

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

JOSE LUIS GOULART

**ESTUDO DOS MODELOS TRI E QUADRIDIMENSIONAL DE UM SISTEMA
FINANCEIRO**

**JOINVILLE / SC
2023**

JOSE LUIS GOULART

**ESTUDO DOS MODELOS TRI E QUADRIDIMENSIONAL DE UM SISTEMA
FINANCEIRO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Física, área de concentração: Física

Orientador(a): Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque

JOINVILLE / SC

2023

Goulart, José Luís

Estudo dos modelos tri e quadridimensional de um sistema financeiro / José Luís Goulart. -- 2023.
59 p.

Orientador: Holokx Abreu Albuquerque
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2023.

1. Sistema financeiro. 2. Econofísica. 3. Hiperaos. 4. Conjectura das janelas. I. Albuquerque, Holokx Abreu. II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

JOSE LUIS GOULART

**ESTUDO DOS MODELOS TRI E QUADRIDIMENSIONAL DE UM SISTEMA
FINANCEIRO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Física, área de concentração: Física

Orientador(a): Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque

BANCA EXAMINADORA:

Dr. Holokx Abreu Albuquerque
UDESC-CCT (presidente/orientador)

Membros:

Dr. Flávio Prebianca
IFC – Campus São Francisco do Sul

Dr. Paulo Cesar Rech
UDESC-CCT

Joinville, 25 de Outubro de 2023

Este trabalho é dedicado à minha esposa Sara por seu apoio incondicional e a memória de meus pais que sempre se orgulharam com minhas conquistas.

AGRADECIMENTOS

Fica registrado aqui meu profundo obrigado a todos que me ajudaram durante a caminhada deste mestrado acadêmico, em especial, minha esposa Sara Luiza Albano Goulart por todo suporte emocional e técnico para a elaboração dessa dissertação.

Agradeço ao Holokx Abreu Albuquerque por me aceitar como orientando nesta longa jornada de muitas idas e vindas.

Também agradeço minha mãe Maria Leoni Goulart por não me deixar esquecer deste sonho de completar o mestrado.

Obrigado a UDESC em especial ao PPGF por todo apoio durante o processo.

Agradeço ao Thainan Macedo pelo apoio operacional e pelas ótimas discussões durante o trabalho.

“Um fractal é uma maneira de
ver o infinito.” (Benoit Mandelbrot)

RESUMO

Neste trabalho foi investigado um modelo de sistema financeiro de três dimensões e sua expansão para quatro dimensões. Por meio de análise qualitativa foram propostos significados econômicos para dois parâmetros de controle até então desconhecidos. Foram empregadas ferramentas de análise numérica como os planos de parâmetros e plotagens de atratores para verificar a dinâmica do sistema. Nesta investigação foi confirmada a larga existência de caos e hipercaos, bem como, quase-periodicidade, caos transiente e periodicidade no sistema, além disso foi evidenciado a conjectura das janelas em fluxos com a aparição de janelas de periodicidade limitadas na fronteira de hipercaos e quase-periodicidade. Também foi investigada a transição caos-hipercaos no modelo quadridimensional por meio de incrementos nos parâmetros de controle descobrindo uma rápida conversão para hipercaos com valores muito inferiores aos utilizados em trabalhos anteriores.

Palavras-chave: Sistema Financeiro; Econofísica; Hipercaos; Conjectura das Janelas.

ABSTRACT

This work investigated a three-dimensional financial system model and its expansion to four dimensions. Through qualitative analysis, economic meanings were proposed for two previously unknown control parameters. Numerical analysis tools such as parameter planes and attractor plots were used to verify the system dynamics. In this investigation, the wide existence of chaos and hyperchaos was proven, as well as quasiperiodicity, transient chaos, and periodicity in the system, in addition, the conjecture of windows in flows was evidenced with the privacy of windows of limited periodicity on the border of hyperchaos and quasiperiodicity. The chaos-hyperchaos transition in the four-dimensional model was also investigated through increments in the control parameters, discovering a rapid conversion to hyperchaos with values much lower than those used in previous works.

Keywords: Financial System; Econophysics; Hyperchaos; Windows Conjecture.

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	12
2.	SISTEMA FINANCEIRO.....	13
2.1	SISTEMA FINANCEIRO E A ECONOMIA.....	13
2.2	INSTITUIÇÕES FINANCEIRAS.....	14
2.3	ÓRGÃOS REGULATÓRIOS.....	14
2.4	MERCADOS.....	15
2.5	VARIÁVEIS ECONÔMICAS.....	17
2.5.1.	Variáveis Macroeconômicas.....	17
2.5.2.	Variáveis Microeconômicas.....	19
3.	MODELO DE SISTEMA FINANCEIRO.....	20
4.	CONCEITOS PRELIMINARES.....	22
4.1.	SISTEMAS DINÂMICOS.....	22
4.2.	ESPAÇOS DE FASES E PLANOS DE FASES.....	23
4.3.	ATRATORES.....	25
4.3.1.	Atratores Caóticos.....	25
4.4.	OS EXPOENTES DE LYAPUNOV.....	26
4.5.	ESPAÇO E PLANO DE PARÂMETROS.....	29
4.6.	CAOS E HIPERCAOS.....	31
5.	PROPOSIÇÃO DE SIGNIFICADOS ECONÔMICOS PARA OS PARÂMETROS <i>d</i> e <i>k</i>.....	31
5.1.	O PARÂMETRO <i>d</i> COMO A TAXA DE ENDIVIDAMENTO.....	32
5.2	O PARAMETRO <i>k</i> COMO A SOMA DA DEPRECIAÇÃO E AMORTIZAÇÃO.....	34
6.	RESULTADOS NUMÉRICOS.....	36
6.1.	SISTEMA FINANCEIRO 3D.....	36
6.2.	SISTEMA FINANCEIRO 4D.....	40
6.3.	TRANSIÇÃO CAOS-HIPERCAOS NO MODELO 4D.....	51
7.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	54
	REFERÊNCIAS.....	56

1. INTRODUÇÃO

Desde seus primeiros ensaios no início do século XX as finanças se utilizam de técnicas aplicadas em outras áreas das ciências naturais como solução para seus paradigmas. No pioneiro trabalho de Louis Bachelier [1] o movimento browniano observado por Robert Brown e desenvolvido por Einstein [2] foi inserido para modelar a formação de preços no mercado acionário, mais tarde Mandelbrot [3] introduziu a geometria fractal para o mesmo problema.

Naturalmente a complexidade foi aplicada para solução de sistemas econômicos, pois estes se apresentam altamente não lineares [3-4]. Diante desta perspectiva, no início dos anos noventa no Instituto Santa Fé no Novo México por meio dos trabalhos de Feichtinger [5] e posteriormente Arthur [6] foram utilizados grupos interdisciplinares de Físicos, Matemáticos e Economistas para a abordagem de tais sistemas. Naquela época essa “nova área” de pesquisa foi intitulada de Econofísica.

Após mais de três décadas muito tem-se evoluído em campos como modelagem de funcionamento de mercados financeiros [7-12], regras de tomada de decisão de agentes individuais em variados contextos [13-15] e administração de crises financeiras [16-17].

Este trabalho utiliza as ferramentas de análise qualitativa da dinâmica não linear para investigar um modelo de sistema financeiro que apresenta hipercaos [18]. Tal modelo é uma extensão com quatro dimensões do sistema tridimensional apresentado por Ma *et. al.* [19] que adiciona uma nova variável dinâmica w representando o lucro médio. O foco desta pesquisa é justamente a observação da transição do comportamento caótico para o hipercaótico deste modelo por meio de incrementos no lucro médio w .

O capítulo 2 introduz uma noção sobre sistema financeiro e variáveis econômicas para contextualização e entendimento das variáveis de estado e parâmetros de controle do modelo. O capítulo 3 apresenta o modelo em seus detalhes e aponta a necessidade de adoção de significado para dois parâmetros (d e k) não encontrados na literatura. No capítulo 4, temos os conceitos preliminares da dinâmica não linear que são as ferramentas utilizadas na pesquisa. Posteriormente, no capítulo 5, há a atribuição de significados econômicos para os parâmetros d e k .

No capítulo 6, temos a apresentação dos resultados numéricos. Finalmente, no capítulo 7, temos as considerações finais e discussão dos resultados.

2. SISTEMA FINANCEIRO

O objeto de estudo desta obra é um modelo matemático de sistema financeiro. Cada país possui seu próprio sistema com suas características particulares. Além disso, existe o sistema financeiro global [20] regulado por instituições financeiras multilaterais como o FMI e o Banco Mundial, e ainda por organizações governamentais como a ONU. Tal sistema permite transferências de recursos e mercadorias entre várias nações com rapidez e segurança.

A seguir será comentado com mais detalhes sobre estes componentes dando como exemplo o sistema financeiro nacional do Brasil.

2.1. SISTEMA FINANCEIRO E ECONOMIA

Os agentes da economia são pessoas, empresas e governo. Diante dessa perspectiva, a função básica de todo sistema financeiro é dar suporte a economia de seu país por meio da transferência de recursos entre os agentes superavitários e os agentes deficitários [21].

A constituição do sistema é feita por instituições financeiras públicas e privadas, órgãos regulatórios e mercados. Por meio dos serviços financeiros dá-se a circulação da riqueza que é primordial para o bom funcionamento da economia, permitindo assim, o financiamento de projetos e atividades econômicas.

De outro ângulo, a economia influencia o sistema financeiro de várias maneiras. As variáveis econômicas, como o crescimento econômico, a inflação e o desemprego, afetam as decisões financeiras dos agentes. Como exemplo, um aumento generalizado nos preços conhecido como inflação pode reduzir a demanda por investimentos, pois as empresas entendem que o momento não é propício para gastos e sim para poupança. Aqui vale ressaltar que a variável econômica “demanda por investimentos” não se trata de investimento financeiro como ações ou títulos de renda fixa, entre outros tantos, mas sim em aumento de capacidade produtiva de

uma empresa já existente ou quando um cidadão investe para abrir seu próprio negócio. Trata-se de produção de bens e serviços.

A política econômica gerida pelo governo, como a política monetária fiscal, também tem um impacto relevante no sistema financeiro. As decisões do Banco Central, como a definição da taxa de juros, afetam diretamente as condições de empréstimo e investimento, influenciando as decisões financeiras de instituições e indivíduos.

2.2. INSTITUIÇÕES FINANCEIRAS

São a base de todo sistema financeiro justamente por serem aquelas que realizam a transferência de capital entre aqueles que possuem excedentes para aqueles que necessitam [22]. Tais empresas assumem todo o risco da operação garantindo os valores dos clientes poupadore. Atualmente no Brasil e no mundo existe uma gama enorme de instituições financeiras que oferecem diferentes produtos e serviços, mas que podem ser resumidos em apenas três: crédito, investimentos e segurança.

Na tabela (2.1) abaixo temos alguns exemplos de instituições financeiras (IF) brasileiras para demonstrar o quanto os serviços financeiros podem se diversificar.

2.3. ÓRGÃOS REGULATÓRIOS

São os responsáveis pelas normas, supervisão e fiscalização das instituições financeiras. Todo sistema financeiro precisa estar norteado por valores sólidos como transparência, honestidade e confiabilidade para não entrar em colapso [22]. No Brasil, existem diversos órgãos regulatórios governamentais e alguns não governamentais. Geralmente são separados por mercados em que atuam. A seguir temos a tabela (2.2) com os órgãos mais emblemáticos.

IF	TIPO	SERVIÇOS OFERECIDOS
Caixa Econômica Federal	Banco Público	Investimentos, Crédito, Benefícios Sociais, Seguridade
Bradesco	Banco Privado	Investimentos, Crédito, Seguridade
BV Financeira	Financeira	Crédito
Clear	Corretora de Títulos e Valores Mobiliários	Investimentos
Caixa Consórcio	Administradora de Consórcios	Crédito
BNDES	Banco Público	Crédito para Empresas
AGK	Corretora de Câmbio	Câmbio
Suno Asset	Gestora de Recursos	Gestão de Fundos de Investimentos
Nubank	Fintech	Plataforma de pagamentos, Investimentos e Crédito

Tabela 2.1: Exemplo de instituições financeiras brasileiras e seus diferentes tipos e serviços prestados.

2.4. MERCADOS

Em geral, mercado é um espaço físico ou virtual onde se realizam intercâmbios comerciais de bens e serviços entre compradores e vendedores a um preço acordado por ambos [23]. Existem diferentes tipos de mercado de acordo com os bens ou serviços oferecidos pelos vendedores. Os mercados possuem muitas subdivisões devido à grande especialização das ofertas.

O sistema financeiro contém o mercado financeiro, este por sua vez, subdivide-se em quatro grandes mercados:

(a) Mercado de Capitais: Conjunto de distribuição de valores mobiliários que proporciona liquidez aos títulos emitidos por empresas e viabiliza o processo de capitalização para estas. É constituído pelas bolsas de valores, sociedades corretoras e outras instituições financeiras autorizadas.

(b) Mercado de Câmbio: Onde são negociadas moedas entre países. Os agentes econômicos se referenciam em regras cambiais para vendedores e compradores que realizam a troca das moedas, chamadas de divisas.

(c) Mercado Monetário: É onde acontece a compra e venda de ativos do Tesouro Público, esta transação é para ativos de curto prazo, visando prover liquidez ao sistema financeiro nacional. O Banco Central e as instituições financeiras são os principais influenciados pelo mercado monetário. As instituições financeiras utilizam este meio para captar e emprestar dinheiro, deixando seu caixa positivo na relação final do dia.

Órgão	Mercados Atuantes	Função	Origem
Conselho Monetário Nacional (CMN)	Geral	Normativa	Governamental
Banco Central do Brasil (BCB ou Bacen)	Câmbio, Monetário, Crédito	Regulatória, Fiscalizadora	Governamental
Comissão de Valores Mobiliários (CVM)	Capitais e Títulos	Regulatória, Fiscalizadora	Governamental
Superintendência de Seguros Privados (SUSEP)	Seguros, Resseguros, Capitalização, Previdência Complementar Aberta	Regulatória, Fiscalizadora	Governamental
Superintendência Nacional de Previdência Complementar (PREVIC)	Previdência Complementar Fechada	Regulatória, Fiscalizadora	Governamental
Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (ANBIMA)	Financeiro	Regulatória, Certificadora	Privada

Tabela 2.2: Quadro exemplo de órgãos regulatórios brasileiros.

(d) Mercado de Crédito: Engloba diversas operações e concessões de crédito. Ou seja, é um mercado que fornece financiamentos e empréstimos para pessoas físicas e jurídicas. Portanto, o mercado de crédito tem função primordial para a economia.

2.5. VARIÁVEIS ECONÔMICAS

São medidas quantitativas usadas para mensurar e evolução da economia como um todo, ou ainda, de setores ou empresas específicos e é isso que as subdivide em variáveis macroeconômicas e microeconômicas. A maioria esmagadora é medida em porcentagem mudando apenas o intervalo de tempo. Os mais comuns são porcentagens ao mês e ao ano. Os conteúdos teóricos desta seção são fundamentados nas obras de Tebchirani [24], Samuelson [25] e Simonsen *et al* [26].

2.5.1. Variáveis Macroeconômicas

São medidas que descrevem a economia de um país englobando todos os agentes e setores de uma economia como um sistema financeiro interligado e interdependente. Algumas das principais variáveis macroeconômicas são:

- Produto Interno Bruto (PIB): O PIB é a medida mais ampla do valor total dos bens e serviços finais produzidos dentro de um país durante um período de tempo, geralmente um ano. Por meio do PIB percebe-se se houve crescimento ou retração da economia naquele período. O PIB é calculado valendo-se de outras cinco variáveis macroeconômicas. O consumo das famílias C , os gastos governamentais G , investimentos em produção de bens e serviços I , as exportações X e as importações M . Onde a diferença $(X - M)$ é chamada de

balança comercial. Sendo sua fórmula como segue, onde PIB é representado por Y :

$$Y = C + G + I + (X - M) \quad (2.1)$$

- Inflação: Taxa que mede o aumento geral dos preços de bens e serviços durante um intervalo de tempo. Ela é geralmente expressa como uma porcentagem e pode ser mensurada por meio de vários índices de preços conhecidos como o IPCA (Índice de preços ao consumidor amplo) publicado pelo IBGE (Instituto brasileiro de geografia e estatística) ou o IGP-M (índice geral de preços – mercado) publicado pela FGV (Fundação Getúlio Vargas).
- Desemprego: A taxa de desemprego mede a porcentagem da força de trabalho que está desempregada durante um intervalo de tempo. É uma medida importante da saúde da economia de um país e afeta a capacidade das pessoas de gerar renda e consumir.
- Balança comercial: É a diferença entre o valor em moeda local das exportações e importações ($X - M$). Uma balança comercial positiva gera aumento do PIB e crescimento da economia, do contrário gera redução do crescimento.
- Taxa de juros: É a taxa temporal pela qual as instituições financeiras emprestam dinheiro para os agentes da economia. Ela afeta o custo do crédito e a capacidade dos agentes de investir e consumir. É a principal ferramenta pela qual os Bancos Centrais dos países influenciam seus sistemas financeiros pois é definida por estas autoridades.

- Taxa de poupança interna: É a proporção da renda disponível de um país que é poupada pelos seus agentes. É influenciada por diversos fatores, como a cultura de poupança, a estabilidade econômica e política. Em geral países com taxas de poupança mais altas tendem a ter economias mais estáveis no longo prazo.

2.5.2. Variáveis Microeconômicas

São aquelas que se referem a nível individual do sistema financeiro, ou seja, a empresas, consumidores e mercados específicos. Algumas das principais variáveis microeconômicas incluem:

- Demanda: A quantidade de um bem ou serviço que os consumidores estão dispostos e capazes de comprar a um determinado preço.
- Lucro: A diferença entre receitas de uma empresa e seus custos de produção. A margem de lucro é diferenciada por setor, mas em média é 25% para serviços, 15% para comércio e 7% para indústria.
- Elasticidade: A sensibilidade da demanda ou da oferta a variações no preço, dessa forma, bens ou serviços com alta elasticidade sofrem grandes variações na demanda com uma variação no preço, da mesma maneira, com pequena elasticidade sofrem pequenas variações na demanda para a mesma variação no preço.
- Custo por investimento: Todo investimento seja financeiro ou em produção tem custos além do capital investido. Esses custos são de natureza diversa e dependem do investimento em si. Por exemplo a compra de um imóvel tem alto custo por investimento devido aos impostos e ainda as custas cartorárias.

- Endividamento: É a razão da quantidade de dívida que um agente tem em relação ao seu patrimônio líquido.
- Depreciação: A depreciação é o custo ou a despesa da obsolescência dos ativos tangíveis, como por exemplo máquinas, veículos, móveis, imóveis ou instalações. Ao longo do tempo, com a obsolescência natural ou desgaste com uso na produção, os ativos vão perdendo valor.
- Amortização: É a perda de valor do capital aplicado referente a obtenção de um ativo intangível, como direitos autorais, patentes, licenças, carteiras de clientes, entre outros que podem se desvalorizar devido a deterioração natural com o decorrer do tempo.

3. MODELO DE SISTEMA FINANCEIRO

O modelo estudado foi proposto por Ma *et al* [19] e foi derivado da consideração dos fatores produção, moeda, estoques e força de trabalho de uma economia resultando em um sistema de três equações diferenciais como segue:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z + x(y - a), \\ \dot{y} &= 1 - by - x^2, \\ \dot{z} &= -x - cz.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Onde x representa a taxa de juros básica do sistema financeiro, y significa a demanda por investimentos em produção e capital fixo e z representa o índice de preços que por sua vez medem a inflação ou deflação. Os pontos sobre as variáveis representam a taxa de variação temporal destas, ou seja, suas derivadas. O sistema possui três parâmetros sendo eles, a que é a taxa de poupança interna do sistema financeiro, b que é o custo por investimento e c representa a elasticidade da demanda de mercadorias. Tal modelo foi investigado por Gao e Ma [27], Jian *et al* [28] e Chen [29]. Apresenta caos em sua dinâmica para os valores dos parâmetros

de controle $a = 0.9$, $b = 0.2$ e $c = 1.2$, conforme a figura 3.1 abaixo, que mostra o atrator caótico.

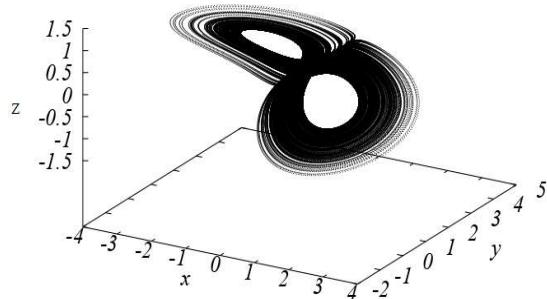


Figura 3.1: Atrator caótico do sistema (3.1).

Posteriormente Yu *et al* [18] revisaram e ampliaram o sistema financeiro tridimensional adicionando uma quarta equação, tornando-o quadridimensional, conforme descrito abaixo.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z + (y - a)x + w \\ \dot{y} &= 1 - by - x^2 \\ \dot{z} &= -x - cz \\ \dot{w} &= -dxy - kw\end{aligned}\tag{3.2}$$

Agora temos a nova variável de estado w que é a margem de lucro média dos agentes, bem como, os novos parâmetros d e k aos quais não foram atribuídos significados econômicos [18], [30], [31]. No capítulo 5 os parâmetros d e k serão discutidos. As demais variáveis são as mesmas do sistema (3.1).

Esse sistema apresenta dinâmica hipercaótica e foram investigadas sincronização e supressão de caos e hipercaos [18]. Portanto, o sistema (3.2) pode apresentar dois expoentes de Lyapunov positivos de acordo com os valores dos parâmetros de controle. Além disso, apresenta também o fenômeno de coexistência de dois atratores no espaço de fases chamado de multiestabilidade [30-31]. A figura (3.2) mostra o atrator hipercaótico do sistema (3.2).

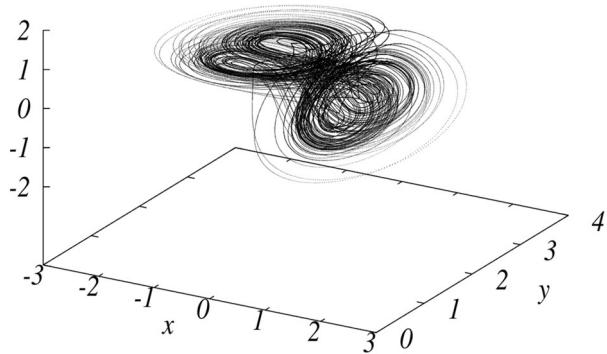


Figura 3.2: Atrator hipercaótico do sistema (3.2).

4. CONCEITOS PRELIMINARES

Os conteúdos apresentados nesta seção foram baseados nos livros de Strogatz [32] e Fiedler-Ferrara [33]. As ferramentas de análise empregadas para estudar os sistemas (3.1) e (3.2) também serão apresentadas nesta seção e os resultados serão apresentados no capítulo 6.

4.1. SISTEMAS DINÂMICOS

São sistemas que evoluem com o tempo e cujo comportamento pode ser descrito por equações diferenciais. Eles podem ser encontrados em uma ampla gama de campos, incluindo física, biologia, química, engenharia e economia.

A evolução do sistema é determinada pelas condições iniciais e pelas equações de estado. Essas equações podem ser lineares ou não lineares e podem envolver um ou mais parâmetros.

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados como determinísticos ou estocásticos, dependendo se as equações que descrevem seu comportamento envolvem algum tipo de aleatoriedade. Além disso, sistemas dinâmicos podem ter comportamentos periódicos, estacionários ou caóticos, e podem ter pontos fixos ou órbitas periódicas.

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas de primeira ordem como seguem [33]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n); \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Esse conjunto de equações é dito autônomo se não depender explicitamente do tempo, caso contrário será não autônomo. Essas equações são chamadas de equações de estado do sistema dinâmico que representam.

Os estados futuros do sistema podem ser calculados caso tenhamos conhecimento das equações que o descrevem e do estado inicial.

Em geral não é possível obter soluções analíticas para tais sistemas. Muitas vezes, quando uma solução analítica é encontrada, ela é tão complicada que fica difícil interpretá-la e compreender as suas principais propriedades. Alternativamente, existem métodos numéricos que se utilizam da tecnologia para integrar os sistemas dinâmicos por aproximação numérica. Além disso, existe o método qualitativo que se concentra em analisar as propriedades qualitativas do sistema, como as soluções assintóticas, as regiões de estabilidade e instabilidade, os pontos fixos e as órbitas periódicas. Para aplicar o método qualitativo é importante analisar o espaço de fase do sistema.

4.2. ESPAÇO DE FASES E DIAGRAMA DE FASES

Trata-se do espaço que inclui todas as possíveis configurações de um sistema. Ele é usado para descrever o comportamento dinâmico de um sistema ao longo do tempo. O espaço de fases é definido por um conjunto de variáveis de estado que descrevem as condições de um sistema para um determinado tempo t .

O espaço de fases pode ser representado graficamente por um diagrama de fases que é uma representação visual das possíveis trajetórias que o sistema pode seguir no espaço de fases. As trajetórias do espaço de fases podem ser usadas para compreender o comportamento dinâmico do sistema, incluindo a estabilidade, o

equilíbrio e as oscilações, bem como, a existência de atratores, repulsores e ciclos limite.

Para exemplificar, será apresentado um exemplo retirado do livro de Fiedler-Ferrara [30]. Considere a equação diferencial de um pêndulo simples:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \operatorname{sen} \theta = 0. \quad (4.2)$$

Essa equação não possui solução analítica. Vamos construir uma solução qualitativa por meio do diagrama de fases.

A equação (4.2) pode ser escrita como,

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \varphi = f(\theta, \varphi) \quad (4.3)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = -\left(\frac{g}{l}\right) \operatorname{sen} \theta = g(\theta, \varphi). \quad (4.4)$$

Para construir as trajetórias no espaço de fases $(\theta, \dot{\theta} = \varphi)$ faz-se

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{f}{g} = -\varphi / \left(\frac{g}{l}\right) \operatorname{sen} \theta. \quad (4.5)$$

Ou seja,

$$-\left(\frac{g}{l}\right) \operatorname{sen} \theta \, d\theta = \varphi \, d\varphi. \quad (4.6)$$

Integrando-a obtém-se

$$\varphi^2 - \left(\frac{2g}{l}\right) \cos \theta = C. \quad (4.7)$$

No espaço de fases, tem-se uma curva $h(\theta, \varphi)$ diferente para cada valor da constante C . O conjunto delas forma a família de curvas representada na figura 4.1.

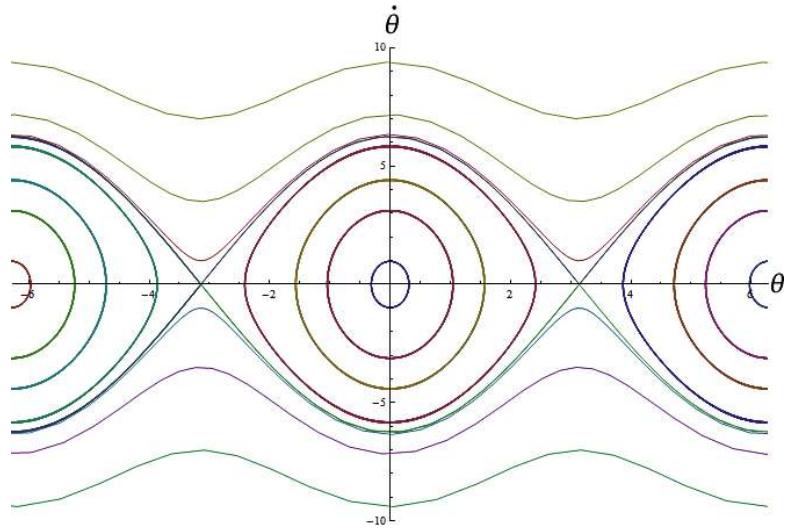


Figura 4.1: Família de curvas $h(\theta, \varphi)$ para vários valores da constante C no espaço de fases $(\dot{\theta}, \theta)$. Fonte: http://physique.unice.fr/sem6/2011-2012/PagesWeb/PT/Pendule/En/study1_simple.html

4.3. ATRATORES

A noção de atrator é intuitiva: um conjunto invariante de valores para o qual órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo [32]. Atratores aparecem em sistemas dinâmicos dissipativos, como consequência, nesses sistemas ocorre contração do elemento de volume no espaço de fases, o que não acontece para sistemas conservativos devido ao *teorema de Liouville*. Um atrator pode ser um único ponto-fixo, uma coleção de pontos regularmente visitados, uma alça, uma órbita complexa ou um número infinito de pontos.

4.3.1. Atratores Caóticos

Além dos atratores periódicos que possuem dimensão inteira, existem outros bastante peculiares que são encontrados em muitos sistemas. Além de contração numa direção e expansão em outra, tais atratores possuem dobras e dimensão fracionária por isso são chamados de atratores caóticos [33].

Os atratores caóticos têm algumas propriedades distintas dos atratores periódicos em sistemas dinâmicos não lineares:

- Sensibilidade as condições iniciais: pequenas variações nas condições iniciais do sistema podem levar a grandes diferenças no comportamento do sistema ao longo do tempo. Isso significa que previsões de longo prazo podem ser extremamente difíceis ou impossíveis.
- Não periódicos: o comportamento do sistema não se repete em intervalos de tempo regulares. Em vez disso ele parece caótico e imprevisível.
- Fractalidade: os atratores caóticos são fractais, o que significa que eles têm uma estrutura repetitiva em diferentes escalas.

Para ilustrar temos o exemplo do famoso atrator de Lorenz que é oriundo de um modelo climático [33]. Tal sistema foi um dos primeiros estudados a fundo com a intenção de investigação da nova dinâmica “estranha” que este apresenta.

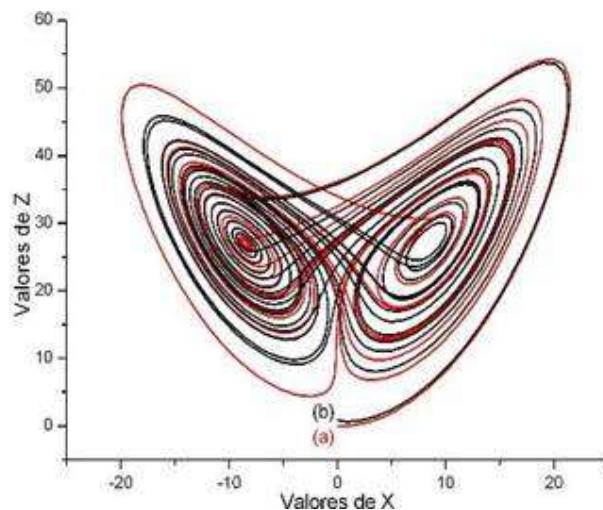


Figura 4.2: Atractor de Lorenz nos eixos (z, x) . Fonte:
https://www.geocities.ws/projeto_caos_ufg/minicurso/aula4.html

4.4. OS EXPOENTES DE LYAPUNOV

Conhecendo as condições iniciais de um sistema dinâmico podemos determinar o comportamento futuro do sistema. O expoente de Lyapunov é uma medida da taxa média de divergência entre duas soluções próximas do sistema dinâmico, à medida que o tempo avança.

Essa é uma medida usada para quantificar a sensibilidade as condições iniciais. O expoente de Lyapunov indica a velocidade de fase com o qual dois pontos próximos no espaço de fase aproximam-se ou afastam-se [35]. Para cada direção do fluxo que representa o sistema dinâmica em questão, existe um expoente de Lyapunov associado, nesta perspectiva, forma-se o espectro dos expoentes de Lyapunov (LEP). Regularmente, interessa-nos saber somente o valor do maior expoente do sistema.

Será apresentado a seguir uma definição formal para os expoentes característicos de Lyapunov específico para sistemas contínuos. O trecho abaixo foi adaptado da parte II, capítulo II de Fiedler-Ferrara [33].

Imaginemos um hiper volume muito pequeno esférico em um espaço de fases de estados iniciais vizinhos y_0 e x_0 , de raio $\varepsilon_0(x_0)$ sendo o centro dessa esfera em x_0 e sua extremidade em y_0 . Assim temos,

$$|y_0 - x_0| \leq \varepsilon_0(x_0). \quad (4.9)$$

Após um tempo, o fluxo deforma a hiper esfera num objeto hiper elipsoidal com eixos principais $\varepsilon_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$ (Figura 4.3). Os expoentes de Lyapunov medem o crescimento exponencial dos eixos principais $\varepsilon_k(t)$ e são definidos como,

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_0(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.10)$$

Ajustando a equação (4.10) pode-se perceber o quociente de Newton. Portanto, se o sistema for unidimensional temos,

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \lim_{\varepsilon_0(x_0) \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)}. \quad (4.11)$$

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{d\varepsilon_i(x,t)}{dx} \right|. \quad (4.12)$$

De maneira geral, os λ_i , dependem do estado inicial x_0 , mas em muitos casos eles são constantes ao longo de uma significativa região do espaço de fases.

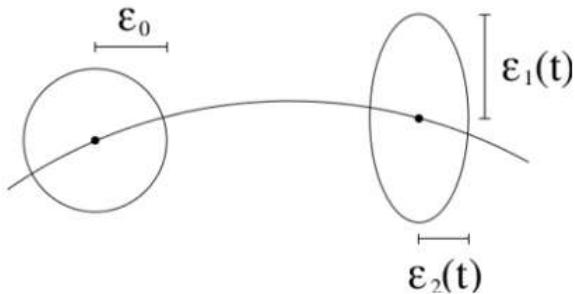


Figura 4.3: Evolução de um elemento de volume esférico de raio $\varepsilon_0(x_0)$ em torno de x_0 . Depois de um tempo t a esfera torna-se um elipsoide de eixos principais $\varepsilon_1(t)$ e $\varepsilon_2(t)$. Fonte: Fiedler-Ferrara [33].

Da equação (4.12) temos que,

$$\varepsilon_i(t) \sim \varepsilon_0(x_0) e^{\lambda_i t}. \quad (4.13)$$

Pode-se então concluir que:

- A existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define uma instabilidade orbital nas direções associadas.
- Para uma solução caótica, associada a um atrator caótico a dependência sensitiva as condições iniciais implicam na existência de pelo menos um expoente de Lyapunov maior do que zero.
- Para uma solução periódica ou quasi-periódica pode-se esperar que deslocamentos na direção perpendicular ao movimento diminuam com o tempo, enquanto ao longo da trajetória eles não devam se alterar, correspondendo a um simples deslocamento do ponto inicial.

É possível identificar um atrator pelo sinal dos expoentes de Lyapunov. Será ilustrado o caso para um sistema quadridimensional. Tem-se:

(a) ponto fixo: neste caso os sinais dos expoentes são $(-,-,-,-)$. Com efeito as trajetórias convergem para um único ponto, cessando qualquer deslocamento.

(b) ciclo limite: nesse caso os sinais são $(0,-,-,-)$, o expoente é nulo ao longo da trajetória conservando-se e nas demais converge.

(c) tórus T^2 : existem duas direções ao longo das quais processam-se deslocamentos conservativos e nas outras duas converge. $(0,0,-,-)$

(d) tórus T^3 : em três direções o sistema se conserva e em uma há contração. $(0,0,0,-)$

(e) tórus caótico T^2 : Em duas direções a trajetória se conserva, em uma ela expande e em outra existe contração. $(+,0,0,-)$

(f) atrator caótico: um dos expoentes é sempre positivo, uma vez que existe sensibilidade as condições iniciais. Ao longo da trajetória associa-se um expoente nulo, portanto os sinais serão $(+,0,-,-)$.

(g) atrator hipercaótico: a trajetória se expande em duas direções, se conserva em uma e se contraí na outra. $(+,+,0,-)$

Na figura (4.4) estão representados alguns dos atratores do sistema (3.2) com seus conjuntos de sinais.

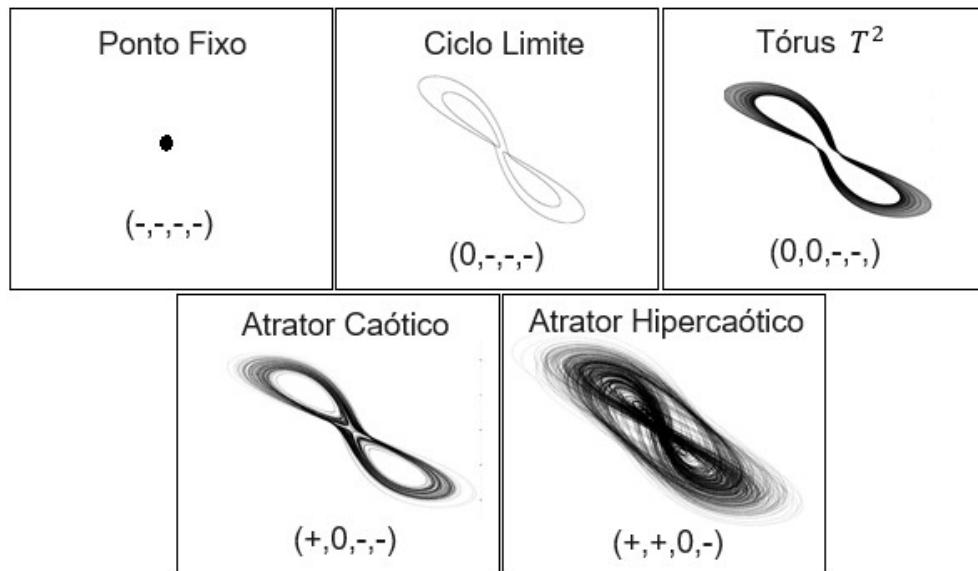


Figura 4.4: Sinais dos expoentes de Lyapunov para projeções nos eixos (x, z) de atratores de um sistema quadridimensional (3.2). .

4.5. ESPAÇO E PLANO DE PARÂMETROS

Os termos multiplicativos das variáveis dos sistemas dinâmicos são chamadas de parâmetros de controle, pois de acordo com seus valores a dinâmica do sistema pode variar entre divergente, periódica, caótica e hipercaótica. Os espaços de parâmetros ou diagramas de Lyapunov são construções gráficas n -dimensionais onde cada um dos eixos representa um desses parâmetros e a cada ponto deste plano cartesiano é atribuído uma cor de acordo com o valor do expoente de Lyapunov resultante da integração do referido sistema com o respectivo par ordenado de parâmetros.

Os planos de parâmetros são seções bidimensionais dos espaços de parâmetros. Nos fluxos que representam os sistemas dissipativos, para cada direção existe um expoente de Lyapunov associado [32], então, para fluxos de sistemas tridimensionais com dois parâmetros de controle, teremos três planos de parâmetros ou diagramas de Lyapunov. Generalizando, um fluxo com n parâmetros e m dimensões apresenta no total uma combinação de n tomados dois a dois multiplicados por m . Na maioria dos casos, somente se tem interesse nos diagramas dos dois maiores expoentes de Lyapunov do sistema em estudo.

A paleta de cores mais usada na literatura é um gradiente que começa amarela até a cor vermelha para os valores positivos de λ , um gradiente de cinza até a cor preta para os valores muito próximos de zero e a cor branca para valores negativos de λ .

Para ilustrar apresenta-se a figura 4.5 que traz um plano de parâmetros $b \times d$ do sistema (3.2). Neste plano os demais parâmetros possuem os seguintes valores $a = 0,6$; $c = 1,5$ e $k = 0,17$.

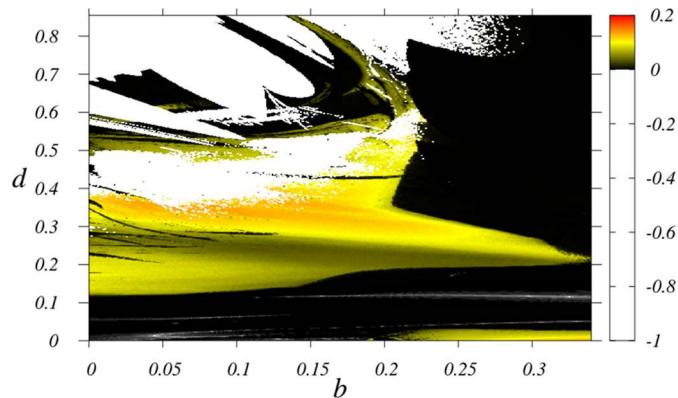


Figura 4.5: Plano dos parâmetros $b \times d$ do sistema (3.2) com $a = 0,6$; $c = 1,5$ e $k = 0,17$.

4.6. CAOS E HIPERCAOS

O caos determinístico é um fenômeno apresentado por muitos sistemas dinâmicos não lineares. De acordo com Strogatz [32], caos é um comportamento aperiódico de longo prazo em um sistema determinístico que apresenta dependência sensível às condições iniciais. Nesse sentido as trajetórias no espaço de fases não convergem para pontos fixos, órbitas periódicas, ou ainda, órbitas quasi-periódicas quando $t \rightarrow \infty$.

Pela definição de caos determinístico, se entende que não há entradas ou parâmetros aleatórios. A dinâmica aparentemente randômica do sistema se dá pela sua não linearidade. De fato, o sistema é regido por equações determinísticas.

A dependência sensível as condições iniciais demonstra que trajetórias vizinhas separam-se exponencialmente, por consequência o sistema possui um, e apenas um, expoente de Lyapunov $\lambda_i > 0$. Devido a essa sensibilidade, mudanças infinitesimais nas condições iniciais resultam em enormes diferenças nos resultados de longo prazo do sistema.

O hipercaos é uma extensão do conceito de caos, no qual o sistema exibe comportamento caótico em múltiplas direções. Essa interação não linear intensifica a sensibilidade às condições iniciais para outras direções do espaço de fases e tende a ampliar a divergência entre as trajetórias do sistema ao longo do tempo.

Uma característica importante do hipercaos é a presença de múltiplos expoentes de Lyapunov positivos, nesta perspectiva para haver hipercaos o sistema deve ter no mínimo quatro dimensões em se tratando de fluxo.

Uma rota característica para o hipercaos é por meio de crise de colisão de dois ou mais atratores caóticos presentes simultaneamente no espaço de fases (multiestabilidade) que se juntam para gerar um único atrator maior [35].

5. PROPOSIÇÃO DE SIGNIFICADOS ECONÔMICOS PARA OS PARÂMETROS d e k

Neste capítulo faremos uma análise qualitativa do sistema (3.2) focados na sua quarta equação que representa a taxa temporal de variação do lucro médio. Como apresentado por Yu *et. al.* [18], o sistema financeiro hipercaótico possui cinco

parâmetros de controle a, b, c, d e k . Como dito no capítulo 3, d e k não possuem significados atribuídos a eles. Alicerçados na literatura da área econômica e com ferramentas matemáticas propomos significado para estes parâmetros.

5.1. O PARÂMETRO d COMO A TAXA DE ENDIVIDAMENTO

Considere a quarta equação do sistema (3.2),

$$\dot{w} = -dxy - kw. \quad (5.1)$$

No capítulo 2, seção 5, subseção 2 vimos o conceito de lucro de um agente econômico. Observando o sistema (3.2) sabemos que a variável w significa o lucro médio das empresas, por conseguinte, podemos generalizar o conceito para o lucro dos agentes econômicos. Apenas olhando para a equação (5.1) podemos concluir que o parâmetro d é uma constante que multiplicada pela taxa de juros e pela demanda por investimentos diminuem a taxa temporal do lucro, ou seja, é uma grandeza econômica que gera *déficit*.

Para entendermos de outra perspectiva vamos tomar a derivada parcial de \dot{w} em relação a x .

$$\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} = -dy \quad (5.2)$$

Podemos interpretar que uma variação positiva na taxa temporal do lucro em relação a taxa de juros gera uma variação negativa no produto de d pela demanda por investimentos y . Nesta perspectiva, se o lucro aumenta, ou ainda, a taxa de juros diminui, o fator dy também aumenta negativamente.

Para investir, um agente econômico pode utilizar duas fontes: recursos próprios ou de terceiros. Usar recursos de terceiros significa adquirir dívidas. Se estamos falando de variação de lucro em relação aos juros, lembrando que a definição de juros seria o custo dos recursos emprestados de fontes externas (terceiros) essa variação de lucro dar-se-ia pelo valor investido em meios de produção com capital externo a empresa, portanto, recursos alocados em ativos

imobilizados. Então, o produto dy seria o capital investido com recursos de empréstimos, financiamentos e emissão de títulos de dívida. É coerente dizer que uma variação positiva do lucro em relação a taxa de juros diminuiria o capital investido com recursos externos pois a empresa está lucrando mais e tem sobras para amortizar dívidas ou ainda investir em aumento de produção com capital próprio.

Segundo David *et. al.* [37], as empresas com maiores lucros utilizam menos recursos de terceiros pois existe uma ordem de preferência em relação a utilização de fontes de recursos. Tal ordem inicia no capital próprio, capital de terceiros e por último emissão de ações. Ainda de acordo com [37], espera-se que o endividamento diminua quando $w > y$. Assim, fica evidenciado a relação negativa da equação (5.2).

Novamente olhemos para a equação (5.1) agora tomando a sua derivada com relação aos investimentos em produção.

$$\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} = -dx \quad (5.3)$$

Neste contexto uma variação positiva na taxa temporal do lucro em relação aos investimentos corresponde a uma variação negativa igual ao produto dx . Obviamente uma variação positiva em dx diminuem o lucro em relação aos investimentos, concordando com a realidade econômica, pois quanto maior a taxa de juros maior o custo do investimento.

O endividamento de uma empresa está altamente relacionado a taxa de juros, pois este é o valor pago pela dívida, além disso, para a referência [38] existe uma relação negativa entre lucro e endividamento. Portanto:

$$d = -\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y \partial x}. \quad (5.4)$$

Para Costa [36], existe uma relação não linear entre endividamento e lucro confirmando a equação (5.4). Nesta perspectiva, propomos que a taxa de variação do lucro em relação ao investimento e a taxa de juros seja a taxa de endividamento de um agente econômico no modelo apresentado pela referência [18], seja este agente pessoa física, empresa ou governo.

Na literatura, o endividamento financeiro é calculado como uma taxa adimensional em porcentagem definido como [40],

$$d = \frac{D_T}{P_L}. \quad (5.5)$$

Onde d é o endividamento (em porcentagem), D_T é a dívida total (em moeda local) e P_L é o patrimônio líquido (em moeda local).

5.2. O PARAMETRO k COMO A SOMA DA DEPRECIAÇÃO E AMORTIZAÇÃO.

Consideremos novamente a equação (5.1),

$$\dot{w} = -dxy - kw$$

Para focar nosso estudo em k vamos fazer a seguinte consideração, $d = 0$. Portanto supomos que o endividamento do agente é inexistente, por esse motivo k deve ser um fator econômico que diminui o lucro no decorrer do tempo, mas que não está relacionado a despesas financeiras com dívidas como juros ou utilização de recursos de terceiros para capital de giro ou investimentos. Assim,

$$\dot{w} = -kw. \quad (5.6)$$

Sabendo que \dot{w} é uma notação que significa dw/dt , temos,

$$\frac{dw}{dt} = -kw. \quad (5.7)$$

Vamos encontrar a relação temporal de k com o lucro w , para isso

$$\frac{dw}{w} = -kdt,$$

$$\int \frac{dw}{w} = -k \int dt,$$

$$\ln w = C_0 - kt,$$

$$w = e^{C_0 - kt},$$

$$w = e^{C_0} e^{-kt}.$$

Como C_0 é uma constante de integração. Convencionamos, $e^{C_0} = C$, também constante.

$$w = Ce^{-kt}. \quad (5.8)$$

A equação (5.8) é parcial e destina-se a interpretação qualitativa da constante k .

Observando o conceito de LAJIDA [41] (mais conhecido como EBTIDA em inglês) que é um indicador econômico utilizado para análise de empresas e significa lucro antes dos descontos de juros, impostos, depreciação e amortização, percebemos que os juros já estão descontados do lucro na equação (5.1), pelo termo $-dxy$ e os impostos também já foram considerados pelo parâmetro b do sistema (3.2), que é o custo do investimento.

Em síntese, olhemos para a depreciação e amortização. Tais fatores econômicos são por definição funções inversamente proporcionais do tempo concordando com (5.8). Em suma, ambos são muito parecidos e agem da mesma forma sob os ativos do agente econômico, diminuindo seu lucro com o passar do tempo. A única diferença entre os dois fatores é o tipo de ativos que estes desvalorizam. A depreciação é a perda de valor dos ativos tangíveis como as máquinas, equipamentos, imóveis, entre outros. Por outro lado, a amortização é perda de valor dos ativos intangíveis como patentes, direitos de exploração, subsídios, entre tantos outros. Como o total de ativos de um agente econômico é a soma dos ativos tangíveis e intangíveis e ambos produzem lucro, entendemos que a abordagem correta seria interpretar k como a soma destes dois fatores. Em resumo,

$$k = \delta + \alpha. \quad (5.9)$$

Onde k é a perda de lucro devido à depreciação e amortização, δ é o fator de depreciação e α é o fator amortização, todos com dimensão de moeda por tempo. Na prática $k \leq 1$, então, o decrescimento exponencial do lucro devido a ele é suave, aproximando-se de um decrescimento linear.

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

Este capítulo apresenta os resultados dos testes numéricos da dinâmica do sistema financeiro em três dimensões (3.1) da referência [19] e quatro dimensões (3.2) de Yu et al [17]. Conhecendo a dinâmica dos dois sistemas isoladamente, partimos para a investigação da dinâmica da transição deste modelo de sistema financeiro de três para quatro dimensões.

A análise é alicerçada principalmente nos cortes bidimensionais do espaço de parâmetros. Os sistemas (3.1) e (3.2) foram integrados pelo método Runge-Kutta de quarta ordem com incremento fixo de 1×10^{-2} e o emprego de transiente na ordem de 9×10^5 . O espectro dos expoentes de Lyapunov foi calculado utilizando o algoritmo de Wolf [42]. Os planos de parâmetros (diagramas de Lyapunov) foram construídos em malhas de 500×500 pontos equidistantes. Nestes diagramas, é atribuída uma cor para cada valor do expoente de Lyapunov. Para valores $\lambda < 0$ é atribuída a cor branca que significa estado de pontos de equilíbrio do sistema. Para $\lambda = 0$ é designada a cor preta, e para valores $\lambda > 0$ é utilizado um gradiente que começa no amarelo com os menores valores positivos e à medida que λ vai aumentando e culmina em vermelho para os maiores valores computados para λ .

6.1. SISTEMA FINANCEIRO 3D

Primeiramente foi estudado o sistema de três dimensões (3.1). Foram criados três quadros com cortes do espaço de parâmetro com as três combinações dos parâmetros a, b e c . Foram investigados os diagramas de fase de todos os parâmetros para o maior expoente de Lyapunov. Segundo Gao et al [27] a rota para o caos do sistema financeiro é via quase-periodicidade, isto é, a rota de Ruelle-Takens.

A figura 6.1 é um quadro com seis planos de parâmetros $a \times b$ nos quais foi variado a elasticidade da demanda c em cada plano. Na figura 6.1(a) $c = 0,44$, então quando a demanda por mercadorias tem uma variação proporcionalmente menor que uma variação no preço percebemos que não há comportamento caótico no

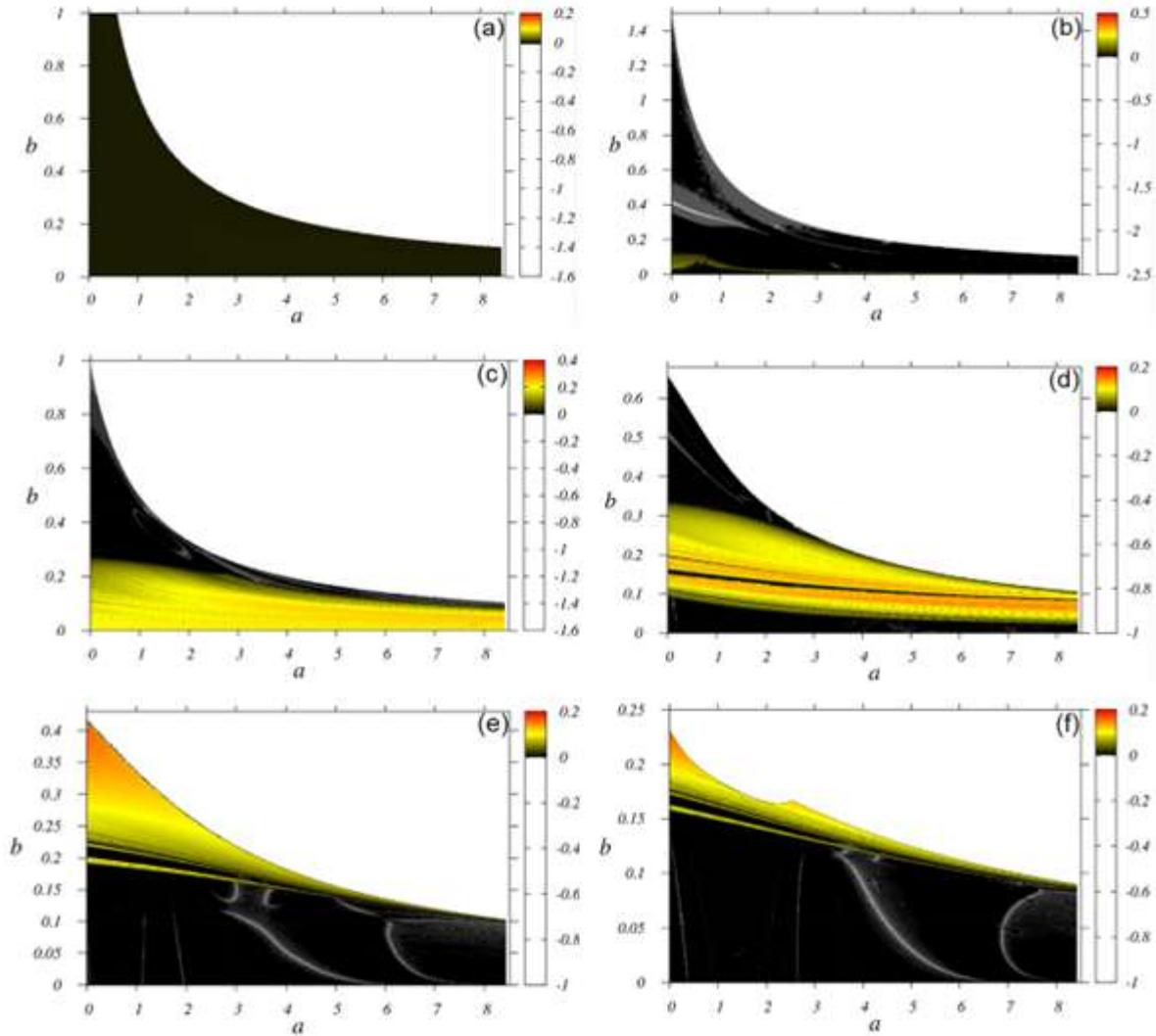


Figura 6.1: Planos de parâmetros $a \times b$ do sistema (3.1), para: (a) $c = 0,44$; (b) $c = 0,65$; (c) $c = 1,0$; (d) $c = 1,16$; (e) $c = 1,5$ e (f) $c = 2,0$.

sistema financeiro, somente periodicidade e divergência. O caos apresenta-se a partir de $c = 1,0$ (figura 6.1(c)), ou seja, quando a demanda das mercadorias como o petróleo e alimentos, por exemplo, varia inversamente proporcional com igual magnitude ao preço. À medida que a elasticidade da demanda vai aumentando o comportamento divergente ganha cada vez mais espaço suprimindo caos e periodicidade.

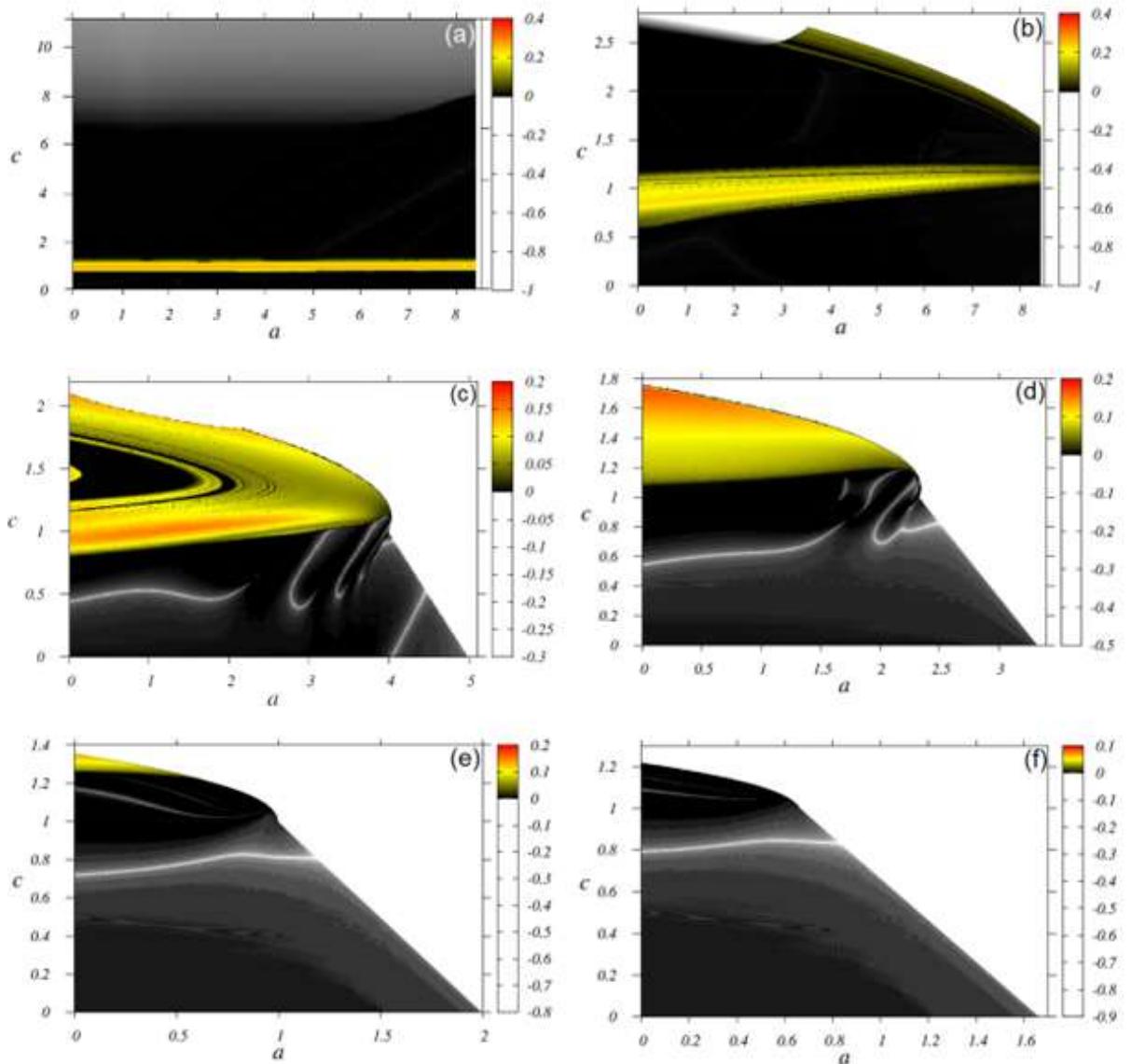


Figura 6.2: Planos de parâmetros $a \times c$ do sistema (3.1) para: (a) $b = 0,01$; (b) $b = 0,10$; (c) $b = 0,20$; (d) $b = 0,30$; (e) $b = 0,50$ e (f) $b = 0,60$.

Na figura 6.2, temos o estudo dos planos $a \times c$ observando a variação do custo por investimento b . Nota-se que, desde um valor muito pequeno $b = 0,01$, temos a presença de caos no sistema, figura 6.2 (a), no entanto, a partir do valor $b =$

0,60 a dinâmica caótica deixa de se apresentar. Existem arcos de periodicidade entre as áreas de caos na figura 6.2(c), da mesma forma que no diagrama $a \times b$ da figura 6.1(d) existe uma faixa de periodicidade, pois $b = 0,2$ e $c = 1,16$ são valores investigados na literatura onde existem os maiores valores do expoente de Lyapunov.

Por último, temos o quadro dos diagramas $b \times c$ exposto na figura 6.3 com a taxa interna de poupança a apresentada em seis valores diferentes (0,01), (0,9), (1,5), (2,0), (3,5) e (7,5) sendo eles na figura 6.3 iniciando em (a) e terminando em (f), respectivamente.

É claro perceber que para todos os valores testados da taxa interna de poupança o sistema apresenta caos. Tal fato não contraria os economistas que defendem que quanto maior for a taxa interna de poupança de um sistema financeiro mais estável ele será, pois com o aumento do parâmetro a a faixa de ocorrência de comportamento caótico vai diminuindo.

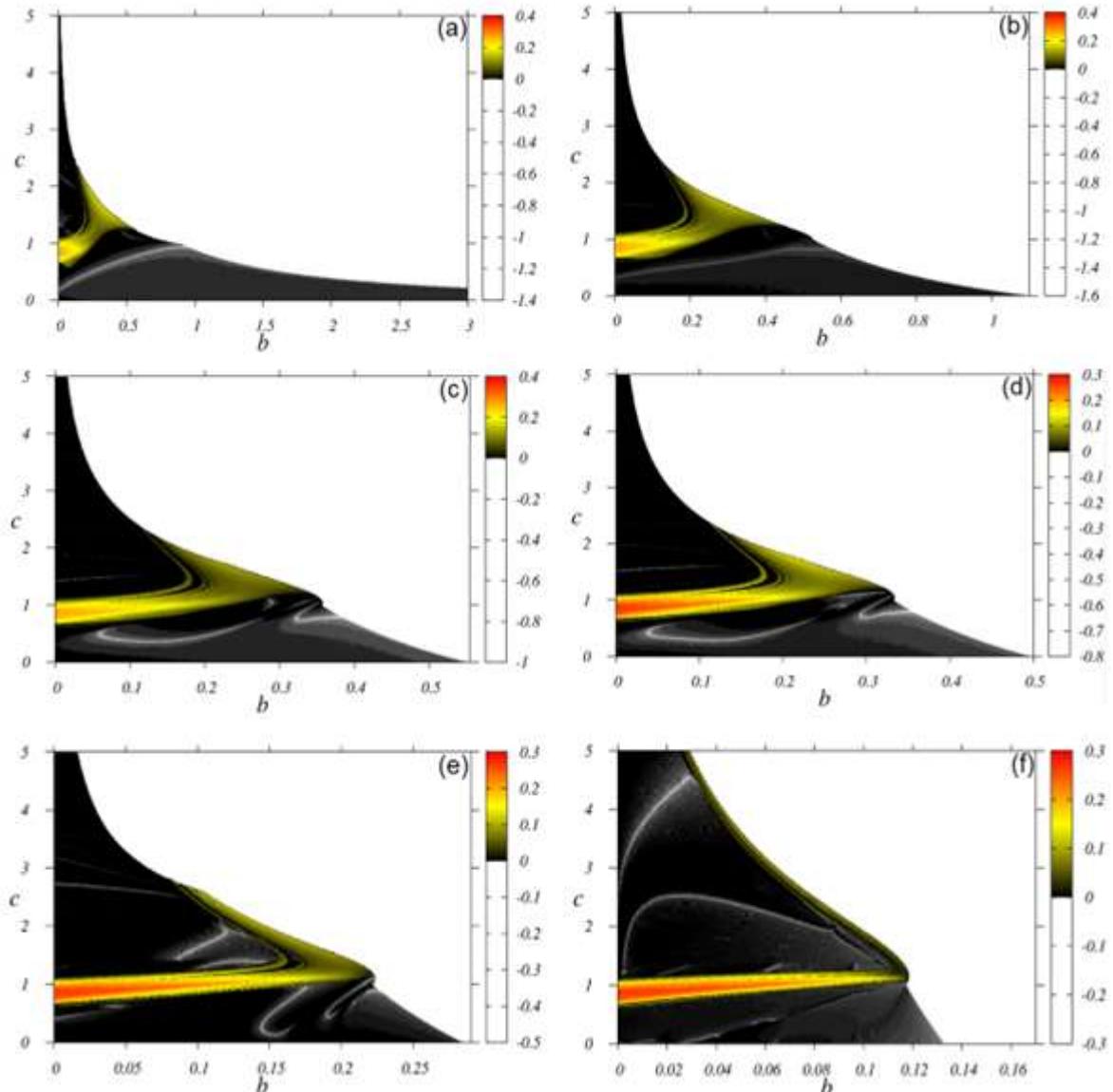


Figura 6.3: Planos de parâmetros $b \times c$ do sistema (3.1) para: (a) $\alpha = 0,01$; (b) $\alpha = 0,9$; (c) $\alpha = 1,5$; (d) $\alpha = 2,0$; (e) $\alpha = 3,5$; (f) $\alpha = 7,5$.

6.2. SISTEMA FINANCEIRO 4D

A dinâmica do sistema de equações (3.2) é investigada em vários de seus muitos planos de parâmetros pois cada um deles revelou situações para serem observadas. Como trata-se de um sistema hipercaótico, os planos de parâmetros serão apresentados em duplas, sendo a figura (a) com o maior expoente associado e a figura (b) com o segundo maior expoente de Lyapunov associado.

Nesta seção as regiões amplificadas (*zooms*) foram construídas com malhas de 700x700 pontos para melhor definição das imagens. As demais foram feitas com malhas de 500x500 pontos como na seção anterior.

A figura 6.4 apresenta o espaço $a \times b$. Esse é o espaço de parâmetros com maior número de investigações na literatura [30]. Os valores dos demais parâmetros de controle desses planos são $c = 1,50$, $d = 0,20$ e $k = 0,17$. As regiões em tons de amarelo na figura 6.4(b) indicam a presença de hipercaos.

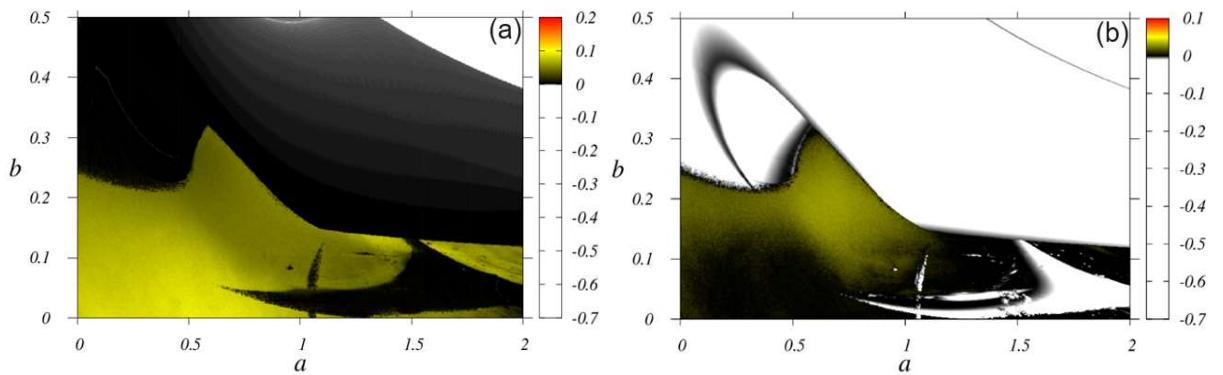


Figura 6.4: Plano de parâmetros $a \times b$ do sistema (3.2). (a) Maior expoente de Lyapunov associado; (b) Segundo maior expoente de Lyapunov.

Na figura 6.5 detalhamos o espaço de parâmetros $a \times c$ no sistema quadridimensional. Em comparação com o sistema de três dimensões existe maior riqueza de dinâmica.

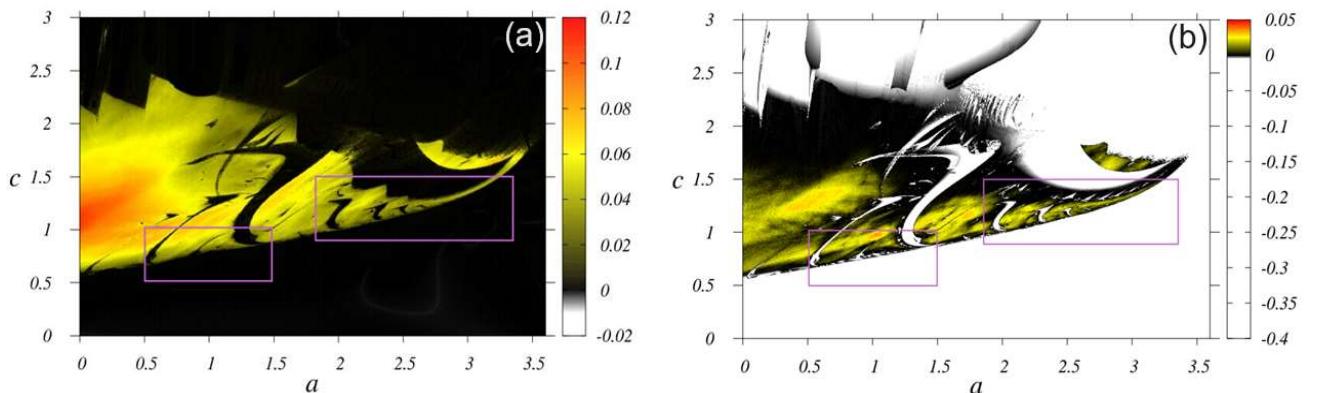


Figura 6.5: Plano de parâmetros $b \times c$ do sistema (3.2). (a) Maior expoente de Lyapunov associado; (b) Segundo maior expoente de Lyapunov

Nestas imagens, $b = 0,10$, $d = 0,20$ e $k = 0,17$. As caixas de cor magenta sinalizam áreas que serão amplificadas em outras figuras. Existem estruturas de periodicidade imersas em regiões de hipercaos que lembram camarões ou *shrimps* mas estas estão deformadas. Estas zonas de periodicidade possuem auto-similaridade, pois repetem-se em escalas diferentes.

Observa-se também estruturas periódicas na fronteira entre regiões hipercaóticas e quase-periódicas (figura 6.5b). Tais estruturas são conhecidas como línguas de Arnold e são comumente encontradas na fronteira de regiões caóticas e quase-periódicas. Aqui novamente se percebe que tais línguas estão malformadas.

A figura 6.6 é uma amplificação da caixa mais à direita da figura 6.5. Nesta imagem aparecem oito pontos ao longo da reta $a = 2,50$ que demonstram todas as dinâmicas possíveis do modelo de sistema financeiro. Em seguida, foram plotados os atratores correspondentes aos pontos da figura 6.6 (figura 6.7). Cada atrator apresenta seu respectivo espectro de Lyapunov, bem como, os valores dos parâmetros no ponto associado a ele. Os atratores foram criados pelo método de integração de Runge-Kutta de quarta ordem com passo na ordem de 10^{-2} , sendo está a nossa certeza e com arredondamento na terceira casa após a vírgula (incerteza).

Foram escolhidas as variáveis de estado taxa de juros (x), demanda por investimentos (y) e índice de preços (z) para plotar os atratores, por isso, tais imagens tratam-se de seções tridimensionais do espaço de fases de quatro dimensões.

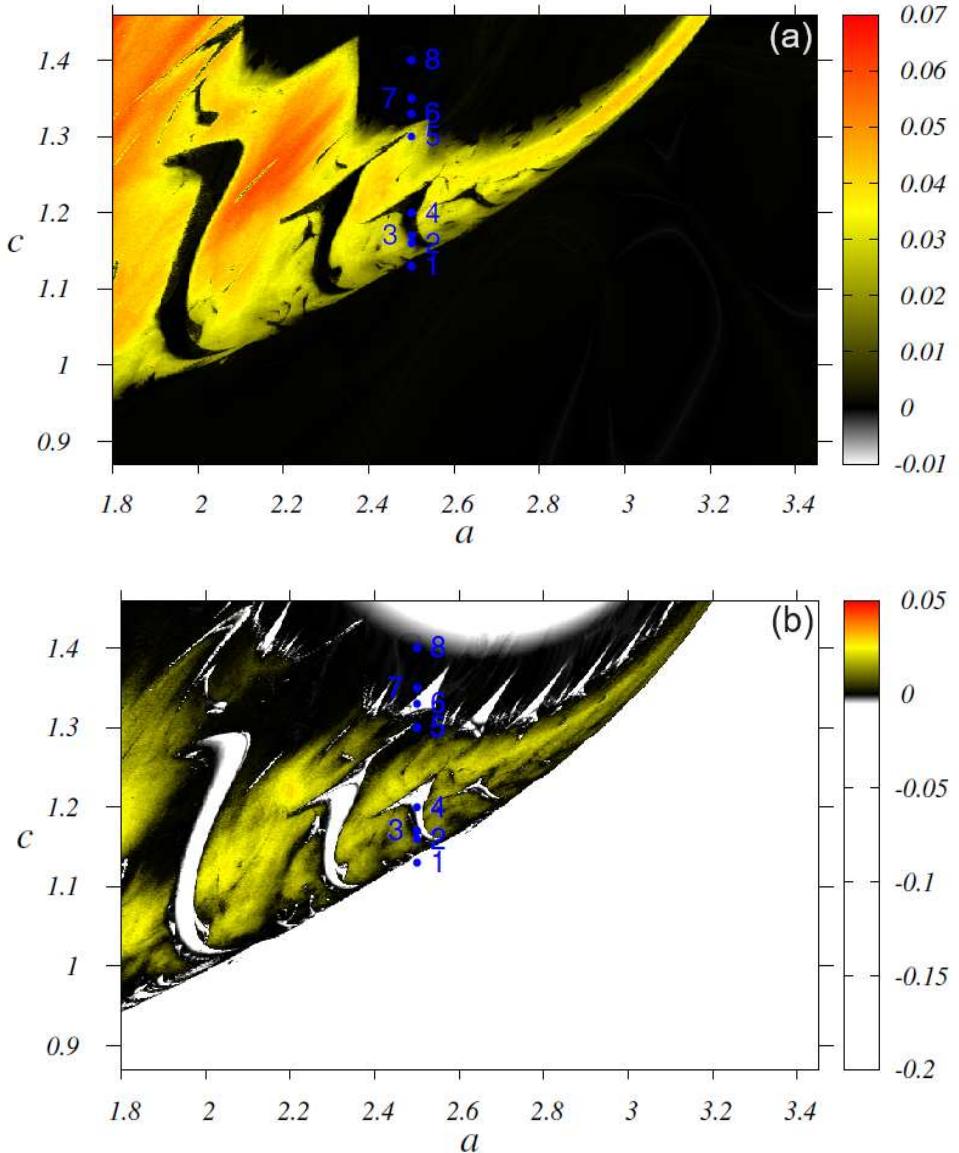


Figura 6.6: Região amplificada do plano $a \times c$ da figura 6.5. (a) Maior expoente de Lyapunov associado. (b) Segundo maior expoente de Lyapunov associado.

A segunda região amplificada do plano de parâmetros da figura 6.5 é referente a caixa mais à esquerda da imagem (figura 6.8). Na figura 6.8(b), é possível observar as línguas de Arnold deformadas novamente, agora, com mais detalhes nesta nova perspectiva.

As estruturas periódicas inseridas em regiões caóticas, hipercaóticas ou quase-periódicas também são conhecidas com janelas de periodicidade [42]. As duas mais conhecidas são as em forma de camarão, que geralmente estão localizadas dentro da região de caos, e as línguas de Arnold, que aparecem na

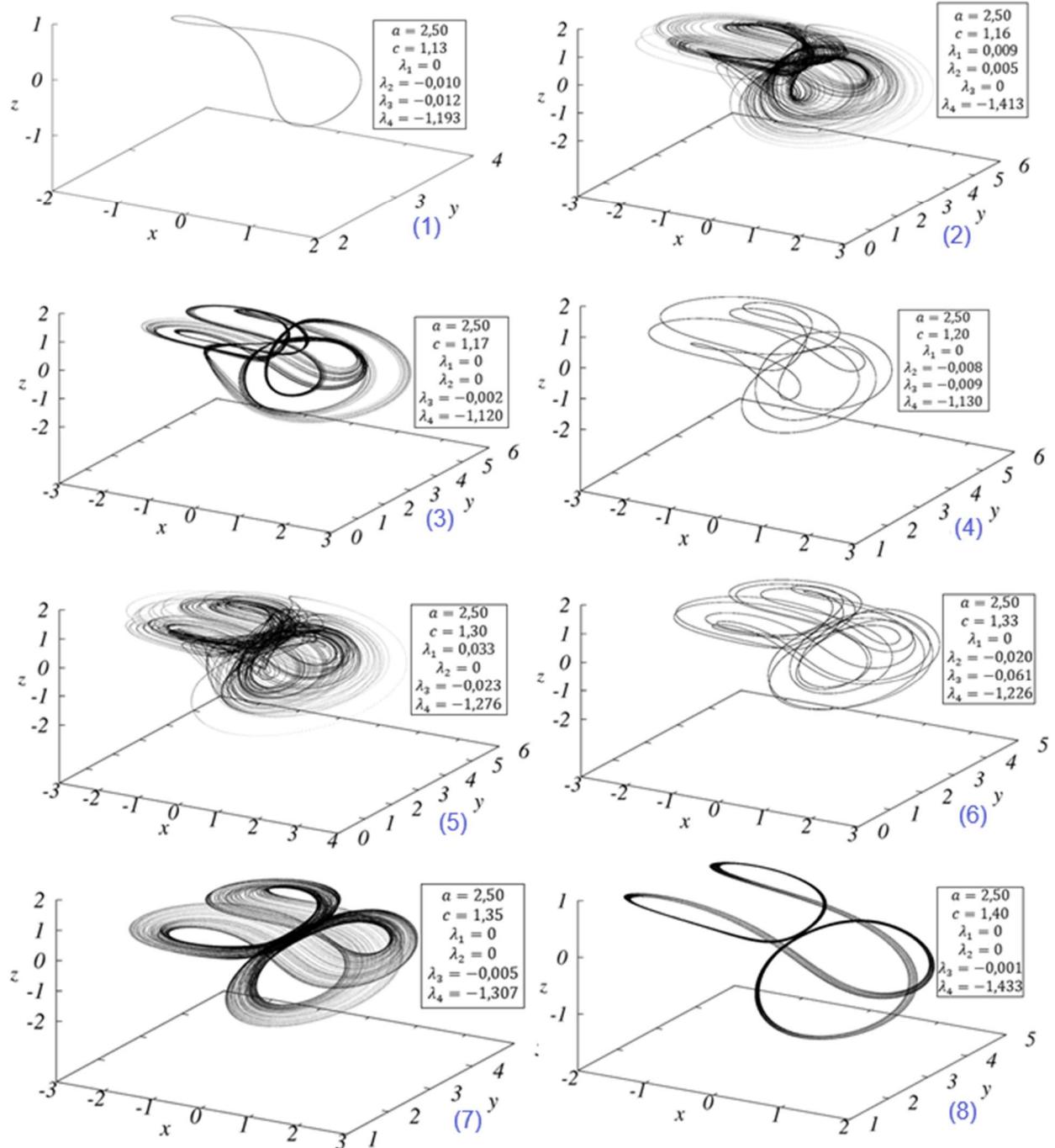


Figura 6.7: Atratores dos pontos 1 a 8 da figura 6.6.

fronteira entre caos e quase-periodicidade. Referindo-nos sobre as janelas de periodicidade malformadas encontradas no plano de parâmetros $a \times c$ (figuras 6.6 (b) e 6.8(b)), elas são observadas novamente no plano $b \times c$ como é apresentado nas figuras 6.9 e 6.12. De fato, tais janelas estão muitas vezes inseridas ou na

fronteira de regiões com duplo expoente de Lyapunov positivos, isto é, regiões de hipercaos.

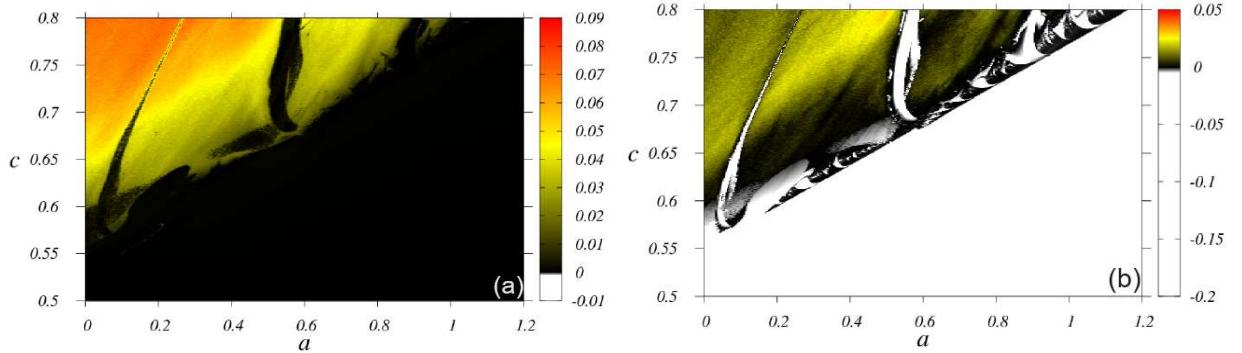


Figura 6.8: Imagem amplificada da caixa mais à esquerda da figura 6.5. (a) Maior expoente de Lyapunov. (b) Segundo maior expoente.

Barreto *et. al.* propuseram a conjectura das janelas baseados em seus resultados numéricos com mapas [43]. Tal conjectura afirma que quando o número de parâmetros disponíveis m , ou seja, os parâmetros que estão formando o plano, é maior que o número de expoentes de Lyapunov positivos j , ou seja, $m > j$, as estruturas periódicas terão janelas estendidas como acontece com as antenas das estruturas em forma de camarão que estendem-se ao longo do plano de parâmetros. A conjectura também diz que quando $m = j$ as janelas periódicas serão limitadas dentro do plano.

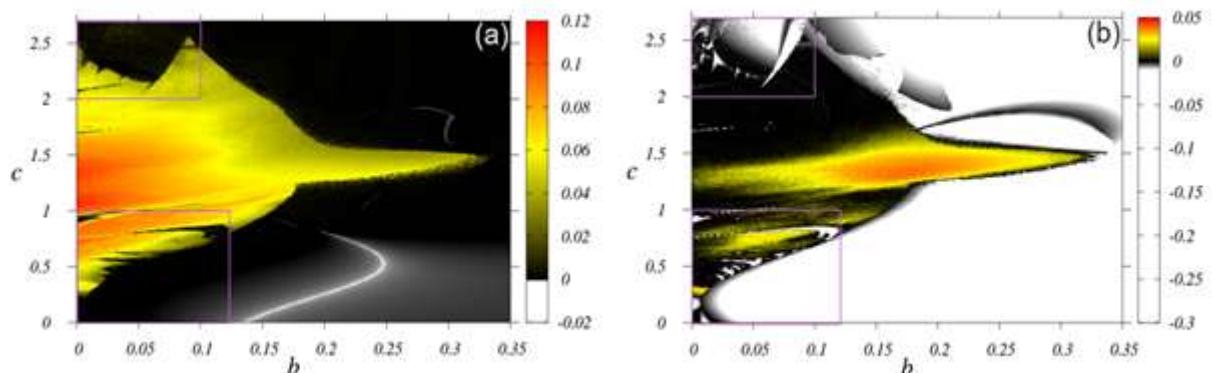


Figura 6.9: Plano de parâmetros $b \times c$ do sistema (3.2). (a) Maior expoente de Lyapunov associado. (b) Segundo maior expoente.

Nota-se grande mudança na dinâmica do plano $b \times c$ da figura 6.9 em comparação ao sistema (3.1). A área com região caótica aumenta para valores da elasticidade da demanda por mercadorias c e diminui para valores do custo por investimento b . Neste plano podemos observar duas regiões marcadas por caixas que serão ampliadas a seguir.

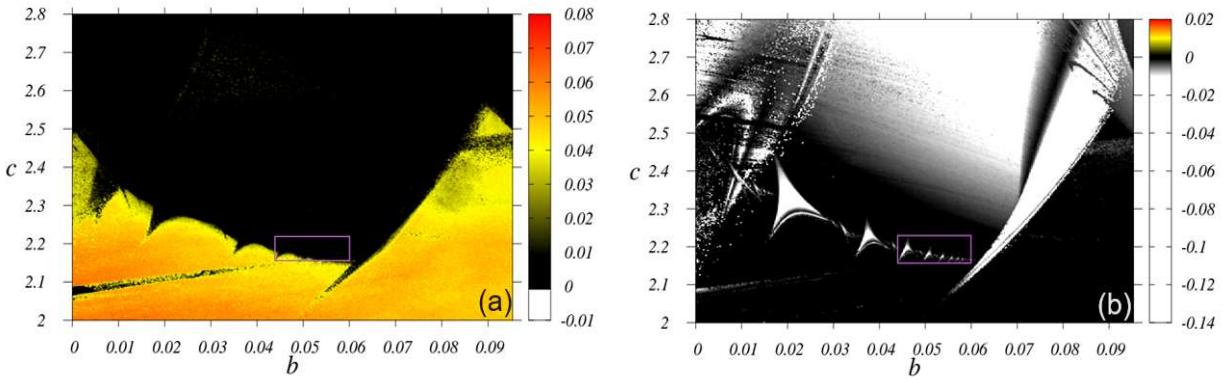


Figura 6.10: imagem ampliada da caixa mais acima da figura 6.9. (a) Maior expoente de Lyapunov associado. (b) Segundo maior expoente.

A figura 6.10 (b) põe em evidência uma fronteira entre região caótica e quase-periódica sem a presença de hipercaos. Aqui pode-se notar que as estruturas periódicas estão bem formadas confirmando a conjectura das janelas, pois nesta área do plano $b \times c$, $m > j$. Foi feita mais uma ampliação (figura 6.11) para mostrar em detalhe a formação das línguas de Arnold.

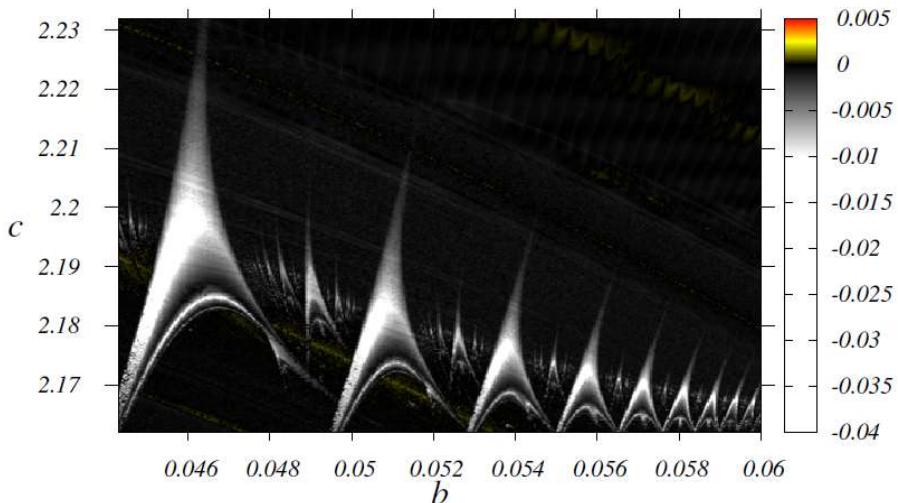


Figura 6.11: Imagem ampliada da caixa da figura 6.10(b).

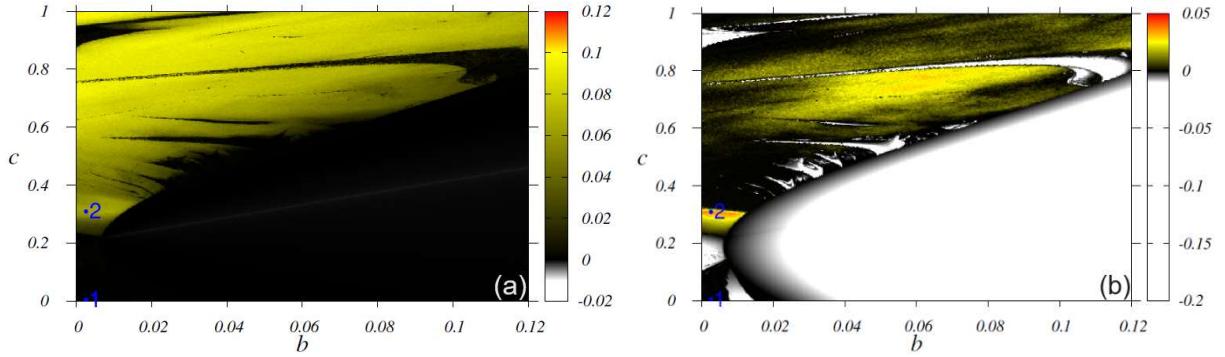


Figura 6.12: Ampliação da caixa mais abaixo da figura 6.9. (a) Para o maior expoente de Lyapunov. (b) Para o segundo maior expoente.

A segunda região do plano $b \times c$ justamente a que está mais abaixo da figura 6.9 e apresentada na figura 6.12, reforça a conjectura das janelas, sendo que nesta área as estruturas periódicas estão entre hipercaos e quase-periodicidade e mais uma vez apresentam-se malformadas.

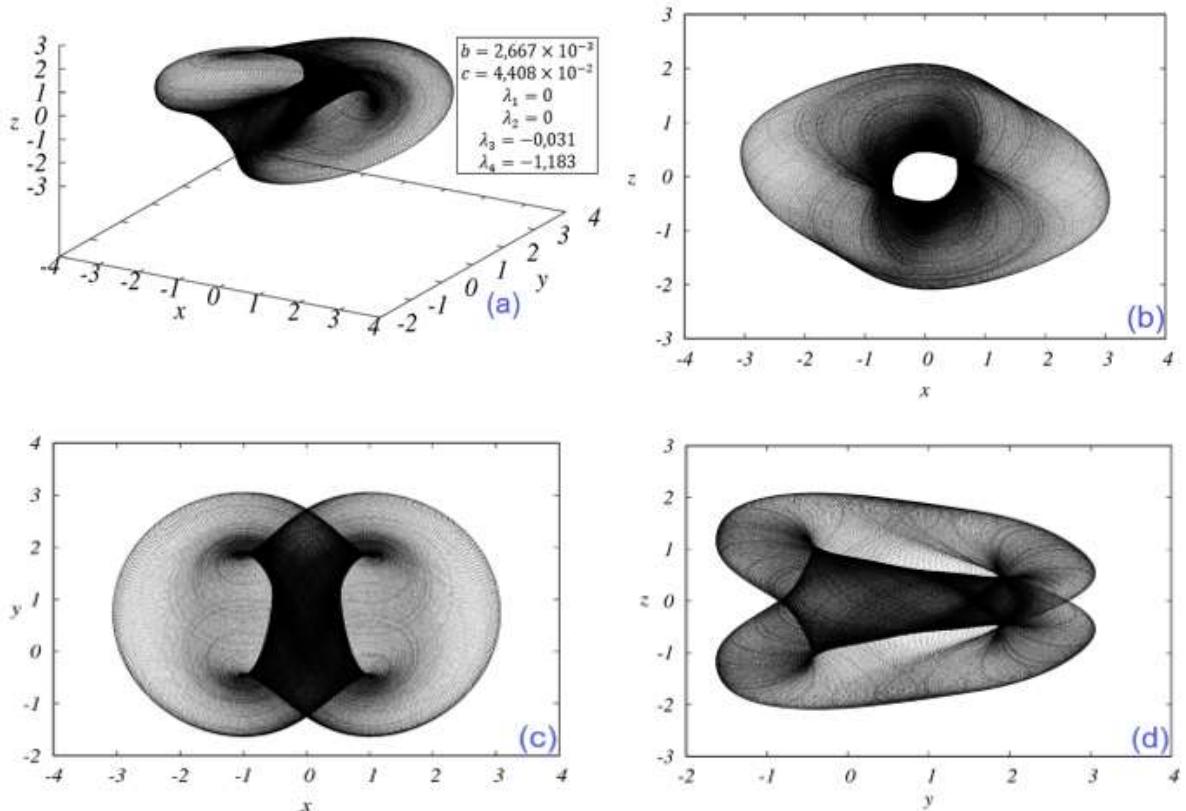


Figura 6.13: Atrator do tipo tórus T^2 do ponto 1 da figura 6.12. (a) Em três dimensões. (b) projeção no plano $x \times z$. (c) projeção no plano $y \times x$. (c) projeção no plano $y \times z$.

Stegemann *et. al.* [44] fizeram a mesma observação de deformação em estruturas periódicas do tipo camarão em fluxo. No caso, de um circuito de Chua hipercaótico em quatro dimensões com controle de retroalimentação (*feedback*). Até então, tal fato só havia sido encontrado em mapas.

Os pontos 1 e 2 da figura 6.12 possuem atratores interessantes pela sua geometria. Estes estão dispostos nas figuras 6.13 e 6.14.

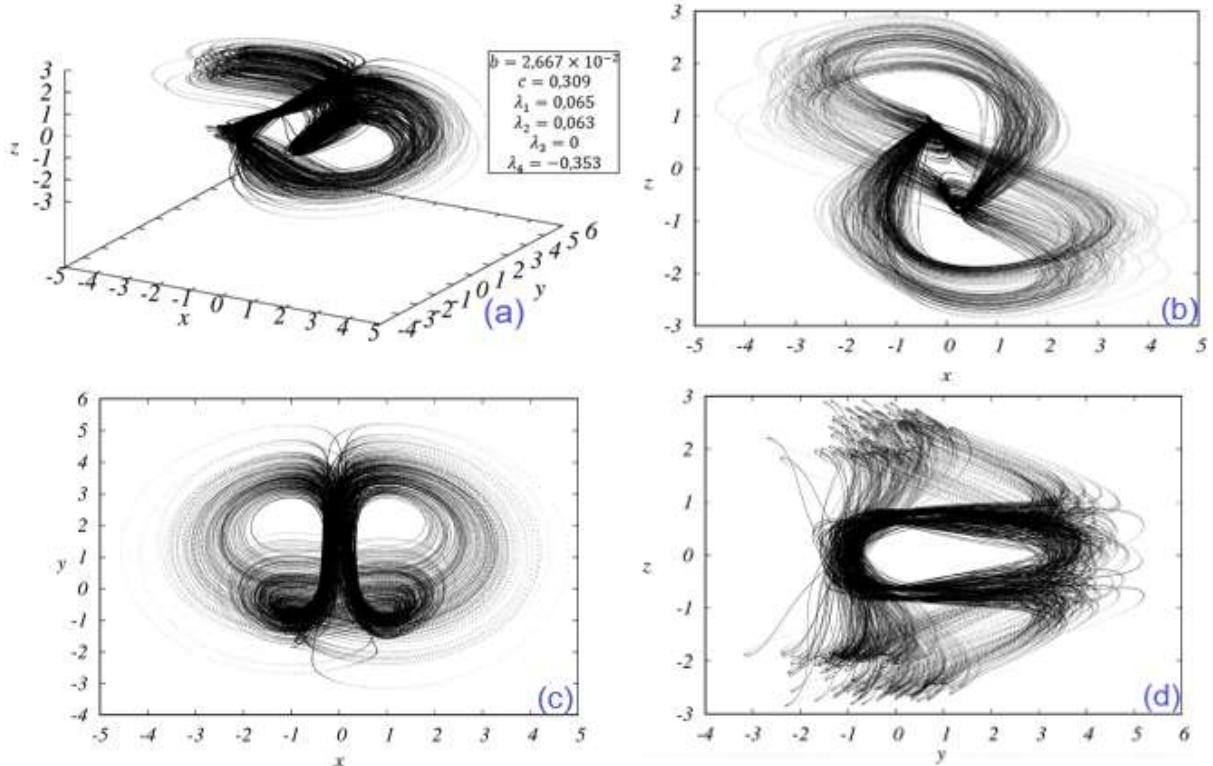


Figura 6.14: Atrator do tipo hipercaótico do ponto 2 da figura 6.12. (a) Em três dimensões. (b) projeção no plano $x \times z$. (c) projeção no plano $y \times x$. (d) projeção no plano $y \times z$.

Outras evidências da conjectura das janelas [43-44] estão nos planos $a \times k$ (figuras 6.15 e 6.16) e $b \times k$ (figuras 6.17 e 6.18). Nestes planos encontramos as janelas periódicas conhecidas na literatura como camarões. Tais estruturas estão longe das áreas que apresentam hipercaos, mais precisamente as regiões onde $k \leq 0,2$ nas figuras 6.15 (b) e 6.17 (b), por isso apresentam janelas estendidas, as antenas dos camarões. Nesta região temos apenas um expoente de Lyapunov positivo, portanto, $m > j$.

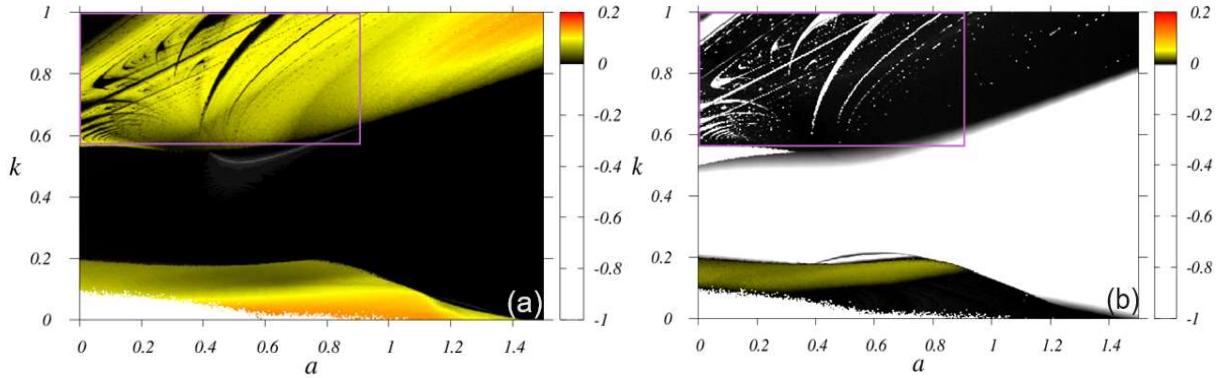


Figura 6.15: Plano $a \times k$ do sistema (3.2) onde aparecem os camarões. (a) Para o maior expoente de Lyapunov. (b) Para o segundo maior expoente.

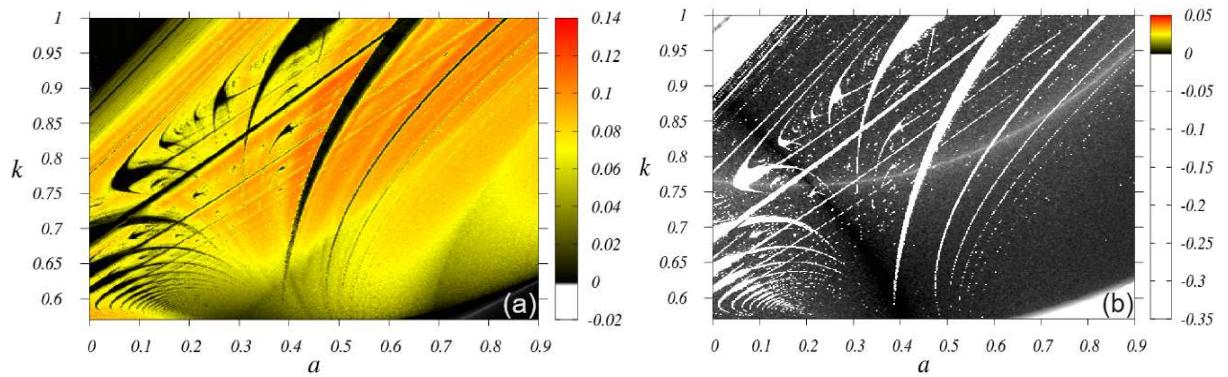


Figura 6.16: Ampliação da janela da figura 6.15 para demonstrar as janelas estendidas das estruturas em forma de camarão. (a) Maior expoente de Lyapunov associado. (b) Segundo maior expoente.

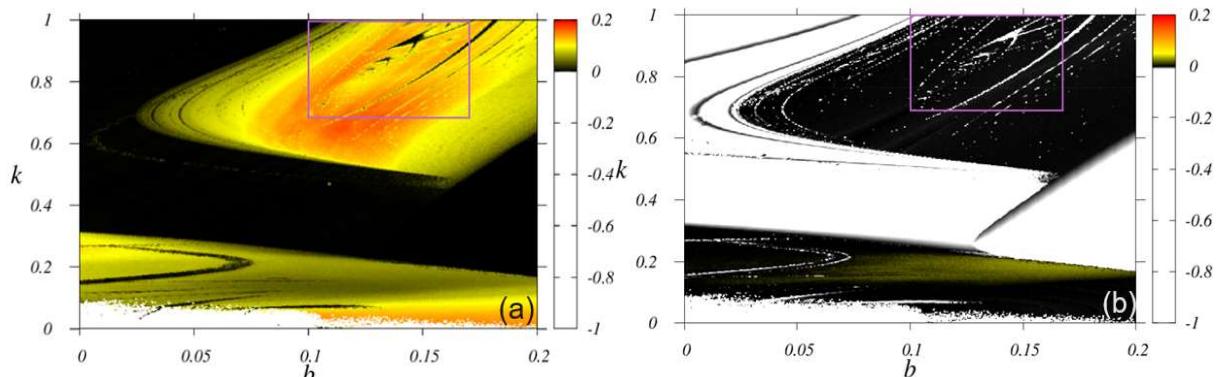


Figura 6.17: Plano $b \times k$ do sistema (3.2). (a) Para o maior expoente de Lyapunov. (b) Para o segundo maior.

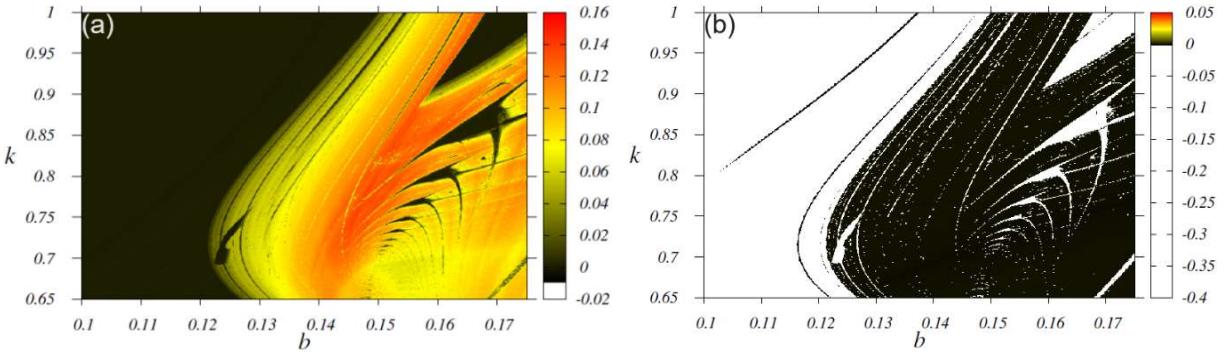


Figura 6.18: Imagem ampliada da caixa da figura 6.17 para demonstrar as janelas de periodicidade (camarões). (a) Para o maior expoente de Lyapunov associado. (b) Para o segundo maior expoente de Lyapunov.

Foi encontrado outra dinâmica no modelo financeiro em quatro dimensões que é interessante ser relatada. A presença de caos transitente pode ser visualizada no plano $b \times k$. O ponto C_t no plano da figura 6.19 tem as coordenadas $(0,355; 3,176)$. O atrator desse ponto foi plotado na figura 6.20. Podemos observar a dinâmica de caos transitente para um ponto de equilíbrio. Neste caso, temos uma dinâmica caótica para um tempo transitente e após este tempo o atrator caótico perde estabilidade indo à trajetória para um ponto de equilíbrio que estabilizou.

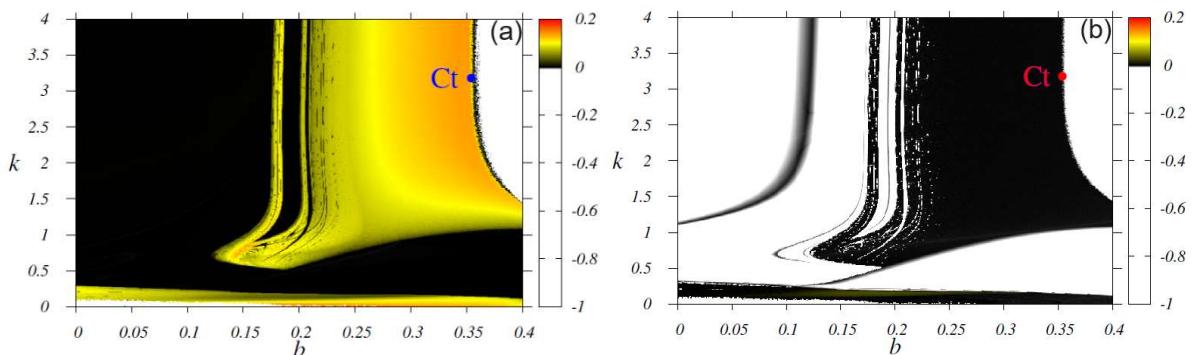


Figura 6.19: Plano de parâmetros $b \times k$ com $0 \leq b \leq 0,4$ e $0 \leq k \leq 4$. O ponto C_t tem as coordenadas $b = 0,355$ e $k = 3,176$. Os demais parâmetros são $a = 0,9$; $c = 1,5$ e $d = 0,2$. (a) Plano com a escala de cores para o maior expoente de Lyapunov associado. (b) Para o segundo maior expoente de Lyapunov associado.

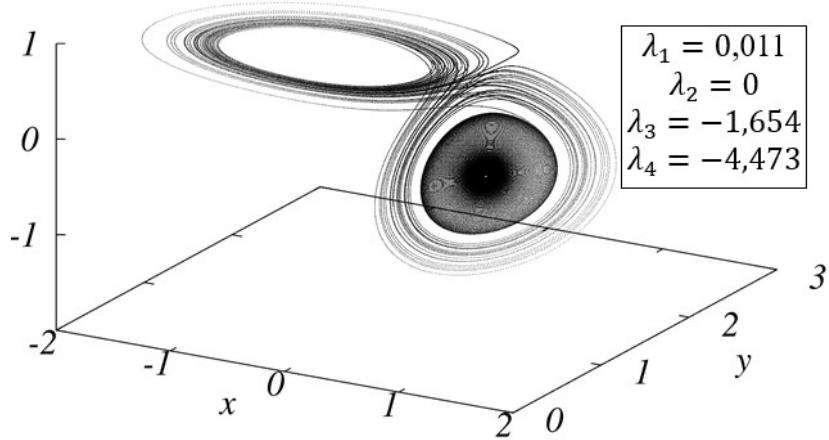


Figura 6.20: Atrator de caos transiente calculado no ponto C_t da figura 6.19 com seu respectivo LEP.

6.3. TRANSIÇÃO CAOS-HIPERCAOS NO MODELO 4D

O objetivo desta seção é investigar o sistema (3.2) com enfoque nos parâmetros d e k , para saber a partir de quais valores destes parâmetros o sistema transita da dinâmica caótica para a dinâmica hipercaótica, além do mais, foram observados outros fenômenos dinâmicos como quase-periodicidade. Para isso, foi usado o plano de parâmetros $a \times b$ e em todos os espaços foi destacado o ponto $P(1,5; 0,2)$ com foco numa região a qual sabemos que existe hipercaos.

A técnica empregada foi criar pares de planos de parâmetros $a \times b$ do sistema (3.2), um plano de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov e o outro para o segundo maior expoente, para sete valores diferentes de d e k e dispô-los em forma de quadro para comparação conforme apresentado na figuram 6.21. Os valores escolhidos foram em ordem crescente 1×10^{-4} , 5×10^{-4} , 1×10^{-3} , 5×10^{-3} , 1×10^{-2} e 5×10^{-2} e 1×10^{-1} . Os intervalos dos planos são $0 \leq a \leq 4$ e $0 \leq b \leq 0,6$, variando d e k igualmente. O parâmetro c foi mantido constante em $c = 1,5$. Para cada par de planos foi plotado um atrator do ponto P com seu LEP a fim de confirmar a dinâmica do ponto e dar outra visão da transição do sistema tridimensional para quadridimensional à medida que majoramos d e k (figura 6.22).

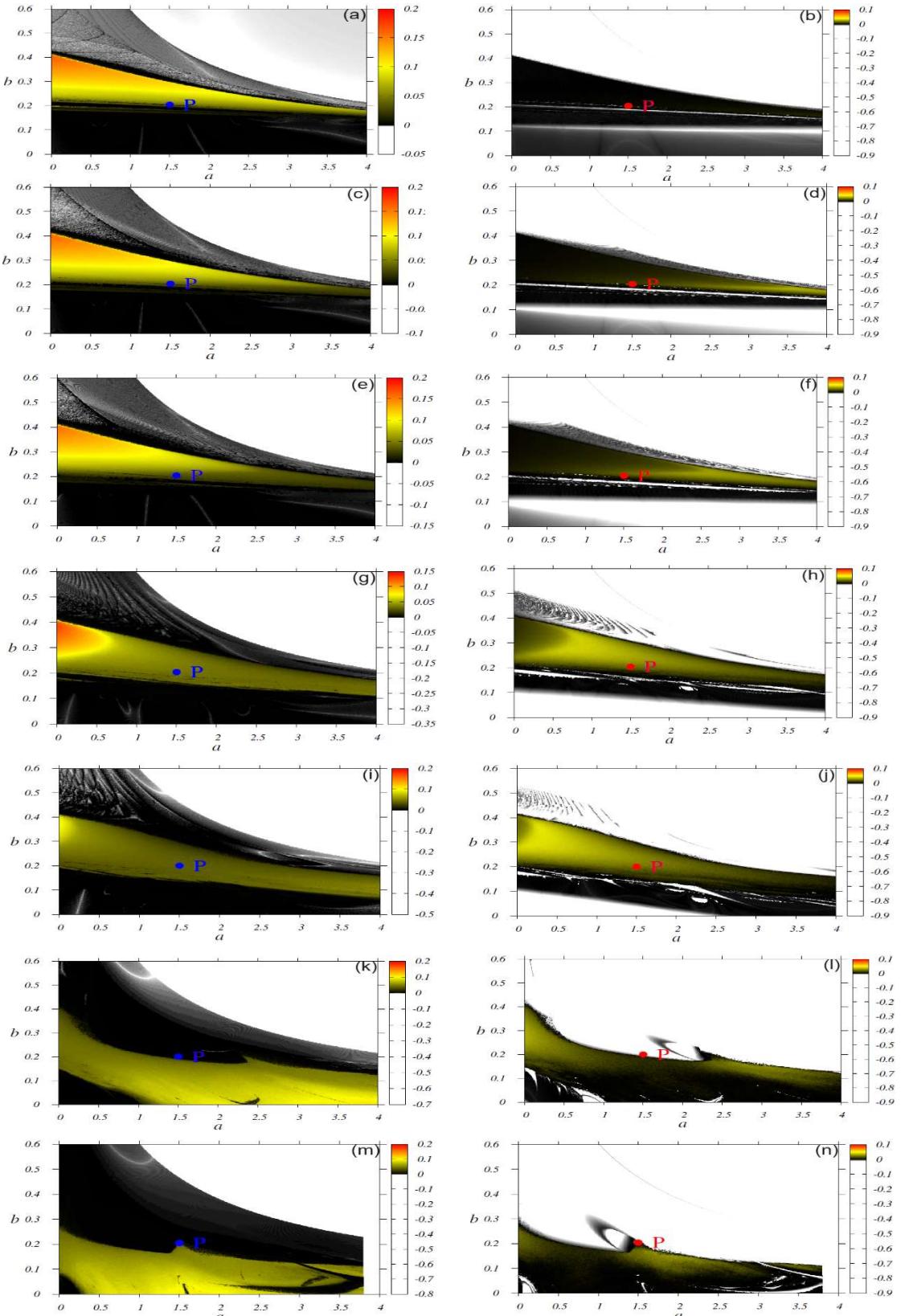


Figura 6.21: Planos de parâmetros $a \times b$. Primeiros maiores (coluna da esquerda) e segundos (coluna da direita) maiores expoentes de Lyapunov do sistema (3.2). (a) e (b) para $d = k = 1 \times 10^{-4}$. (c) e (d) para $d = k = 5 \times 10^{-4}$. (e) e (f) para $d = k = 1 \times 10^{-3}$. (g) e (h) para $d = k = 5 \times 10^{-3}$. (i) e (j) para $d = k = 1 \times 10^{-2}$. (k) e (l) para $d = k = 5 \times 10^{-2}$. (m) e (n) para $d = k = 1 \times 10^{-1}$.

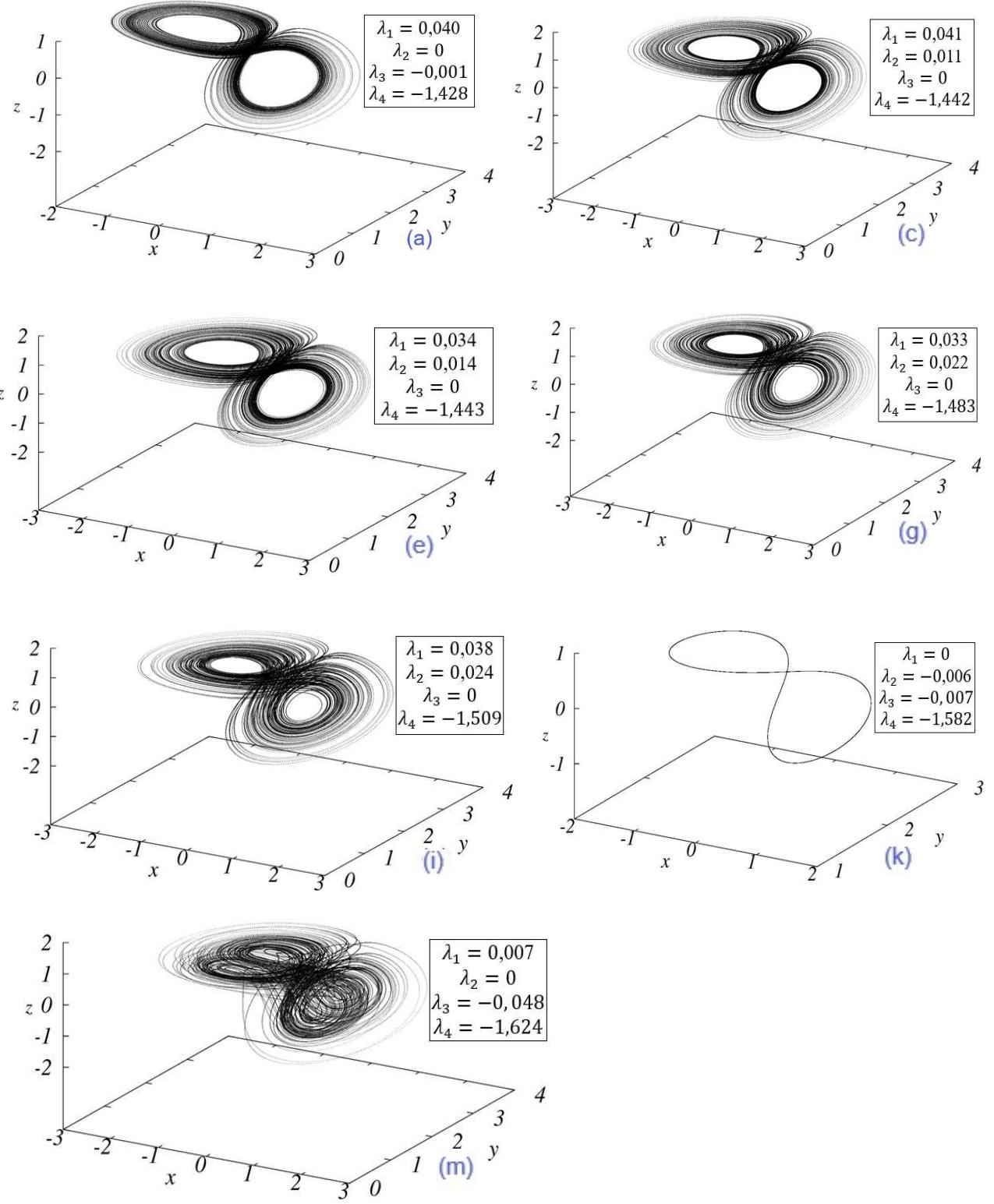


Figura 6.22: Atratores do ponto P da figura 6.21. (a) $d = k = 1 \times 10^{-4}$. (c) $d = k = 5 \times 10^{-4}$. (e) $d = k = 1 \times 10^{-3}$. (g) $d = k = 5 \times 10^{-3}$. (i) $d = k = 1 \times 10^{-2}$. (k) $d = k = 5 \times 10^{-2}$. (m) $d = k = 1 \times 10^{-1}$.

Através dessa técnica podemos observar, de maneira quantitativa através do espectro dos expoentes de Lyapunov, a mudança topológica do atrator do ponto P, conforme aumentamos os parâmetros e observar a sua dinâmica.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um sistema financeiro estável é aquele sem variações abruptas em suas variáveis de estado apresentando certa previsibilidade, assim todos os agentes sejam eles pessoas, empresas ou governo podem fazer planejamentos de longo prazo levando a um aumento da confiança e por conseguinte crescimento duradouro. Estados onde há grandes variações de preços, juros, lucros e demandas em curtos intervalos de tempo são caracterizados como crises financeiras trazendo perdas aos agentes.

Nesta perspectiva estados caóticos ou hipercaóticos devem ser controlados em sistemas financeiros a fim de evitar crises, por isso a importância de estudos nesta área.

O modelo do sistema (3.2) demonstrou ser mais próximo da realidade que o sistema (3.1) por apresentar mais riqueza em sua dinâmica e maior imprevisibilidade de longo prazo como a economia apresenta ser de fato. Parâmetros como taxa interna de poupança a , o custo por investimento b , o endividamento d e a depreciação e amortização dos ativos pertencentes ao agente econômico k , não possuem sentido econômico além do valor unitário, por serem adimensionais e calculados em percentual de outra grandeza que nunca vão poder superar, Esses parâmetros podem no máximo se igualar, porém, por questões de pesquisa científica, em alguns cálculos esses valores foram extrapolados.

Levando em consideração o limite superior unitário da maioria dos parâmetros de controle, com exceção da elasticidade da demanda por mercadorias c , podemos concluir que o sistema financeiro apresentado pelos modelos 3.1 e 3.2 possuí grandes áreas de regime caótico mesmo para valores altos da taxa interna de poupança acima de 50%.

Outro parâmetro que demonstrou ser crucial para controle do caos no modelo é a elasticidade da demanda por mercadorias. Para valores abaixo de 150%, ou seja, uma variação percentual 50% maior na demanda para uma variação no

preço, o modelo apresenta hipercaos. Para valores de c acima de 1,5, o hipercaos desaparece. Isso sugere que os consumidores devem ser mais reativos a variações de preços optando por produtos alternativos ou simplesmente por não consumir, tendo mais maleabilidade em seus padrões de consumo. Também demonstra o fator negativo dos grandes oligopólios que deixam os consumidores sem alternativas em alguns setores. Foi observado no modelo de quatro dimensões uma confirmação da conjectura das janelas em fluxo, fato observado raras vezes.

Ainda para Pollmann [45], baseado na teoria de *tradeoff*, d seria função dos impostos aplicados ao agente econômico. Tal custo está considerado dentro do parâmetro b , então, $d(b)$ o que sugere melhorias no modelo (3.2).

O resultado do estudo da transição entre o modelo em três dimensões para o modelo em quatro dimensões revelou que mesmo para pequenos valores de endividamento, depreciação e amortização, a partir de 0,5% o sistema já apresenta hipercaos. À medida que d e k são aumentados o valor do segundo maior expoente de Lyapunov aumenta concomitantemente, enquanto o primeiro maior manteve-se estável. Com isso, temos mais produção de informação no sistema por unidade de tempo de acordo com a entropia de Kolmogorov-Sinai. Portanto, o endividamento e a depreciação/amortização aumentam o risco de crises financeiras no modelo econômico tanto quanto maiores forem seus valores. Nesta área poderia ser feito um estudo da influência de cada parâmetro d e k isoladamente.

REFERÊNCIAS

- [1] BACHELIER, L. **Théorie de la spéculation**, Ann. Sci. École Norm. Sup. 17 (1990), pp. 21-86. Reprinted in: **Louis Bachelier's Theory of speculation. The origins of modern finance**. Translated and with commentary by M. Davis and A. Etheridge (foreword by P. A. Samuelson), Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [2] EINSTEIN, A. **Investigations on the Theory of the Brownian Movement**. Courier Corporation, 1956. Texto editado, com notas, por R. Fürth. A edição original, contendo a tese de doutoramento e o primeiro artigo sobre o movimento browniano, foi publicada em alemão, na Suíça, em 1926.
- [3] MANDELBROT, B. B. **A Multifractal Walk Down Wall Street**. Scientific American, v. 17, n. 280, p. 70-73, 1999.
- [4] GLEISER, I. **Caos e complexidade**. A evolução do pensamento econômico. Rio de Janeiro: Campus, 2002.
- [5] FEICHTINGER, G. **The economy as an evolving complex system**. Journal of Economic Behavior & Organization, 15(2), 316–319, 1991.
- [6] ARTHUR, W. B. **The economy as an evolving complex system II**. CRC Press, 2018.
- [7] SHIRYAEV, A. N. **Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory**, World Scientific, 1999.
- [8] MIKOSCH, T. **Elementary Stochastic Calculus: with Finance in View**, World Scientific, 1998.
- [9] HULL, J. C. **Options, Futures, and Other Derivatives**, Prentice-Hall, 3rd ed., 1997.
- [10] DUFFIE, D. **Dynamic Asset Pricing**, Princeton University Press, 3rd ed., 2001.
- [11] BLACK, F.; SCHOLES, M., **The pricing of options and corporate liabilities**, Journal of Political Economy, 81, 637, 1973.
- [12] MERTON, R. C. **Theory of rational option pricing**, Bell Journal of Economics. Manag. Sci., 141, 1973.
- [13] INGERSOLL, J. E., **Theory of Financial Decision Making**, Rowman & Littlefield, 1987.

- [14] ABBATE, A., BENEDICTS, L., FAGIOLO, G., TAJOLI, L., (2013) **The International Trade Network in Space and Time**, SSRN Electronic Journal, 2013.
- [15] DEGUCHI, T., TAKAHASHI, K., TAKAYASU, H., TAKAYASU M. **Hubs and Authorities in the World Trade Network Using a Weighted HITS Algorithm**, Plos One 9(7), 2014.
- [16] SPEAKMAN, M.; SHARPLEY, R. **A chaos theory perspective on destination crisis management: Evidence from Mexico**. Journal of Destination Marketing & Management, v. 1, n. 1-2, p. 67-77, 2012.
- [17] LE NGUYEN, H.; KOCK, S. **Managing SMEs' survival from financial crisis in a transition economy: A Chaos Theory approach**. Journal of General Management, v. 37, n. 1, p. 31-45, 2011.
- [18] YU H.; CAI G.; LI Y. **Dynamic analysis and control of a new hyperchaotic finance system**. Nonlinear Dynamics; 67:2171–82, 2012.
- [19] MA J.; CHEN Y. **Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system**. Applied Mathematics and Mechanics, 22(11), 1240–1251, 2001.
- [20] WOLF, M. **Reconstrução Do Sistema Financeiro Global**. Elsevier Brasil, 2009.
- [21] PAULA, L. F. **Financiamento, crescimento econômico e funcionalidade do sistema financeiro: uma abordagem pós-keynesiana**. Estudos Econômicos, v. 43, p. 363-396, 2013.
- [22] CAIADO, A. C.; CAIADO, J. **Gestão de instituições financeiras**. Edições Sílabo, v. 2, 2008.
- [23] DE BRITO, O. S. **Mercado Financeiro**. Saraiva Educação SA, 2019.
- [24] TEBCHIRANI, F. R., **Princípios de Economia: Micro e Macro**. São Paulo: Ibpex, 2008.
- [25] SAMUELSON, P. A., **Introdução à Análise Econômica**. Rio de Janeiro: Agir, 1963.
- [26] SIMONSEN, M. H., CYSNE, R. P. **Macroeconomia**. São Paulo: Atlas, 2016.
- [27] GAO, Q.; MA, J. **Chaos and Hopf bifurcation of a finance system**. Nonlinear Dynamics, v. 58, p. 209-216, 2009.
- [28] JIAN, J.; DENG, X.; WANG, J.; **Globally exponentially attractive set and synchronization of a class of chaotic finance system**, Advances in Neural

Networks-ISNN 2009: 6th International Symposium on Neural Networks, ISNN 2009 Wuhan, China, May 26-29, 2009 Proceedings, Part I 6. Springer Berlin Heidelberg., p. 253-261, 2009

[29] CHEN, W. **Nonlinear dynamics and chaos in a fractional-order financial system**. Chaos, Solitons & Fractals, v. 36, n. 5, p. 1305-1314, 2008.

[30] RECH, P. C. **Hyperchaos and multistability in a four-dimensional financial mathematical model**, Journal of Applied Nonlinear Dynamics, v. 10, n. 02, p. 211-218, 2021.

[31] JAHANSNAHI, H., YOUSEFPOUR, A., WEI, Z., ALCARAZ, R., BEKIROS, S. **A financial hyperchaotic system with coexisting attractors: Dynamic investigation, entropy analysis, control and synchronization**. Chaos, Solitons & Fractals, v. 126, p. 66-77, 2019.

[32] STROGATZ, S.H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering**. 1º Edição. Westview Press, 2001, p.512.

[33] FERRARA, N.F., PRADO, C.P.C., **Caos: uma Introdução**, Edgard Blucher, São Paulo:1994.

[34] LORENZ, E.N. Deterministic Nonperiodic Flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**: v.20, n.2, p.130-141, 1963.

[35] KANTZ, H., SCHREIBER, T.: **Nonlinear Time Series Analysis**. Cambridge University Press, Cambridge 2004.

[36] FRANCO, F. F.: **Caos e Hipercaos**: estudo da transição para caos e hipercaos em magnetoconvecção. São Paulo: Editora Dialética, 2023.

[37] DAVID, M.; NAKAMURA, W. T.; BASTOS, D. D.: **Estudo dos modelos trade-off e pecking order para as variáveis endividamento e payout em empresas brasileiras (2000-2006)**. RAM. Revista de Administração Mackenzie, v. 10, p. 132-153, 2009.

[38] RAJAN, R. G. e ZINGALES, L., **What do we know about capital structure? Some evidence from international data**. Journal of Finance, 50, pp. 1421-1460, 1995.

[39] COSTA, C. M.; MATTE, A. M.; MONTE-MOR, D. S.: **Endividamento e decisões contábeis: a relação não linear entre dívida e qualidade dos lucros**. Revista de Contabilidade e Organizações, v. 12, p. 1-16, 2018.

[40] NEVES, J. C.: **Análise Financeira**, Lisboa: Texto Editora. 2002.

- [41] COELHO, F. S. EBITDA: a busca de uma melhor compreensão do maior vox populi do mercado financeiro. Revista Pensar Contábil. Rio de Janeiro, Ano VI, n. 26, p. 41- 49, Nov./Dez. 2004 a Jan. 2005.
- [42] WOLF, A., SWIFT, J. B., SWINNEY, H. L., JOHN, A. W. **Determining Lyapunov exponents from a time series**. Physica D 16, 285-317 (1985)
- [43] BARRETO, E., HUNT, B. R., GREBOGI C., YORQUE J. A. : **From high dimensional chaos to stable periodic orbits: The structure of parameter space**. Physical review letters, v. 78, n. 24, p. 4561, 1997.
- [44] STEGEMANN, C., ALBUQUERQUE, H. A., RUBINGER, R. M., RECH, P. C.: **Lyapunov exponent diagrams of a 4-dimensional Chua system**. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 21(3), 2011.
- [45] POHLMANN, M. C.; DE IUDÍCIBUS, S.: **Relação entre a tributação do lucro e a estrutura de capital das grandes empresas no Brasil**. Revista Contabilidade & Finanças, v. 21, p. 1-25, 2010.