente seção, deduziremos a EdE da matéria de quarks, matéria composta por quarks livres *up*, *down*, e *strange*. Utilizamos o sistema de unidades naturais, definido por $c = \hbar = 1$, sendo c a velocidade da luz no vácuo e \hbar a constante de Planck reduzida. Além disso, utilizaremos algumas variáveis e expressões termodinâmicas definidas no apêndice A, as definições dadas na equação (6), e as seguintes definições extras:

$$\begin{cases} n_i := N_i/V \text{ (densidade de número de partículas da espécie } i\text{)}, \\ \omega := \Omega/V \text{ (densidade do grande potencial)}, \\ g := G/N \text{ (energia livre de Gibbs por partícula)}. \end{cases} \quad (132)$$

A matéria de quarks pode ser parametrizada utilizando uma boa aproximação, por meio da densidade do grande potencial ω definida por (PEREIRA; FLORES; LUGONES, 2018; ALFORD et al., 2005; ALFORD et al., 2008)

$$\omega = -\frac{3a_4}{4\pi^2}\mu^4 + \frac{3a_2}{4\pi^2}\mu^2 + B, \quad (133)$$

onde $\mu := (\mu_u + \mu_d + \mu_s)/3$ é o potencial químico dos quarks, sendo $\mu_u \approx \mu_d \approx \mu_s$ os potenciais químicos dos quarks *up*, *down*, e *strange*, respectivamente. Esta aproximação é válida quando o potencial químico dos elétrons pode ser ignorado, que é o caso deste trabalho (PEREIRA; FLORES; LUGONES, 2018; ALFORD et al., 2005). Além disso, foram definidos os parâmetros livres a_2 , a_4 , e B , que possuem os seguintes significados físicos (PEREIRA; FLORES; LUGONES, 2018; ALFORD et al., 2005; ALFORD et al., 2008):

- a_2 : para a fase *CFL*, presente no diagrama de fases da *QCD*, Figura 9, válida para densidades maiores (onde a matéria é um superfluido isolante eletromagnético), este parâmetro corresponde à $m_s^2 - 4\Delta^2$, onde m_s é a massa do quark *strange*, e Δ é a variação de energia associada ao emparelhamento de quarks. Para englobar as fases *non-CFL* e *CFL*, utilizamos a_2 como um parâmetro fenomenológico;
- a_4 : para a fase *CFL*, este parâmetro corresponde a $1 - c$, onde $c \gtrsim 0.3$ quantifica a interação entre os quarks. Novamente, para englobar as fases *non-CFL* e *CFL*, utilizamos a_4 como um parâmetro fenomenológico;
- B : é conhecida como constante da sacola no modelo *MIT* (*Massachusetts Institute of Technology* - Instituto de Tecnologia de Massachusetts), onde $a_2 = m_s^2$ e $a_4 = 1$.

Tratamos B como um parâmetro fenomenológico que quantifica a pressão de transição da matéria de quarks para matéria hadrônica, como veremos adiante.

Das expressões termodinâmicas do grande potencial, temos que

$$N_i = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i} \right)_{T,V}. \quad (134)$$

Substituindo $\omega = \Omega/V$, $n_i = N_i/V$, e $\mu = (1/3) \sum_i \mu_i$, obtemos

$$n_i = - \frac{1}{3} \frac{\partial \omega}{\partial \mu}. \quad (135)$$

Aplicando esta expressão para a densidade do grande potencial da matéria de quarks, dada pela equação (133), obtemos

$$n_i = \frac{1}{2\pi^2} (2a_4\mu^3 - a_2\mu). \quad (136)$$

Conforme as expressões termodinâmicas do grande potencial, substituindo $\omega = \Omega/V$ e $n = N/V$, temos que

$$n = - \frac{\partial \omega}{\partial \mu}, \quad (137)$$

de modo que, comparando com a equação (135), obtemos

$$n = 3n_i. \quad (138)$$

Além disso, conforme as expressões termodinâmicas da energia interna, substituindo $\rho = U/V$ e $n = N/V$, obtemos

$$\mu = \frac{\partial \rho}{\partial n}. \quad (139)$$

Substituindo as equações (138) e (139) na expressão da EdE barotrópica, dada pela equação (11), e isolando ρ , obtemos

$$\rho = 3\mu n_i - p. \quad (140)$$

Pelas expressões termodinâmicas do grande potencial, vemos que

$$p = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T,\mu_i} = -\omega, \quad (141)$$

de modo que, substituindo este resultado na equação (140), obtemos

$$\rho = 3\mu n_i + \omega. \quad (142)$$

Substituindo as expressões para n_i e ω , dadas pelas equações (136) e (133), respectivamente, obtemos

$$\rho = \frac{9a_4}{4\pi^2}\mu^4 - \frac{3a_2}{4\pi^2}\mu^2 + B. \quad (143)$$

Isolando μ nesta expressão, e substituindo na equação (133), lembrando que $p = -\omega$ pela equação (141), obtemos

$$p(\rho) = \frac{1}{3}(\rho - 4B) - \frac{a_2^2}{12\pi^2 a_4} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{16\pi^2 a_4}{a_2^2}(\rho - B)} \right]. \quad (144)$$

De maneira análoga, isolando μ na equação (133), e substituindo na equação (143), lembrando que $p = -\omega$ pela equação (141), obtemos

$$\rho(p) = 3p + 4B + \frac{3a_2^2}{4\pi^2 a_4} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{16\pi^2 a_4}{3a_2^2}(p + B)} \right]. \quad (145)$$

Assim, temos a EdE da matéria de quarks completamente definida pelas equações (144) e (145). Além disso, precisamos das derivadas destas expressões, dadas por:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \left(1 + \frac{16\pi^2 a_4}{a_2^2}(\rho - B) \right)^{-1/2}, \quad (146)$$

$$\frac{d\rho}{dp} = 3 + 2 \left(1 + \frac{16\pi^2 a_4}{3a_2^2}(p + B) \right)^{-1/2}. \quad (147)$$

Conforme citado anteriormente, segundo a hipótese de Bodmer-Witten, a matéria de quarks é o estado fundamental da matéria, absolutamente estável, enquanto a matéria hadrônica é um estado metaestável, embora de longa duração (BODMER, 1971; WITTEN, 1984). Para que esta hipótese seja verdadeira, a transição de fase da matéria de quarks para a matéria hadrônica não deve ocorrer dentro da EN, ou seja, não devem existir EHs, mas sim EQs. Numericamente, isto significa que a interface quark-hádron deve estar localizada em $p < 0$.

Na sequência, precisaremos de uma relação entre g e μ . Utilizando a definição de G , temos

$$g = \frac{G}{N} = \frac{\rho + p}{n} + Ts. \quad (148)$$

Nas ENs temos $T = 0$, de modo que, isolando ρ , obtemos

$$\rho = gn - p. \quad (149)$$

Comparando com a equação (140), e lembrando que $n = 3n_i$ pela equação (138), vemos que

$$\mu = g. \quad (150)$$

Definindo

$$g_i := \frac{\rho + p}{n_i}, \quad (151)$$

notamos que $g_i = 3\mu$, já que $n = 3n_i$.

Agora podemos avaliar a condição limite, na qual a transição de fase quark-hádron ocorre em $p = 0$. Pela construção de Maxwell, temos que $\mu^{(q)}(0) = \mu^{(h)}(0)$, ou de maneira equivalente, $g(0) := g_i^{(q)}(0) = g_i^{(h)}(0)$, onde $g(0)$ é a energia livre de Gibbs por bárion da matéria hadrônica à pressão nula, aqui considerada a do ferro, de aproximadamente 930 MeV.

Substituindo $p = 0$ e $\mu = g(0)/3$ na equação (133), lembrando que $p = -\omega$ pela equação (141), obtemos

$$B_{lim} = \frac{g^2(0)}{108\pi^2} [g^2(0)a_4 - 9a_2]. \quad (152)$$

Caso $g_i^{(q)}(0) < g(0)$, $B < B_{lim}$, temos que a matéria de quarks é o estado fundamental da matéria, e a hipótese de Bodmer-Witten é verdadeira. Caso contrário, a transição de fase quark-hádron se dá em uma pressão positiva não nula, dentro da EN, resultando em uma EH.

Também precisamos garantir que a matéria hadrônica não está em um estado de equilíbrio metaestável. Para isso, temos que $(g(0) = g_i^{(h)}(0)) < g_i^{(ud)}(0)$, sendo $g_i^{(ud)}(0)$ a energia livre de Gibbs por bárion da matéria de quarks composta por quarks *up* e *down* apenas. A densidade do grande potencial para a matéria de quarks *up-down* é dada por (PEREIRA; FLORES; LUGONES, 2018)

$$\tilde{\omega} = -\frac{6a_4}{\pi^2(1+2^{1/3})^3}\tilde{\mu}^4 + \frac{a_2}{2\pi^2}\tilde{\mu}^2 + \tilde{B}, \quad (153)$$

onde $\tilde{\mu} := (\mu_u + \mu_d)/2 = (1+2^{1/3})\mu_u$ devido à neutralidade de carga. Substituindo $\tilde{p} = 0$ e $\tilde{\mu} = g(0)/3$, lembrando que $\tilde{p} = -\tilde{\omega}$ pela equação (141), obtemos

$$\tilde{B}_{lim} = \frac{g^2(0)}{54\pi^2} \left[\frac{4g^2(0)a_4}{(1+2^{1/3})^3} - 3a_2 \right]. \quad (154)$$

Assim, caso $g(0) < g_i^{(ud)}(0)$, $\tilde{B} > \tilde{B}_{lim}$, temos que a matéria hadrônica é estável, e não a matéria de quarks *up-down*. Consideramos esta condição, embora estudos recentes indicam a possibilidade da matéria de quarks *up-down* ser energeticamente mais favorável que a matéria hadrônica (HOLDOM; REN; ZHANG, 2018).

Agora temos todas as condições necessárias para estabelecer os limites dos parâmetros livres da EdE de quarks para o caso de EQs e EHs. Começando com o parâmetro B , podemos resumir a discussão acima da seguinte forma:

$$\begin{cases} (\tilde{B}_{lim} < B < B_{lim}) \rightarrow \text{EQ}, \\ (B > \tilde{B}_{lim}) \text{ e } (B > B_{lim}) \rightarrow \text{EH}. \end{cases} \quad (155)$$

Para o caso de EQs, é preciso exigir que $B_{lim} > \tilde{B}_{lim}$. Substituindo as equações (152) e (154) nesta condição, e isolando a_2 , obtemos o limite superior do parâmetro a_2 em termos do parâmetro a_4 , de modo que

$$0 < a_2 < \left(\frac{1}{3} - \frac{8}{3(1 + 2^{1/3})^3} \right) g^2(0)a_4, \quad (156)$$

onde consideramos que a_2 é positivo. Note que o limite superior de a_2 só é determinado no caso de EQs, de modo que para EHs precisamos estipular um valor arbitrário, que discutiremos posteriormente. Assumindo que a_4 também é positivo e considerando que na fase *CFL* $a_4 = 1 - c$, chegamos à conclusão que $a_{4max} = 1$, que corresponde ao caso de quarks não interagentes, de modo que os limites de a_4 se resumem à

$$0 < a_4 < 1. \quad (157)$$

6 METODOLOGIA

Neste capítulo serão abordados os métodos utilizados, incluindo uma descrição geral do código numérico desenvolvido, que está disponível na íntegra em (ZASTROW, 2024), os testes utilizados para a validação do código, e por fim, os dados experimentais utilizados para restringir os parâmetros das equações de estado (EdEs) de quarks e híbrida.

6.1 CÓDIGO NUMÉRICO

Desenvolvemos um programa em *Python* (FOUNDATION, 2024) para realizar a análise numérica das estrelas de nêutrons (ENs), que está disponível em (ZASTROW, 2024). Os códigos que compõem o programa estão organizados em classes, aqui descritas sucintamente.

A classe *Star* possui todas as propriedades e métodos que descrevem uma única estrela estática e esfericamente simétrica, utilizando uma EdE escolhida. Assim, possui os algoritmos necessários para resolver numericamente as equações *Tolman-Oppenheimer-Volkoff* (*TOV*), utilizando o método de Runge-Kutta de 4^a ordem com passo de cálculo adaptativo (DORMAND; PRINCE, 1980). Relembrando, as equações *TOV* são dadas pelas equações (63), (64), e (65), aqui reescritas:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (158)$$

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{2(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}, \quad (159)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}, \quad (160)$$

com as condições de contorno dadas pela equação (68):

$$\begin{cases} m(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_c r^3 - \frac{8}{15}\pi^2 \frac{d\rho(p_c)}{dp} (\rho_c + p_c)(\rho_c + 3p_c)r^5, \\ p(r) = p_c - \frac{2}{3}\pi(\rho_c + p_c)(\rho_c + 3p_c)r^2, \\ \rho(r) = \rho_c - \frac{2}{3}\pi \frac{d\rho(p_c)}{dp} (\rho_c + p_c)(\rho_c + 3p_c)r^2, \end{cases} \quad (161)$$

e utilizando um valor inicial para a coordenada radial $r_{init} = 0.1$ m, um valor muito pequeno que satisfaz as equações (69) e (70):

$$r_{max} = \min \left(r_{max}^{(p)}, r_{max}^{(\rho)} \right), \quad (162)$$

$$\begin{cases} r_{max}^{(p)} = \left(\left| \frac{p_c}{p_2} \right| \epsilon_{rel} \right)^{1/2}, \\ r_{max}^{(\rho)} = \left(\left| \frac{\rho_c}{\rho_2} \right| \epsilon_{rel} \right)^{1/2}. \end{cases} \quad (163)$$

Desta forma, a integração das equações *TOV* é iniciada em $r = r_{init}$ para uma dada densidade central ρ_c , e finalizada quando a pressão atinge $p = p_{surface} = 10^{21} \text{ dyn cm}^{-2}$, uma pressão baixa o suficiente para caracterizar a superfície da estrela (em relação à pressão central, sendo da ordem de $10^{36} \text{ dyn cm}^{-2}$).

Em seguida, temos a classe *DeformedStar*, que herda todas as propriedades e métodos da classe *Star*, e adiciona os algoritmos para calcular a deformação de maré. Assim, possui os métodos para a solução numérica do sistema de equações composto pelas equações *TOV* e pela equação da perturbação, dada pelas equações (93), (90), e (91), aqui reescritas:

$$y' = -C_0r + \left(\frac{1}{r} - C_1\right)y - \frac{1}{r}y^2, \quad (164)$$

$$C_0 = e^\lambda \left[-\frac{l(l+1)}{r^2} + 4\pi(\rho+p)\frac{d\rho}{dp} + 4\pi(5\rho+9p) \right] - (\nu')^2, \quad (165)$$

$$C_1 = \frac{2}{r} + e^\lambda \left[\frac{2m}{r^2} + 4\pi r(p-\rho) \right], \quad (166)$$

com a condição de contorno dada pela equação (96) para o caso $l = 2$ expressa por

$$y(r) \approx 2, \quad (167)$$

e considerando a correção devido à transição de fase, dada pelas equações (114) e (115):

$$y(r_d + \epsilon) = y(r_d - \epsilon) + \Delta y(r_d), \quad (168)$$

$$\Delta y(r_d) = \frac{\rho(r_d + \epsilon) - \rho(r_d - \epsilon)}{m/4\pi r_d^3 + p_d}, \quad (169)$$

ou devido à descontinuidade da densidade na superfície da estrela, dada pelas equações (116) e (117):

$$y(R + \epsilon) = y(R - \epsilon) + \Delta y(R), \quad (170)$$

$$\Delta y(R) = -\frac{4\pi R^3 \rho(R - \epsilon)}{M}. \quad (171)$$

Com a solução da perturbação disponível, o código então calcula o número de Love e a deformabilidade de maré, dados pelas equações (107) e (75), aqui reescritas:

$$\begin{aligned} k_2 = & \frac{8}{5}C^5(1-2C)^2[2+2C(y_s-1)-y_s] \\ & \times \left\{ 2C[6-3y_s+3C(5y_s-8)] + 4C^3[13-11y_s+C(3y_s-2)+2C^2(1+y_s)] \right. \\ & \left. + 3(1-2C)^2[2-y_s+2C(y_s-1)] \ln(1-2C) \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (172)$$

$$\Lambda = \frac{2}{3} k_2 C^{-5}. \quad (173)$$

Já a classe *StarFamily* possui os algoritmos para gerar uma família de estrelas, calcular suas propriedades e criar os gráficos relacionados. Para isso, as equações *TOV* são resolvidas para uma faixa de densidades centrais ρ_c , reutilizando o código da classe *Star* por meio de um objeto desta classe. Além disso, existem algoritmos que determinam as propriedades da família de estrelas, que incluem a massa máxima (M_{max}) e o raio da estrela canônica ($R_{canonical}$), e propriedades relacionadas.

Existe ainda a classe *DeformedStarFamily*, que herda todas as propriedades e métodos da classe *StarFamily*. Além disso, ela possui algoritmos para resolver o sistema de equações composto pelas equações *TOV* e pela equação da perturbação para a família de estrelas, reutilizando o código da classe *DeformedStar* por meio de um objeto desta classe. Também existem algoritmos para calcular as propriedades extras da família de estrelas, como o número de Love máximo (k_{2max}) e a deformabilidade da estrela canônica ($\Lambda_{canonical}$), e propriedades relacionadas.

Por fim, a última classe principal do programa é a classe *EOS*, que possui os métodos comuns à todas as EdEs, e serve como classe pai para a criação de outras classes de EdEs específicas, determinadas por tabelas, interpolações, ou equações explícitas.

A escolha do uso da orientação a objetos permite a modularização e confere flexibilidade ao programa. Devido a esta estrutura, é possível implementar os cálculos para novas EdEs de forma muito mais direta, já que as classes *Star*, *DeformedStar*, *StarFamily*, e *DeformedStarFamily* possuem um parâmetro de entrada que é um objeto da classe *EOS*.

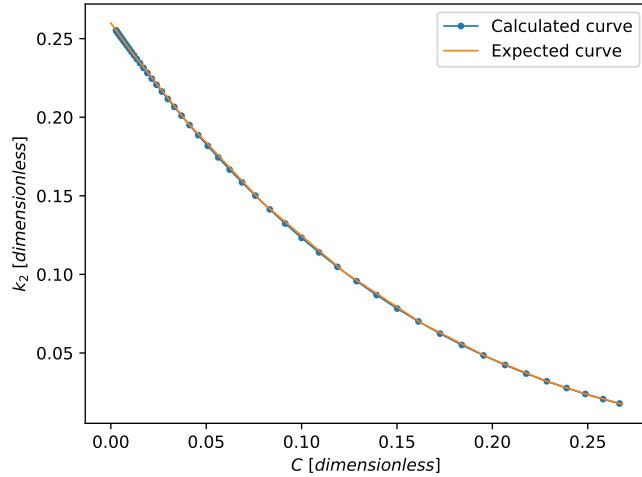
Desenvolvemos alguns *scripts* que utilizam estas classes para calcular as propriedades de famílias de estrelas diferentes, e também *scripts* que executam uma análise automática para as EdEs de quarks e híbrida. Os *scripts* de análise automática geram um conjunto de pontos no espaço de parâmetros da EdE em questão, utilizando a amostragem quase-randômica de hipercubo latino (MCKAY; BECKMAN; CONOVER, 1979). Em seguida, selecionam apenas os pontos no interior do volume permitido pela EdE e calculam as propriedades de cada família de estrelas caracterizada pelo ponto correspondente no espaço de parâmetros. Por fim, utilizam os dados observacionais para filtrar as parametrizações, estabelecendo limites nos parâmetros livres da EdE e nas propriedades das famílias de estrelas. Estes algoritmos serão melhor ilustrados na análise dos resultados.

6.1.1 Validação

Para validar o algoritmo numérico, foram realizados os cálculos para uma família de estrelas utilizando diferentes EdEs que possuem resultados publicados em outros trabalhos. As principais curvas utilizadas para comparação são a curva da massa em relação ao raio e a curva do número de Love em relação à compacidade.

A primeira EdE utilizada para validação é a EdE politrópica, dada pela equação (126). Os resultados esperados estão disponíveis em (BANNINGTON; POISSON, 2009), ilustrados na Figura 10.

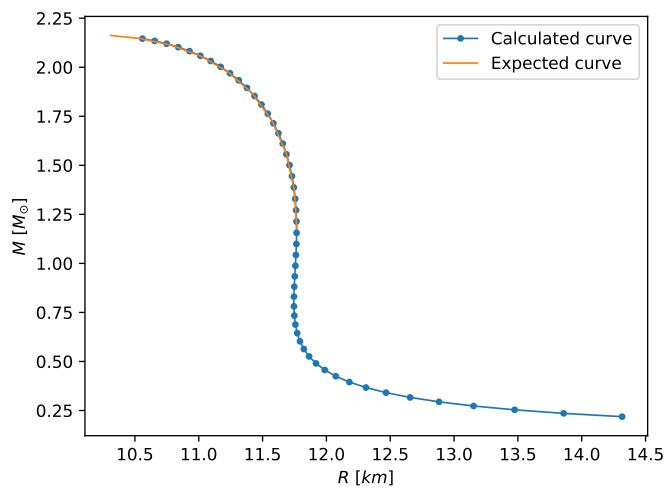
Figura 10 – Número de Love em relação à compacidade para a EdE Politrópica com $n = 1$, comparando resultados obtidos (em azul) e esperados (em laranja).



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

A segunda EdE utilizada é a *Brussels-Montreal Skyrme 20* (*BSk20*), dada pela equação (130) com os coeficientes definidos na Tabela 2. Os resultados esperados estão disponíveis em (GITTINS; ANDERSSON; PEREIRA, 2020), ilustrados nas Figuras 11 e 12.

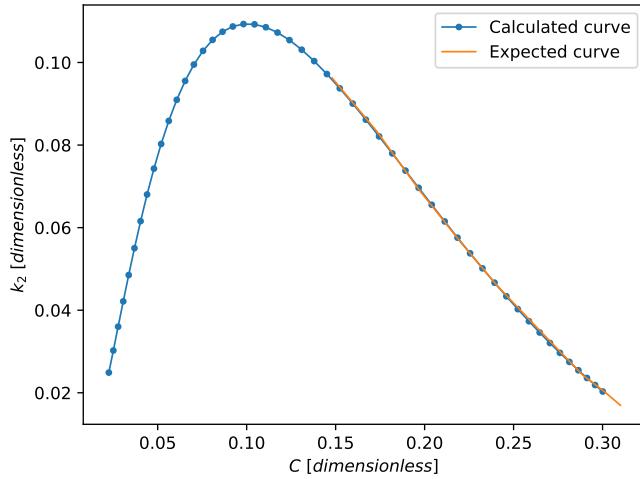
Figura 11 – Massa em relação ao raio para a EdE *BSk20*, comparando resultados obtidos (em azul) e esperados (em laranja).



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

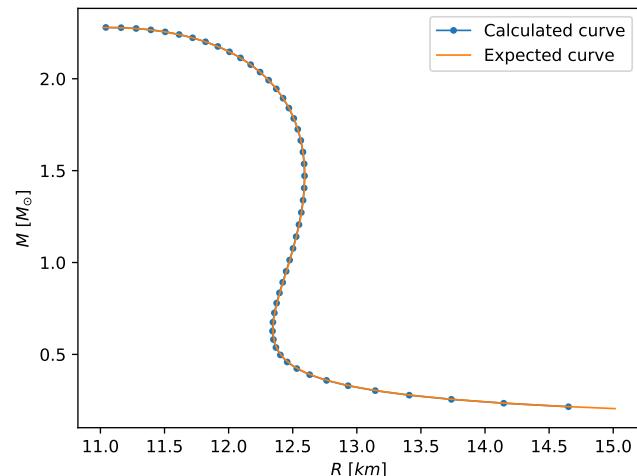
Por fim, a última EdE utilizada para validação é a *Brussels-Montreal Skyrme 24* (*BSk24*), dada pela equação (130) com os coeficientes definidos na Tabela 2. Os resultados esperados estão disponíveis em (COMPOSE, 2024b), ilustrados nas Figuras 13 e 14.

Figura 12 – Número de Love em relação à compacidade para a EdE *BSk20*, comparando resultados obtidos (em azul) e esperados (em laranja).



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

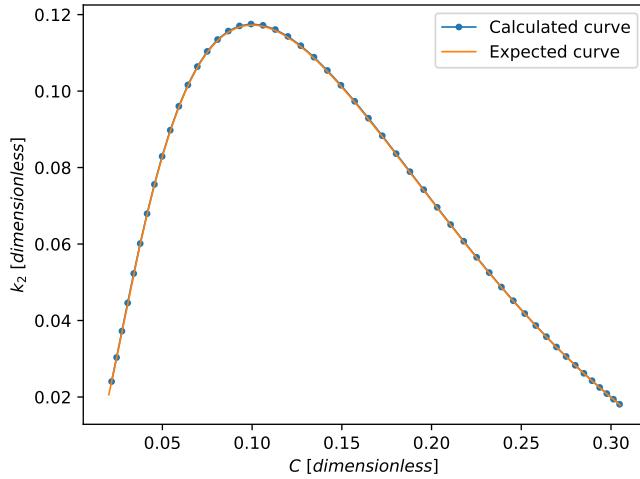
Figura 13 – Massa em relação ao raio para a EdE *BSk24*, comparando resultados obtidos (em azul) e esperados (em laranja).



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Como pode ser observado nas Figuras 10, 11, 12, 13, e 14, o programa desenvolvido fornece de forma bastante satisfatória os resultados esperados para as características das famílias de estrelas utilizando EdEs diferentes, demonstrando a validade dos algoritmos numéricos empregados.

Figura 14 – Número de Love em relação à compacidade para a EdE *BSk24*, comparando resultados obtidos (em azul) e esperados (em laranja).



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

6.2 DADOS EXPERIMENTAIS

Nesta seção serão descritos os dados experimentais utilizados na análise das EdEs de quarks e híbrida. Os observáveis escolhidos são a massa máxima da família de estrelas (M_{max}), o raio da estrela canônica ($R_{canonical}$), e a deformabilidade da estrela canônica ($\Lambda_{canonical}$), cujos limites estão resumidos na Tabela 3, discutidos na sequência.

Tabela 3 – Limites dos observáveis das ENs.

| M_{max} [M_\odot] (2.13, 2.33) | $R_{canonical}$ [km] (10.00, 13.25) | $\Lambda_{canonical}$ [adimensional] (0, 970) |
|---|--|--|
|---|--|--|

Fonte: Romani et al. (2022), Rezzolla, Most e Weih (2018), Pang et al. (2023), Abbott et al. (2017).

O limite inferior para a massa máxima das ENs é $M_{max} > 2.13 M_\odot$ com 2σ de confiança, valor retirado de (ROMANI et al., 2022), onde os autores obtiveram este limite inferior utilizando estimativas de massa de ENs em binários pulsar - anã branca (AB), e binários *spider*, pulsares que possuem uma estrela companheira em uma órbita próxima. Para o caso de binários pulsar-AB, as estimativas de massas das ENs foram obtidas por meio da temporização dos pulsos de rádio e modelagem da atmosfera das ABs. Já para o caso de binários *spider*, os espectros das companheiras e a curva de luz dos pulsares foram utilizados para determinar as estimativas de massas das ENs.

E o limite superior para a massa máxima das ENs é $M_{max} < 2.33 M_\odot$ com 2σ de confiança, valor retirado de (REZZOLLA; MOST; WEIH, 2018), onde os autores utilizaram os dados do evento de onda gravitacional (OG) GW170817 e o evento de explosão de raios-gama (*Gamma-Ray Burst - GRB*) GRB 170817A para determinar este limite. Considerando que a modelagem das kilonovas indica que a formação de um buraco

negro (BN) gera uma explosão curta de raios-gama (*Short Gamma-Ray Burst - SGRB*), e que a emissão de um *SGRB* foi observada logo após o *merger* das ENs do evento GW170817, conclui-se que o objeto resultante é um BN com uma massa próxima ao limite superior da massa máxima das ENs. Esse argumento é utilizado para estimar esse limite.

O segundo observável é o raio da estrela canônica ($R_{canonical}$), aquela com massa de $1.4 M_{\odot}$. Existem diversos trabalhos que consideram modelos diferentes para a EdE, utilizam dados diferentes, e algoritmos estatísticos diferentes, levando a uma gama de resultados para os limites do raio da estrela canônica. Neste trabalho foram utilizados como base os estudos resumidos na tabela 1 disponível em (PANG et al., 2023). Desta forma, a fim de utilizar restrições mais conservadoras, foi utilizado o menor limite mínimo encontrado no conjunto de estudos citados, de $R_{canonical} > 10.00 \text{ km}$, e o maior limite máximo dentro deste mesmo conjunto de estudos, de $R_{canonical} < 13.25 \text{ km}$.

Por fim, temos a deformabilidade da estrela canônica ($\Lambda_{canonical}$), que foi estimada pela colaboração *LIGO-Virgo* utilizando o evento de OG GW170817, e possui um limite superior de $\Lambda_{canonical} < 970$ com 2σ de confiança, limite estimado por meio de uma expansão da deformabilidade em torno da massa $1.4 M_{\odot}$ obtido em (ABBOTT et al., 2017).

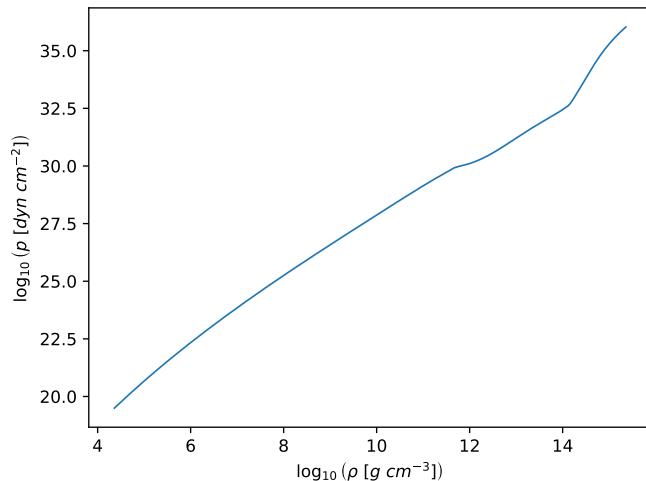
7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, serão analisados os resultados das simulações realizadas para estrelas de nêutrons (ENs) formadas com equações de estado (EdEs) hadrônica, de quarks e híbrida. Os gráficos ilustrados a seguir e outros gráficos aqui omitidos estão disponíveis em (ZASTROW, 2024).

7.1 ESTRELAS DE NÊUTRONS HADRÔNICAS

A EdE escolhida para a análise das estrelas de nêutrons hadrônicas (ENHs) é a *Brussels-Montreal Skyrme 24 (BSk24)*, dada pela equação (130) com os coeficientes definidos na Tabela 2. Esta EdE é ilustrada na Figura 15, que evidencia os comportamentos distintos da EdE para densidades baixas, médias e altas, diretamente relacionados aos fenômenos da física nuclear considerados no modelo.

Figura 15 – Logaritmo da pressão em relação ao logaritmo da densidade para a EdE *BSk24*.



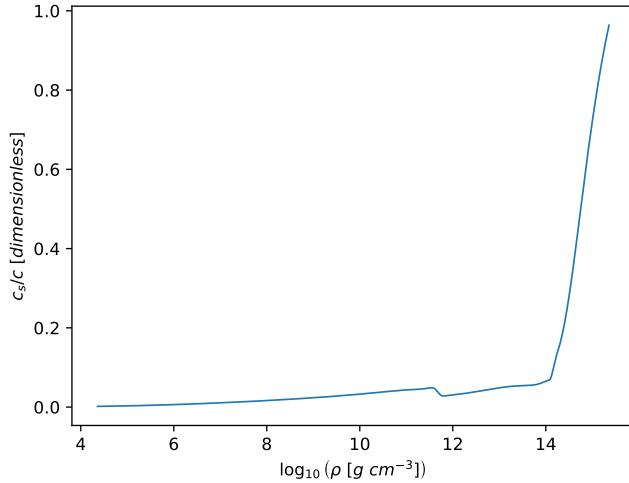
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Também podemos analisar a velocidade do som no interior das ENs geradas com esta EdE, segundo a equação (72), conforme ilustrado na Figura 16. Vemos que a velocidade do som no interior das ENs é relativamente baixa para densidades menores, e aumenta significativamente para densidades maiores que $10^{14}\ g\ cm^{-3}$.

Agora, para compreender a estrutura interna das ENs, podemos resolver o sistema de equações que inclui as equações *Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)* e a equação da perturbação, conforme descrito anteriormente. Resolvendo estas equações para uma estrela específica, caracterizada pela densidade central $\rho_c = 2.29 \times 10^{15}\ g\ cm^{-3}$ neste exemplo, obtemos as propriedades da estrela em relação à coordenada radial.

Na Figura 17 vemos que a pressão e a densidade decrescem monotonicamente, enquanto a função massa e a função métrica crescem monotonicamente. O comportamento

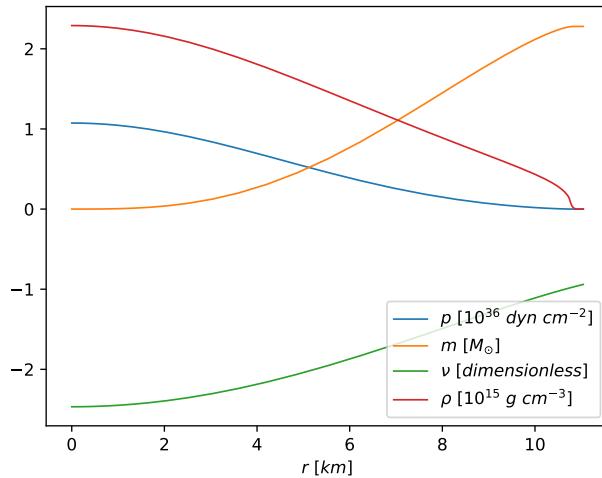
Figura 16 – Velocidade do som em relação ao logaritmo da densidade para a EdE *BSk24*.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

da densidade próximo à superfície da estrela é devido ao formato da EdE próximo a densidades da ordem de $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$.

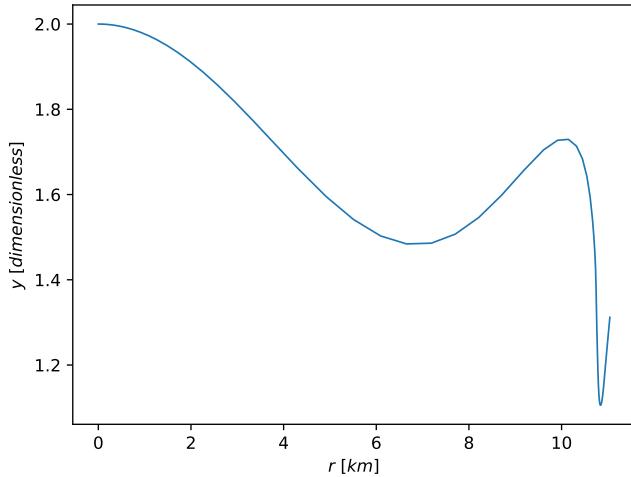
Figura 17 – Propriedades relacionadas à estrutura interna de uma estrela em relação à coordenada radial para a EdE *BSk24*: pressão (em azul), função massa (em laranja), função métrica (em verde), e densidade (em vermelho).



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Já a Figura 18 mostra como a perturbação muda bastante o comportamento próximo à superfície da estrela, também devido ao formato da EdE. Esta estrela em particular possui raio $R \approx 11.042 \text{ km}$, massa $M = m(R) \approx 2.279 M_\odot$, e número de Love $k_2 \approx 0.018$.

Figura 18 – Perturbação em relação à coordenada radial de uma estrela para a EdE *BSk24*.

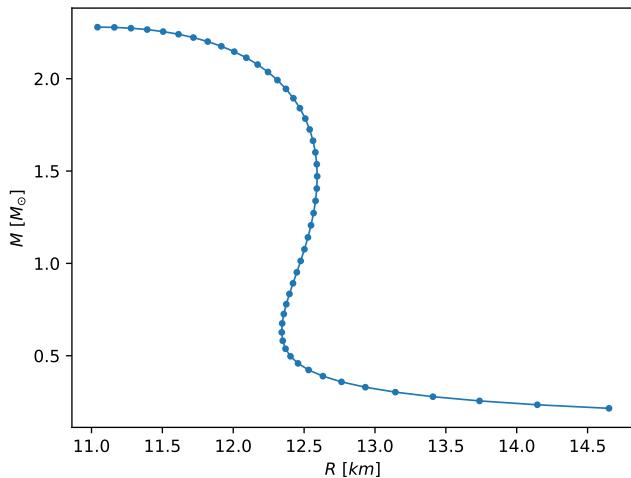


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.1.1 Família de estrelas

O próximo passo é a análise das propriedades da família de estrelas gerada com essa EdE por meio de algumas curvas frequentemente utilizadas em outros trabalhos: a massa em relação ao raio (Figura 19), o número de Love em relação à compacidade (Figura 20), e a deformabilidade em relação à massa (Figura 21).

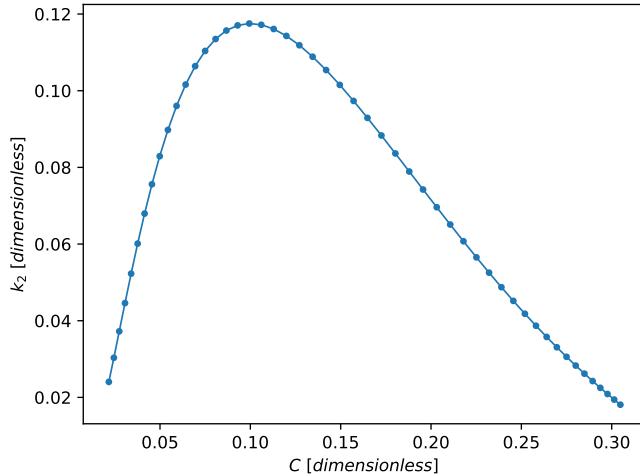
Figura 19 – Massa em relação ao raio para a EdE *BSk24*.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

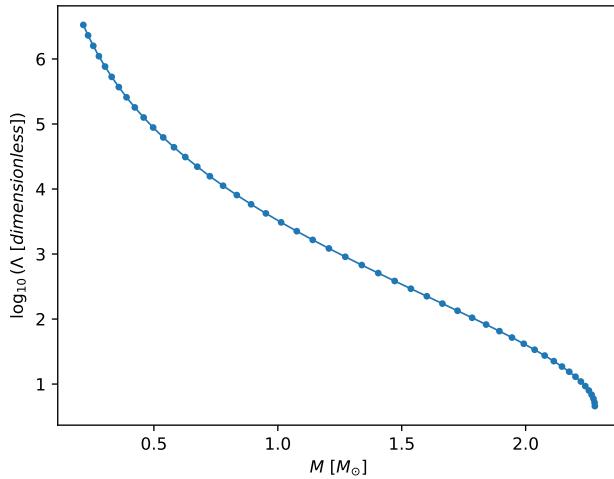
Também temos as principais características: a massa máxima $M_{max} \approx 2.279 M_{\odot}$, o raio da estrela canônica $R_{canonical} \approx 12.589 \text{ km}$, a deformabilidade da estrela canônica $\Lambda_{canonical} \approx 520.7$, e o número de Love máximo $k_{2max} \approx 0.118$. Notamos que M_{max} , $R_{canonical}$, e $\Lambda_{canonical}$ estão em conformidade com os limites observacionais, segundo a Tabela 3.

Figura 20 – Número de Love em relação à compacidade para a EdE *BSk24*.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 21 – Logaritmo da deformabilidade de maré em relação à massa para a EdE *BSk24*.



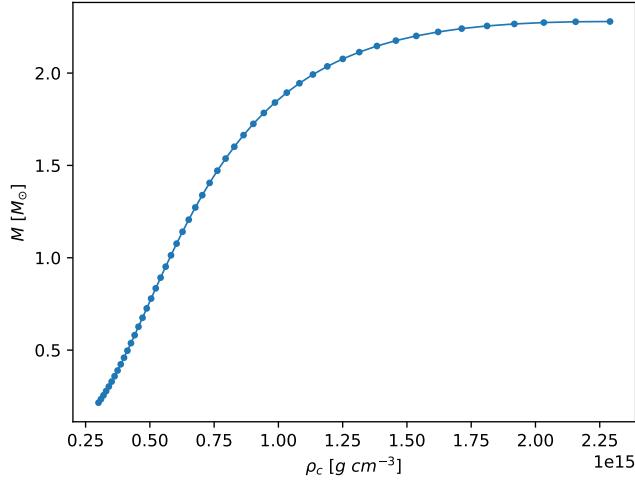
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Analisaremos as Figuras 19, 20, e 21 na sequência, mas para isso precisamos entender como as propriedades variam com a densidade central, utilizada na parametrização da família de estrelas. A Figura 22 mostra que a massa cresce monotonicamente com a densidade central, até atingir a massa máxima. A partir desta densidade central, as estrelas não são estáveis, conforme a condição de estabilidade dada pela equação (71).

Já a Figura 23 indica que o raio decresce com a densidade central, exceto em um intervalo intermediário. Assim, para densidades centrais menores temos estrelas menos massivas com raios maiores, e para densidades centrais maiores temos estrelas mais massivas com raios menores.

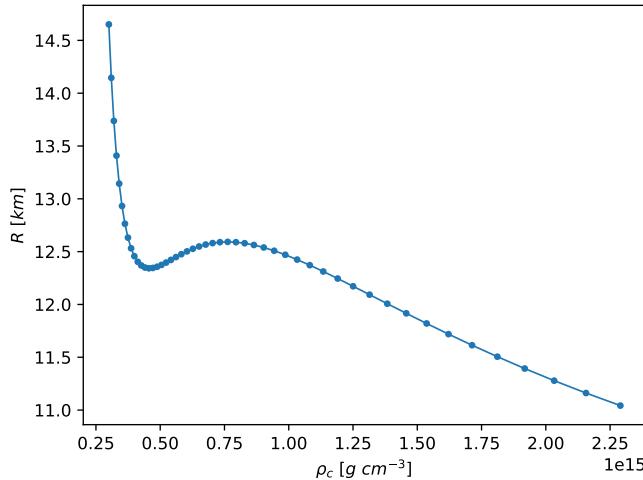
Com isso em mente, analisando a Figura 19, vemos que o gráfico abrange densidades centrais maiores na região à esquerda, com estrelas mais massivas e compactas, e densidades

Figura 22 – Massa em relação à densidade central para a EdE *BSk24*.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 23 – Raio em relação à densidade central para a EdE *BSk24*.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

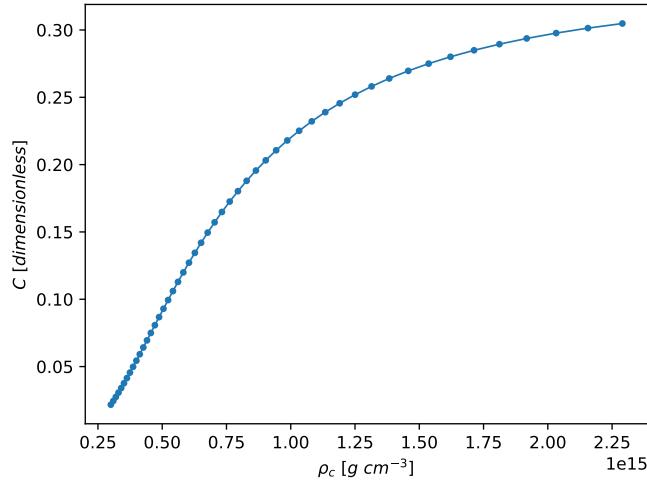
centrais menores na região à direita, com estrelas menos massivas e maiores.

Conforme esperado pelo comportamento da massa e do raio em relação à densidade central, vemos pela Figura 24 que a compacidade cresce com a densidade central.

Já pela Figura 25, vemos que o número de Love tem um valor máximo, e se aproxima de zero nos extremos. Assim, temos que o comportamento da curva do número de Love em relação à compacidade deve ser semelhante, como já ilustrado na Figura 20.

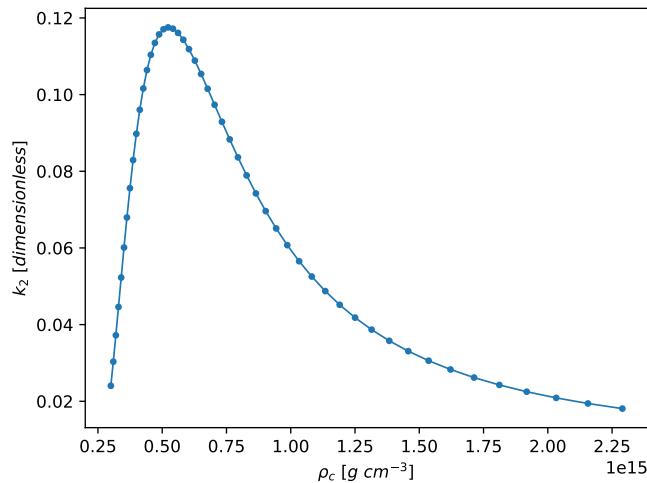
A curva dada pela Figura 20 pode ser compreendida por meio das expressões dos limites do número de Love. Para estrelas com compacidades baixas e raios grandes, pode ser observado que a perturbação na superfície $y(R)$ fica com valores próximos de 2, de modo que, pela equação (119), $k_2 \rightarrow 0$ para $C \rightarrow 0$ e $y(R) \rightarrow 2$, que justifica o comportamento da curva na Figura 20 para valores menores de compacidade. Já o comportamento para valores grandes de compacidade é justificado pela equação (120),

Figura 24 – Compacidade em relação à densidade central para a EdE *BSk24*.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 25 – Número de Love em relação à densidade central para a EdE *BSk24*.

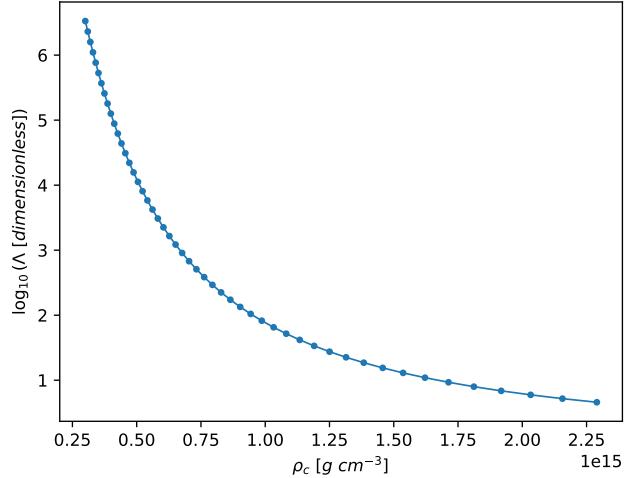


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

onde $k_2 \rightarrow 0$ para $C \rightarrow C_{BN} = 1/2$, sendo C_{BN} a compacidade de buracos negros (BNs).

Por fim, temos a Figura 26, que mostra que a deformabilidade decresce com a densidade central. Vimos anteriormente que a massa cresce com a densidade central atingindo um valor máximo, pela Figura 22, de modo que a curva da deformabilidade em relação à massa (Figura 21) deve ser semelhante à curva da deformabilidade em relação à densidade central (Figura 26), como confirmamos ao comparar as Figuras 21 e 26.

Figura 26 – Logaritmo da deformabilidade de maré em relação à densidade central para a EdE *BSk24*.

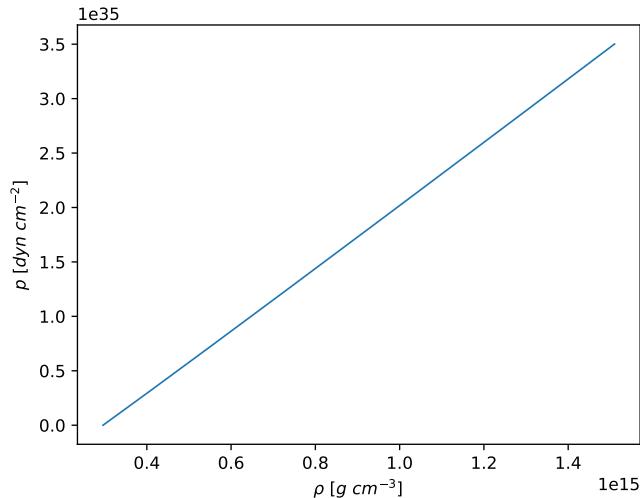


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.2 ESTRELAS DE QUARKS

A EdE de quarks, dada pela equação (145) (com $a_2^{1/2} = 100\ MeV$, $a_4 = 0.6$, e $B^{1/4} = 130\ MeV$ para este exemplo, valores escolhidos para formar estrelas de quarks (EQs), conforme as equações (155), (156), e (157)), é ilustrada na Figura 27, que indica que a relação entre a pressão e a densidade é bem próxima de uma relação linear, e a densidade é da ordem de $10^{14}\ g\ cm^{-3}$ para a pressão nula.

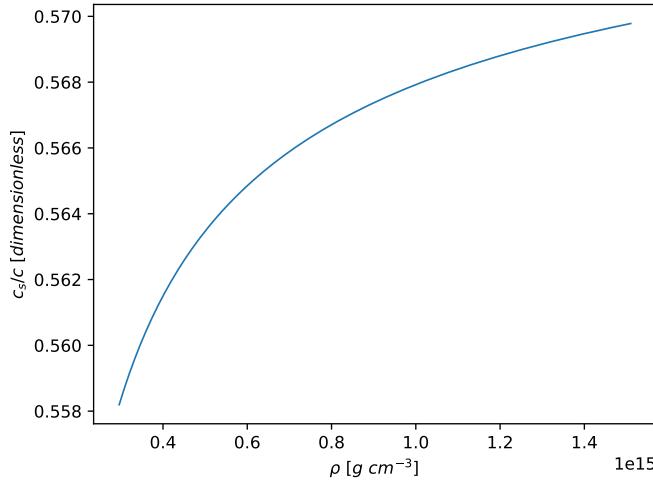
Figura 27 – Pressão em relação à densidade para a EdE de quarks.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Podemos ver pela Figura 28 que a velocidade do som no interior das ENs geradas com esta EdE varia relativamente pouco, confirmando que a relação entre a pressão e a densidade é aproximadamente linear.

Figura 28 – Velocidade do som em relação à densidade para a EdE de quarks.

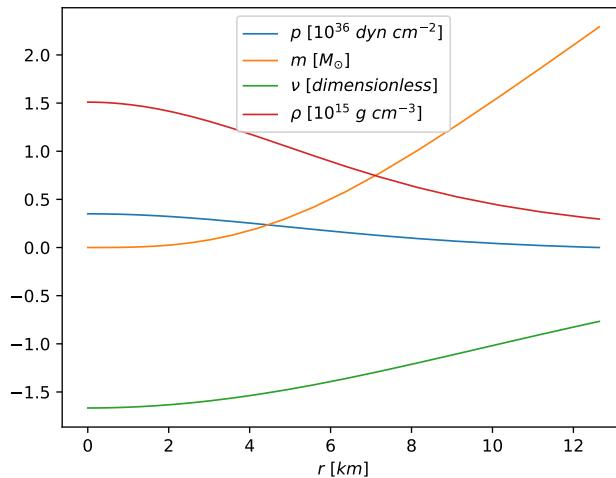


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Resolvendo o sistema de equações que engloba as equações TOV e a equação da perturbação para uma estrela específica, caracterizada pela densidade central $\rho_c = 1.51 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ neste exemplo, obtemos as propriedades da estrela em relação à coordenada radial.

Na Figura 29 vemos que a pressão e a densidade decrescem monotonicamente, enquanto a função massa e a função métrica crescem monotonicamente. Podemos notar também que a densidade na superfície da estrela é da ordem de $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$, que está conforme a densidade à pressão nula da EdE.

Figura 29 – Propriedades relacionadas à estrutura interna de uma estrela em relação à coordenada radial para a EdE de quarks: pressão (em azul), função massa (em laranja), função métrica (em verde), e densidade (em vermelho).

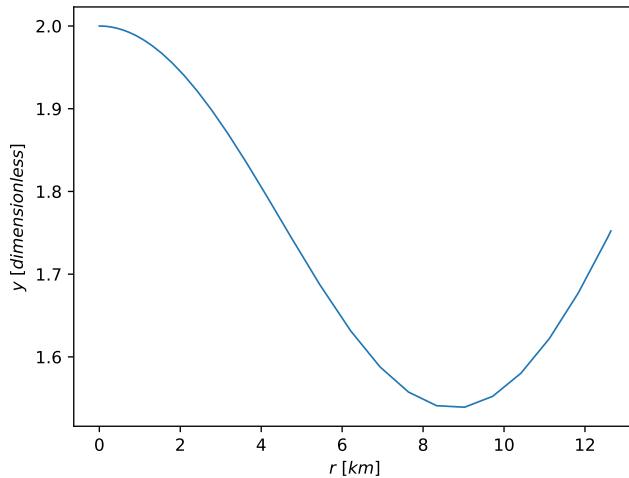


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Já a Figura 30 mostra como a perturbação se comporta no interior da estrela. Note que este gráfico não considera a correção Δy na superfície da estrela devido à

descontinuidade na densidade. Esta estrela em particular possui raio $R \approx 12.640 \text{ km}$, massa $M = m(R) \approx 2.292 M_{\odot}$, e número de Love $k_2 \approx 0.050$, onde o cálculo de k_2 considera a correção Δy na superfície da estrela.

Figura 30 – Perturbação em relação à coordenada radial de uma estrela para a EdE de quarks.

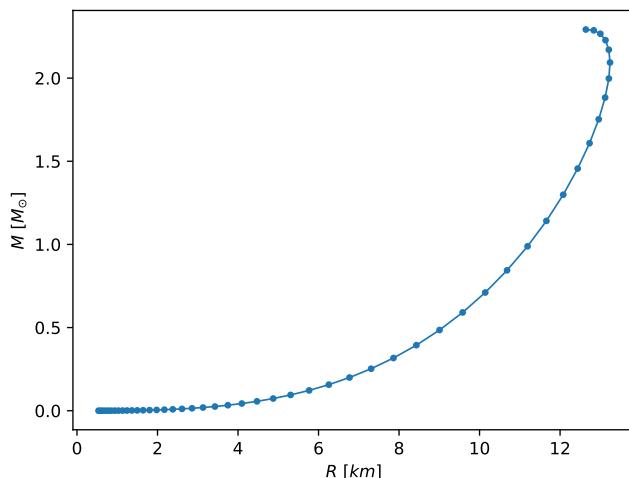


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.2.1 Família de estrelas

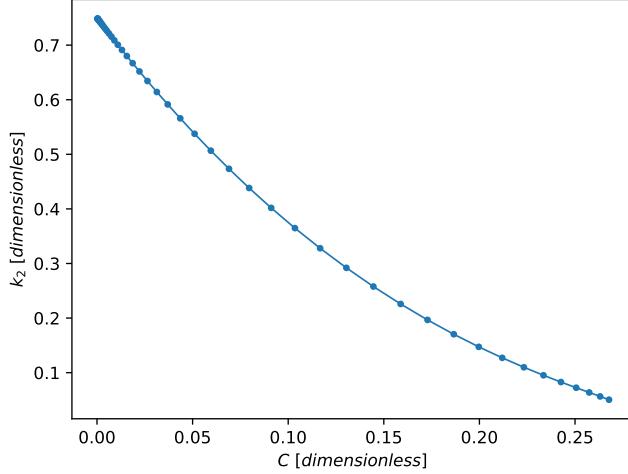
Novamente, analisaremos as propriedades da família de estrelas gerada com essa EdE por meio de algumas curvas frequentemente utilizadas em outros trabalhos: a massa em relação ao raio (Figura 31), o número de Love em relação à compacidade (Figura 32), e a deformabilidade em relação à massa (Figura 33).

Figura 31 – Massa em relação ao raio para a EdE de quarks.



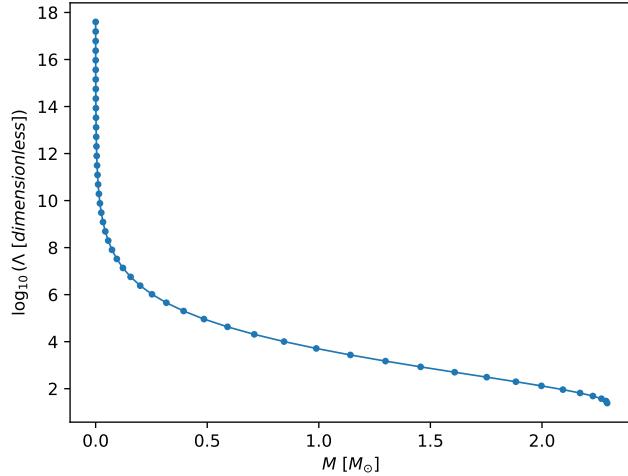
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 32 – Número de Love em relação à compacidade para a EdE de quarks.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 33 – Logaritmo da deformabilidade de maré em relação à massa para a EdE de quarks.

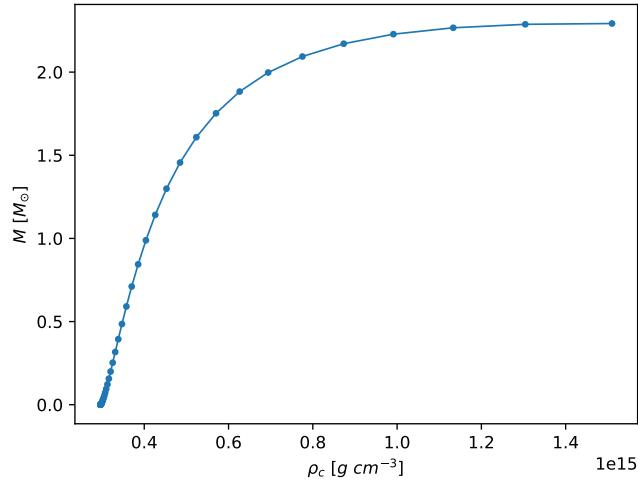


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Também temos as principais características: a massa máxima $M_{max} \approx 2.292 M_{\odot}$, o raio da estrela canônica $R_{canonical} \approx 12.316 km$, a deformabilidade da estrela canônica $\Lambda_{canonical} \approx 1034.3$, e o número de Love máximo $k_{2max} \approx 0.749$. Notamos que M_{max} e $R_{canonical}$ estão em conformidade com os limites observacionais, porém $\Lambda_{canonical}$ está acima do limite superior, segundo a Tabela 3. Isto não é um problema, pois este caso é utilizado apenas como um exemplo para avaliar o comportamento geral da EdE de quarks.

Analisaremos as Figuras 31, 32, e 33 na sequência, mas para isso precisamos entender como as propriedades variam com a densidade central, utilizada na parametrização da família de estrelas. A Figura 34 mostra que a massa cresce monotonicamente com a densidade central, até atingir a massa máxima. A partir desta densidade central, as estrelas não são estáveis, conforme a condição de estabilidade dada pela equação (71).

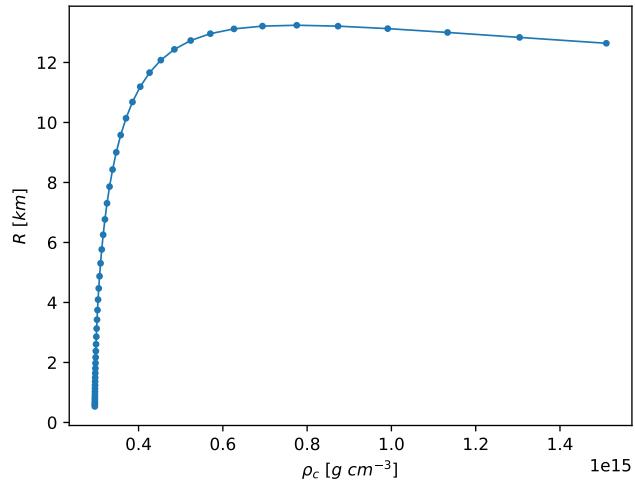
Figura 34 – Massa em relação à densidade central para a EdE de quarks.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Já a Figura 35 indica que o raio cresce com a densidade central para densidades mais baixas, atinge um valor máximo, e começa a decrescer lentamente. Assim, para densidades centrais menores temos estrelas menos massivas com raios menores, e para densidades centrais maiores temos estrelas mais massivas com raios maiores.

Figura 35 – Raio em relação à densidade central para a EdE de quarks.



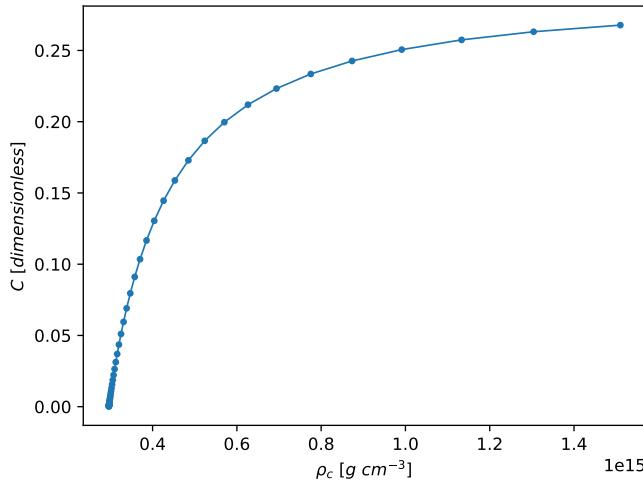
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Com isso em mente, analisando a Figura 31, vemos que o gráfico abrange densidades centrais menores na região à esquerda, com estrelas menores e menos massivas, e densidades centrais maiores na região à direita, com estrelas mais massivas e maiores.

Comparando as Figuras 31 e 19, notamos que as EQs menos massivas possuem raios pequenos, em contraste com as ENHs, que possuem raios maiores. Essa é uma característica importante das EQs, que pode ser utilizada na identificação de possíveis EQs na natureza (LI et al., 2014).

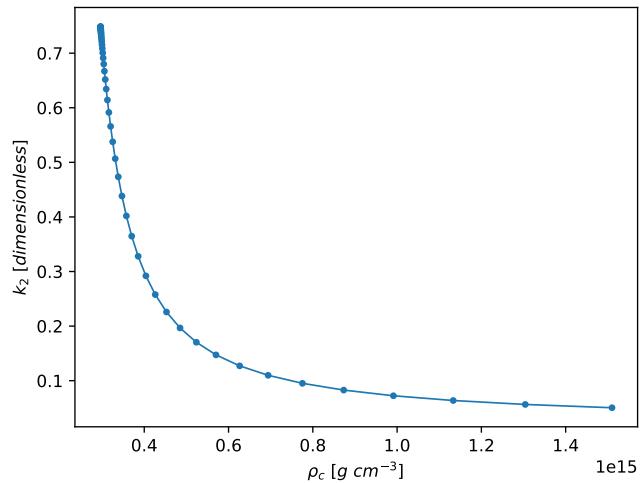
Vemos pela Figura 36 que a compacidade cresce com a densidade central. Já pela Figura 37, vemos que o número de Love decresce com a densidade central, tendo um valor máximo à esquerda, e se aproximando de zero à direita. Assim, temos que o comportamento da curva do número de Love em relação à compacidade deve ser semelhante, como já ilustrado na Figura 32.

Figura 36 – Compacidade em relação à densidade central para a EdE de quarks.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 37 – Número de Love em relação à densidade central para a EdE de quarks.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

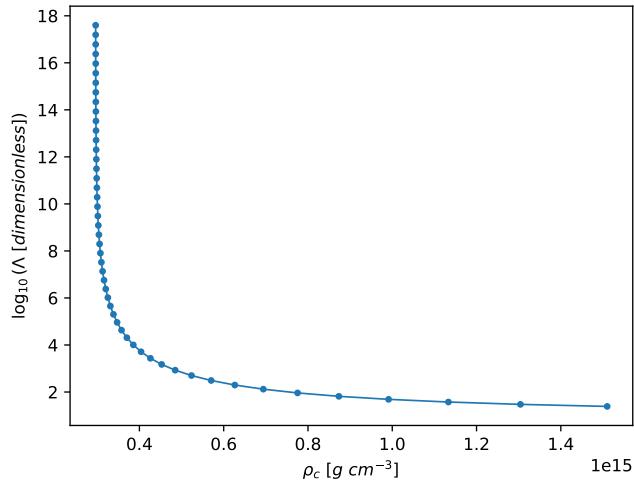
A curva dada pela Figura 32 pode ser compreendida por meio das expressões dos limites do número de Love. Para estrelas com compacidades baixas e raios pequenos temos que, pela equação (125), $k_2 \rightarrow 3/4 = 0.75$ para $C \rightarrow 0$ e $R \rightarrow 0$, que justifica o comportamento da curva na Figura 32 para valores menores de compacidade e o número de Love máximo obtido $k_{2max} \approx 0.749$. Já o comportamento para valores grandes de

compacidade é justificado pela equação (120), onde $k_2 \rightarrow 0$ para $C \rightarrow C_{BN} = 1/2$, sendo C_{BN} a compacidade de BNs.

Comparando as Figuras 32 e 20, notamos que as EQs menos compactas possuem números de Love maiores, em contraste com as ENHs, que possuem números de Love tendendo a zero neste limite. Essa característica das EQs é devida à densidade alta na superfície dessas estrelas, o que altera significativamente o número de Love por meio da correção Δy , conforme a equação (117).

Por fim, temos a Figura 38, que mostra que a deformabilidade decresce com a densidade central. Vimos anteriormente que a massa cresce com a densidade central atingindo um valor máximo, pela Figura 34, de modo que a curva da deformabilidade em relação à massa (Figura 33) deve ser semelhante à curva da deformabilidade em relação à densidade central (Figura 38), como confirmamos ao comparar as Figuras 33 e 38.

Figura 38 – Logaritmo da deformabilidade de maré em relação à densidade central para a EdE de quarks.

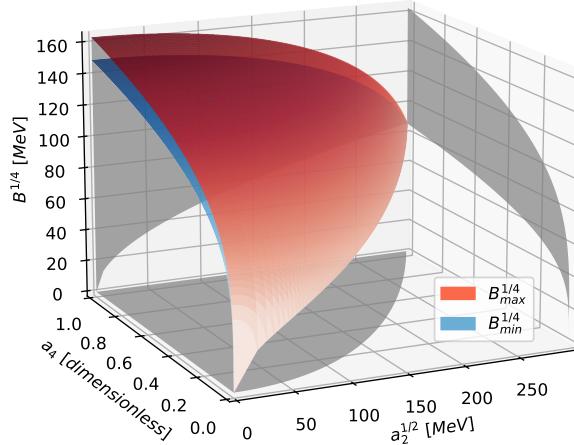


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.2.2 Análise no espaço de parâmetros

O objetivo aqui é analisar as propriedades de diversas famílias de EQs com parâmetros a_2 , a_4 , e B diferentes. Utilizando as equações (155), (156), e (157), o espaço de parâmetros das EQs é representado na Figura 39.

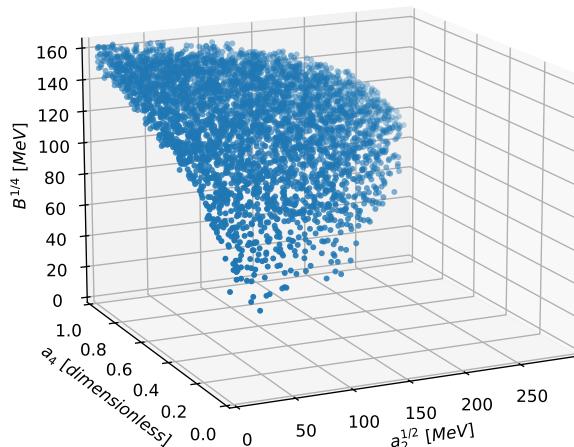
Figura 39 – Espaço de parâmetros da EdE de quarks. EQs são formadas na região entre as superfícies $B_{min}^{1/4}$ (em azul) e $B_{max}^{1/4}$ (em vermelho).



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Aplicando a amostragem quase-randômica de hipercubo latino (MCKAY; BECKMAN; CONOVER, 1979), os 4039 pontos utilizados estão representados na Figura 40.

Figura 40 – Pontos de amostragem no espaço de parâmetros da EdE de quarks utilizados na análise da EdE de quarks.



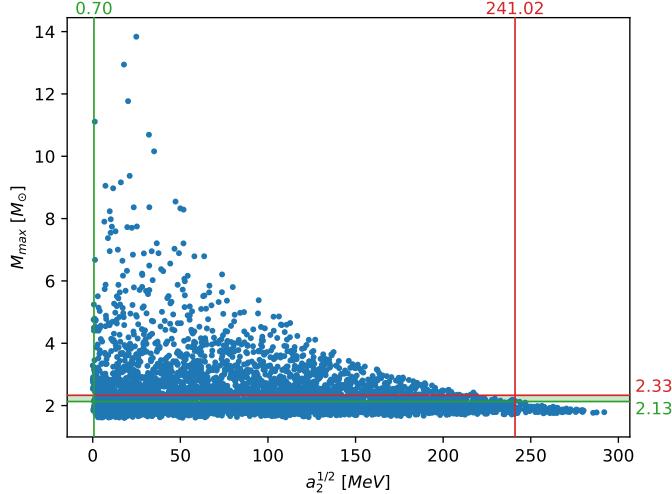
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Utilizando os limites dos observáveis (Tabela 3) para filtrar as parametrizações da EdE, obtemos os limites dos parâmetros livres. Na sequência, analisaremos diversos gráficos de dispersão que incluem todos os pontos representados na Figura 40, de modo

que nenhum parâmetro é fixado em valores específicos, pois estamos utilizando uma amostragem quase-randômica.

A Figura 41 mostra que o limite inferior da massa máxima ($M_{max} > 2.13 M_\odot$) impõe um limite superior ao parâmetro a_2 ($a_2^{1/2} < 241.02 \text{ MeV}$). Combinando todos os observáveis obtemos o limite superior final de a_2 ($a_2^{1/2} < 198.13 \text{ MeV}$).

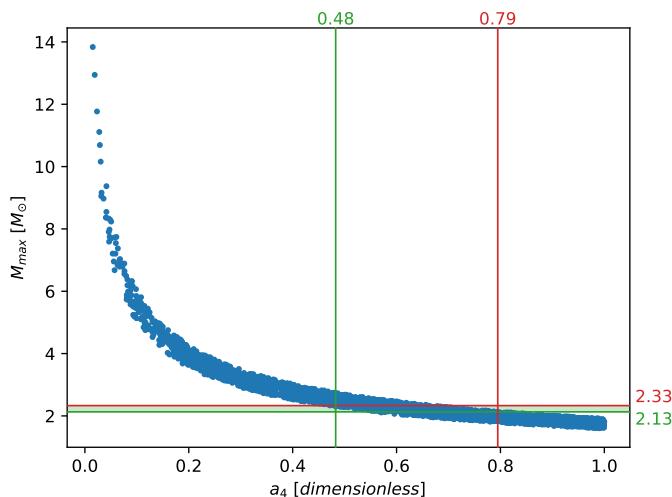
Figura 41 – Massa máxima em relação a $a_2^{1/2}$ para as EQs.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Já para o parâmetro a_4 , vemos pela Figura 42 que seus limites ($0.48 < a_4 < 0.79$) são impostos pelos limites da massa máxima ($2.13 M_\odot < M_{max} < 2.33 M_\odot$).

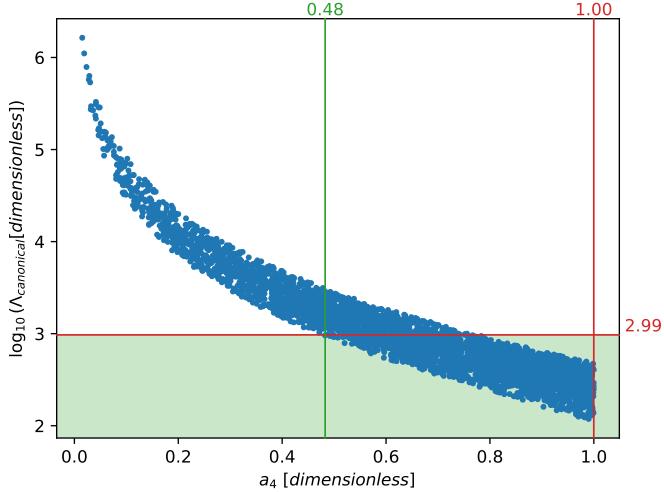
Figura 42 – Massa máxima em relação a a_4 para as EQs.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Além disso, notamos pela Figura 43 que seu limite inferior ($a_4 > 0.48$) também é imposto pelo limite superior da deformabilidade canônica ($\Lambda_{\text{canonical}} < 970$). Combinando todos os observáveis obtemos os mesmos limites para a_4 .

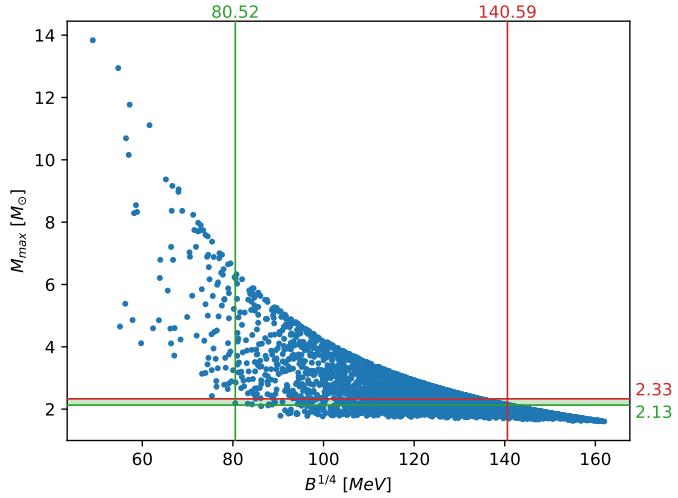
Figura 43 – Deformabilidade canônica em relação a a_4 para as EQs.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Agora, para o parâmetro B , vemos pela Figura 44 que um limite superior ($B^{1/4} < 140.59 \text{ MeV}$) é imposto pelo limite inferior da massa máxima ($M_{max} > 2.13 M_\odot$).

Figura 44 – Massa máxima em relação a $B^{1/4}$ para as EQs.



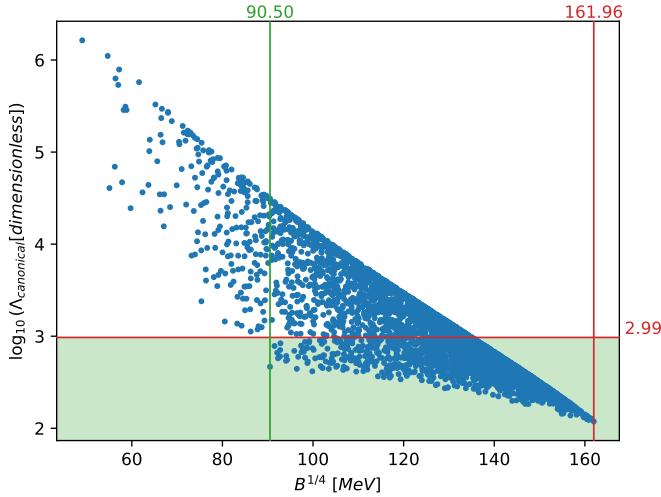
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Por fim, notamos pela Figura 45 que um limite inferior ($B^{1/4} > 90.50 \text{ MeV}$) é imposto pelo limite superior da deformabilidade canônica ($\Lambda_{canonical} < 970$). Combinando todos os observáveis obtemos os limites finais de B ($116.87 \text{ MeV} < B^{1/4} < 140.59 \text{ MeV}$).

Os limites dos parâmetros obtidos a partir de cada um dos observáveis e os limites combinados estão resumidos na Tabela 4. É possível notar que $R_{canonical}$ impõe limites sobre a_4 e B , porém, menos restritivos.

Vale relembrar que os parâmetros a_2 e a_4 possuem significados físicos associados, especialmente na fase Cor-Sabor-Fixos (*Color-Flavor-Locked - CFL*). O parâmetro a_2 é definido como $a_2 = m_s^2 - 4\Delta^2$, onde m_s é a massa do quark *strange* e Δ é a variação de

Figura 45 – Deformabilidade canônica em relação a $B^{1/4}$ para as EQs.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Tabela 4 – Limites dos parâmetros da EdE de quarks para EQs.

| | $a_2^{1/2} [\text{MeV}]$ | $a_4 [\text{adimensional}]$ | $B^{1/4} [\text{MeV}]$ |
|-----------------------|--------------------------|-----------------------------|------------------------|
| M_{max} | (0.70, 241.02) | (0.48, 0.79) | (80.52, 140.59) |
| $R_{canonical}$ | (0.07, 291.96) | (0.39, 1.00) | (80.52, 153.04) |
| $\Lambda_{canonical}$ | (0.35, 291.96) | (0.48, 1.00) | (90.50, 161.96) |
| Combinado | (0.70, 198.13) | (0.48, 0.79) | (116.87, 140.59) |

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

energia associada ao emparelhamento de quarks. Já o parâmetro a_4 é dado por $a_4 = 1 - c$, onde $c \gtrsim 0.3$ quantifica a interação entre os quarks. Assim, com os limites obtidos para os parâmetros a_2 e a_4 , e fixando a massa do quark *strange*, temos uma restrição astrofísica tanto para o parâmetro Δ quanto para a interação entre os quarks.

Após realizar a filtragem dos pontos de amostragem, mantendo apenas aqueles que estão em conformidade com os limites dos observáveis, obtemos os limites das propriedades das EQs, resumidos na Tabela 5. Podemos notar que o limite superior da massa máxima obtido é um pouco mais restrito que o limite dado na Tabela 3 ($M_{max} < 2.31 M_\odot$ em comparação a $M_{max} < 2.33 M_\odot$), os limites do raio canônico também são mais restritos ($11.47 \text{ km} < R_{canonical} < 12.22 \text{ km}$ em comparação a $10.00 \text{ km} < R_{canonical} < 13.25 \text{ km}$), e o limite inferior da deformabilidade canônica foi obtido ($\Lambda_{canonical} > 645.70$).

Tabela 5 – Limites das propriedades das EQs.

| $M_{max} [M_\odot]$ | $R_{canonical} [\text{km}]$ | $\Lambda_{canonical} [\text{adimensional}]$ |
|---------------------|-----------------------------|---|
| (2.13, 2.31) | (11.47, 12.22) | (645.70, 967.55) |

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Por fim, podemos analisar os limites de algumas propriedades interessantes da EdE de quarks, resumidos na Tabela 6. É possível notar que a densidade na superfície das estrelas e as velocidades do som mínimas e máximas variam relativamente pouco. Além disso, os limites de c_{smin} e c_{smax} são próximos, o que indica que um modelo linear para a EdE, utilizando $\rho_{surface}$ e c_s como parâmetros livres, talvez consista numa boa aproximação.

Tabela 6 – Limites das propriedades da EdE de quarks.

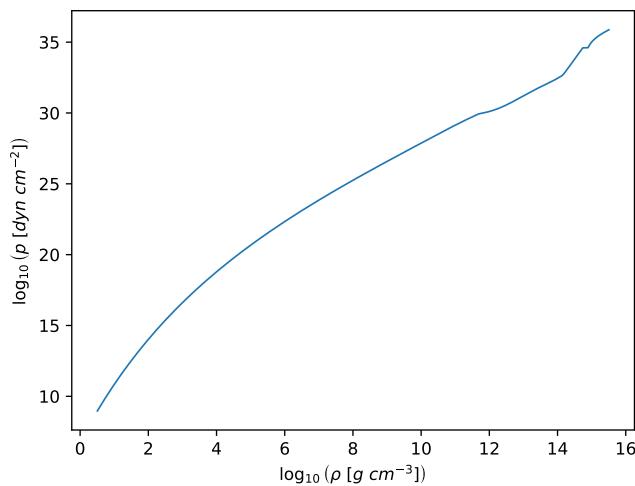
| $\rho_{surface} [10^{15} \text{ g cm}^{-3}]$ (0.29, 0.36) | c_{smin}/c [adimensional] (0.51, 0.58) | c_{smax}/c [adimensional] (0.55, 0.58) |
|--|---|---|
|--|---|---|

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.3 ESTRELAS HÍBRIDAS

A EdE híbrida, formada por uma crosta hadrônica descrita pela EdE *BSk24*, dada pela equação (130) com os coeficientes definidos na Tabela 2, e por um núcleo de quarks descrito pela EdE de quarks, dada pela equação (145) (com $a_2^{1/2} = 100 \text{ MeV}$, $a_4 = 0.8$, e $B^{1/4} = 160 \text{ MeV}$ para este exemplo, valores escolhidos para formar estrelas híbridas (EHs), conforme as equações (155) e (157)), é ilustrada na Figura 46.

Figura 46 – Logaritmo da pressão em relação ao logaritmo da densidade para a EdE híbrida com *BSk24*.

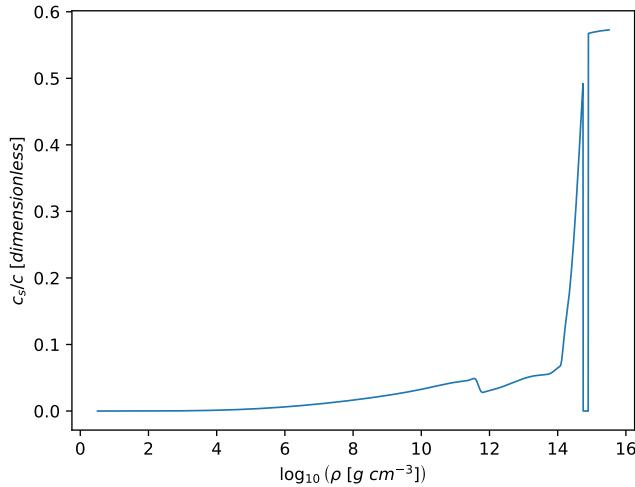


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Vemos que a relação entre a pressão e a densidade possui uma região hadrônica para pressões menores, uma região de quarks para pressões maiores, e uma região de transição em uma pressão de transição p_{trans} , onde existe uma variação da densidade. Essa pressão de transição é obtida utilizando a construção de Maxwell, definida na equação (131).

Podemos ver pela Figura 47 as regiões da EdE de forma mais nítida, onde a região de transição corresponde à velocidade do som nula ($c_s = 0$), para manter a pressão constante na transição, conforme a equação (72). Apesar disso, rigorosamente, $c_s(p \rightarrow p_{trans})$ é indeterminada. Os comportamentos das regiões hadrônica e de quarks já foram discutidos nas seções anteriores.

Figura 47 – Velocidade do som em relação ao logaritmo da densidade para a EdE híbrida com *BSk24*.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Resolvendo o sistema de equações que engloba as equações *TOV* e a equação da perturbação para uma estrela específica, caracterizada pela densidade central $\rho_c = 2.95 \times 10^{15} g\ cm^{-3}$ neste exemplo, obtemos as propriedades da estrela em relação à coordenada radial.

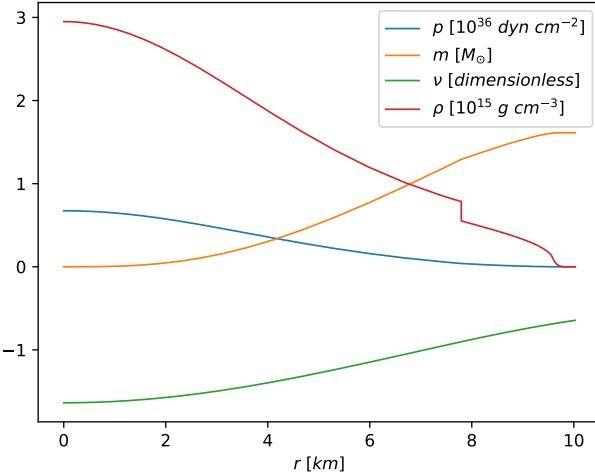
Na Figura 48 vemos que a pressão e a densidade decrescem monotonicamente, enquanto a função massa e a função métrica crescem monotonicamente. Podemos notar também a descontinuidade na densidade devido à transição de fase.

Já a Figura 49 mostra como a perturbação se comporta no interior da estrela. Note que este gráfico mostra nitidamente a correção Δy na transição de fase devido à descontinuidade na densidade. Esta estrela em particular possui raio $R \approx 10.029\ km$, massa $M = m(R) \approx 1.612 M_\odot$, raio da transição de fase $R_{trans} \approx 7.794\ km$, massa até a transição de fase $M_{trans} = m(R_{trans}) \approx 1.293 M_\odot$, e número de Love $k_2 \approx 0.032$, onde o cálculo de k_2 considera a correção Δy na transição de fase.

7.3.1 Família de estrelas

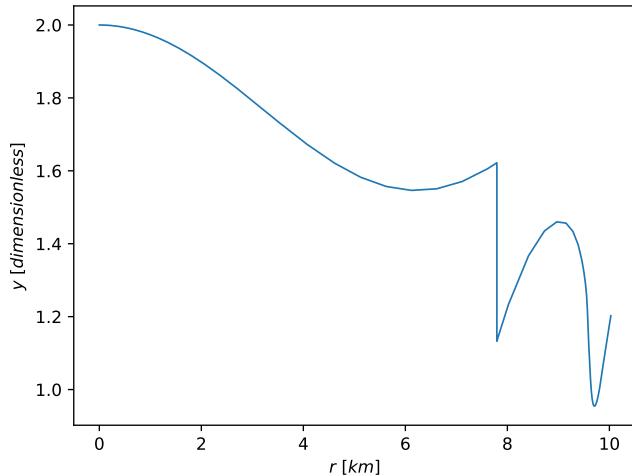
Novamente, analisaremos as propriedades da família de estrelas gerada com essa EdE por meio de algumas curvas frequentemente utilizadas em outros trabalhos: a massa em relação ao raio (Figura 50), o número de Love em relação à compacidade (Figura 51), e a deformabilidade em relação à massa (Figura 52).

Figura 48 – Propriedades relacionadas à estrutura interna de uma estrela em relação à coordenada radial para a EdE híbrida com *BSk24*: pressão (em azul), função massa (em laranja), função métrica (em verde), e densidade (em vermelho).



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 49 – Perturbação em relação à coordenada radial de uma estrela para a EdE híbrida com *BSk24*.

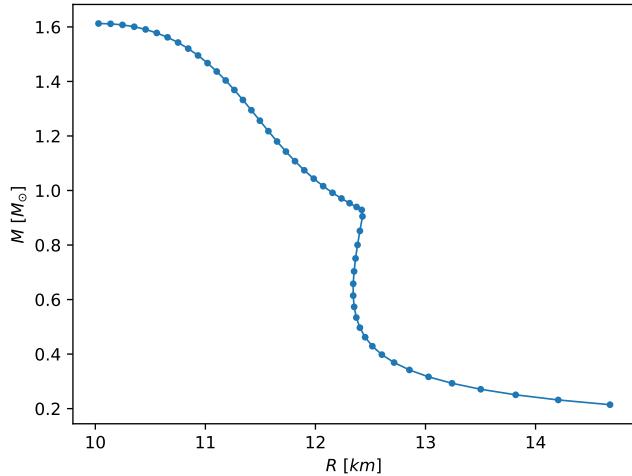


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Também temos as principais características: a massa máxima $M_{max} \approx 1.612 M_{\odot}$, o raio da estrela canônica $R_{canonical} \approx 11.193$ km, a deformabilidade da estrela canônica $\Lambda_{canonical} \approx 190.9$, e o número de Love máximo $k_{2max} \approx 0.118$. Notamos que $R_{canonical}$ e $\Lambda_{canonical}$ estão em conformidade com os limites observacionais, porém M_{max} está abaixo do limite inferior, segundo a Tabela 3. Isto não é um problema, pois este caso é utilizado apenas como um exemplo para avaliar o comportamento geral da EdE híbrida.

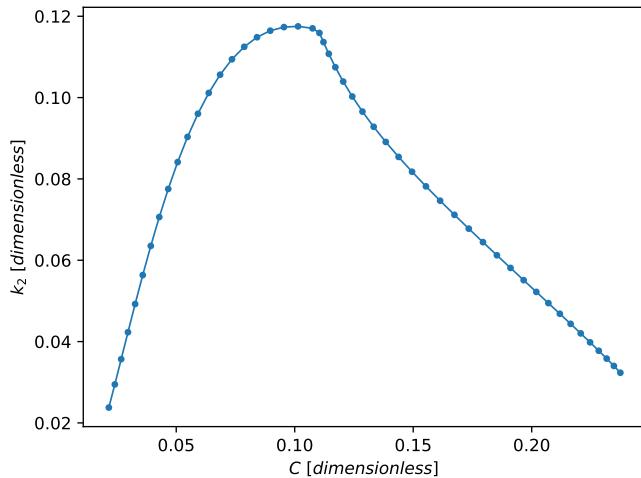
Analisaremos as Figuras 50, 51, e 52 na sequência, mas para isso precisamos entender como as propriedades variam com a densidade central, utilizada na parametrização da família de estrelas. A Figura 53 mostra que a massa cresce monotonicamente com a

Figura 50 – Massa em relação ao raio para a EdE híbrida com *BSk24*.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 51 – Número de Love em relação à compacidade para a EdE híbrida com *BSk24*.



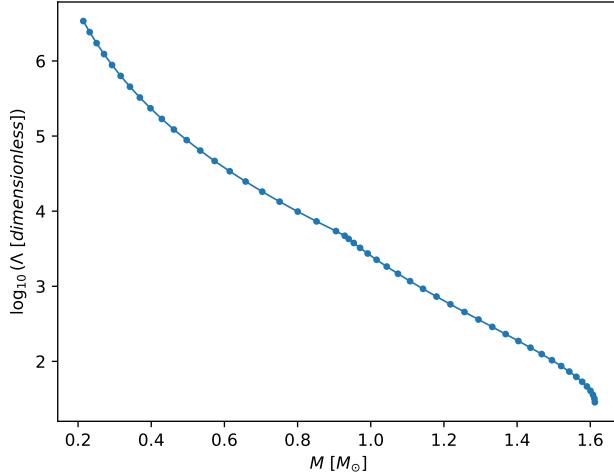
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

densidade central, passa por uma região de descontinuidade da densidade central devido à transição de fase, onde a massa permanece constante, e depois atinge a massa máxima. A partir desta densidade central, as estrelas não são estáveis, conforme a condição de estabilidade dada pela equação (71). As estrelas com densidades centrais menores, antes da descontinuidade, são ENHs, já que essas densidades centrais menores não são grandes o suficiente para formar núcleos de quarks nestas estrelas.

Já a Figura 54 indica que o raio decresce com a densidade central, exceto em um intervalo intermediário, além de ter uma região de descontinuidade da densidade central devido à transição de fase, onde o raio permanece constante. Assim, para densidades centrais menores temos estrelas menos massivas com raios maiores, e para densidades centrais maiores temos estrelas mais massivas com raios menores, análogo às ENHs.

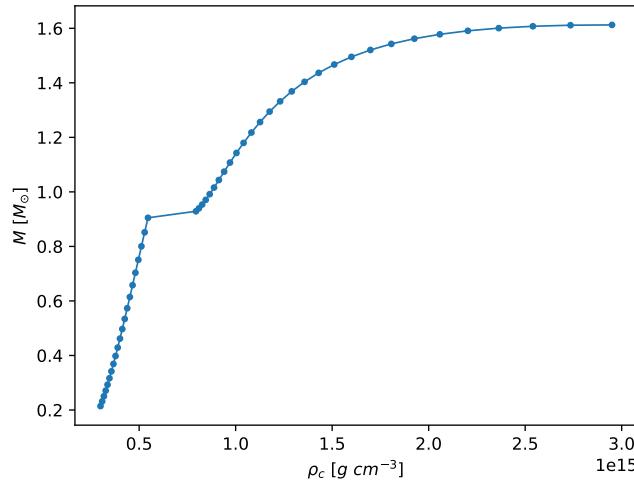
Com isso em mente, analisando a Figura 50, vemos que o gráfico abrange densidades

Figura 52 – Logaritmo da deformabilidade de maré em relação à massa para a EdE híbrida com *BSk24*.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 53 – Massa em relação à densidade central para a EdE híbrida com *BSk24*.



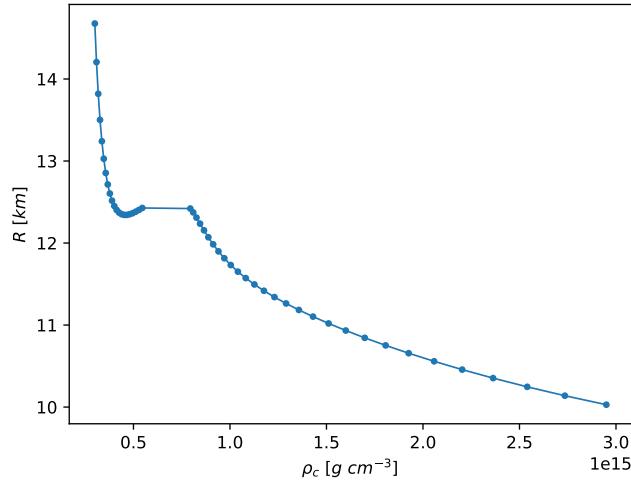
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

centrais maiores na região à esquerda, com estrelas mais massivas e compactas, e densidades centrais menores na região à direita, com estrelas menos massivas e maiores. Portanto, estrelas à direita da transição no gráfico da Figura 50 são ENHs, e à esquerda da transição são EHs.

Comparando as Figuras 50 e 19, notamos que a transição de fase e o núcleo de quarks fazem com que as massas das EHs sejam menores que as massas das ENHs quando comparamos estrelas de raios iguais. Isso acontece porque a EdE de quarks possui uma velocidade do som c_s menor que a EdE *BSk24* para densidades maiores, tornando a EdE híbrida mais macia, conforme ilustra a Figura 47. EdEs macias (rígidas) são caracterizadas por massas máximas menores (maiores) (LOAN et al., 2011).

Conforme esperado pelo comportamento da massa e do raio em relação à densidade

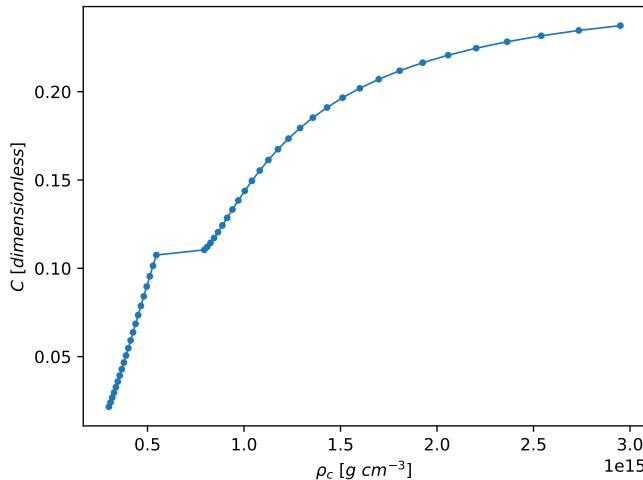
Figura 54 – Raio em relação à densidade central para a EdE híbrida com *BSk24*.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

central, vemos pela Figura 55 que a compacidade cresce com a densidade central, também possuindo uma região de descontinuidade da densidade central devido à transição de fase, onde a compacidade permanece constante.

Figura 55 – Compacidade em relação à densidade central para a EdE híbrida com *BSk24*.

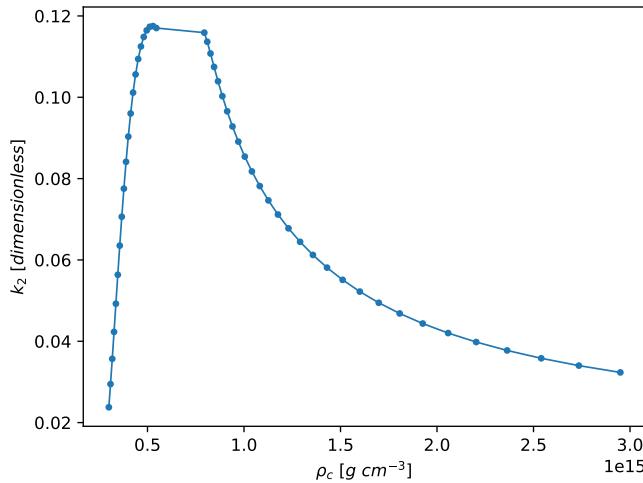


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Já pela Figura 56, vemos que o número de Love tem um valor máximo, se aproxima de zero nos extremos, e possui uma região de descontinuidade da densidade central devido à transição de fase, onde o número de Love permanece constante. Assim, temos que o comportamento da curva do número de Love em relação à compacidade deve ser semelhante, porém sem a descontinuidade, como já ilustrado na Figura 51.

A curva dada pela Figura 51 possui a mesma interpretação que a Figura 20, utilizando os limites do número de Love. Podemos notar que a região à esquerda da transição no gráfico da Figura 51 são ENHs, e à direita da transição são EHs.

Figura 56 – Número de Love em relação à densidade central para a EdE híbrida com *BSk24*.

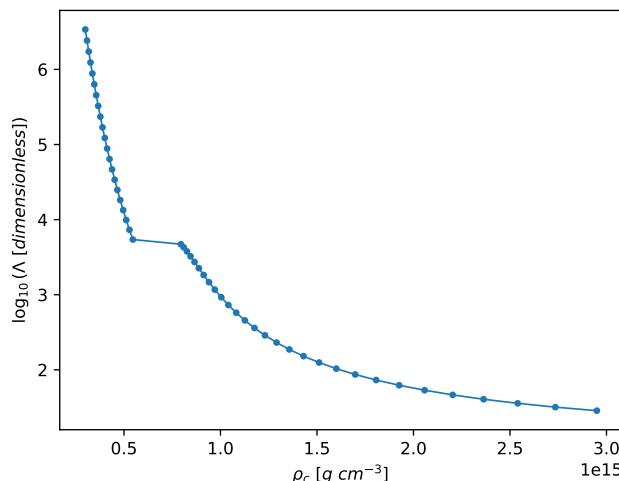


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Comparando as Figuras 51 e 20, notamos que a transição de fase e o núcleo de quarks fazem com que os números de Love das EHs sejam menores que os números de Love das ENHs, quando compararmos estrelas com compacidades iguais.

Por fim, temos a Figura 57, que mostra que a deformabilidade decresce com a densidade central, também possuindo uma região de descontinuidade da densidade central devido à transição de fase, onde a deformabilidade permanece constante. Vimos anteriormente que a massa cresce com a densidade central atingindo um valor máximo, pela Figura 53, de modo que a curva da deformabilidade em relação à massa (Figura 52) deve ser semelhante à curva da deformabilidade em relação à densidade central (Figura 57), porém sem a descontinuidade, como confirmamos ao comparar as Figuras 52 e 57.

Figura 57 – Logaritmo da deformabilidade de maré em relação à densidade central para a EdE híbrida com *BSk24*.

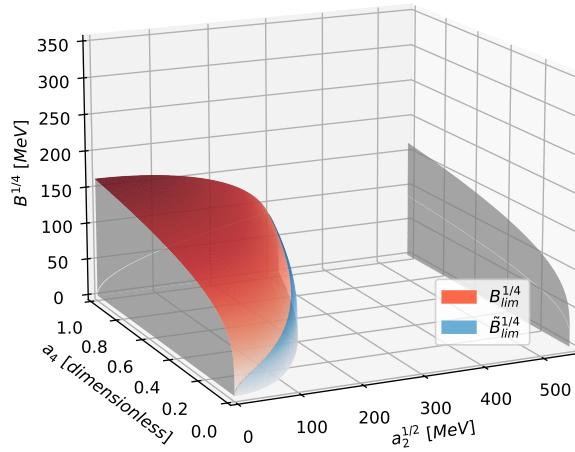


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

7.3.2 Análise no espaço de parâmetros

O objetivo aqui é analisar as propriedades de diversas famílias de EHs com parâmetros a_2 , a_4 , e B diferentes, utilizando a EdE híbrida com a $BSk24$ para a parte hadrônica. Reconhecemos que esta escolha representa uma limitação, porém, este estudo permitirá verificar a possibilidade da existência de EHs. Utilizando as equações (155) e (157), o espaço de parâmetros da EdE de quarks para EHs é representado na Figura 58.

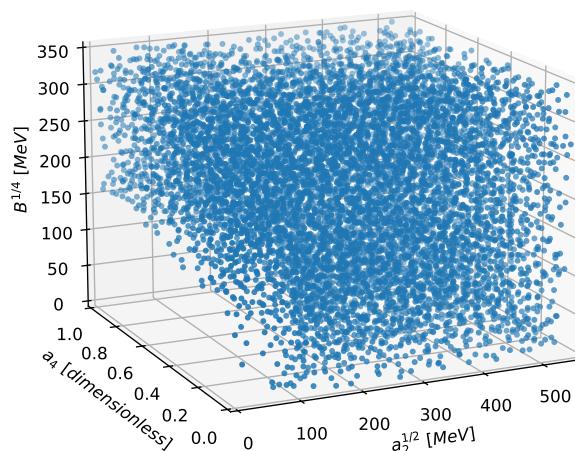
Figura 58 – Espaço de parâmetros da EdE quarks. EHs são formadas na região acima das superfícies $\tilde{B}_{lim}^{1/4}$ (em azul) e $B_{lim}^{1/4}$ (em vermelho).



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Note que não temos limites superiores para os parâmetros a_2 e B . Sendo assim, foram escolhidos os limites $a_2^{1/2} < 550$ MeV e $B^{1/4} < 350$ MeV para esta análise. Aplicando a amostragem quase-randômica de hipercubo latino (MCKAY; BECKMAN; CONOVER, 1979), os 8716 pontos utilizados estão representados na Figura 59.

Figura 59 – Pontos de amostragem no espaço de parâmetros da EdE de quarks utilizados na análise da EdE híbrida.

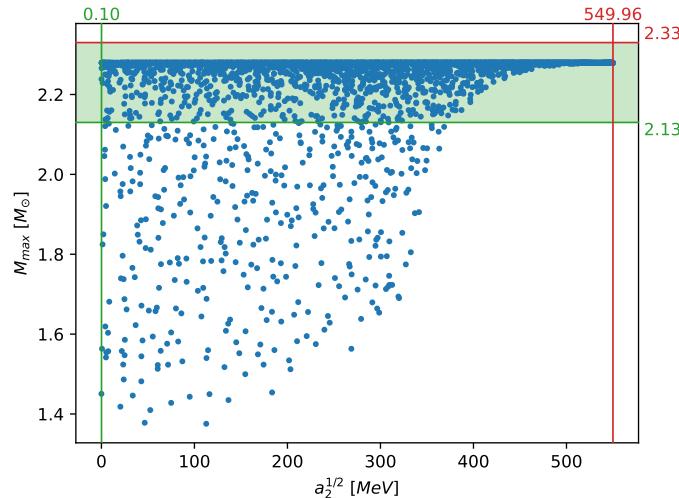


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Utilizando os limites dos observáveis (Tabela 3) para filtrar as parametrizações da EdE, mantendo as EdEs híbridas, obtemos os limites dos parâmetros livres. Na sequência, analisaremos diversos gráficos de dispersão que incluem todos os pontos representados na Figura 59, de modo que nenhum parâmetro é fixado em valores específicos, pois estamos utilizando uma amostragem quase-randômica.

Nenhum dos observáveis analisados impõe limites sobre a_2 , conforme ilustra a Figura 60 para a massa máxima.

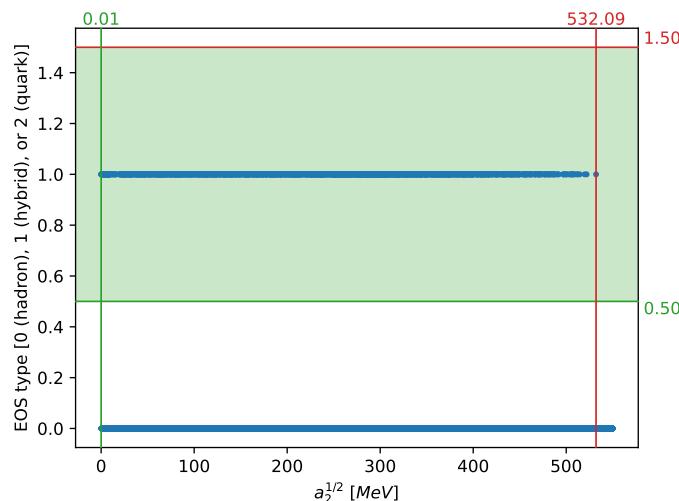
Figura 60 – Massa máxima em relação a $a_2^{1/2}$ para as EHs.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Porém, seu limite superior ($a_2^{1/2} < 532.09 \text{ MeV}$) é imposto pelo tipo da EdE, conforme ilustra a Figura 61. Valores maiores de $a_2^{1/2}$ geram EdEs hadrônicas, pois a transição de fase não acontece.

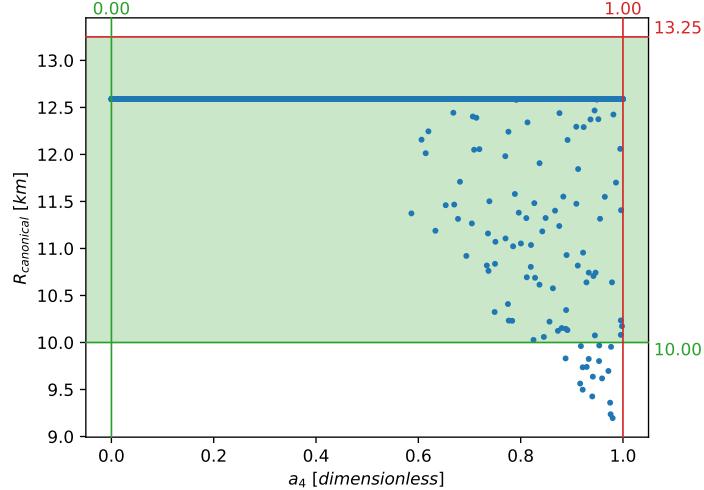
Figura 61 – Tipo da EdE em relação a $a_2^{1/2}$ para as EHs.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Para o parâmetro a_4 , os observáveis analisados também não impõem limites, conforme ilustra a Figura 62 para o raio canônico.

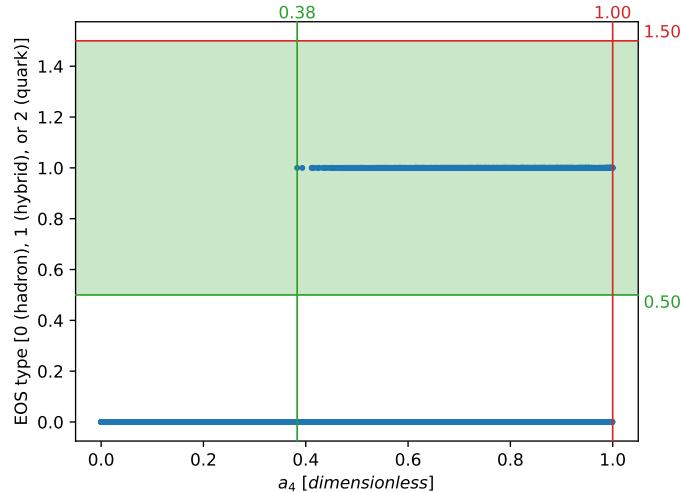
Figura 62 – Raio canônico em relação a a_4 para as EHs.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Mas seu limite inferior ($a_4 > 0.38$) é imposto pelo tipo da EdE, conforme ilustra a Figura 63. Valores menores de a_4 geram EdEs hadrônicas, pois a transição de fase não acontece.

Figura 63 – Tipo da EdE em relação a a_4 para as EHs.

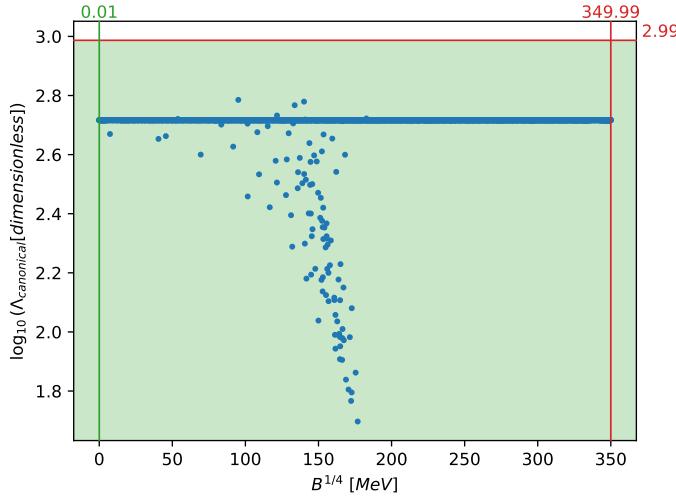


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Por fim, nenhum dos observáveis analisados impõe limites sobre o parâmetro B , conforme ilustra a Figura 64 para a deformabilidade canônica.

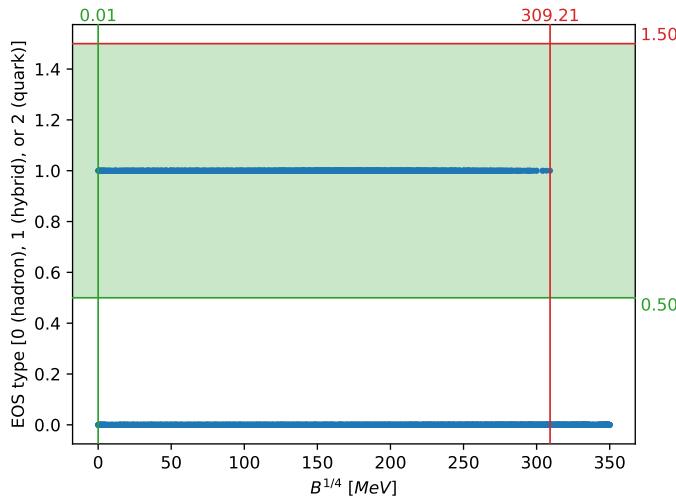
Porém, seu limite superior ($B^{1/4} < 309.21 \text{ MeV}$) é imposto pelo tipo da EdE, conforme ilustra a Figura 65. Valores maiores de $B^{1/4}$ geram EdEs hadrônicas, pois a transição de fase não acontece.

Figura 64 – Deformabilidade canônica em relação a $B^{1/4}$ para as EHs.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 65 – Tipo da EdE em relação a $B^{1/4}$ para as EHs.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Os limites dos parâmetros obtidos a partir do tipo da EdE, a partir de cada um dos observáveis, e os limites combinados estão resumidos na Tabela 7.

Após realizar a filtragem dos pontos de amostragem, mantendo apenas aqueles que correspondem à EdEs híbridas e que estão em conformidade com os limites dos observáveis, obtemos os limites das propriedades das EHs, resumidos na Tabela 8. Podemos notar que o limite superior da massa máxima obtido é um pouco mais restrito que o limite dado na Tabela 3 ($M_{\max} < 2.28 M_{\odot}$ em comparação a $M_{\max} < 2.33 M_{\odot}$). Além disso, os limites inferiores iguais aos limites superiores para o raio canônico e para a deformabilidade canônica indicam que a estrela canônica é uma ENH para os casos amostrados. Sendo assim, uma quantidade de amostras muito maior seria necessária para estimar corretamente estes limites.

Tabela 7 – Limites dos parâmetros da EdE de quarks para EHs.

| | $a_2^{1/2} [MeV]$ | $a_4 [adimensional]$ | $B^{1/4} [MeV]$ |
|-----------------------|-------------------|----------------------|-----------------|
| Tipo da EdE | (0.01, 532.09) | (0.38, 1.00) | (0.01, 309.21) |
| M_{max} | (0.10, 549.96) | (0.00, 1.00) | (0.01, 349.99) |
| $R_{canonical}$ | (0.10, 549.96) | (0.00, 1.00) | (0.01, 349.99) |
| $\Lambda_{canonical}$ | (0.01, 549.96) | (0.00, 1.00) | (0.01, 349.99) |
| Combinado | (0.10, 532.09) | (0.38, 1.00) | (0.01, 309.21) |

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Tabela 8 – Limites das propriedades das EHs.

| $M_{max} [M_\odot]$ | $R_{canonical} [km]$ | $\Lambda_{canonical} [adimensional]$ |
|---------------------|----------------------|--------------------------------------|
| (2.13, 2.28) | (12.59, 12.59) | (520.71, 520.71) |

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Por fim, podemos analisar os limites de algumas propriedades interessantes da EdE híbrida, resumidos na Tabela 9. A densidade superficial $\rho_{surface}$ e a velocidade do som mínima c_{smin} são nulas em todos os casos, uma vez que estamos tratando de EHs, onde a crosta hadrônica é caracterizada por densidade superficial e velocidade do som baixas. Por fim, é possível notar pelos limites da velocidade do som máxima c_{smax} que há parametrizações da EdE que atingem a região da EdE *BSk24* com velocidades do som grandes ($c_{smax}/c = 0.96$, por exemplo) antes de ocorrer a transição de fase, e outras parametrizações que não atingem esta região ($c_{smax}/c = 0.51$, por exemplo).

Tabela 9 – Limites das propriedades da EdE híbrida.

| $\rho_{surface} [10^{15} g cm^{-3}]$ | $c_{smin}/c [adimensional]$ | $c_{smax}/c [adimensional]$ |
|--------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| (0.00, 0.00) | (0.00, 0.00) | (0.51, 0.96) |

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

8 CONCLUSÕES

Esta dissertação teve como objetivo investigar as propriedades das estrelas de nêutrons (ENs) e a natureza da matéria no interior destas estrelas por meio da análise das equações de estado (EdEs) para matéria hadrônica, de quarks e híbrida. Para isso, resolvemos o sistema de equações diferenciais que englobam as equações *Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)* e a equação da perturbação, utilizada no cálculo do número de Love e da deformabilidade de maré. Utilizando dados observacionais recentes, determinamos a viabilidade das diferentes composições de matéria dentro das ENs, com foco especial na compatibilidade com limites observacionais.

Para as estrelas de nêutrons hadrônicas (ENHs), a análise dos resultados utilizando a EdE *Brussels-Montreal Skyrme 24 (BSk24)* nos mostrou que as características da família de ENHs estão nos limites impostos pelos dados observacionais, resumidos na Tabela 3. Mais especificamente, a massa máxima $M_{max} \approx 2.279 M_{\odot}$ está entre $2.13 M_{\odot}$ e $2.33 M_{\odot}$, o raio da estrela canônica $R_{canonical} \approx 12.589 km$ está entre $10.00 km$ e $13.25 km$, e a deformabilidade da estrela canônica $\Lambda_{canonical} \approx 520.7$ é menor que 970. Embora a análise seja restrita para uma EdE específica, estes resultados mostram que as ENs podem ser compostas inteiramente por matéria hadrônica.

Agora, para as estrelas de quarks (EQs), a análise feita por meio da amostragem do espaço de parâmetros da EdE de quarks nos permitiu utilizar os limites dos observáveis (Tabela 3) para filtrar as parametrizações da EdE, obtendo os limites dos parâmetros livres: $0.70 MeV < a_2^{1/2} < 198.13 MeV$, $0.48 < a_4 < 0.79$, e $116.87 MeV < B^{1/4} < 140.59 MeV$. Comparando com o estudo desenvolvido em (MIAO et al., 2021), que utiliza uma inferência Bayesiana com os dados dos eventos de onda gravitacional (OG) GW170817 e GW190425, eles obtiveram as seguintes estimativas para os parâmetros livres a_4 e B (a_2 não possui uma estimativa com limites restritos), com 2σ de confiança: $a_4 = 0.70^{+0.16}_{-0.12}$ e $B^{1/4} = 137.6^{+4.8}_{-4.4} MeV$. Assim, vemos que os resultados obtidos neste trabalho estão próximos dos resultados obtidos em (MIAO et al., 2021), mesmo utilizando métodos e alguns dados observacionais distintos.

Além disso, também obtivemos os limites das propriedades das EQs: $2.13 M_{\odot} < M_{max} < 2.31 M_{\odot}$, $11.47 km < R_{canonical} < 12.22 km$, e $645.70 < \Lambda_{canonical} < 967.55$. Esses limites mostram que as ENs podem ser compostas inteiramente por matéria de quarks, ou seja, a hipótese de Bodmer-Witten pode ser válida.

Por fim, para as estrelas híbridas (EHs), utilizando o caso particular com a EdE *BSk24* para a parte hadrônica, os limites dos observáveis não impõem limites sobre os parâmetros livres da EdE. Porém, obtivemos estes limites exigindo que a EdE seja uma EdE híbrida: $0.10 MeV < a_2^{1/2} < 532.09 MeV$, $0.38 < a_4 < 1.00$, e $0.01 MeV < B^{1/4} < 309.21 MeV$. Note que estes limites são bem menos restritos quando comparados aos limites obtidos na análise de EQs. Além disso, também obtivemos os limites das propriedades das

estrelas: $2.13 M_{\odot} < M_{max} < 2.28 M_{\odot}$, $R_{canonical} \approx 12.59 \text{ km}$, e $\Lambda_{canonical} \approx 520.71$. Como a massa máxima das ENHs é $M_{max} \approx 2.279 M_{\odot}$ para a EdE *BSk24*, vemos pelos limites obtidos que as parametrizações que correspondem à EHs têm massas máximas sempre menores que esse limite. Por fim, para as amostras utilizadas, as estrelas canônicas são ENHs, e por esse motivo $R_{canonical}$ e $\Lambda_{canonical}$ correspondem aos valores obtidos para as ENHs utilizando a EdE *BSk24*. Estes resultados mostram que as ENs também podem ser compostas por um núcleo de matéria de quarks e uma crosta de matéria hadrônica.

Em resumo, os resultados deste estudo indicam que as características das ENHs, EQs e EHs estão em concordância com os dados observacionais atuais. As massas, raios e deformabilidades obtidos não excluem nenhuma das composições de matéria propostas, sugerindo que a hipótese de Bodmer-Witten pode ser válida, resultados consistentes com estudos anteriores. Futuras pesquisas podem se beneficiar de dados observacionais adicionais mais restritos e do refinamento das técnicas de modelagem, levando a limites mais precisos para os parâmetros livres das EdEs e propriedades das estrelas, indicando potencialmente a composição provável das ENs.

Embora a análise tenha fornecido informações valiosas, é importante reconhecer algumas limitações. A dependência de uma EdE específica para a matéria hadrônica restringe a análise, influenciando os resultados para as ENHs e EHs. Estudos futuros poderiam explorar uma variedade mais ampla de EdEs, incluindo EdEs paramétricas para a parte hadrônica, e incorporar novos dados de observações de OGs e radioastronomia. Além disso, a aplicação de técnicas avançadas de inferência, como redes neurais ou métodos Bayesianos mais complexos, pode melhorar ainda mais a precisão das estimativas dos parâmetros livres, como obtido em (MIAO et al., 2021) para EQs. Por fim, estudos futuros poderiam acrescentar os efeitos de elasticidade na estrutura interna das ENs, que não foram abordados neste trabalho.

As implicações teóricas deste estudo são significativas para a astrofísica e a física de partículas, fornecendo um maior entendimento sobre a possível estrutura interna das ENs e consequentemente sobre a matéria em densidades extremas. Na prática, os resultados podem guiar futuras observações e experimentos, ajudando a refinar modelos de evolução estelar e a interpretar eventos astrophísicos como fusões de ENs e emissões de raios-gama. Além disso, a confirmação da hipótese de Bodmer-Witten poderia revolucionar nosso entendimento da matéria em condições extremas.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. et al. Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 119, p. 161101, Oct 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.161101>>. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 76 e 77.
- ABDELSALHIN, T. **Tidal deformations of compact objects and gravitational wave emission**. Tese (Doutorado) — Sapienza - Università di Roma, 2019. Citado 8 vezes nas páginas 22, 23, 31, 33, 35, 51, 52 e 129.
- ALFORD, M. et al. Hybrid stars that masquerade as neutron stars. **The Astrophysical Journal**, v. 629, n. 2, p. 969, aug 2005. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1086/430902>>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 24 e 66.
- ALFORD, Mark G. et al. Color superconductivity in dense quark matter. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society (APS), v. 80, n. 4, p. 1455–1515, nov. 2008. ISSN 1539-0756. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.80.1455>>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 65 e 66.
- ALSING, Justin; SILVA, Hector O; BERTI, Emanuele. Evidence for a maximum mass cut-off in the neutron star mass distribution and constraints on the equation of state. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), v. 478, n. 1, p. 1377–1391, abr. 2018. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/sty1065>>. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 25.
- ANNALA, Eemeli et al. Evidence for quark-matter cores in massive neutron stars. **Nature Physics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 16, n. 9, p. 907–910, jun. 2020. ISSN 1745-2481. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41567-020-0914-9>>. Citado na página 24.
- ARBAÑIL, José D. V. et al. Fluid pulsation modes and tidal deformability of anisotropic strange stars in light of the gw170817 event. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 107, n. 12, jun. 2023. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.107.124016>>. Citado na página 24.
- ARBAÑIL, J. D. V.; MALHEIRO, M. Equilibrium and stability of charged strange quark stars. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 92, p. 084009, Oct 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.084009>>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 49.
- ARFKEN, G.B.; WEBER, H.J.; HARRIS, F.E. **Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide**. [S.l.]: Elsevier Science, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 129, 137, 141 e 143.
- BINNINGTON, T.; POISSON, E. Relativistic theory of tidal love numbers. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 80, p. 084018, Oct 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.084018>>. Citado na página 74.
- BLANCHET, Luc. Gravitational radiation from post-newtonian sources and inspiralling compact binaries. **Living Reviews in Relativity**, Springer Science and Business Media LLC, v. 17, n. 1, fev. 2014. ISSN 1433-8351. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.12942/lrr-2014-2>>. Citado na página 52.

- BOCCIOLO, Luca et al. Explosion mechanism of core-collapse supernovae: Role of the si/si-o interface. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 949, n. 1, p. 17, maio 2023. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/acc06a>>. Citado na página 31.
- BODMER, A. R. Collapsed nuclei. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 4, n. 6, p. 1601–1606, set. 1971. ISSN 0556-2821. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.4.1601>>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 35 e 68.
- BORGHESE, Alice; ESPOSITO, Paolo. Isolated neutron stars. In: _____. **Handbook of X-ray and Gamma-ray Astrophysics**. Springer Nature Singapore, 2023. p. 1–47. ISBN 9789811645440. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-981-16-4544-0_102-1>. Citado na página 33.
- BURROWS, A.; VARTANYAN, D. Core-collapse supernova explosion theory. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 589, n. 7840, p. 29–39, jan. 2021. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41586-020-03059-w>>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 25 e 31.
- BURSA, M.; TAUER, J.; PEC, K. **Gravity Field and Dynamics of the Earth**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2013. Citado na página 53.
- CALLEN, H.B. **Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics**. [S.l.]: Wiley, 1991. Citado na página 117.
- CAMENZIND, M. **Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2007. (Astronomy and Astrophysics Library). Citado na página 25.
- CAPLAN, M. E.; HOROWITZ, C. J. Colloquium: Astromaterial science and nuclear pasta. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society (APS), v. 89, n. 4, out. 2017. ISSN 1539-0756. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.89.041002>>. Citado na página 34.
- CARROLL, B.W.; OSTLIE, D.A. **An Introduction to Modern Astrophysics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- CARROLL, S.M. **Spacetime and Geometry**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 22, 37 e 38.
- CHATZIOANNOU, K. Neutron-star tidal deformability and equation-of-state constraints. **General Relativity and Gravitation**, v. 52, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10714-020-02754-3>>. Citado 4 vezes nas páginas 23, 52, 53 e 63.
- COMPOSE. **CompStar Online Supernovae Equations of State**. 2024. <<https://compose.obspm.fr/home/>>. Citado na página 63.
- COMPOSE. **PCP(BSK24)**. 2024. <<https://compose.obspm.fr/eos/253>>. Citado na página 74.

- DAMOUR, T.; NAGAR, A. Relativistic tidal properties of neutron stars. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 80, p. 084035, Oct 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.084035>>. Citado 4 vezes nas páginas 23, 55, 129 e 130.
- DERUELLE, N.; UZAN, J.P.; FORCRAND-MILLARD, P. de. **Relativity in Modern Physics**. [S.l.]: OUP Oxford, 2018. (Oxford Graduate Texts). Citado 2 vezes nas páginas 22 e 38.
- DIETRICH, Tim; HINDERER, Tanja; SAMAJDAR, Anuradha. Interpreting binary neutron star mergers: describing the binary neutron star dynamics, modelling gravitational waveforms, and analyzing detections. **General Relativity and Gravitation**, Springer Science and Business Media LLC, v. 53, n. 3, mar. 2021. ISSN 1572-9532. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10714-020-02751-6>>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 51.
- DORMAND, J.R.; PRINCE, P.J. A family of embedded runge-kutta formulae. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Elsevier BV, v. 6, n. 1, p. 19–26, mar. 1980. ISSN 0377-0427. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0771-050X\(80\)90013-3](http://dx.doi.org/10.1016/0771-050X(80)90013-3)>. Citado na página 71.
- ESA. **Gaia's Hertzsprung-Russell diagram**. 2018. <https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2018/04/Gaia_s_Hertzsprung-Russell_diagram>. Citado na página 29.
- ESA. **Stellar evolution**. 2018. <https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2018/03/Stellar_evolution>. Citado na página 28.
- FOUNDATION, Python Software. **Python**. 2024. <<https://www.python.org/>>. Citado 3 vezes nas páginas 71, 119 e 129.
- GITTINS, F.; ANDERSSON, N.; PEREIRA, J. P. Tidal deformations of neutron stars with elastic crusts. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 101, p. 103025, May 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.103025>>. Citado 4 vezes nas páginas 24, 54, 74 e 129.
- GLENDENNING, N.K. **Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity**. [S.l.]: Springer New York, 2012. (Astronomy and Astrophysics Library). Citado 4 vezes nas páginas 25, 27, 29 e 63.
- GORIELY, S.; CHAMEL, N.; PEARSON, J. M. Further explorations of skyrme-hartree-fock-bogoliubov mass formulas. xii. stiffness and stability of neutron-star matter. **Physical Review C**, American Physical Society (APS), v. 82, n. 3, set. 2010. ISSN 1089-490X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.82.035804>>. Citado na página 64.
- HAAR, D.; WERGELAND, H. **Elements of Thermodynamics**. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1966. (A-W series in advanced physics). Citado na página 117.
- HAN, Sophia; STEINER, Andrew W. Tidal deformability with sharp phase transitions in binary neutron stars. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 99, n. 8, abr. 2019. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.99.083014>>. Citado na página 24.

- HARDING, A.K. The neutron star zoo. **Frontiers of Physics**, v. 8, p. 679 – 692, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11467-013-0285-0>>. Citado na página 32.
- HEWISH, A. et al. Observation of a rapidly pulsating radio source. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 217, n. 5130, p. 709–713, fev. 1968. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/217709a0>>. Citado na página 26.
- HINDERER, T. Tidal love numbers of neutron stars. **The Astrophysical Journal**, v. 677, n. 2, p. 1216, apr 2008. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1086/533487>>. Citado 5 vezes nas páginas 23, 54, 55, 129 e 130.
- HIRAMATSU, Daichi et al. The electron-capture origin of supernova 2018zd. **Nature Astronomy**, Springer Science and Business Media LLC, v. 5, n. 9, p. 903–910, jun. 2021. ISSN 2397-3366. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41550-021-01384-2>>. Citado na página 32.
- HOLDOM, Bob; REN, Jing; ZHANG, Chen. Quark matter may not be strange. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 120, n. 22, maio 2018. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.222001>>. Citado na página 69.
- KYCIA, Radosław A.; KUBIS, Sebastian; WÓJCIK, Włodzimierz. Topological analysis of nuclear pasta phases. **Physical Review C**, American Physical Society (APS), v. 96, n. 2, ago. 2017. ISSN 2469-9993. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.96.025803>>. Citado na página 34.
- LANDRY, Philippe; ESSICK, Reed; CHATZIOANNOU, Katerina. Nonparametric constraints on neutron star matter with existing and upcoming gravitational wave and pulsar observations. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 101, n. 12, jun. 2020. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.101.123007>>. Citado na página 24.
- LI, Bo-Lin; YAN, Yan; PING, Jia-Lun. Strange quark mass dependence of strange quark star properties. **The European Physical Journal C**, Springer Science and Business Media LLC, v. 81, n. 10, out. 2021. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09657-w>>. Citado na página 24.
- LI, Zhaosheng et al. An ultra-low-mass and small-radius compact object in 4u 1746-37? **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 798, n. 1, p. 56, dez. 2014. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/798/1/56>>. Citado na página 88.
- LINDBLOM, Lee; INDIK, Nathaniel M. Spectral approach to the relativistic inverse stellar structure problem. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 86, n. 8, out. 2012. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.86.084003>>. Citado na página 24.
- LOAN, Doan Thi et al. Equation of state of neutron star matter, and the nuclear symmetry energy. **Physical Review C**, American Physical Society (APS), v. 83, n. 6, jun. 2011. ISSN 1089-490X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.83.065809>>. Citado na página 99.

LORIMER, D.R.; KRAMER, M. **Handbook of Pulsar Astronomy**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. (Cambridge Observing Handbooks for Research Astronomers). Citado na página 26.

LVK. **The LIGO-Virgo-KAGRA (LVK) Collaboration**. 2024. <<https://www.ligo.org/about.php>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 51.

MCKAY, M. D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. **Technometrics**, JSTOR, v. 21, n. 2, p. 239, maio 1979. ISSN 0040-1706. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2307/1268522>>. Citado 3 vezes nas páginas 73, 91 e 102.

MIAO, Zhiqiang et al. Bayesian inference of strange star equation of state using the gw170817 and gw190425 data. **The Astrophysical Journal Letters**, American Astronomical Society, v. 917, n. 2, p. L22, ago. 2021. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ac194d>>. Citado 3 vezes nas páginas 24, 107 e 108.

MISNER, C.W. et al. **Gravitation**. [S.l.]: Princeton University Press, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 22, 31, 38 e 119.

MIT. **LIGO and Virgo detect neutron star smash-ups**. 2019. <<https://phys.org/news/2019-05-ligo-virgo-neutron-star-smash-ups.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.

MOTTA, P. N. **Efeitos de maré: Uma abordagem newtoniana e relativística dos números de Love**. Dissertação (Bacharelado) — Universidade Federal Fluminense, 2020. Citado na página 129.

MURDIN, P. **Encyclopedia of Astronomy & Astrophysics**. [S.l.]: CRC Press, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

NASA et al. **Webb's First Deep Field (NIRCam Image)**. 2023. <<https://webbtelescope.org/contents/media/images/2022/035/01G7DCWB7137MYJ05CSH1Q5Z1Z>>. Citado na página 37.

NOIRLAB. **The Crab Nebula and Pulsar**. 2020. <<https://noirlab.edu/public/images/noao-03036/>>. Citado na página 27.

OLVER, F.W.J.; STANDARDS, National Institute of; (U.S.), Technology. **NIST Handbook of Mathematical Functions**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 129, 137 e 144.

OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. **Physical Review**, American Physical Society (APS), v. 55, n. 4, p. 374–381, fev. 1939. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.55.374>>. Citado na página 26.

PANG, Peter T. H. et al. An updated nuclear-physics and multi-messenger astrophysics framework for binary neutron star mergers. **Nature Communications**, Springer Science and Business Media LLC, v. 14, n. 1, dez. 2023. ISSN 2041-1723. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41467-023-43932-6>>. Citado 4 vezes nas páginas 22, 25, 76 e 77.

PEARSON, J M et al. Unified equations of state for cold non-accreting neutron stars with brussels-montreal functionals. i. role of symmetry energy. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), set. 2018. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/sty2413>>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 22 e 64.

PEETERS, Kasper. **Cadabra: a field-theory motivated approach to computer algebra**. 2024. <<https://cadabra.science/>>. Citado 2 vezes nas páginas 119 e 129.

PEREIRA, J. P. et al. Tidal deformations of hybrid stars with sharp phase transitions and elastic crusts. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 895, n. 1, p. 28, may 2020. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab8aca>>. Citado na página 24.

PEREIRA, J. P. et al. Probing elastic quark phases in hybrid stars with radius measurements. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 910, n. 2, p. 145, apr 2021. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/abe633>>. Citado na página 24.

PEREIRA, J. P. et al. Differentiating between sharp and smoother phase transitions in neutron stars. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 105, p. 123015, Jun 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.123015>>. Citado na página 24.

PEREIRA, J. P.; FLORES, C. V.; LUGONES, G. Phase transition effects on the dynamical stability of hybrid neutron stars. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 860, n. 1, p. 12, jun 2018. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aabfbf>>. Citado 6 vezes nas páginas 22, 24, 49, 50, 66 e 69.

POISSON, E.; WILL, C.M. **Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 129 e 130.

POSTNIKOV, S.; PRAKASH, M.; LATIMER, J. M. Tidal love numbers of neutron and self-bound quark stars. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 82, p. 024016, Jul 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.024016>>. Citado na página 24.

POTEKHIN, A. Y. et al. Analytical representations of unified equations of state for neutron-star matter. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 560, p. A48, dez. 2013. ISSN 1432-0746. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201321697>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 64.

POULSEN, S. K. **Tidal Deformation of the Solid Earth: A Finite Difference Discretization**. Dissertação (Mestrado) — University of Copenhagen, 2009. Citado na página 53.

REGGE, T.; WHEELER, J. A. Stability of a schwarzschild singularity. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 108, p. 1063–1069, Nov 1957. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.1063>>. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 130.

- REZZOLLA, Luciano; MOST, Elias R.; WEIH, Lukas R. Using gravitational-wave observations and quasi-universal relations to constrain the maximum mass of neutron stars. **The Astrophysical Journal Letters**, American Astronomical Society, v. 852, n. 2, p. L25, jan. 2018. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aaa401>>. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 76.
- ROMANI, Roger W. et al. Psr j0952-0607: The fastest and heaviest known galactic neutron star. **The Astrophysical Journal Letters**, American Astronomical Society, v. 934, n. 2, p. L17, jul. 2022. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ac8007>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 76.
- SCHAFFNER-BIELICH, J. **Compact Star Physics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2020. Citado 10 vezes nas páginas 22, 23, 25, 27, 28, 32, 33, 35, 50 e 65.
- SCHNEIDER, A. S. et al. Nuclear “pasta” formation. **Physical Review C**, American Physical Society (APS), v. 88, n. 6, dez. 2013. ISSN 1089-490X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.88.065807>>. Citado na página 34.
- SCHUTZ, B. **A First Course in General Relativity**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 22, 38 e 119.
- SCOTT, R.B. **A Student’s Manual for: A First Course in General Relativity**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 125.
- SHAPIRO, S.L.; TEUKOLSKY, S.A. **Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects**. [S.l.]: Wiley, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 25.
- STAELIN, David H.; REIFENSTEIN, Edward C. Pulsating radio sources near the crab nebula. **Science**, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 162, n. 3861, p. 1481–1483, dez. 1968. ISSN 1095-9203. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1126/science.162.3861.1481>>. Citado na página 26.
- THORNE, Kip S. Multipole expansions of gravitational radiation. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society (APS), v. 52, n. 2, p. 299–339, abr. 1980. ISSN 0034-6861. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.52.299>>. Citado 3 vezes nas páginas 54, 129 e 130.
- TOLMAN, Richard C. Static solutions of einstein’s field equations for spheres of fluid. **Physical Review**, American Physical Society (APS), v. 55, n. 4, p. 364–373, fev. 1939. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.55.364>>. Citado na página 26.
- VINK, J. **Physics and Evolution of Supernova Remnants**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2020. (Astronomy and Astrophysics Library). Citado 7 vezes nas páginas 22, 25, 28, 29, 30, 31 e 32.
- WITTEN, Edward. Cosmic separation of phases. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 30, n. 2, p. 272–285, jul. 1984. ISSN 0556-2821. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.30.272>>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 35 e 68.

YAKOVLEV, Dmitrii G et al. Lev landau and the concept of neutron stars. **Physics-Uspekhi**, Uspekhi Fizicheskikh Nauk (UFN) Journal, v. 56, n. 3, p. 289–295, mar. 2013. ISSN 1468-4780. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3367/UFNe.0183.201303f.0307>>. Citado na página 25.

ZASTROW, João Vitor. **Star Structure**. 2024. <https://github.com/joaovz/Star_structure>. Citado 4 vezes nas páginas 71, 78, 119 e 129.

APÊNDICE A – POTENCIAIS TERMODINÂMICOS

Neste apêndice, serão abordados os potenciais termodinâmicos de um fluido, definindo as expressões explícitas e deduzindo os diferenciais totais relacionados, utilizados no decorrer do texto. Foram utilizados como referências livros de termodinâmica padrão (HAAR; WERGELAND, 1966; CALLEN, 1991).

Precisamos, antes, estabelecer algumas definições:

$$\begin{cases} S \equiv \text{Entropia}, \\ V \equiv \text{Volume}, \\ N_i \equiv \text{Número de partículas da espécie } i, \\ T \equiv \text{Temperatura}, \\ p \equiv \text{Pressão}, \\ \mu_i \equiv \text{Potencial químico da espécie } i. \end{cases} \quad (174)$$

O primeiro potencial termodinâmico é a energia interna $U(S, V, N_i)$, definida por

$$U(S, V, N_i) = TS - pV + \sum_i \mu_i N_i. \quad (175)$$

Calculando o diferencial total de U , obtemos

$$dU = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i. \quad (176)$$

Além disso, podemos expressar o diferencial total utilizando as derivadas parciais, com subscritos para destacar as variáveis mantidas constantes nas derivadas parciais, de modo que

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_i} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N_i} dV + \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial N_i} \right)_{S, V} dN_i. \quad (177)$$

Assim, utilizando as equações (176) e (177), podemos relacionar as variáveis termodinâmicas envolvidas com as derivadas parciais. O próximo potencial termodinâmico é a entalpia $H(S, p, N_i)$, definida por

$$H(S, p, N_i) = U(S, V, N_i) + pV. \quad (178)$$

Calculando o diferencial total de H , obtemos

$$dH = d(U + pV) = TdS + Vdp + \sum_i \mu_i dN_i. \quad (179)$$

Expressando o diferencial total utilizando as derivadas parciais, obtemos

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{p,N_i} dS + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_{S,N_i} dp + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial N_i} \right)_{S,p} dN_i. \quad (180)$$

O próximo potencial termodinâmico é a energia livre de Helmholtz $F(T, V, N_i)$, definida por

$$F(T, V, N_i) = U(S, V, N_i) - TS. \quad (181)$$

Calculando o diferencial total de F , obtemos

$$dF = d(U - TS) = -SdT - pdV + \sum_i \mu_i dN_i. \quad (182)$$

Expressando o diferencial total utilizando as derivadas parciais, obtemos

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N_i} dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N_i} dV + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial N_i} \right)_{T,V} dN_i. \quad (183)$$

O próximo potencial termodinâmico é a energia livre de Gibbs $G(T, p, N_i)$, definida por

$$G(T, p, N_i) = F(T, V, N_i) + pV. \quad (184)$$

Calculando o diferencial total de G , obtemos

$$dG = d(F + pV) = -SdT + Vdp + \sum_i \mu_i dN_i. \quad (185)$$

Expressando o diferencial total utilizando as derivadas parciais, obtemos

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{p,N_i} dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_{T,N_i} dp + \sum_i \left(\frac{\partial G}{\partial N_i} \right)_{T,p} dN_i. \quad (186)$$

Por fim, temos o grande potencial $\Omega(T, V, \mu_i)$, definido por

$$\Omega(T, V, \mu_i) = F(T, V, N_i) - \sum_i \mu_i N_i. \quad (187)$$

Calculando o diferencial total de Ω , obtemos

$$d\Omega = d \left(F - \sum_i \mu_i N_i \right) = -SdT - pdV - \sum_i N_i d\mu_i. \quad (188)$$

Expressando o diferencial total utilizando as derivadas parciais, obtemos

$$d\Omega = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V,\mu_i} dT + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T,\mu_i} dV + \sum_i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i} \right)_{T,V} d\mu_i. \quad (189)$$

APÊNDICE B – ESTRELAS COM SIMETRIA ESFÉRICA

Visando resolver as equações de Einstein para estrelas com simetria esférica, precisamos antes obter a representação da métrica de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico, utilizando coordenadas esféricas. As referências utilizadas neste apêndice são as referências padrão que abordam as equações *Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)* (MISNER et al., 2017; SCHUTZ, 2009). Além disso, algumas deduções foram feitas com o auxílio de códigos simbólicos que desenvolvemos em *Python* (FOUNDATION, 2024) e com o programa *Cadabra* (PEETERS, 2024), disponíveis em (ZASTROW, 2024).

B.1 ESPAÇOS-TEMPOS ESTÁTICOS ESFERICAMENTE SIMÉTRICOS

No limite assintótico, longe da estrela, o espaço-tempo deve ser plano, de modo que se faz necessário representar a métrica de Minkowski em coordenadas esféricas. Temos que $g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu$, e que $\vec{e}_\mu = \Lambda^{\mu'}{}_\mu \vec{e}_{\mu'} = \partial_\mu x^{\mu'} \vec{e}_{\mu'}$, onde $\mu \in \{t, r, \theta, \phi\}$ e $\mu' \in \{t, x, y, z\}$. Construindo a métrica de Minkowski em coordenadas esféricas, componente por componente, obtemos

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (190)$$

onde utilizamos a seguinte definição para o elemento de ângulo sólido

$$d\Omega^2 := d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (191)$$

Vamos agora deduzir o formato geral da métrica de um espaço-tempo esfericamente simétrico, partindo da seguinte definição: todo ponto do espaço-tempo está em uma superfície esférica bidimensional, uma 2-esfera, ou seja, cujo elemento de linha é dado por

$$dl^2 = f(r', t)d\Omega^2, \quad (192)$$

onde $f(r', t)$ é uma função desconhecida das outras duas coordenadas da variedade (r' e t). A área de cada 2-esfera é $4\pi f(r', t)$, de modo que definimos a coordenada radial r da geometria esférica tal que $f(r', t) := r^2$, que representa uma transformação de coordenada de (r', t) para (r, t) .

A métrica mais geral é representada em coordenadas esféricas por

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tr} & g_{t\theta} & g_{t\phi} \\ g_{tr} & g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\phi} \\ g_{t\theta} & g_{r\theta} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{t\phi} & g_{r\phi} & g_{\theta\phi} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}. \quad (193)$$

Considerando duas 2-esferas concêntricas com raios r e $r + dr$, com sistemas coordenados separados, temos que a linha com (t, θ, ϕ) constantes deve ser ortogonal às

2-esferas, ou seja, $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi = 0$, de modo que $g_{r\theta} = g_{r\phi} = 0$. Além disso, por ser um sistema de coordenadas esféricas, exigimos que \vec{e}_θ e \vec{e}_ϕ sejam ortogonais, ou seja, $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\phi = 0$, de modo que $g_{\theta\phi} = 0$. E como se tratam de 2-esferas, a equação (192) deve ser satisfeita para $dt = dr = 0$, tal que

$$dl^2 = f(r', t)d\Omega^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (194)$$

de modo que $g_{\theta\theta} = r^2$ e $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta$. E para a simetria esférica ser estendida para o espaço-tempo, devemos exigir que a linha com (r, θ, ϕ) constantes deve ser ortogonal às 2-esferas, ou seja, $\vec{e}_t \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_t \cdot \vec{e}_\phi = 0$, de modo que $g_{t\theta} = g_{t\phi} = 0$.

Com essas considerações, a métrica de um espaço-tempo esfericamente simétrico pode ser representada por

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tr}dtdr + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (195)$$

onde g_{tt} , g_{tr} e g_{rr} são funções de t e r . Por fim, restringimos ao caso estático, dado pelas seguintes condições:

1. Todas as componentes da métrica são independentes de t ;
2. A geometria é inalterada por uma reversão temporal $t \rightarrow -t$.

A reversão temporal é uma transformação coordenada dada por $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (-t, r, \theta, \phi)$, representada por $\Lambda^{\mu'}{}_\mu = \partial_\mu x^{\mu'}$, onde $\mu \in \{t, r, \theta, \phi\}$ e $\mu' \in \{-t, r, \theta, \phi\}$. Calculando as componentes da transformação, obtemos $\Lambda^{t'}{}_t = -1$, $\Lambda^{t'}{}_i = \Lambda^i{}_t = 0$, $\Lambda^{i'}{}_j = \delta^i{}_j$. Aplicando a transformação às componentes da métrica, obtemos:

$$\begin{cases} g_{t't'} = \Lambda^{\mu'}{}_{t'} \Lambda^{\nu'}{}_{t'} g_{\mu\nu} = (\Lambda^t{}_{t'})^2 g_{tt} = g_{tt}, \\ g_{t'i'} = \Lambda^{\mu'}{}_{t'} \Lambda^{\nu'}{}_{i'} g_{\mu\nu} = \Lambda^t{}_{t'} \Lambda^i{}_{i'} g_{ti} = -g_{ti}, \\ g_{i'j'} = \Lambda^{\mu'}{}_{i'} \Lambda^{\nu'}{}_{j'} g_{\mu\nu} = \Lambda^i{}_{i'} \Lambda^j{}_{j'} g_{ij} = g_{ij}. \end{cases} \quad (196)$$

Assim, para que a condição (2) seja satisfeita, $g_{ti} = 0$, de modo que $g_{tr} = 0$ na equação (195) para o caso estático e esfericamente simétrico, tal que

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (197)$$

onde introduzimos as funções $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ no lugar dos termos g_{tt} e g_{rr} , substituição válida para estrelas, onde $g_{tt} < 0$ e $g_{rr} > 0$ em todo o espaço-tempo. No caso de estrelas, sistemas com fronteiras, exigimos que longe da estrela o espaço-tempo seja assintoticamente plano, ou seja, a equação (197) se reduz à métrica de Minkowski, dada pela equação (190), de modo que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r) = 0. \quad (198)$$

B.2 EQUAÇÕES DE EINSTEIN PARA FLUIDOS PERFEITOS

Utilizando a definição da métrica, dada pela equação (197), obtemos os símbolos de Christoffel não nulos por meio da equação (30). Substituindo os símbolos de Christoffel na equação (37), e utilizando as simetrias do tensor de Riemann, dadas pela equação (39), deduzimos as componentes independentes não nulas do tensor de Riemann, que totalizam 6 componentes.

Aplicando as equações (41) e (42) obtemos as componentes não nulas do tensor de Ricci, e o escalar de Ricci, respectivamente. Substituindo esses resultados na equação (43), obtemos as componentes não nulas do tensor de Einstein, dadas por:

$$\begin{cases} G_{tt} = r^{-2}e^{\nu-\lambda}(r\lambda' + e^\lambda - 1), \\ G_{rr} = r^{-2}(r\nu' - e^\lambda + 1), \\ G_{\theta\theta} = \frac{1}{4}re^{-\lambda}(r(\nu')^2 - r\nu'\lambda' + 2r\nu'' + 2\nu' - 2\lambda'), \\ G_{\phi\phi} = \sin^2\theta G_{\theta\theta}. \end{cases} \quad (199)$$

Precisamos agora calcular as componentes do tensor energia-momento para um fluido perfeito, dadas pela equação (26) com índices covariantes

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (200)$$

A quadrivelocidade no referencial localmente inercial, onde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, tem componentes dadas por $\vec{U} \rightarrow (1, 0, 0, 0)$, de modo que sua norma é dada por

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = \eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1. \quad (201)$$

Como a norma é independente do referencial, e no caso estático o fluido não está em movimento, podemos escrever

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -e^\nu(U^t)^2 = -1. \quad (202)$$

Sabendo que $U_\mu = g_{\mu\alpha}U^\alpha$, e utilizando a equação (202), concluímos que o único componente U_μ não nulo é dado por

$$U_t = -e^{\nu/2}. \quad (203)$$

Substituindo as equações (203) e (197) na equação (200) e calculando as componentes não nulas, obtemos:

$$\begin{cases} T_{tt} = \rho e^\nu, \\ T_{rr} = p e^\lambda, \\ T_{\theta\theta} = r^2 p, \\ T_{\phi\phi} = \sin^2 \theta \ T_{\theta\theta}. \end{cases} \quad (204)$$

Aplicando a conservação de energia-momento, dada pela equação (48), obtemos a relação

$$\frac{d\nu}{dr} = -\frac{2}{\rho + p} \frac{dp}{dr}. \quad (205)$$

Vamos agora definir uma nova função $m(r)$ para substituir $\lambda(r)$, conhecida como função massa

$$m(r) := \frac{1}{2}r(1 - e^{-\lambda}), \quad (206)$$

ou, equivalentemente, isolando e^λ , temos

$$e^\lambda = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \quad (207)$$

Notando que a derivada da função massa é dada por

$$m'(r) = \frac{1}{2}e^{-\lambda}(r\lambda' + e^\lambda - 1), \quad (208)$$

e aplicando a equação de Einstein, dada pela equação (51), obtemos duas equações. A primeira delas é obtida por meio da componente (t, t) da equação de Einstein, dada por

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (209)$$

E a partir da componente (r, r) da equação de Einstein, obtemos

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{2(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}. \quad (210)$$

E as outras componentes não fornecem informações novas. Podemos usar a equação (205) para eliminar a variável ν da equação (210), e obtemos então

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}. \quad (211)$$

As equações (209), (210), e (211) são as equações TOV. Com as equações (209) e (211) junto à equação de estado (EdE) na forma da equação (12), temos três equações que envolvem três variáveis dependentes de r : m , ρ e p .

B.3 SOLUÇÃO EXTERNA E A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Podemos resolver as equações *TOV* analiticamente na região externa à estrela, onde temos $\rho = p = 0$. A equação (209) neste caso se reduz a

$$\frac{dm}{dr} = 0. \quad (212)$$

Integrando essa equação na coordenada radial, partindo da superfície da estrela em R , o raio da estrela, até um raio arbitrário r , obtemos

$$m(r) = m(R) = M, \quad (213)$$

onde M é a massa da estrela, como será mostrado na sequência. Podemos também definir a compacidade $C := M/R$, que utilizamos posteriormente. Já a equação (210) externamente à estrela se reduz a

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{2m}{r(r - 2m)}. \quad (214)$$

Integrando essa equação na coordenada radial, partindo de um raio arbitrário r até o infinito, obtemos

$$e^\nu = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (215)$$

Além disso, a equação (207) externamente à estrela fica

$$e^\lambda = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (216)$$

Deste modo, substituindo as equações (215) e (216) na equação (197), obtemos a métrica válida para a região externa à estrela, conhecida como métrica de Schwarzschild, dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (217)$$

que também é válida para um buraco negro (BN) sem rotação e eletricamente neutro, que possui raio $R_S = 2M$, conhecido como raio de Schwarzschild, de modo que a compacidade de BNs é $C_{BN} = M/R = M/2M = 1/2$, sendo este um limite máximo extremo para a compacidade de estrelas de nêutrons (ENs). Para $r \gg 1$, a métrica de Schwarzschild se aproxima de

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (218)$$

que é a métrica de campo distante de uma estrela com massa total M , justificando assim a nomenclatura utilizada.

B.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Precisamos de condições de contorno para as variáveis ν , m , p e ρ . Para que o espaço-tempo tenha uma geometria suave, precisamos exigir que as funções métricas sejam contínuas na superfície da estrela, de modo que a métrica dada pela equação (197) deve se reduzir à métrica de Schwarzschild dada pela equação (217), na superfície da estrela, em $r = R$. Pelo termo g_{tt} , obtemos

$$e^{\nu(R)} = \left(1 - \frac{2M}{R}\right), \quad (219)$$

que nos dá a condição de contorno de $\nu(r)$. E pelo termo g_{rr} obtemos

$$e^{\lambda(R)} = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1}. \quad (220)$$

Pela equação (206), vemos que essa condição requer que $m(R) = M$, conforme esperado, em acordo com a equação (213).

As condições iniciais para a pressão e densidade representadas por $p(r = 0) = p_c$ e $\rho(r = 0) = \rho_c$, respectivamente, são utilizadas para definir o modelo estelar. Para uma certa EdE $p = p(\rho)$, uma sequência de pressões centrais p_c , ou equivalentemente densidades centrais ρ_c , define um conjunto de estrelas. Além disso, para a pressão ser contínua, $p = 0$ na superfície da estrela, pois esta é a pressão no vácuo externo à estrela, sendo essa a condição utilizada para interromper a integração das equações e definir o raio da estrela R .

Por fim, precisamos da condição inicial $m(r = 0)$. Uma esfera pequena de raio $r = \epsilon$ tem raio próprio dado por $r' = |g_{rr}|^{1/2}\epsilon$, obtido integrando ds^2 para $dt = d\Omega = 0$. Mas como o espaço-tempo deve ser plano localmente, r' deve ser igual a ϵ , de modo que, pelas equações (197) e (207) obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} g_{rr} = \lim_{r \rightarrow 0} e^\lambda = \lim_{r \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} = 1. \quad (221)$$

Para que esse limite seja satisfeito, temos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} m = 0, \quad (222)$$

onde m se aproxima de zero mais rapidamente que r em direção ao centro da estrela. Concluímos então que $m(r = 0) = 0$, sendo essa a última condição de contorno desejada. Porém, a equação (211) tem uma singularidade em $r = 0$, sendo necessário iniciar a integração em um valor de r pequeno. Para evitar erros numéricos, podemos utilizar uma solução em série de potências para calcular as condições iniciais para r pequeno, conforme demonstrado na sequência.

B.5 SOLUÇÃO EM SÉRIES DE POTÊNCIAS

O conteúdo desta seção é baseado no desenvolvimento presente em (SCOTT, 2016). O objetivo é resolver o sistema de equações diferenciais composto pelas equações (209) e (211), assumindo a solução na forma de séries de potências:

$$\begin{cases} m(r) = \sum_j m_j r^j, \\ p(r) = \sum_j p_j r^j, \\ \rho(r) = \sum_j \rho_j r^j, \end{cases} \quad (223)$$

e utilizando a expansão em série de Taylor centrada em ρ_c para a EdE $p = p(\rho)$ dada por

$$p(\rho) = \sum_j \frac{1}{j!} \frac{d^j p(\rho_c)}{d\rho^j} (\rho - \rho_c)^j, \quad (224)$$

as derivadas $m'(r)$ e $p'(r)$ ficam:

$$\begin{cases} m'(r) = \sum_k (k+1) m_{k+1} r^k, \\ p'(r) = \sum_k (k+1) p_{k+1} r^k. \end{cases} \quad (225)$$

Substituindo as expansões em série de potências dadas pela equação (223) e as derivadas dadas pela equação (225) na equação (209), fazendo a substituição $j \rightarrow (k-2)$ e notando que r^k é arbitrário, concluímos que

$$(k+1)m_{k+1} = 4\pi\rho_{k-2}, \quad (226)$$

onde $k \geq 0$. Substituindo $k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ obtemos:

$$\begin{cases} m_1 = 4\pi\rho_{-2} = 0, \\ 2m_2 = 4\pi\rho_{-1} = 0, \\ 3m_3 = 4\pi\rho_0, \\ 4m_4 = 4\pi\rho_1, \\ 5m_5 = 4\pi\rho_2. \end{cases} \quad (227)$$

Agora precisamos fazer o mesmo procedimento para a equação (211), mas antes disso vamos rearranjar os termos, de modo que

$$-r(r-2m)\frac{dp}{dr} = (\rho+p)(m+4\pi r^3 p). \quad (228)$$

O lado esquerdo da equação (228) fica

$$-r(r-2m)\frac{dp}{dr} = \sum_{jk} (2m_{j-1} - \delta_{j-2})(k+1)p_{k+1}r^{j+k}, \quad (229)$$

e o lado direito da equação (228) fica

$$(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p) = \sum_{jk} (\rho_j + p_j)(m_k + 4\pi p_{k-3})r^{j+k}. \quad (230)$$

Igualando as equações (229) e (230), fazendo a substituição $k \rightarrow (i - j)$ e notando que r^i é arbitrário, concluímos que

$$\sum_j (2m_{j-1} - \delta_{j-2})(i - j + 1)p_{i-j+1} = \sum_j (\rho_j + p_j)(m_{i-j} + 4\pi p_{i-j-3}). \quad (231)$$

Substituindo $i = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ na equação (231) obtemos as seguintes relações, respectivamente:

$$\begin{cases} m_0 = 0, \\ m_1 = 0, \\ p_1 = 0, \\ 2p_2 = -(\rho_0 + p_0)(m_3 + 4\pi p_0), \\ 3p_3 = -\rho_1 \left(\frac{7\pi}{3} \rho_0 + 5\pi p_0 \right). \end{cases} \quad (232)$$

Expressando as soluções em séries de Taylor:

$$\begin{cases} m(r) = \sum_j \frac{1}{j!} \frac{d^j m(0)}{dr^j} r^j, \\ p(r) = \sum_j \frac{1}{j!} \frac{d^j p(0)}{dr^j} r^j, \\ \rho(r) = \sum_j \frac{1}{j!} \frac{d^j \rho(0)}{dr^j} r^j, \end{cases} \quad (233)$$

obtemos fórmulas para os coeficientes, comparando com a equação (223):

$$\begin{cases} m_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j m(0)}{dr^j}, \\ p_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j p(0)}{dr^j}, \\ \rho_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j \rho(0)}{dr^j}. \end{cases} \quad (234)$$

Podemos agora relacionar os coeficientes p_1 e ρ_1 utilizando a equação (234), de modo que

$$p_1 = \frac{dp(0)}{dr} = \left[\frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} \right]_{r=0} = \rho_1 \frac{dp(\rho_c)}{d\rho}. \quad (235)$$

Pela equação (232) temos que $p_1 = 0$, e, portanto, pela equação (235), concluímos que $\rho_1 = 0$. Substituindo esse resultado na expressão de p_3 , dada pela equação (232), concluímos que $p_3 = 0$. Além disso, também podemos relacionar p_2 e ρ_2 utilizando a equação (234), tal que

$$p_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 p(0)}{dr^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[\frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} \right]_{r=0} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \rho(0)}{dr^2} \frac{dp(\rho_c)}{d\rho} = \rho_2 \frac{dp(\rho_c)}{d\rho}. \quad (236)$$

E a partir da equação (223) para $r = 0$ vemos que $p(0) = p_c = p_0$ e também $\rho(0) = \rho_c = \rho_0$. Reunindo todos os coeficientes obtidos, temos:

$$\begin{cases} m_0 = m_1 = m_2 = m_4 = 0, \\ m_3 = \frac{4}{3}\pi\rho_c, \\ m_5 = \frac{4}{5}\pi\rho_2, \\ p_0 = p_c, \\ p_1 = 0, \\ p_2 = -\frac{2}{3}\pi(\rho_c + p_c)(\rho_c + 3p_c), \\ \rho_0 = \rho_c, \\ \rho_1 = 0, \\ \rho_2 = p_2 \frac{dp(\rho_c)}{d\rho}. \end{cases} \quad (237)$$

Assim temos os dois primeiros coeficientes não nulos das séries. Substituindo os coeficientes da equação (237) nas séries da equação (223) obtemos as soluções das séries truncadas:

$$\begin{cases} m(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_cr^3 - \frac{8}{15}\pi^2 \frac{d\rho(p_c)}{dp} (\rho_c + p_c)(\rho_c + 3p_c)r^5, \\ p(r) = p_c - \frac{2}{3}\pi(\rho_c + p_c)(\rho_c + 3p_c)r^2, \\ \rho(r) = \rho_c - \frac{2}{3}\pi \frac{d\rho(p_c)}{dp} (\rho_c + p_c)(\rho_c + 3p_c)r^2. \end{cases} \quad (238)$$

E são essas as equações utilizadas para calcular as condições iniciais para r pequeno. Agora precisamos estimar o valor r_{max} no qual o erro devido à solução aproximada é menor que o erro máximo desejado, para limitar o raio inicial utilizado na solução numérica das equações TOV. Consideremos que os erros de m , p e ρ devem satisfazer:

$$\begin{cases} |\epsilon_m| \leq |m|\epsilon_{rel}, \\ |\epsilon_p| \leq |p|\epsilon_{rel}, \\ |\epsilon_\rho| \leq |\rho|\epsilon_{rel}, \end{cases} \quad (239)$$

onde ϵ_{rel} é o erro relativo máximo permitido. Representando m , p e ρ por:

$$\begin{cases} m(r) = m_3 r^3 + m_5 r^5, \\ p(r) = p_c + p_2 r^2, \\ \rho(r) = \rho_c + \rho_2 r^2, \end{cases} \quad (240)$$

consideramos o caso conservador em que utilizamos apenas o primeiro termo de cada série para calcular as condições iniciais, de modo que o erro de cada variável é dado pelo

segundo termo da respectiva série. Com essa consideração, substituindo a equação (240) na equação (239), isolando r e considerando o caso extremo obtemos expressões para r_{max} :

$$\begin{cases} r_{max}^{(m)} = \left(\left| \frac{m_3}{m_5} \right| \epsilon_{rel} \right)^{1/2}, \\ r_{max}^{(p)} = \left(\left| \frac{p_c}{p_2} \right| \epsilon_{rel} \right)^{1/2}, \\ r_{max}^{(\rho)} = \left(\left| \frac{\rho_c}{\rho_2} \right| \epsilon_{rel} \right)^{1/2}. \end{cases} \quad (241)$$

Devemos utilizar o menor r_{max} para garantir que todos os erros sejam menores que o erro máximo permitido. Como pela equação (237) $\frac{m_3}{m_5} = \frac{5}{3} \frac{\rho_c}{\rho_2}$, temos que $r_{max}^{(m)}$ é menos restritivo que $r_{max}^{(\rho)}$. Assim, como o erro de ρ depende da EdE, r_{max} é dado por

$$r_{max} = \min \left(r_{max}^{(p)}, r_{max}^{(\rho)} \right). \quad (242)$$

APÊNDICE C – CÁLCULO DO NÚMERO DE LOVE RELATIVÍSTICO

Visando obter o número de Love k_2 , precisamos antes desenvolver a expansão da métrica em termos de multipolos, que será abordado na sequência. As referências utilizadas neste apêndice são os artigos padrão e trabalhos relacionados ao efeito de maré em estrelas de nêutrons (ENs) e o número de Love (DAMOUR; NAGAR, 2009; HINDERER, 2008; GITTINS; ANDERSSON; PEREIRA, 2020; ABDELSALHIN, 2019; MOTTA, 2020), além de livros de métodos matemáticos (ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2013; OLVER; STANDARDS; (U.S.), 2010). Qualquer referência específica é citada no decorrer do texto. Além disso, algumas deduções foram feitas com o auxílio de códigos simbólicos que desenvolvemos em *Python* (FOUNDATION, 2024) e com o programa *Cadabra* (PEETERS, 2024), disponíveis em (ZASTROW, 2024).

C.1 EXPANSÃO MULTIPOLAR DA MÉTRICA

Uma estrela estática e esfericamente simétrica de massa M , quando colocada em um campo de maré quadrupolar estático externo \mathcal{E}_{ij} , desenvolve em resposta um momento de quadrupolo \mathcal{Q}_{ij} . No referencial de repouso assintótico local da estrela, para $r \gg 1$, pode ser demonstrado que a componente g_{tt} da métrica é determinada por (GITTINS; ANDERSSON; PEREIRA, 2020; THORNE, 1980)

$$-\frac{1+g_{tt}}{2} = -\frac{M}{r} - \frac{3}{2r^3}\mathcal{Q}_{ij}\left(n^i n^j - \frac{1}{3}\delta^{ij}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) + \frac{1}{2}r^2\mathcal{E}_{ij}n^i n^j + \mathcal{O}(r^3), \quad (243)$$

onde $n^i = x^i/r$. Esta expansão define \mathcal{E}_{ij} e \mathcal{Q}_{ij} . Considerando que \mathcal{E}_{ij} e \mathcal{Q}_{ij} estão relacionados linearmente, podemos escrever (HINDERER, 2008)

$$\mathcal{Q}_{ij} = -\lambda\mathcal{E}_{ij}, \quad (244)$$

onde λ é uma constante. Pode ser mostrado que λ está relacionada ao número de Love k_2 por (HINDERER, 2008)

$$k_2 = \frac{3}{2}\lambda R^{-5}. \quad (245)$$

É possível mostrar que os tensores \mathcal{E}_{ij} e \mathcal{Q}_{ij} podem ser decompostos por meio dos tensores simétricos de traço nulo \mathcal{Y}_{ij}^{lm} da seguinte forma (HINDERER, 2008):

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{ij} = \sum_{m=-2}^2 \mathcal{E}_{2m} \mathcal{Y}_{ij}^{2m} \approx \mathcal{E}_{2m} \mathcal{Y}_{ij}^{2m}, \\ \mathcal{Q}_{ij} = \sum_{m=-2}^2 \mathcal{Q}_{2m} \mathcal{Y}_{ij}^{2m} \approx \mathcal{Q}_{2m} \mathcal{Y}_{ij}^{2m}, \end{cases} \quad (246)$$

onde os tensores \mathcal{Y}_{ij}^{lm} são definidos em termos dos harmônicos esféricos Y_{lm} por (HINDERER, 2008; THORNE, 1980; POISSON; WILL, 2014)

$$Y_{lm} = \mathcal{Y}_{ij}^{lm} n^i n^j, \quad (247)$$

e possuem a propriedade de traço nulo, expressa por (THORNE, 1980; POISSON; WILL, 2014)

$$\mathcal{Y}_{ij}^{lm} \delta^{ij} = 0. \quad (248)$$

Substituindo as equações (246), (247) e (248) na expansão dada pela equação (243), e simplificando, obtemos

$$-\frac{1+g_{tt}}{2} = -\frac{M}{r} - \frac{3}{2r^3} \mathcal{Q}_{2m} Y_{2m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) + \frac{1}{2} r^2 \mathcal{E}_{2m} Y_{2m} + \mathcal{O}(r^3). \quad (249)$$

Substituindo as expansões dadas pela equação (246) na equação (244), obtemos

$$\mathcal{Q}_{2m} = -\lambda \mathcal{E}_{2m}. \quad (250)$$

Na sequência utilizamos essas expressões para deduzir o número de Love k_2 .

C.2 PERTURBAÇÃO DO ESPAÇO-TEMPO ESTÁTICO E ESFERICAMENTE SIMÉTRICO

O objetivo é analisar a configuração de equilíbrio de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico sujeito às perturbações lineares devido a um campo de maré externo. O deslocamento dos elementos de fluido devido ao campo externo, representado pelo campo vetorial $\vec{\xi}(t, r, \theta, \phi)$, causa alterações na métrica, que pode ser descrita por

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + z h_{\mu\nu}, \quad (251)$$

onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, e z é uma constante adicionada para deixar evidente a ordem da perturbação durante os cálculos, quando necessário. Utilizando a equação (197), a métrica de fundo é expressa na forma matricial por

$$(g^{(0)}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (252)$$

Decompondo a perturbação $h_{\mu\nu}$ em harmônicos esféricicos, restringindo para perturbações estáticas, e usando o calibre de Regge-Wheeler, pode ser mostrado que a perturbação é representada por (REGGE; WHEELER, 1957; HINDERER, 2008; DAMOUR; NAGAR, 2009)

$$(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} H_0(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda(r)} H_2(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta K(r) \end{pmatrix} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (253)$$

onde $Y_{lm}(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos, e $H_0(r)$, $H_2(r)$ e $K(r)$ são funções da coordenada radial r que caracterizam a perturbação. De agora em diante, omitimos os índices em $Y_{lm}(\theta, \phi)$ e a dependência das funções para simplificar a notação. Substituindo as equações (252) e (253) na equação (251), obtemos o formato final da métrica perturbada

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^\nu(-1 + zH_0Y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^\lambda(1 + zH_2Y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2(1 + zKY) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta(1 + zKY) \end{pmatrix}. \quad (254)$$

Agora podemos seguir para a solução das equações de Einstein.

C.3 EQUAÇÕES DE EINSTEIN PERTURBADAS

As equações de Einstein, dadas pela equação (51), podem ser expressas por

$$G^\mu_\nu = 8\pi T^\mu_\nu, \quad (255)$$

onde utilizamos o primeiro índice elevado para simplificar os cálculos posteriores. Temos que G^μ_ν e T^μ_ν podem ser expressos por:

$$\begin{cases} G^\mu_\nu = G^{(0)\mu}_\nu + \delta G^\mu_\nu, \\ T^\mu_\nu = T^{(0)\mu}_\nu + \delta T^\mu_\nu, \end{cases} \quad (256)$$

onde $\mathbf{G}^{(0)}$ e $\mathbf{T}^{(0)}$ são os tensores originais, e $\delta\mathbf{G}$ e $\delta\mathbf{T}$ as perturbações. Substituindo a equação (256) na equação (255), e lembrando que os tensores originais satisfazem as equações de Einstein, chegamos em

$$\delta G^\mu_\nu = 8\pi \delta T^\mu_\nu, \quad (257)$$

que é a parte perturbativa das equações de Einstein, que resolveremos na sequência.

C.3.1 Tensor Energia-Momento perturbado

O tensor energia-momento de um fluido perfeito, dado pela equação (26), pode ser expresso na forma mista por

$$T^\mu{}_\nu = (\rho + p)U^\mu U_\nu + p \delta^\mu{}_\nu. \quad (258)$$

Precisamos obter a parte perturbativa desse tensor. Para isso, expandimos todas as variáveis deixando evidente a perturbação de cada uma, de modo que

$$T^{(0)\mu}{}_\nu + \delta T^\mu{}_\nu = (\rho^{(0)} + \delta\rho + p^{(0)} + \delta p)(U^{(0)\mu} + \delta U^\mu)(U^{(0)}{}_\nu + \delta U_\nu) + (p^{(0)} + \delta p)\delta^\mu{}_\nu. \quad (259)$$

Expandindo essa expressão, mantendo apenas os termos não perturbativos e os termos perturbativos de primeira ordem, e utilizando a equação (258) para o tensor $\mathbf{T}^{(0)}$, chegamos na expressão para a parte perturbativa do tensor energia-momento

$$\delta T^\mu{}_\nu = (\delta\rho + \delta p)U^\mu U_\nu + (\rho^{(0)} + p^{(0)})(\delta U^\mu U_\nu + U^\mu \delta U_\nu) + \delta p \delta^\mu{}_\nu. \quad (260)$$

Agora precisamos calcular as componentes U^μ , δU^μ , U_ν e δU_ν para obter as componentes $\delta T^\mu{}_\nu$. Como estamos tratando de um sistema estático, o deslocamento do elemento de fluido não depende do tempo, de modo que a velocidade espacial é zero, e a quadrivelocidade pode ser expressa no referencial momentaneamente co-móvel (RMC) por

$$\vec{U} \rightarrow (U^{(0)t} + \delta U^t, 0, 0, 0). \quad (261)$$

Impondo a condição da norma da quadrivelocidade, dada pela equação (201), para o vetor $\vec{U}^{(0)}$, obtemos

$$g^{(0)}_{tt}U^{(0)t}U^{(0)t} = -1. \quad (262)$$

Substituindo a expressão para $g^{(0)}_{tt}$ dada pela equação (252) e isolando $U^{(0)t}$, obtemos

$$U^{(0)t} = e^{-\nu/2}. \quad (263)$$

Impondo essa mesma condição para o vetor \vec{U} , deixando as perturbações evidentes, tal que

$$g_{tt}U^tU^t = (g^{(0)}_{tt} + h_{tt})(U^{(0)t} + \delta U^t)(U^{(0)t} + \delta U^t) = -1. \quad (264)$$

Simplificando essa expressão, mantendo apenas os termos de primeira ordem, substituindo as expressões para $g^{(0)}_{tt}$, h_{tt} e $U^{(0)t}$ dadas pelas equações (252), (253) e (263) respectivamente, e isolando δU^t , obtemos

$$\delta U^t = \frac{1}{2}e^{-\nu/2}H_0Y, \quad (265)$$

onde não consideramos a constante z , para deixar as expressões mais limpas, já que os termos de ordem superior são fáceis de reconhecer. Substituindo as equações (263) e (265) na equação (261), obtemos

$$\vec{U} \rightarrow \left(e^{-\nu/2} \left(1 + \frac{1}{2} H_0 Y \right), 0, 0, 0 \right). \quad (266)$$

Agora nos resta calcular as componentes de \tilde{U} . Temos que

$$U_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu. \quad (267)$$

Como $U^\mu = 0 \forall \mu \neq 0$, pela equação (266), obtemos

$$\tilde{U} \rightarrow (U^{(0)}_t + \delta U_t, 0, 0, 0). \quad (268)$$

De modo que, deixando as perturbações evidentes, a equação (267) fica

$$U_t = g_{tt} U^t = (g^{(0)}_{tt} + h_{tt})(U^{(0)t} + \delta U^t). \quad (269)$$

Expandindo essa expressão e separando os termos perturbativos, de modo que $U_t = U^{(0)}_t + \delta U_t$, obtemos

$$U^{(0)}_t = g^{(0)}_{tt} U^{(0)t} = -e^{\nu/2}, \quad (270)$$

e para a parte perturbativa, obtemos

$$\delta U_t = g^{(0)}_{tt} \delta U^t + h_{tt} U^{(0)t} = \frac{1}{2} e^{\nu/2} H_0 Y. \quad (271)$$

Substituindo as equações (270) e (271) na equação (268), obtemos

$$\tilde{U} \rightarrow \left(-e^{\nu/2} \left(1 - \frac{1}{2} H_0 Y \right), 0, 0, 0 \right). \quad (272)$$

Agora podemos calcular as componentes da parte perturbativa do tensor energia-momento. Começando com a componente δT^t_t da equação (260), temos

$$\delta T^t_t = (\delta \rho + \delta p) U^t U_t + (\rho^{(0)} + p^{(0)}) (\delta U^t U_t + U^t \delta U_t) + \delta p \delta^t_t. \quad (273)$$

Substituindo as expressões para U^μ , δU^μ , U_ν e δU_ν dadas pelas equações (266), (265), (272), e (271) respectivamente, na equação (273), simplificado e mantendo apenas termos perturbativos de primeira ordem, obtemos

$$\delta T^t_t = -\delta \rho. \quad (274)$$

Calculando as componentes $\delta T^t_j = \delta T^j_t$ da equação (260), temos

$$\delta T^t_j = (\delta \rho + \delta p) U^t U_j + (\rho^{(0)} + p^{(0)}) (\delta U^t U_j + U^t \delta U_j) + \delta p \delta^t_j. \quad (275)$$

Notando que $U_j = \delta U_j = 0$, pela equação (272), e simplificando o delta de Kronecker, vemos que essas componentes são nulas, tal que

$$\delta T^t_j = 0. \quad (276)$$

Por fim, calculando as componentes δT^i_j da equação (260), temos

$$\delta T^i_j = (\delta\rho + \delta p)U^iU_j + (\rho^{(0)} + p^{(0)})(\delta U^iU_j + U^i\delta U_j) + \delta p \delta^i_j. \quad (277)$$

Notando que $U^i = \delta U^i = 0$, pela equação (266), que $U_j = \delta U_j = 0$, pela equação (272), vemos que essas componentes ficam

$$\delta T^i_j = \delta p \delta^i_j. \quad (278)$$

Utilizando as equações (274), (276), e (278), verificamos que as componentes não nulas do tensor $\delta\mathbf{T}$ são:

$$\begin{cases} \delta T^t_t = -\delta\rho, \\ \delta T^r_r = \delta T^\theta_\theta = \delta T^\phi_\phi = \delta p. \end{cases} \quad (279)$$

C.3.2 Tensor de Einstein perturbado

Vamos agora obter o tensor de Einstein perturbado. Para isso, precisamos da expressão para a métrica inversa no formato

$$g^{\mu\nu} = g^{(0)\mu\nu} + zk^{\mu\nu}, \quad (280)$$

de modo que podemos expandir o tensor de Einstein em função da métrica de fundo e da perturbação, mantendo apenas os termos perturbativos de primeira ordem. Utilizando a seguinte representação do delta de Kronecker, substituindo as equações (251) e (280), tal que

$$\delta_\mu^\nu = g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = (g^{(0)}{}_{\mu\alpha} + zh_{\mu\alpha})(g^{(0)\alpha\nu} + zk^{\alpha\nu}). \quad (281)$$

Expandindo essa expressão, mantendo apenas termos perturbativos de primeira ordem, simplificando e isolando k , obtemos

$$k^{\mu\nu} = -g^{(0)\mu\alpha}h_{\alpha\beta}g^{(0)\nu\beta}. \quad (282)$$

Para facilitar a visualização, ficam aqui reescritas as expressões para os símbolos de Christoffel, tensor de Riemann, tensor de Ricci, escalar de Ricci e tensor de Einstein, dadas pelas equações (30), (37), (41), (42), e (43), respectivamente:

$$\begin{cases} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}), \\ R^\alpha_{\beta\mu\nu} := \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\mu}, \\ R_{\mu\nu} := R^\alpha_{\mu\alpha\nu}, \\ R := R^\mu_\mu, \\ G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \end{cases} \quad (283)$$

Além disso, utilizaremos a forma mista do tensor de Einstein, dada por

$$G^\mu_\nu = g^{\mu\alpha}G_{\alpha\nu}. \quad (284)$$

Substituindo a equação (30) na equação (37), depois substituindo essa expressão nas equações (41) e (42), e por fim substituindo essas expressões na equação (43), e em seguida elevando um índice do tensor de Einstein por meio da equação (284), obtemos uma expressão do tensor de Einstein em termos da métrica, da métrica inversa, e as respectivas derivadas.

Substituindo a expressão para $g_{\mu\nu}$ dada pela equação (251), e a expressão para $g^{\mu\nu}$ dada pelas equações (280) e (282), obtemos uma expressão extensa para o tensor de Einstein em função de $g^{(0)}_{\mu\nu}$, $g^{(0)\mu\nu}$, $h_{\mu\nu}$, e derivadas desses termos. Por meio da constante z podemos identificar a ordem de perturbação de cada termo, e então manter apenas os termos perturbativos de primeira ordem.

Substituindo as expressões para $g^{(0)}_{\mu\nu}$ e $g^{(0)\mu\nu}$, obtidas por meio da equação (252), e a expressão para $h_{\mu\nu}$, dada pela equação (253), obtemos as componentes do tensor de Einstein para o problema em questão.

Os termos não perturbativos correspondem às componentes do tensor de Einstein de fundo, sendo as mesmas componentes calculadas durante a dedução das equações *Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)*, expressas na equação (199). Já os termos perturbativos de primeira ordem correspondem às componentes da perturbação do tensor de Einstein, que estão explícitas no apêndice D, onde usamos apóstrofos para denotar derivadas em relação a r .

C.3.3 Equação diferencial da perturbação

Com as perturbações $\delta\mathbf{T}$ e $\delta\mathbf{G}$ em mãos, podemos substituir suas componentes na parte perturbativa das equações de Einstein, expressas pela equação (257). Com isso, podemos obter a solução para as funções $H_0(r)$, $H_2(r)$ e $K(r)$, que caracterizam a perturbação $h_{\mu\nu}$. Veremos mais adiante que $H := H_0 = H_2$, e que essa função é suficiente para determinar os números de Love.

Subtraindo as componentes (θ, θ) e (ϕ, ϕ) da equação (257) e substituindo as componentes de $\delta\mathbf{T}$ dadas pela equação (279), temos

$$\delta G^\theta_\theta - \delta G^\phi_\phi = 0. \quad (285)$$

Substituindo as componentes de $\delta\mathbf{G}$ explícitas no apêndice D e simplificando a expressão, obtemos

$$-\frac{1}{2}zr^{-2}(H_0 - H_2) \left(-\partial_{\theta\theta}Y + \cot\theta\partial_\theta Y + \csc^2\theta\partial_{\phi\phi}Y \right) = 0. \quad (286)$$

Como os termos entre parênteses dependem de Y , essa parte difere de zero no caso geral, assim como z e r^{-2} . Portanto, concluímos que $H_0 - H_2 = 0$, o que nos leva a definir uma nova função $H(r)$ por

$$H := H_0 = H_2. \quad (287)$$

Substituindo as componentes de $\delta\mathbf{T}$ dadas pela equação (279) na componente (r, θ) da equação (257), temos

$$\delta G^r_\theta = 0. \quad (288)$$

Substituindo as componentes de $\delta\mathbf{G}$ explícitas no apêndice D e simplificando a expressão, obtemos

$$\frac{1}{4}ze^{-\lambda}\partial_\theta Y \left(H_0\nu' + H_2\nu' + 2H'_0 - 2K' - 2H_0r^{-1} + 2H_2r^{-1} \right) = 0. \quad (289)$$

Substituindo a definição de H dada pela equação (287) e simplificando, obtemos

$$\frac{1}{2}ze^{-\lambda}\partial_\theta Y (H\nu' + H' - K') = 0. \quad (290)$$

Como z , $e^{-\lambda}$, e $\partial_\theta Y$ são não nulos em geral, temos que a parte entre parênteses deve ser zero. Isolando a derivada de K nessa expressão, obtemos

$$K' = H\nu' + H'. \quad (291)$$

Calculando a derivada de segunda ordem de K , obtemos

$$K'' = H\nu'' + H'\nu' + H''. \quad (292)$$

Com essas expressões podemos eliminar a função K das outras equações, e assim obter uma equação para H . Somando as componentes (θ, θ) e (ϕ, ϕ) da equação (257) e substituindo as componentes de $\delta\mathbf{T}$ dadas pela equação (279), temos

$$\delta G^\theta_\theta + \delta G^\phi_\phi = 16\pi\delta p. \quad (293)$$

Substituindo as componentes de $\delta\mathbf{G}$ explícitas no apêndice D, substituindo a definição de H dada pela equação (287) e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}ze^{-\lambda}r^{-1}\left(-rH\lambda'\nu'+rH(\nu')^2+2rH\nu''-rH'\lambda'+3rH'\nu'+2rH''\right. \\ & \left.+rK'\lambda'-rK'\nu'-2rK''-2H\lambda'+2H\nu'+4H'-4K'\right)Y=16\pi\delta p. \end{aligned} \quad (294)$$

Substituindo as derivadas de K dadas pelas equações (291) e (292) e simplificando, obtemos

$$ze^{-\lambda}r^{-1}(\lambda'+\nu')HY=16\pi\delta p. \quad (295)$$

Agora precisamos utilizar expressões deduzidas anteriormente para simplificar essa expressão. Partindo da definição de e^λ dada pela equação (207), calculando a derivada de λ , substituindo a definição da derivada de m dada pela equação (209) e simplificando, obtemos

$$\lambda'=e^\lambda\left(8\pi r\rho-2mr^{-2}\right). \quad (296)$$

Substituindo a definição de e^λ , dada pela equação (207), na equação para a derivada de ν , dada pela equação (210), e isolando e^λ , obtemos

$$\nu'=e^\lambda\left(8\pi rp+2mr^{-2}\right). \quad (297)$$

Agora, substituindo essas derivadas dadas pelas equações (296) e (297) na equação (295), isolando δp e simplificando, obtemos

$$\delta p=\frac{1}{2}z(\rho+p)HY. \quad (298)$$

Subtraindo as componentes (r,r) e (t,t) da equação (257) e substituindo as componentes de $\delta\mathbf{T}$ dadas pela equação (279), temos

$$\delta G^r{}_r-\delta G^t{}_t=8\pi(\delta\rho+\delta p). \quad (299)$$

Substituindo as componentes de $\delta\mathbf{G}$ explícitas no apêndice D, substituindo a definição de H dada pela equação (287), substituindo as derivadas de K dadas pelas equações (291) e (292) e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}ze^{-\lambda}\left(HY\lambda'\nu'+HY(\nu')^2-2HY\nu''+YH'\lambda'-YH'\nu'\right. \\ & \left.-2YH''-2HY\lambda'r^{-1}-6HY\nu'r^{-1}-4YH'r^{-1}\right) \\ & -zr^{-2}\left(\partial_{\theta\theta}Y+\cot\theta\partial_\theta Y+\csc^2\theta\partial_{\phi\phi}Y\right)H=8\pi(\delta\rho+\delta p). \end{aligned} \quad (300)$$

Utilizando a equação angular, obtida por meio da separação de variáveis da equação de Schrödinger, dada por (ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2013; OLVER; STANDARDS; (U.S.), 2010)

$$\left(\partial_{\theta\theta}Y + \cot\theta\partial_\theta Y + \csc^2\theta\partial_{\phi\phi}Y \right) = -l(l+1)Y. \quad (301)$$

Substituindo essa expressão na equação (300), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ze^{-\lambda}\left(HY\lambda'\nu' + HY(\nu')^2 - 2HY\nu'' + YH'\lambda' - YH'\nu' - 2YH''\right. \\ \left.- 2HY\lambda'r^{-1} - 6HY\nu'r^{-1} - 4YH'r^{-1}\right) + zr^{-2}l(l+1)HY = 8\pi(\delta\rho + \delta p). \end{aligned} \quad (302)$$

Como a perturbação é pequena, podemos escrever $\delta\rho/\delta p = d\rho/dp$, e portanto

$$\delta\rho = \frac{d\rho}{dp} \delta p. \quad (303)$$

Substituindo as expressões para $\delta\rho$ e δp dadas pelas equações (303) e (298), respectivamente, na equação (302), e simplificando, obtemos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem para H , dada por

$$H'' + C_1H' + C_0H = 0, \quad (304)$$

onde os coeficientes C_0 e C_1 são dados por:

$$C_0 = e^\lambda \left[-\frac{l(l+1)}{r^2} + 4\pi(\rho+p)\frac{d\rho}{dp} + 4\pi(\rho+p) \right] - \frac{1}{2}\lambda'\nu' - \frac{1}{2}(\nu')^2 + \nu'' + \frac{1}{r}\lambda' + \frac{3}{r}\nu', \quad (305)$$

$$C_1 = \frac{2}{r} + \frac{1}{2}(\nu' - \lambda'). \quad (306)$$

Agora podemos simplificar as expressões dos coeficientes utilizando algumas expressões deduzidas anteriormente. Partindo da derivada de ν dada pela equação (297), a derivada de ν ao quadrado é dada por

$$(\nu')^2 = e^{2\lambda} \left(64\pi^2 r^2 p^2 + 32\pi mpr^{-1} + 4m^2 r^{-4} \right). \quad (307)$$

Além disso, precisamos da derivada de segunda ordem de ν . Partindo da derivada de ν dada pela equação (297), obtemos

$$\nu'' = e^\lambda \left(8\pi rp\lambda' - 4\pi rp\nu' - 4\pi r\rho\nu' + 8\pi p + 8\pi\rho + 2m\lambda'r^{-2} - 4mr^{-3} \right). \quad (308)$$

Substituindo as expressões para as derivadas, dadas pelas equações (296), (297), (307), e (308), na expressão para C_0 , dada pela equação (305), e simplificando obtemos

$$C_0 = e^\lambda \left[-\frac{l(l+1)}{r^2} + 4\pi(\rho+p)\frac{d\rho}{dp} + 4\pi(5\rho + 9p) \right] - (\nu')^2. \quad (309)$$

Por fim, substituindo as expressões para as derivadas, dadas pelas equações (296) e (297), na expressão para C_1 , dada pela equação (306), e simplificando obtemos

$$C_1 = \frac{2}{r} + e^\lambda \left[\frac{2m}{r^2} + 4\pi r(p - \rho) \right]. \quad (310)$$

Definindo uma nova função em termos da derivada logarítmica

$$y(r) := r \frac{d}{dr} \ln(H(r)) = r \frac{H'(r)}{H(r)}, \quad (311)$$

veremos na sequência que precisamos desta função no cálculo de número de Love, e não da função H . Assim, calculando y' utilizando a equação (311), e isolando rH''/H , obtemos

$$r \frac{H''}{H} = y' + \frac{1}{r}(y^2 - y). \quad (312)$$

Multiplicando a equação (304) por r/H , substituindo as equações (311) e (312), e simplificando, obtemos

$$y' = -C_0 r + \left(\frac{1}{r} - C_1 \right) y - \frac{1}{r} y^2. \quad (313)$$

C.4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA PERTURBAÇÃO

O objetivo é resolver a equação diferencial para a perturbação H , dada pela equação (304). No interior da estrela temos as funções p , ρ , m , e ν que dependem da coordenada radial r , determinadas solucionando as equações TOV, dadas pelas equações (209), (210) e (211), junto de uma equação de estado (EdE) no formato dado pela equação (12). Assim, no interior da estrela, a equação da perturbação H deve ser solucionada numericamente, já que a EdE pode ter um formato complicado. Precisamos então das condições iniciais para H e H' , determinadas resolvendo analiticamente a equação diferencial da perturbação válida no interior da estrela para $r \ll 1$.

Já na região externa à estrela, temos $p = \rho = 0$ e $m = M$, simplificando a equação (304), possibilitando a solução analítica neste caso. Além disso, podemos obter a solução assintótica da solução externa, válida distante da estrela, que nos permite determinar a expressão para o número de Love.

C.4.1 Solução interna

Verifiquemos o comportamento da equação (304) para $r \rightarrow 0$. Iniciando com o coeficiente C_0 , dado pela equação (309), obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} C_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ e^\lambda \left[-\frac{l(l+1)}{r^2} + 4\pi(\rho+p) \frac{dp}{dp} + 4\pi(5\rho+9p) \right] - (\nu')^2 \right\}. \quad (314)$$

Pela equação (221), temos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} e^\lambda = 1. \quad (315)$$

Pela equação (297), sabemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \nu' = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ e^\lambda \left(8\pi r p + 2m r^{-2} \right) \right\}. \quad (316)$$

Substituindo a expressão para p válida para $r \ll 1$, dada pela equação (240), no primeiro termo nos parênteses, obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \{8\pi r p\} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ 8\pi r (p_c + p_2 r^2) \right\} = 0. \quad (317)$$

Substituindo a expressão para m válida para $r \ll 1$, dada pela equação (240), no segundo termo nos parênteses, obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \{2m r^{-2}\} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ 2r^{-2} (m_3 r^3 + m_5 r^5) \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ 2r (m_3 + m_5 r^2) \right\} = 0. \quad (318)$$

Substituindo as equações (315), (317), e (318) na equação (316), vemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \nu' = 0. \quad (319)$$

Assim, substituindo as equações (315) e (319) na equação (314), e considerando apenas o primeiro termo das expressões em série para p e ρ , dadas pela equação (240), obtemos o limite do coeficiente C_0 dado por

$$\lim_{r \rightarrow 0} C_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ -\frac{l(l+1)}{r^2} + 4\pi \left[(\rho_c + p_c) \frac{d\rho(p_c)}{dp} + 5\rho_c + 9p_c \right] \right\}. \quad (320)$$

Já o limite do coeficiente C_1 , obtido pela equação (310), é dado por

$$\lim_{r \rightarrow 0} C_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{2}{r} + e^\lambda \left[\frac{2m}{r^2} + 4\pi r(p - \rho) \right] \right\}. \quad (321)$$

Substituindo as expressões para p e ρ válidas para $r \ll 1$, dadas pela equação (240), no segundo termo nos colchetes, obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \{4\pi r(p - \rho)\} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ 4\pi r(p_c + p_2 r^2 - \rho_c - \rho_2 r^2) \right\} = 0. \quad (322)$$

Assim, substituindo as equações (315), (318), e (322) na equação (321), obtemos o limite do coeficiente C_1 dado por

$$\lim_{r \rightarrow 0} C_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{r}. \quad (323)$$

Desta forma, substituindo as expressões para os coeficientes C_0 e C_1 válidas para $r \ll 1$, dadas pelas equações (320) e (323) na equação diferencial de H , dada pela equação (304), e multiplicando a equação por r^2 , obtemos

$$r^2 H'' + 2rH' + \left\{ 4\pi \left[(\rho_c + p_c) \frac{d\rho(p_c)}{dp} + 5\rho_c + 9p_c \right] r^2 - l(l+1) \right\} H = 0. \quad (324)$$

Esta equação diferencial tem o formato

$$r^2 H'' + 2rH' + [k^2 r^2 - l(l+1)] H = 0. \quad (325)$$

Utilizando a substituição

$$H(r) = \frac{Z(x)}{x^{1/2}}, \quad x = kr, \quad (326)$$

calculando as derivadas de H utilizando a expressão anterior, expressando as derivadas de Z em relação a x por Z' e Z'' , substituindo essas derivadas e a equação (326) na equação (325) e simplificando, obtemos

$$x^2 Z'' + xZ' + [x^2 - (l + 1/2)^2] Z = 0. \quad (327)$$

Esta equação diferencial tem o seguinte formato, conhecida como equação de Bessel (ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2013), expressa por

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad (328)$$

cuja solução regular em $x = 0$ é obtida por meio do método de Frobenius, dada por

$$y(x) = AJ_n(x), \quad (329)$$

onde A é uma constante e J_n é a dada por

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! (n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}. \quad (330)$$

Generalizando para $n = \alpha$ não inteiro, temos

$$J_\alpha(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(\alpha + s + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2s}, \quad (331)$$

onde utilizamos a função Gama para generalizar o fatorial, dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (332)$$

onde a relação entre Gama e o fatorial é dada por

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (333)$$

As funções $J_\alpha(x)$ são conhecidas como funções de Bessel do 1º tipo. Existem ainda as funções de Bessel do 2º tipo $Y_\alpha(x)$, que também são soluções da equação de Bessel.

Porém, $Y_\alpha(x)$ não são regulares em $x = 0$, e, portanto, não fazem parte da solução que estamos procurando. Assim, a solução para a equação (327) é dada por

$$Z(x) = AJ_{l+1/2}(x). \quad (334)$$

Substituindo a equação (334) na equação (326), obtemos

$$H(r) = A \frac{J_{l+1/2}(x)}{x^{1/2}}. \quad (335)$$

Temos então a definição

$$j_l(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x), \quad (336)$$

conhecidas como funções de Bessel esféricas do 1º tipo. Podemos então expressar a solução para a equação (325) por

$$H(r) = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(x). \quad (337)$$

Temos que, para $x \ll 1$, $j_l(x)$ tem o formato

$$j_l(x) \approx \frac{x^l}{(2l + 1)!!}. \quad (338)$$

Portanto, a solução $H(r)$ para $r \ll 1$ é dada por

$$H(r) \approx Br^l. \quad (339)$$

Calculando a derivada de H em relação a r , obtemos

$$H'(r) \approx Blr^{l-1}. \quad (340)$$

Substituindo as equações (339) e (340) na equação (311), vemos que

$$y(r) \approx r \frac{Blr^{l-1}}{Br^l} = l, \quad (341)$$

e, portanto, podemos desprezar a constante B no cálculo das condições iniciais de H e H' dadas pelas equações (339) e (340), de modo que:

$$\begin{cases} H(r) \approx r^l, \\ H'(r) \approx lr^{l-1}. \end{cases} \quad (342)$$

C.4.2 Solução externa e solução assintótica

Verifiquemos o comportamento da equação (304) na região externa à estrela, onde temos $\rho(r) = p(r) = 0$ e $m(r) = m(R) = M$. Iniciando com o coeficiente C_0 , dado pela equação (309), substituindo as equações (216) e (307), e simplificando, obtemos

$$C_0 = -\frac{l(l+1)}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \left(\frac{2M}{r^2}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}. \quad (343)$$

Já para o coeficiente C_1 , substituindo a equação (216) na equação (310), e simplificando, obtemos

$$C_1 = \frac{2}{r} + \frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (344)$$

Desta forma, substituindo as expressões para os coeficientes C_0 e C_1 válidas na região externa à estrela, dadas pelas equações (343) e (344) na equação diferencial de H , dada pela equação (304), e multiplicando a equação por $r^2(1 - 2M/r)$, obtemos

$$r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) H'' + 2(r - M)H' - \left[l(l+1) + \frac{4M^2}{r(r-2M)}\right] H = 0. \quad (345)$$

Utilizando a substituição

$$x = \frac{r}{M} - 1, \quad (346)$$

calculando as derivadas de H em relação a r em termos das derivadas de H em relação a x , por meio da regra da cadeia, substituindo na equação (345) e simplificando, obtemos

$$(1 - x^2)H'' - 2xH' + \left[l(l+1) - \frac{4}{1-x^2}\right] H = 0. \quad (347)$$

Esta equação diferencial tem o seguinte formato, conhecida como equação associada de Legendre (ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2013)

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0, \quad (348)$$

cuja solução geral é dada por

$$y(x) = a_P P_l^m(x) + a_Q Q_l^m(x), \quad (349)$$

onde $P_l^m(x)$ e $Q_l^m(x)$ são as funções associadas de Legendre do 1º e 2º tipo, respectivamente. Assim, a solução para a equação (347) é dada por

$$H(x) = a_P P_l^2(x) + a_Q Q_l^2(x). \quad (350)$$

Vamos, a partir de agora, restringir para o caso $l = 2$, de modo que a solução fica

$$H(x) = a_P P_2^2(x) + a_Q Q_2^2(x). \quad (351)$$

Desta forma, podemos obter o formato explícito para a solução. Como vimos anteriormente, a compacidade de um buraco negro (BN) é $C_{BN} = 1/2$, de modo que, para uma EN, $C_{EN} < 1/2$, e, portanto, externamente à EN, $x = r/M - 1 > 1$. Assim, estamos

procurando por representações das funções $P_2^2(x)$ e $Q_2^2(x)$ válidas para $x > 1$. Temos as seguintes fórmulas para este caso, conhecidas como fórmulas de Rodrigues (OLVER; STANDARDS; (U.S.), 2010):

$$P_l^m(x) = (x^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad (352)$$

$$Q_l^m(x) = (x^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Q_l(x), \quad (353)$$

onde $P_l(x)$ e $Q_l(x)$ são as funções de Legendre do 1º e 2º tipo, respectivamente, definidas pelas seguintes expressões (OLVER; STANDARDS; (U.S.), 2010):

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l, \quad (354)$$

$$Q_l(x) = \frac{1}{2} P_l(x) \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - W_{l-1}(x), \quad (355)$$

$$\begin{cases} W_{l-1}(x) = 0, & l = 0, \\ W_{l-1}(x) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} P_{k-1}(x) P_{l-k}(x), & l \geq 1. \end{cases} \quad (356)$$

Utilizando as equações (352) e (354) para $l = m = 2$, obtemos

$$P_2^2(x) = 3(x^2 - 1). \quad (357)$$

Analogamente, utilizando as equações (353), (355) e (356), para $l = m = 2$, obtemos

$$Q_2^2(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 1) \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + \frac{2x}{x^2 - 1} - 3x. \quad (358)$$

Assim, substituindo as expressões obtidas para $P_2^2(x)$ e $Q_2^2(x)$ dadas pelas equações (357) e (358), respectivamente, na equação (351), obtemos

$$H(x) = 3(x^2 - 1)a_P + \left[\frac{3}{2}(x^2 - 1) \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + \frac{2x}{x^2 - 1} - 3x \right] a_Q. \quad (359)$$

Precisamos calcular o comportamento assintótico para $r \rightarrow \infty$, ou seja, para $x = r/M - 1 \rightarrow \infty$. Utilizando as seguintes séries de Laurent centradas em $x \rightarrow \infty$:

$$\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \frac{2}{x} + \frac{2}{3x^3} + \frac{2}{5x^5} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{x^7} \right), \quad (360)$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{x^8} \right). \quad (361)$$

Substituindo essas expressões na equação (359), simplificando, mantendo apenas os termos dominantes, e substituindo $x \rightarrow r/M$ para $r \rightarrow \infty$, obtemos

$$H(r) \rightarrow 3 \left(\frac{r}{M} \right)^2 a_P + \frac{8}{5} \left(\frac{M}{r} \right)^3 a_Q. \quad (362)$$

C.4.3 O número de Love

Com a expressão assintótica de $H(r)$ em mãos, podemos obter uma expressão semelhante à equação (249), visando compará-las. Utilizando as expressões para g_{tt} e e^ν , dadas pelas equações (254) e (215), respectivamente, podemos escrever

$$-\frac{1+g_{tt}}{2} = -\frac{M}{r} + \left(\frac{M}{r} - \frac{1}{2}\right) HY. \quad (363)$$

Substituindo a expressão assintótica de $H(r)$, dada pela equação (362), considerando apenas os termos dominantes e simplificando, obtemos

$$-\frac{1+g_{tt}}{2} = -\frac{M}{r} - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{M}\right)^2 Y a_P - \frac{4}{5} \left(\frac{M}{r}\right)^3 Y a_Q. \quad (364)$$

Comparando as expressões dadas pelas equações (249) e (364), obtemos:

$$\begin{cases} a_P = -\frac{1}{3} M^2 \mathcal{E}_{2m}, \\ a_Q = -\frac{15}{8M^3} \lambda \mathcal{E}_{2m}, \end{cases} \quad (365)$$

onde utilizamos a equação (250) para eliminar \mathcal{Q}_{2m} . Calculando a razão a_Q/a_P , utilizando as equações (365) e (245), obtemos

$$\frac{a_Q}{a_P} = \frac{15}{4} \frac{k_2}{C^5}. \quad (366)$$

Escrevendo a solução H em função de r no seguinte formato, a partir da equação (351), tal que

$$H(r) = a_P P_2^2(r) + a_Q Q_2^2(r). \quad (367)$$

Podemos utilizar as equações (366) e (367) para determinar k_2 em termos de $H(R)$ e $H'(R)$. Na superfície da estrela, pela equação (367), temos:

$$\begin{cases} H(R) = a_P P_2^2(R) + a_Q Q_2^2(R), \\ H'(R) = a_P P_2^{2'}(R) + a_Q Q_2^{2'}(R). \end{cases} \quad (368)$$

Definindo $y_s := y(R) = RH'(R)/H(R)$, pela equação (311), substituindo a equação (368) nesta definição, isolando a_Q/a_P , e substituindo essa expressão na equação (366), isolando k_2 , obtemos

$$k_2 = \frac{4}{15} C^5 \frac{R P_2^{2'}(R) - y_s P_2^2(R)}{y_s Q_2^2(R) - R Q_2^{2'}(R)}. \quad (369)$$

Utilizando as expressões para $P_2^2(x)$ e $Q_2^2(x)$, dadas pelas equações (357) e (358), respectivamente, calculando suas derivadas em relação a r , substituindo na equação (369), e simplificando, obtemos a expressão final para o número de Love k_2 , dada por

$$\begin{aligned}
k_2 = & \frac{8}{5}C^5(1-2C)^2[2+2C(y_s-1)-y_s] \\
& \times \left\{ 2C[6-3y_s+3C(5y_s-8)] + 4C^3[13-11y_s+C(3y_s-2)+2C^2(1+y_s)] \right. \\
& \quad \left. + 3(1-2C)^2[2-y_s+2C(y_s-1)]\ln(1-2C) \right\}^{-1}.
\end{aligned} \tag{370}$$

C.4.4 Descontinuidade na densidade

Em EdEs que possuem transições de fase, ou densidades finitas para pressões nulas, existem descontinuidades na função $\rho(p)$. Vemos que a derivada $d\rho/dp$ está presente na expressão de C_0 , dada pela equação (309), e, portanto, uma descontinuidade em $\rho(p)$ causa uma singularidade em C_0 , e consequentemente em y' , conforme a equação (313). Portanto, precisamos adicionar uma correção Δy , devido à descontinuidade de $\rho(p)$, à solução y , e separar a integração numérica da equação (313) em duas etapas, antes e depois da descontinuidade em $\rho(p)$.

Consideremos o caso em que a densidade $\rho(p)$ possui uma descontinuidade em $p = p_d$. Podemos descrever a densidade $\rho(p)$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} \rho(p) = \rho_1(p), & p < p_d, \\ \rho(p) = \rho_2(p), & p \geq p_d, \end{cases} \tag{371}$$

expressão que pode ser reescrita em termos da função degrau unitário, definida por:

$$\begin{cases} \theta(x) = 0, & x < 0, \\ \theta(x) = 1, & x \geq 0, \end{cases} \tag{372}$$

de modo que

$$\rho(p) = \rho_1(p) + \Delta\rho(p)\theta(p - p_d), \tag{373}$$

onde definimos

$$\Delta\rho(p) := \rho_2(p) - \rho_1(p). \tag{374}$$

Calculando $d\rho/dp$, utilizando as equações (373) e (374), obtemos

$$\frac{d\rho}{dp}(p) = \frac{d\rho}{dp}(p \neq p_d) + \Delta\rho(p)\delta(p - p_d), \tag{375}$$

onde $\delta(x)$ é a função generalizada delta de Dirac, e a parte singular de $d\rho/dp$ é dada por

$$\frac{d\rho^s}{dp}(p) = \Delta\rho(p)\delta(p - p_d). \tag{376}$$

Substituindo esta expressão na equação (309), mantendo apenas os termos singulares, obtemos a parte singular do coeficiente C_0

$$C_0^s = 4\pi e^\lambda (\rho + p) \Delta\rho(p) \delta(p - p_d). \quad (377)$$

Substituindo esta expressão na equação (313), substituindo a expressão de e^λ , dada pela equação (207), e mantendo apenas os termos singulares, obtemos a parte singular de dy/dr

$$\frac{dy^s}{dr} = -\frac{4\pi r^2(\rho + p)}{r - 2m} \Delta\rho(p) \delta(p - p_d). \quad (378)$$

Também podemos obter uma expressão para dy^s/dr de modo análogo ao demonstrado para $d\rho^s/dp$. Expressando $y(p)$ por

$$y(p) = y_1(p) + \Delta y(p)\theta(p - p_d), \quad (379)$$

onde definimos

$$\Delta y(p) := y_2(p) - y_1(p). \quad (380)$$

Calculando dy/dp , utilizando as equações (379) e (380), obtemos

$$\frac{dy}{dp}(p) = \frac{dy}{dp}(p \neq p_d) + \Delta y(p)\delta(p - p_d), \quad (381)$$

onde a parte singular de $d\rho/dp$ é dada por

$$\frac{dy^s}{dp}(p) = \Delta y(p)\delta(p - p_d). \quad (382)$$

Utilizando a regra da cadeia, a derivada dy^s/dp , dada pela equação (382), e a derivada dp/dr , dada pela equação (211), a expressão para a parte singular dy^s/dr fica

$$\frac{dy^s}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)} \Delta y(p) \delta(p - p_d). \quad (383)$$

Por fim, igualando as duas expressões para dy^s/dr , dadas pelas equações (378) e (383), simplificando e isolando $\Delta y(p)$, obtemos

$$\Delta y(p) = \frac{\Delta\rho(p)}{\frac{m}{4\pi r^3} + p}. \quad (384)$$

Na descontinuidade, expandindo Δy e $\Delta\rho$, esta expressão fica

$$y(p_d + \epsilon) - y(p_d - \epsilon) = \frac{\rho(p_d + \epsilon) - \rho(p_d - \epsilon)}{\frac{m}{4\pi r_d^3} + p_d}, \quad (385)$$

onde $\epsilon \rightarrow 0^+$. Mudando as variáveis de p_d para r_d , sabendo que $p(r)$ é monotonicamente decrescente, e isolando $y(r_d + \epsilon)$, obtemos:

$$y(r_d + \epsilon) = y(r_d - \epsilon) + \Delta y(r_d), \quad (386)$$

$$\Delta y(r_d) = \frac{\rho(r_d + \epsilon) - \rho(r_d - \epsilon)}{m/4\pi r_d^3 + p_d}. \quad (387)$$

Assim, paramos a integração numérica em $y(r_d - \epsilon)$, aplicamos a correção devido à descontinuidade em ρ para calcular $y(r_d + \epsilon)$, dada pelas equações (386) e (387), e continuamos a integração a partir de $y(r_d + \epsilon)$, caso seja uma descontinuidade em ρ no interior da estrela.

Para o caso em que a descontinuidade em ρ é decorrente de uma densidade finita na superfície da estrela, o valor $y(R + \epsilon)$ calculado é aquele que deve ser utilizado para calcular o número de Love, ou seja, $y_s = y(R + \epsilon)$, de modo que as equações (386) e (387) se reduzem a:

$$y(R + \epsilon) = y(R - \epsilon) + \Delta y(R), \quad (388)$$

$$\Delta y(R) = -\frac{4\pi R^3 \rho(R - \epsilon)}{M}. \quad (389)$$

$$\begin{aligned} \delta G_t^t &= z e^{-\lambda} \left(-\frac{1}{2} Y K' \lambda' + Y K'' + H_2 Y \lambda' r^{-1} - Y H_2' r^{-1} + 3 Y K' r^{-1} - H_2 Y r^{-2} \right) + z \left(\frac{1}{2} H_2 \partial_{\theta\theta} Y r^{-2} + K Y r^{-2} + \frac{1}{2} K \partial_{\theta\theta} Y r^{-2} \right) \\ &\quad + z \left(r^2 \tan \theta \right)^{-1} \left(\frac{1}{2} H_2 \partial_\theta Y + \frac{1}{2} K \partial_\theta Y \right) + z \left(r^2 \sin^2 \theta \right)^{-1} \left(\frac{1}{2} H_2 \partial_{\phi\phi} Y + \frac{1}{2} K \partial_{\phi\phi} Y \right), \end{aligned} \quad (390)$$

$$\begin{aligned} \delta G_r^r &= z e^{-\lambda} \left(\frac{1}{2} Y K' \nu' - H_2 Y \nu' r^{-1} - Y H_0' r^{-1} + Y K' r^{-1} - H_2 Y r^{-2} \right) + z \left(-\frac{1}{2} H_0 \partial_{\theta\theta} Y r^{-2} + K Y r^{-2} + \frac{1}{2} K \partial_{\theta\theta} Y r^{-2} \right) \\ &\quad + z \left(r^2 \tan \theta \right)^{-1} \left(-\frac{1}{2} H_0 \partial_\theta Y + \frac{1}{2} K \partial_\theta Y \right) + z \left(r^2 \sin^2 \theta \right)^{-1} \left(-\frac{1}{2} H_0 \partial_{\phi\phi} Y + \frac{1}{2} K \partial_{\phi\phi} Y \right), \end{aligned} \quad (391)$$

$$\delta G_\theta^\theta = z e^{-\lambda} \left(\frac{1}{4} H_0 \partial_\theta Y \nu' + \frac{1}{4} H_2 \partial_\theta Y \nu' + \frac{1}{2} H_0' \partial_\theta Y - \frac{1}{2} K' \partial_\theta Y - \frac{1}{2} H_0 \partial_\theta Y r^{-1} + \frac{1}{2} H_2 \partial_\theta Y r^{-1} \right), \quad (392)$$

$$\delta G_\phi^\phi = z e^{-\lambda} \left(\frac{1}{4} H_0 \partial_\phi Y \nu' + \frac{1}{4} H_2 \partial_\phi Y \nu' + \frac{1}{2} H_0' \partial_\phi Y - \frac{1}{2} K' \partial_\phi Y - \frac{1}{2} H_0 \partial_\phi Y r^{-1} + \frac{1}{2} H_2 \partial_\phi Y r^{-1} \right), \quad (393)$$

$$\delta G_r^\theta = z \left(\frac{1}{4} H_0 \partial_\theta Y \nu' r^{-2} + \frac{1}{4} H_2 \partial_\theta Y \nu' r^{-2} + \frac{1}{2} H_0' \partial_\theta Y r^{-2} - \frac{1}{2} K' \partial_\theta Y r^{-2} - \frac{1}{2} H_0 \partial_\theta Y r^{-3} + \frac{1}{2} H_2 \partial_\theta Y r^{-3} \right), \quad (394)$$

$$\begin{aligned} \delta G_\theta^\theta &= z e^{-\lambda} \left(\frac{1}{4} H_2 Y \lambda' \nu' - \frac{1}{4} H_2 Y (\nu')^2 - \frac{1}{2} H_2 Y \nu'' + \frac{1}{4} Y H_0' \lambda' - \frac{1}{2} Y H_0' \nu' - \frac{1}{2} Y H_0'' - \frac{1}{4} Y H_2' \nu' - \frac{1}{4} Y K' \lambda' + \frac{1}{2} Y K'' \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} H_2 Y \lambda' r^{-1} - \frac{1}{2} H_2 Y \nu' r^{-1} - \frac{1}{2} Y H_0' r^{-1} - \frac{1}{2} Y H_2' r^{-1} + Y K' r^{-1} \right) \\ &\quad + z \left(r^2 \tan \theta \right)^{-1} \left(-\frac{1}{2} H_0 \partial_\theta Y + \frac{1}{2} H_2 \partial_\theta Y \right) + z \left(r^2 \sin^2 \theta \right)^{-1} \left(-\frac{1}{2} H_0 \partial_{\phi\phi} Y + \frac{1}{2} H_2 \partial_{\phi\phi} Y \right), \end{aligned} \quad (395)$$

$$\delta G^\theta_\phi = z \left(\frac{1}{2} H_0 \partial_{\theta\phi} Y r^{-2} - \frac{1}{2} H_2 \partial_{\theta\phi} Y r^{-2} \right) + z (r^2 \tan \theta)^{-1} \left(-\frac{1}{2} H_0 \partial_\phi Y + \frac{1}{2} H_2 \partial_\phi Y \right), \quad (396)$$

$$\delta G^\phi_r = z (r^2 \sin^2 \theta)^{-1} \left(\frac{1}{4} H_0 \partial_\phi Y \nu' + \frac{1}{4} H_2 \partial_\phi Y \nu' + \frac{1}{2} H'_0 \partial_\phi Y - \frac{1}{2} K' \partial_\phi Y \right) + z (r^3 \sin^2 \theta)^{-1} \left(-\frac{1}{2} H_0 \partial_\phi Y + \frac{1}{2} H_2 \partial_\phi Y \right), \quad (397)$$

$$\delta G^\phi_\theta = z (r^2 \sin^2 \theta)^{-1} \left(\frac{1}{2} H_0 \partial_{\theta\phi} Y - \frac{1}{2} H_2 \partial_{\theta\phi} Y \right) + z (r^2 \sin^3 \theta)^{-1} \left(-\frac{1}{2} H_0 \cos \theta \partial_\phi Y + \frac{1}{2} H_2 \cos \theta \partial_\phi Y \right), \quad (398)$$

$$\begin{aligned} \delta G^\phi_\phi &= z e^{-\lambda} \left(\frac{1}{4} H_2 Y \lambda' \nu' - \frac{1}{4} H_2 Y (\nu')^2 - \frac{1}{2} H_2 Y \nu'' + \frac{1}{4} Y H_0 \lambda' - \frac{1}{2} Y H'_0 \nu' - \frac{1}{2} Y H''_0 - \frac{1}{4} Y H'_2 \nu' - \frac{1}{4} Y K' \lambda' + \frac{1}{4} Y K' \nu' + \frac{1}{2} Y K'' \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} H_2 Y \lambda' r^{-1} - \frac{1}{2} H_2 Y \nu' r^{-1} - \frac{1}{2} Y H'_0 r^{-1} - \frac{1}{2} Y H'_2 r^{-1} + Y K' r^{-1} \right) + z \left(-\frac{1}{2} H_0 \partial_{\theta\theta} Y r^{-2} + \frac{1}{2} H_2 \partial_{\theta\theta} Y r^{-2} \right). \end{aligned} \quad (399)$$