

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – PPGF**

KAIQUE ANJOS SANTOS

FOTOPRODUÇÃO DE ESTADOS LIGADOS DE LÉPTONS EM COLISÕES
 e^+e^- , ep E eA

JOINVILLE

2024

KAIQUE ANJOS SANTOS

FOTOPRODUÇÃO DE ESTADOS LIGADOS DE LÉPTONS EM COLISÕES

e^+e^- , ep \mathbf{E} eA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Bruno Duarte da Silva Moreira

JOINVILLE

2024

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Universitária Udesc,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Santos, Kaique Anjos
Fotoprodução de estados ligados de léptons em colisões
e+e-, ep e eA / Kaique Anjos Santos. -- 2024.
77 p.

Orientador: Bruno Duarte da Silva Moreira
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa
de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2024.

1. Estados ligados de léptons. 2. Fotoprodução. 3.
Eletrodinâmica Quântica. 4. Colisões elétron-pósitron. 5.
Colisões elétron-núcleo. I. Moreira, Bruno Duarte da Silva . II.
Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de
Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em
Física. III. Título.

KAIQUE ANJOS SANTOS

FOTOPRODUÇÃO DE ESTADOS LIGADOS DE LÉPTONS EM COLISÕES

e^+e^- , ep **E** eA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Bruno Duarte da Silva Moreira

BANCA EXAMINADORA:

Bruno Duarte da Silva Moreira, Dr.
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membros:

Edgard Pacheco Moreira Amorim, Dr.
Universidade do Estado de Santa Catarina

Maria Simone Kugeratski Souza, Dra.
Universidade Federal de Santa Catarina

Joinville, 04 de abril de 2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Bruno Duarte da Silva Moreira, por aceitar conduzir o meu trabalho de pesquisa com grande empenho, paciência e dedicação. A todos os meus professores e colaboradores da Universidade do Estado de Santa Catarina – Udesc pela excelência da qualidade técnica de cada um, em especial ao técnico universitário Sidnei Otero, que tanto nos ajuda.

Aos meus pais e familiares que sempre estiveram ao meu lado me apoiando ao longo de toda a minha trajetória, especialmente a família que escolhi. A todos aqueles que me ajudaram e apoiaram durante essa jornada, aqueles que ajudaram a financiar minha mudança de estado quando fiz minha vaquinha e aqueles que aqui me acolheram. Àqueles que acreditaram em mim mesmo quando nem eu mesmo acreditei, muito obrigado. Agradeço também a mim mesmo por não ter desistido nos momentos de dificuldade (que não foram poucos).

Deixo um agradecimento especial ao meu orientador, que foi um verdadeiro amigo ao me acolher e orientar no mais amplo sentido da palavra. Agradeço pelo incentivo e pela dedicação do seu escasso tempo ao meu projeto de pesquisa.

Por fim, agradeço à FAPESC pelo suporte financeiro.

“Milagres só acontecem com as pessoas que não
desistem.” (Emporio Ivankov)

RESUMO

O estudo da produção de estados ligados de léptons pode ser utilizado como um laboratório para testar as propriedades da Eletrodinâmica Quântica, além de ser uma possibilidade na busca de uma Física Além do Modelo Padrão. Nesta dissertação concentrarmo-nos na fotoprodução de estados ligados de léptons no estado singlet em colisões puramente eletromagnéticas, onde não há troca de glúons entre as partículas do estado inicial. Estudamos os processos de fotoprodução considerando futuros colisores de partículas, como o *International Linear Collider* (ILC), o *Future Circular Collider* (FCC) e o *Electron Ion Collider* (EIC), que possuem como característica a alta luminosidade. Para a análise das colisões entre as partículas carregadas, utilizamos o formalismo da aproximação de Weiszäcker-Williams e a seção de choque fóton-fóton com a Fórmula de Low. Estimamos correções de mais alta ordem da QED para as colisões com interações multifótons na produção de estados singletos de positrônio. Construímos distribuições de rapidez e virtualidade para a produção dos estados ligados dos três sabores de lépton e distribuições de momento transverso para a produção de positrônio. Calculamos as seções de choque totais e estimamos as taxas de eventos para os três colisores estudados.

Palavras-chave: Estados ligados de léptons. Fotoprodução. Eletrodinâmica Quântica. Colisões elétron-pósitron. Colisões elétron-núcleo.

ABSTRACT

The study of the production of bound states of leptons can be used as a laboratory to test the properties of Quantum Electrodynamics, in addition to being a possibility in the search of Beyond Standard Model Physics. In this dissertation we focus on photoproduction of singlet bound states of leptons in purely electromagnetic collisions, where there is no exchange of gluons between particles in the initial state. We study photoproduction processes considering the advent of future particle colliders, such as the International Linear Collider (ILC), the Future Circular Collider (FCC) and the Electron Ion Collider (EIC), which have as characteristic of high luminosity. To analyze collisions between charged particles, we use the Weiszäcker-Williams approximation formalism and the photon-photon cross section with Low's Formula. We estimate higher-order QED corrections for collisions with multiphoton interactions in the production of singlet states of positronium. We build distributions of rapidity and virtuality for the production of the bound states of the three flavors of lepton and transverse momentum distributions for positronium production. We calculate the total cross section and estimated event rates for the three colliders studied.

Keywords: Bound states of leptons. Photoproduction. Quantum Electrodynamics. Electron-positron collisions. Electron-nucleus collisions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Modelo Padrão de Partículas.	16
Figura 2 – Regiões da pseudorapidez relativa ao feixe no eixo z	21
Figura 3 – Em (a) é mostrado uma única partícula incidente de tipo a (representada por círculo vazio) atravessando uma região contendo partículas de tipo b (representadas por um círculo sólido). Em (b) é mostrado uma visão projetada da região atravessada por um fluxo de partículas incidentes em um tempo δt	25
Figura 4 – Vértice de interação	27
Figura 5 – Os diagramas de Feynman para os processos pelos canais s , t e u	28
Figura 6 – Diagramas topologicamente distintos da aniquilação de estado ligado singletos	29
Figura 7 – Criação de estado ligado de lépton pela fusão de dois fótons	31
Figura 8 – (a) Campo eletromagnético de uma carga em repouso . (b) Campo se aproximando de um pulso com velocidade próxima à da luz na aproximação de fótons equivalentes. (c) Campos eletromagnéticos trocados pela radiação equivalente.	35
Figura 9 – Movimento relativo entre os referenciais S e S'	36
Figura 10 – Partícula de carga q fixa na origem de S' e gerando um campo eletromagnético em P	37
Figura 11 – Campos devido ao movimento uniforme de uma partícula carregada em função do tempo. Em (a) a componente E_x tende a uma delta de Dirac com pico máximo em $t = 0$. Em (b) a componente E_z apresenta máximos e mínimos que alternam em torno de $t = 0$	38
Figura 12 – Pulsos de radiação devida ao movimento da carga q	39
Figura 13 – Interação e^+e^- pela troca de fótons virtuais indo a um estado X	41
Figura 14 – Diagrama para a produção de estado ligado singletos pela fusão de dois fótons	42
Figura 15 – Fluxos de elétrons com energias dos colisores estudados	48
Figura 16 – Fluxos em função da distância transversa b do núcleo de chumbo com fator de forma pontual e monópole com energia do EIC	50
Figura 17 – Fluxos em função da distância transversa b do próton com fator de forma pontual e monópole com energia do EIC	51
Figura 18 – Distribuições de rapidez em nanobarn para a produção de positrônio em colisões e^+e^- . Em (a) energias do ILC e em (b) energias do FCC.	52
Figura 19 – Distribuições de rapidez em nanobarn para a produção de muônio em colisões e^+e^- . Em (a) energias do ILC e em (b) energias do FCC.	52
Figura 20 – Distribuições de rapidez em nanobarn para a produção de tauônio em colisões e^+e^- . Em (a) energias do ILC e em (b) energias do FCC.	52
Figura 21 – Distribuições de rapidez em nanobarn para a produção de positrônio em colisões elétron-próton em (a) e elétron-chumbo em (b) com energias do EIC	54

Figura 22 – Distribuições de rapidez em nanobarn para a produção de muônio em colisões elétron-próton em (a) e elétron-chumbo em (b) com energias do EIC	54
Figura 23 – Distribuições de rapidez em nanobarn para a produção de tauônio em colisões elétron-próton em (a) e elétron-chumbo (b) com energias do EIC	54
Figura 24 – Diagrama para a produção de estados ligados singletos de léptons em colisões envolvendo interações multifóttons.	55
Figura 25 – Comparação entre as distribuições de rapidez para a produção de positrônio a nível de Born e com correção coulombiana	56
Figura 26 – Distribuições de virtualidade para a produção de estados ligados singletos de léptons em colisões elétron-chumbo com energias do EIC	57
Figura 27 – Distribuição de momento transverso para a produção de positrônio na colisão eA	58
Figura 28 – Intervalos de momento transverso considerados para o cálculo dos ângulo de produção. Em (a) q_t máximo vai até 10^{-2} GeV; em (b) q_t máximo vai até 10^{-3} GeV; em (c) q_t máximo vai até 10^{-4} GeV.	59
Figura 29 – Espalhamento por um fóton virtual	66
Figura 30 – Absorção de um fóton real	67
Figura 31 – Desenho esquemático do <i>International Linear Collider</i> (fora de escala).	70
Figura 32 – Esquema 3D do FCC (fora de escala)	71
Figura 33 – Desenho esquemático da estrutura do EIC	73

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Unidades de Massa, Comprimento, Tempo e Carga do pósitron em termos de unidades de energia $\hbar = c = 1$	18
Tabela 2 – Ângulos de espalhamento para cada momento transverso típico na faixa do pico de rapidez	58
Tabela 3 – Seções de choque totais em nanobarn para a colisão elétron-pósitron com energias do ILC.	60
Tabela 4 – Seções de choque totais em nanobarn para a colisão elétron-pósitron com energias do FCC.	60
Tabela 5 – Seções de choque totais para a colisão ep e ePb	61
Tabela 6 – Luminosidades para cada execução (<i>run</i>) típica em diferentes energias do ILC e FCC	61
Tabela 7 – Taxas de eventos nas colisões elétron-pósitron com energias do ILC por <i>run</i>	61
Tabela 8 – Taxas de eventos por <i>run</i> nas colisões elétron-pósitron com energias do FCC.	62
Tabela 9 – Taxas de eventos nas colisões elétron-núcleo de chumbo com energias do EIC.	62
Tabela 10 – Seções de choque totais em nanobarn para a produção de estados ligados da QED em colisões AuAu e PbPb.	63
Tabela 11 – Taxas de eventos por ano para a produção de estados ligados da QED em colisões AuAu e PbPb.	63

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	ELETRODINÂMICA QUÂNTICA	15
2.1	MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA E TEORIAS QUÂNTICAS DE CAMPOS	15
2.2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	17
2.2.1	Unidades Naturais	17
2.2.2	Quadrivetores	18
2.2.3	Rapidez e pseudorapidez	20
2.3	A LAGRANGIANA DA QED E O ESTUDO DAS INTERAÇÕES	21
2.3.1	Matrizes γ de Dirac	23
2.4	A MATRIZ DE ESPALHAMENTO E A SEÇÃO DE CHOQUE DIFERENCIAL	24
2.5	REGRAS DE FEYNMAN	25
2.5.1	Variáveis de Mandelstam	27
2.6	ANIQUILAÇÃO DE ESTADOS LIGADOS DE LÉTPONS EM DOIS FÓTONS	28
2.7	CRIAÇÃO DE ESTADOS LIGADOS DE LÉPTONS	30
2.8	FECHAMENTO	34
3	APROXIMAÇÃO DE FÓTONS EQUIVALENTES	35
3.1	DERIVAÇÃO CLÁSSICA DO ESPECTRO DE FÓTONS EQUIVALENTES	35
3.1.1	Transformação dos campos eletromagnéticos	36
3.1.2	Fluxo de Fótons	38
3.2	FOTOPRODUÇÃO DE ESTADOS LIGADOS COM A APROXIMAÇÃO DE FÓTONS EQUIVALENTES	41
3.3	PROCESSO NO REFERENCIAL DO CENTRO DE MASSA	43
3.4	FECHAMENTO	46
4	RESULTADOS	47
4.1	FLUXO DE FÓTONS	47
4.2	DISTRIBUIÇÕES DE RAPIDEZ E DE VIRTUALIDADE	51
4.2.1	Distribuições de rapidez em colisões elétron-pósitron	51
4.2.2	Distribuições de rapidez em colisões elétron-próton e elétron-núcleo	53
4.2.3	Distribuição de virtualidade e momento transverso	56
4.3	SEÇÕES DE CHOQUE TOTAIS E TAXAS DE EVENTOS	59
4.3.1	Seções de choque totais	59
4.3.2	Taxas de eventos	60
4.4	FECHAMENTO	63

5	CONCLUSÃO	64
	APÊNDICE A – DERIVAÇÃO QUÂNTICA DO ESPECTRO DE FÓ-	
	TONS EQUIVALENTES	66
	APÊNDICE B – COLISORES	70
B.1	<i>INTERNATIONAL LINEAR COLLIDER</i>	70
B.2	<i>FUTURE CIRCULAR COLLIDER</i>	71
B.3	<i>ELECTRON-ION COLLIDER</i>	72
	REFERÊNCIAS	74

1 INTRODUÇÃO

O estudo de estados ligados de léptons desperta grande interesse em áreas como a Química, onde é possível o estudo das propriedades químicas destes átomos exóticos até a formação de moléculas [1, 2], a Medicina, onde tem sido estudado o uso do positrônio na construção de tomografias [3, 4] e claro, a Física, onde, dentre os diversos usos, podemos confrontar as previsões teóricas fornecidas pelo Modelo Padrão de Física de Partículas com os dados experimentais e, assim, testar suas propriedades. Dessa forma, os estados ligados de léptons podem servir como laboratório na busca de uma nova Física além do Modelo Padrão.

Os estados ligados de léptons (l^+l^-), com $l = e, \mu, \tau$, apresenta estrutura similar ao hidrogênio, mas com uma partícula e sua antipartícula orbitando um centro de massa comum. O estado ligado pode ser dado em um estado singuleto, com spins anti paralelos e spin total $s = 0$, ou em um estado triplo, com spins paralelos e spin total $s = 1$, conhecidos como para- e orto-estados, respectivamente. Uma importante diferença para o hidrogênio é que para um estado ligado de léptons de mesmo sabor, pode ocorrer a aniquilação entre as partículas, com n fótons sendo emitidos no decaimento em um processo governado pela regra de seleção da conjugação de carga, com o estado singuleto emitindo um número par de fótons (tipicamente 2) e o estado triplo emitindo um número ímpar de fótons (tipicamente 3).

O positrônio, estado ligado entre elétron e sua antipartícula, o pósitron, é o mais conhecido dos estados ligados de léptons. Foi observado pela primeira vez em 1951 em um experimento conduzido no *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) [5]. Além do positrônio, temos o verdadeiro muônio, estado ligado entre múon e antimúon, e o verdadeiro tauônio, estado ligado entre tau e antitau. Nesta dissertação, iremos nos referir apenas como muônio e tauônio. Outras configurações que também são chamadas de muônio, como o estado ligado μe [6] e o átomo $\pi \mu$ [7], já foram descobertas e estudadas, enquanto que o verdadeiro muônio e verdadeiro tauônio ainda não foram detectados experimentalmente, mas há expectativa nos grandes colisores atuais e em colisores futuros [8, 9].

Dentre os vários processos pelo qual os estados ligados podem ser produzidos, destacamos os processos induzidos via fusão de fótons em colisões de altas energias descritos pela Eletrodinâmica Quântica (QED). Atualmente, o estudo da fenomenologia em altas energias está próximo de mais um grande salto, com a construção de novos aceleradores de partículas de alta luminosidade, como o *International Linear Collider* (ILC), o *Future Circular Collider* (FCC) e o *Electron-Ion Collider* (EIC).

Processos puramente eletromagnéticos podem ser estudados em colisões onde não há troca de glúons, como nas colisões com elétrons, que não possuem carga de cor. Por esse motivo, nesta dissertação estudaremos as colisões elétron-pósitron (e^+e^-), elétron-próton (ep) e elétron-núcleo (eA). Nesse tipo de interação, é útil analisarmos via aproximação de Weiszäcker-Williams, ou aproximação de fótons equivalentes, no qual podemos associar um fluxo de fótons virtuais aos campos eletromagnéticos de partículas ultrarelativísticas.

Assim, o objetivo desta dissertação é analisar a produção dos três tipos de estados ligados de léptons em processos induzidos por fótons virtuais, com virtualidade não desprezível, em colisões ultrarelativísticas de partículas eletricamente carregadas. Apresentamos previsões para as distribuições diferenciais de rapidez e de virtualidade, seções de choque totais e taxas de eventos.

No capítulo 2 apresentaremos os aspectos gerais do Modelo Padrão de Física de Partículas e da Eletrodinâmica Quântica, como a sua densidade lagrangiana. Apresentaremos também alguns conceitos fundamentais que serão explorados ao longo da dissertação, como as unidades naturais, quadrvetores e rapidez. Definiremos seção de choque diferencial para espalhamentos quânticos e enunciaremos as regras de Feynman, com as quais estudaremos os processos eletrodinâmicos de nosso interesse, a aniquilação de estados ligados de léptons em dois fótons e a criação de estados ligados de léptons pela fusão de fótons.

No capítulo 3 estudaremos a aproximação de fótons equivalentes, onde obteremos a sua derivação clássica, estudaremos a transformação dos campos eletromagnéticos gerados por cargas ultrarelativísticas em pulsos eletromagnéticos e calcularemos os fluxos de fótons provenientes dessas cargas. Estudaremos, por fim, a fotoprodução de estados ligados de léptons com a aproximação de fótons equivalentes e analisaremos o processo a partir do referencial de centro de massa.

O capítulo 4 apresentará os nossos resultados, onde compararemos os diferentes fluxos das diferentes partículas e estudaremos os diferentes fatores de forma para as partículas não pontuais como o próton e o núcleo pesado. Investigaremos a produção dos estados ligados de léptons em colisões ultrarelativísticas. Analisaremos as diferentes distribuições diferenciais da seção de choque em rapidez e em virtualidade e estimaremos ângulos de deflexão para o estado ligado produzido. Apresentaremos nossas previsões para as seções de choque totais e as taxas de eventos para cada tipo de colisão em cada um dos colisores estudados com diferentes energias possíveis de serem atingidas em cada colisor. Por fim, no capítulo 5, apresentaremos as nossas conclusões.

2 ELETRODINÂMICA QUÂNTICA

Este capítulo será dedicado à fundamentação teórica da Eletrodinâmica Quântica, desde seu surgimento histórico até a sua descrição através da densidade lagrangiana. Apresentaremos alguns conceitos prévios fundamentais e o ferramental teórico que nos possibilitará estudar a criação de estados ligados de léptons a partir da fusão de dois fótons.

2.1 MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA E TEORIAS QUÂNTICAS DE CAMPOS

Ao longo de várias décadas, diversos fenômenos físicos puderam ser compreendidos e explicados por intermédio da Física Clássica e da Teoria Clássica do Eletromagnetismo. No entanto, a partir das inúmeras descobertas de novas partículas em escala subatômica que ocorreram a partir do século XIX com as descobertas conduzidas por J. J. Thomson [10], surgiu a necessidade de desenvolvimento de uma teoria mais ampla, capaz de descrever os novos fenômenos descobertos e, além disso, tornar as previsões independentes do observador. Dessa forma, desenvolveram-se a Mecânica Quântica (MQ) e a Teoria da Relatividade Restrita (TRR) [11].

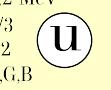
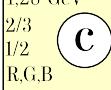
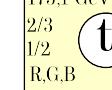
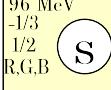
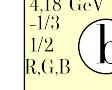
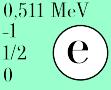
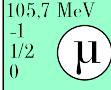
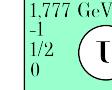
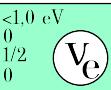
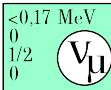
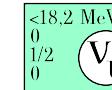
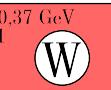
Em síntese, a MQ está interessada nos fenômenos em escala atômica ou menores, enquanto que a TRR está interessada em fenômenos que ocorrem em velocidades próximas à da luz no vácuo e fundamenta-se na exigência de que as leis físicas não dependam do observador, ou seja, as leis físicas devem apresentar formas matemáticas idênticas em diferentes referenciais inerciais sob as transformações de Lorentz. Portanto, os fenômenos em escala subatômica que obedecem a MQ devem também obedecer a TRR quando ocorrem em velocidades próximas às da luz.

Nesse sentido, as leis do eletromagnetismo clássico mostraram-se invariantes sob as transformações de Lorentz. Contudo, a equação de Schroedinger não obedecia a essa condição, de forma que mostrou-se necessário a construção de um novo formalismo que fosse ao mesmo tempo consistente com a Mecânica Quântica e com a Relatividade Restrita, isto é, uma Mecânica Quântica Relativística (MQR).

Com essa finalidade, Klein e Gordon propuseram uma equação construída de maneira análoga à Equação de Schroedinger capaz de satisfazer a invariância relativística. Porém, a solução para essa equação apresentou dificuldades de interpretação decorrentes da presença da derivada temporal de segunda ordem, que implicava em uma densidade de probabilidade nem sempre positiva definida. Portanto, uma equação alternativa foi proposta por Dirac, a qual apresenta derivadas espaço-temporais de primeira ordem [11].

As soluções para a Equação de Dirac descrevem de forma bem sucedida propriedades fundamentais de partículas de spin $\frac{1}{2}$ e apresenta soluções para energia total positiva e negativa, que são associadas a partículas e anti-partículas. Para a descrição das interações entre partículas relativísticas mostrou ser necessário a construção de um novo formalismo teórico, contexto no qual surge a Teoria Quântica de Campos (TQC) [12]. A TQC está fundamentada em atribuir o

Figura 1 – Modelo Padrão de Partículas.

Três gerações de matéria fermiônica			Bósons mensageiros	
QUARKS	1 ^a	2 ^a	3 ^a	
Massa	2,2 MeV	1,28 GeV	173,1 GeV	
Carga	2/3	2/3	2/3	
Spin	1/2	1/2	1/2	
Cor	R.G.B	R.G.B	R.G.B	
Up				
Down				
Elétron				
Neutrino do elétron				
LÉPTONS	2 ^a	3 ^a		
Massa	4,7 MeV	96 MeV	4,18 GeV	
Carga	-1/3	-1/3	-1/3	
Spin	1/2	1/2	1/2	
Cor	R.G.B	R.G.B	R.G.B	
Charm				
Bottom				
BÓSONS DE GAUGE	3 ^a			
Massa	0	0	0	
Carga	0	0	0	
Spin	1	1	1	
Cor	c <bar>c</bar>			
Top				
Glúon				
Higgs				
BÓSONS ESCALARES				

Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

significado de campos quantizados às equações de ondas relativísticas.

A partir da TQC, foi desenvolvido o formalismo para a teoria eletromagnética como uma teoria de campo quantizado, que foi batizada de Eletrodinâmica Quântica (QED). Desse modo, a QED é capaz de descrever os fenômenos eletromagnéticos em escala atômica ou menor e em velocidades relativísticas. É a mais antiga das teorias dinâmicas, com a qual podemos descrever as interações entre todas as partículas eletricamente carregadas, além de ser a mais simples e, por sua capacidade de predição, a mais bem sucedida das TQCs. Seu sucesso motivou a construção da Cromodinâmica Quântica para Interação Forte e a Teoria Quântica de Campos das Interações Fracas, também conhecida como Dinâmica Quântica de Sabor. Em conjunto, essas três TQCs compõem o Modelo Padrão da Física de Partículas, cujas partículas fundamentais são apresentadas na Figura 1.

O Modelo Padrão de Física de Partículas agrupa todas as partículas elementares conhecidas em dois grupos: fermions, que possuem spin semi-inteiro como os elétrons, e bósons, que possuem spin inteiro, como o fóton. Os fermions podem ser divididos em léptons e quarks. Os quarks possuem carga elétrica fracionária, não existem isolados na natureza e possuem a carga de cor. Por não existirem isolados, interagem via Força Forte e agrupam-se em hadrons, que são neutros de cor e subdividem-se em bárions (formados com três quarks) e mésons (formados por um quark e um antiquark). Existem ainda alguns hadrons exóticos, como o tetraquark e o pentaquark (formados por quatro e cinco quarks), além de outros objetos propostos [13, 14]. Os léptons são as partículas da família do elétron, que podem ser eletricamente carregados,

no caso do elétron, do múon e do tau, e podem ser eletricamente neutros, como os neutrinos correspondentes a cada lépton carregado.

Atualmente, os bósons conhecidos são divididos em vetoriais e em escalares. Os bósons vetoriais possuem spin 1 e são mediadores de força já detectados, que são o glúon, mediador da Força Forte, o fóton, da Força Eletromagnética e os bósons Z e W^\pm da Força Fraca. O único bóson escalar detectado até o momento é o bóson de Higgs, observado experimentalmente pela primeira vez em 2012 no LHC. Existem outros bósons propostos em algumas teorias, como o gráviton [15], que ainda não foi detectado mas espera-se ter massa nula e spin 2.

2.2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Antes de nos aprofundarmos no estudo da Eletrodinâmica Quântica, é importante conhecermos alguns conceitos fundamentais que serão utilizados ao longo de nosso trabalho. Apresentamos, portanto, as definições de unidades naturais, quadrvetores e cinemática relativística.

2.2.1 Unidades Naturais

Começamos por este conceito pois temos duas constantes fundamentais em Mecânica Quântica Relativística, que é a constante de Planck h e sua forma reduzida \hbar e a velocidade da luz no vácuo c , definidas como [16, 17]

$$\begin{aligned}\hbar &\equiv \frac{h}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ c &= 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Em física de partículas, é comum medir quantidades em unidades de GeV ($1\text{GeV} \equiv 10^9$ elétron volts). Essa escolha é motivada pelo fato de que a energia de repouso do próton é aproximadamente 1GeV . Por conveniência, escolhemos adotar unidades com $\hbar = c = 1$, de modo que se torna desnecessário escrever \hbar e c explicitamente nas fórmulas.

É possível, através da análise dimensional, descobrir onde os \hbar 's e c 's entram nas fórmulas sem o risco de ambiguidade. Dessa forma, é comum expressar massa (m), momento (mc) e energia (mc^2) em termos de GeV , e medir comprimento (\hbar/mc) e tempo (\hbar/mc^2) em unidades de GeV^{-1} . A Tabela 1 apresenta a conexão entre unidade GeV e unidades mks .

Para obtermos uma medida adimensional da força de interação eletromagnética entre duas partículas carregadas com carga e , comparamos a energia de repulsão eletrostática entre dois elétrons separados por uma unidade natural de comprimento com a energia da massa de

Tabela 1 – Unidades de Massa, Comprimento, Tempo e Carga do pósitron em termos de unidades de energia $\hbar = c = 1$

Fator de Conversão	Unidades $\hbar = c = 1$	$[\hbar, c, GeV]$
$1kg = 5.61 \times 10^{26} \text{ GeV}$	GeV	$\frac{\text{GeV}}{c^2}$
$1m = 5.07 \times 10^{15} \text{ GeV}^{-1}$	GeV^{-1}	$\frac{\hbar c}{\text{GeV}}$
$1s = 1.52 \times 10^{24} \text{ GeV}^{-1}$	GeV^{-1}	$\frac{\hbar}{\text{GeV}}$
$e = \sqrt{4\pi\alpha}$	–	$(\hbar c)^{1/2}$

Fonte: Adaptado de [16].

repouso de um elétron:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{\hbar/mc} \frac{1}{mc^2} \\
 &= \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \\
 \alpha &\approx \frac{1}{137}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Por razões históricas, α é conhecido como constante de estrutura fina. Ressaltamos que a carga do elétron não é estritamente constante, pois varia com a distância devido a efeitos quânticos [16], portanto α também deve ser variável. O valor que adotamos, $\frac{1}{137}$, é o valor assintótico de α , que nas energias de colisões atuais, é um ótimo valor.

Na Equação (2.2), adotamos o sistema racionalizado de Heaviside-Lorentz das unidades eletromagnéticas, ou seja, o fator 4π aparece nas equações de força em vez das equações de Maxwell e a permissividade do vácuo ϵ_0 é definida igual à unidade. Essa é uma escolha convencional em física de partículas por reduzir as equações de Maxwell à sua forma mais simples possível [16]. Com essa escolha, a expressão para a força de Coulomb torna-se

$$F = \frac{e^2}{4\pi r^2}. \tag{2.3}$$

Efetivamente, ϵ_0 sendo absorvido dentro da definição da carga elética. Como $1/(\epsilon_0\mu_0) = c^2$, ao escolher $\epsilon_0 = 1$ e $c = 1$, implica que a permeabilidade do espaço livre $\mu_0 = 1$. Portanto, combinando o sistema de unidades naturais e o sistema de unidades de Heaviside-Lorentz, usamos em física de partículas

$$\hbar = c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1 \tag{2.4}$$

2.2.2 Quadrivetores

Um pilar da física moderna é que as leis fundamentais possuem a mesma forma em todos os referenciais inerciais de Lorentz, isso é, nos referenciais que tem uma velocidade relativa

uniforme. Relembrando que a Teoria da Relatividade Restrita é baseada na premissa que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais de Lorentz. Uma transformação de Lorentz relaciona as coordenadas em dois referenciais de Lorentz distintos.

Por definição, temos que um quadrivetor (as vezes denotado como 4-vetor) é um conjunto de quatro quantidades que se transformam como (ct, \mathbf{x}) sob uma transformação de Lorentz. Utilizamos a notação [17]

$$(ct, \mathbf{x}) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^\mu, \quad (2.5)$$

com invariante básico $c^2t^2 - \mathbf{x}^2$.

De acordo com a TRR, energia total E e o momento \mathbf{p} de um sistema isolado transforma como os componentes de um quadrivetor

$$\left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv p^\mu, \quad (2.6)$$

com o invariante básico $(E^2/c^2) - \mathbf{p}^2$. O sistema mais simples é uma partícula livre, para o qual

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2, \quad (2.7)$$

em que m é a massa de repouso da partícula. Utilizando as unidades naturais discutidas na subseção anterior, com $c \equiv 1$, temos

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2. \quad (2.8)$$

De maneira similar ao espaço tridimensional, devemos introduzir o produto escalar de dois quadrivetores $A^\mu \equiv (A^0, \mathbf{A})$ e $B^\mu \equiv (B^0, \mathbf{B})$

$$A \cdot B \equiv A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.9)$$

que é invariante sob as transformações de Lorentz. Devido ao sinal de menos, é conveniente introduzir um novo tipo de quadrivetor, $A_\mu \equiv (A^0, -\mathbf{A})$, de que o produto escalar é

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu. \quad (2.10)$$

Aqui introduzimos o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que é definido por

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1, \\ g_{11} = g_{22} = g_{33} &= -1, \\ g_{\mu\nu} &= 0, \quad \text{para} \quad \mu \neq \nu \end{aligned} \quad (2.11)$$

e de maneira análoga para $g^{\mu\nu}$. Na Equação (2.10) utilizamos a notação de Einstein, no qual é implícito uma somatória sobre os índices repetidos. Os vetores com o índice superior são chamados de vetores contravariantes, enquanto que os vetores com o índice inferior são chamados de vetores covariantes.

A regra para formar invariante de Lorentz é fazer com que os índices superiores equilibrem os índices inferiores. Se uma equação é covariante de Lorentz, então temos de garantir que todos os índices não somados se equilibrem em ambos os lados da equação e que todos os índices repetidos apareçam uma vez como índice superior e uma vez como índice inferior [16].

Nota-se que a componente tipo-espacial de A^μ e A_μ são \mathbf{A} e $-\mathbf{A}$, respectivamente. A exceção é

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (2.12)$$

e

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (2.13)$$

que pode ser transformado como $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ e $x_\mu = (t, -\mathbf{x})$, respectivamente. A partir de ∂_μ e ∂^μ , podemos construir o operador invariante quadridimensional análogo ao Laplaciano, o d'Alembertiano

$$\square^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu. \quad (2.14)$$

2.2.3 Rapidez e pseudorapidez

A rapidez é uma variável cinemática de interesse experimental. Nos tipos de colisões que estudaremos em nossa dissertação, o estado final de nosso interesse é impulsionado ao longo da direção do feixe das partículas que deram origem ao estado. Por essa razão, o ângulo do estado produzido é comumente expresso em termos da rapidez Y , definida por [17]

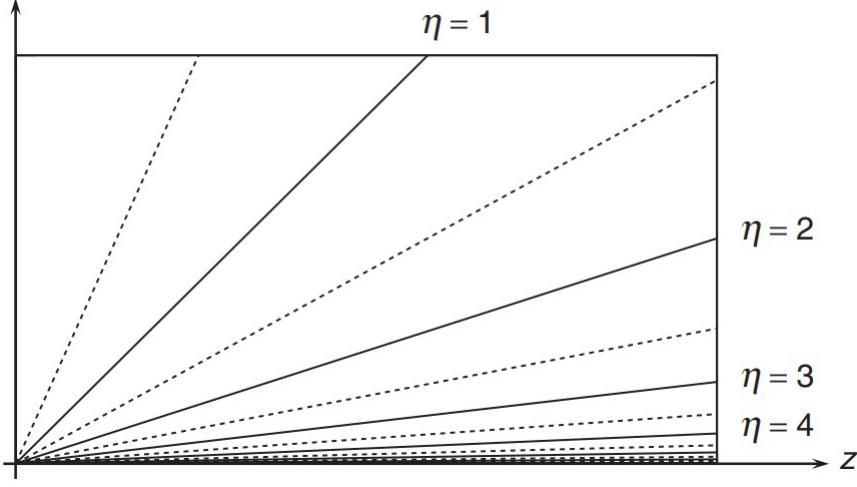
$$Y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right). \quad (2.15)$$

O uso da rapidez tem a vantagem de que as diferenças de rapidez são invariante sob impulso ao longo da direção do feixe, isso é, as diferenças de rapidez são as mesmas medidas em quaisquer dois referenciais, $\Delta Y' = \Delta Y$.

Temos ainda a pseudorapidez η , definida por

$$\eta \equiv -\ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right), \quad (2.16)$$

que coincide com a rapidez Y quando a massa do estado gerado pode ser negligenciada, fornecendo assim ângulos de espalhamento para o estado produzido. A Figura 2 ilustra as faixas de ângulos polares cobertas por diferentes regiões de pseudorapidez.

Figura 2 – Regiões da pseudorapidez relativa ao feixe no eixo z 

Fonte: [17]

2.3 A LAGRANGIANA DA QED E O ESTUDO DAS INTERAÇÕES

A Eletrodinâmica Quântica foi desenvolvida a partir da década de 1940 por Richard Feynman [18], Shin’ichiro Tomonaga [19] e Julian Schwinger [20]. Descreve um sistema acoplado de um campo de Maxwell e um campo de Dirac eletricamente carregado, que é descrito pela corrente de Dirac $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, cujo os detalhes serão fornecidos a seguir [21]. Neste formalismo, as interações ocorrem entre partículas eletricamente carregadas via troca de fótons e são descritas por uma densidade lagrangiana [16, 17] dada por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{Int}, \quad (2.17)$$

em que \mathcal{L}_{Dirac} é a densidade lagrangiana que descreve o campo de férmions (partículas de spin $\frac{1}{2}$ como os mísions, elétrons e quarks), \mathcal{L}_{EM} é a densidade lagrangiana para o campo eletromagnético de Maxwell (partículas de spin 1 como os fótons) e \mathcal{L}_{Int} é a densidade lagrangiana de interação, que representa a interação entre o campo eletromagnético e o campo de Dirac. As densidades são descritas por:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad (2.18)$$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

$$\mathcal{L}_{int} = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu. \quad (2.20)$$

Temos em (2.18) o espinor de Dirac ψ , que é a solução da equação de Dirac, o espinor adjunto $\bar{\psi} (= \psi^\dagger\gamma^0)$ e as matrizes de Dirac γ^μ , que apresentaremos melhor a seguir. Em (2.19) temos o tensor do campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$, definido por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.21)$$

em que $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ é o quadripotencial comumente chamado de campo de gauge e transforma-se como

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi(x), \quad (2.22)$$

em que $\chi(x)$ é uma função arbitrária [22].

Referente à dinâmica dos processos que ocorrem nas TQC's presentes no Modelo Padrão da Física de Partículas, temos um princípio fundamental que nos possibilita o estudo das interações, o princípio de gauge. Este princípio dita a forma da interação da teoria, isso é, por meio de bósons de gauge, que em Eletrodinâmica Quântica são os fótons.

Para demonstração, vamos primeiro considerar a Mecânica Quântica não relativística e impor que a teoria seja invariante frente a transformação

$$\psi' = e^{iQ_e \chi(x)} \psi(x). \quad (2.23)$$

Partindo dessa imposição, podemos utilizar a equação de Schroedinger para uma partícula livre,

$$-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi'(x) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi'(x), \quad (2.24)$$

em que $x = x^\mu$ é a quadriposição. Em seguida, utilizando (2.23), notamos que (2.24) não é invariante sobre a transformação de gauge, em que obtemos:

$$\vec{\nabla}^2 \psi' = (iQ_e) e^{iQ_e \chi(x)} \left\{ [\vec{\nabla} \chi(x)]^2 \psi(x) + \vec{\nabla}^2 \chi(x) \psi(x) + 2[\nabla \vec{\chi}(x)][\nabla \vec{\psi}(x)] + \frac{1}{iQ_e} \vec{\nabla}^2 \psi(x) \right\}. \quad (2.25)$$

Contudo, é possível tornar (2.24) invariante utilizando novamente (2.23) e a prescrição:

$$\vec{\nabla} \rightarrow \vec{D} \quad (2.26)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \vec{D}^0, \quad (2.27)$$

nas quais,

$$\vec{D} = \vec{\nabla} - iQ_e \vec{A} \quad (2.28)$$

e

$$D^0 = \frac{\partial}{\partial t} + iQ_e \phi. \quad (2.29)$$

Agora podemos utilizar (2.23), (2.26) e (2.27) em (2.24), com o qual obteremos

$$-\frac{1}{2m} \vec{D}^2 \psi(x) = iD^0 \psi(x) \rightarrow \left\{ \frac{1}{2m} (-i\vec{\nabla} + Q_e \vec{A})^2 + Q_e \phi \right\} \psi(x) = i \frac{\partial \psi(x)}{\partial t}, \quad (2.30)$$

que é a equação de Schroedinger para uma carga Q_e na presença de um campo eletromagnético. Ao executarmos esse procedimento, restauramos a invariância de gauge, pois

$$-\frac{1}{2m} \vec{D}^2 \psi(x) = iD^0 \psi(x) \rightarrow -\frac{1}{2m} \vec{D}'^2 \psi'(x) = iD'^0 \psi'(x) \quad (2.31)$$

apresenta a mesma forma da equação de Schroedinger e, além disso, podemos observar que os dois novos operadores (2.28) e (2.29) podem ser escritos na forma covariante, o que dá origem à derivada covariante

$$D^\mu = \partial^\mu + iQ_e A^\mu. \quad (2.32)$$

Logo, notamos que a derivada covariante apresenta em sua definição um termo de interação em que está presente o campo do fóton A^μ . Dessa forma, fica explícito que as partículas carregadas interagem pela troca de partículas associadas a este campo, isto é, para a QED, partículas carregadas interagem por troca de fótons.

2.3.1 Matrizes γ de Dirac

Nas Equações (2.18) e (2.20) apresentamos as matrizes γ de Dirac, que são quatro matrizes 4×4 que podem ser consideradas como componentes de quadrvetores. As matrizes são definidas como

$$\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\alpha), \quad (2.33)$$

em que as matrizes α_i e β , na representação de Dirac-Pauli, são dadas por

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

onde I denota a matriz identidade 2×2 , $\mathbf{0}$ matrizes nulas 2×2 e σ_i são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

É possível mostrar que

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1. \quad (2.36)$$

Podemos mostrar que as matrizes γ de Dirac satisfazem a relação de anticomutação:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (2.37)$$

Além disso, como $\gamma^0 = \beta$, temos que

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad (\gamma^0)^2 = I \quad (2.38)$$

e

$$\begin{aligned} \gamma^{k\dagger} &= (\beta\alpha^k)^\dagger = \alpha^k\beta = -\gamma^k, \\ (\gamma^k)^2 &= \beta\alpha^k\beta\alpha^k = -I \end{aligned} \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.39)$$

O resultado do conjugado hermitiano pode ser resumido por

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (2.40)$$

2.4 A MATRIZ DE ESPALHAMENTO E A SEÇÃO DE CHOQUE DIFERENCIAL

A matriz de espalhamento, conhecida como matriz S , é um conceito importante em Teoria Quântica de Campos tal qual é na Mecânica Quântica. Essa matriz descreve a amplitude de probabilidade para um processo de espalhamento no qual um sistema transeiona de um estado inicial $|i\rangle$ para um estado final $|f\rangle$ [23].

$$\hat{S}|i\rangle = |f\rangle. \quad (2.41)$$

O estado "incidente" $|i\rangle$ é definido no tempo $t \rightarrow -\infty$ e o estado "de saída" $|f\rangle$ é definido no tempo $t \rightarrow +\infty$. Representam partículas livres e formam conjuntos completos de estados. A probabilidade que, começando em $|i\rangle$, o sistema seja encontrado no estado $|f\rangle$ após o espalhamento é, por definição,

$$P_{i \rightarrow f} = |\langle f | \hat{S} | i \rangle|^2. \quad (2.42)$$

O conhecimento completo da matriz \hat{S} permitiria, a princípio, reconstruir toda a estrutura da dinâmica do processo de interação. A matriz \hat{S} coincide com o operador de evolução temporal U de $t \rightarrow -\infty$ para $t \rightarrow +\infty$

$$\hat{S} \equiv \hat{U}(-\infty, +\infty), \quad (2.43)$$

e em Teoria Quântica de Campos, \hat{S} é calculado a partir da lagrangiana usando a série de Dyson [23]

$$\hat{S} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \mathcal{T}(H'_{int}(x_1) \dots H'_{int}(x_n)), \quad (2.44)$$

onde H'_{int} é a interação hamiltoniana e \mathcal{T} denota o produto ordenado no tempo.

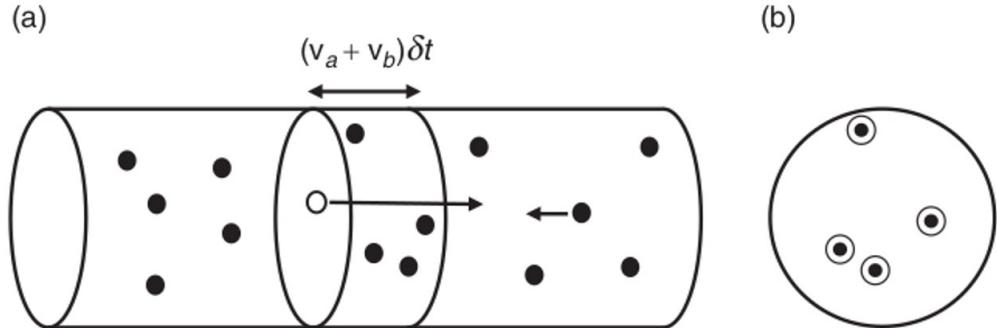
Conhecendo o elemento de matriz S_{fi} , podemos calcular as seções de choque e taxas de decaimento. Inicialmente definimos \mathcal{M}_{fi} como o elemento de matriz invariante, também conhecido como amplitude invariante de espalhamento, responsável por descrever a dinâmica do processo. Definimos então os elementos da matriz para um espalhamento de duas partículas no estado inicial com quadrimomentos p_1 e p_2 , indo a n partículas no estado final com quadrimomentos p'_1, p'_2, \dots, p'_n em que obtemos [21]:

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n p'_i \right) \mathcal{M}_{fi} \prod_{i=1}^2 \sqrt{\frac{N_i}{2E_i(2\pi)^3}} \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{N'_i}{2E'_i(2\pi)^3}} \quad (2.45)$$

onde a função delta representa o balanço de energia e momento. Os termos N_i e N'_i são fatores de normalização das funções de onda das partículas de estado inicial e final que dependem das convenções utilizadas para as diferentes partículas envolvidas, em que $N_i = 1$ para partículas de spin-0 e $N_i = 2m$, com m sendo a massa, para partículas de spin- $\frac{1}{2}$.

Com a matriz de espalhamento podemos calcular a seção de choque σ para um dado processo. A seção de choque é um importante conceito pois nela está contida a física fundamental de uma interação. A seção de choque tem dimensão de área e expressa a probabilidade subjacente da mecânica quântica de que uma interação ocorrerá [17]. Em termos práticos, a definição de

Figura 3 – Em (a) é mostrado uma única partícula incidente de tipo a (representada por círculo vazio) atravessando uma região contendo partículas de tipo b (representadas por um círculo sólido). Em (b) é mostrado uma visão projetada da região atravessada por um fluxo de partículas incidentes em um tempo δt .



Fonte: [17]

seção de choque é ilustrada pela situação mostrada na Figura 3, onde um feixe de partículas de tipo a viajando com fluxo ϕ_a atravessa a uma região contendo n_b partículas do tipo b por unidade de volume. Neste caso, a taxa de interação r_b é dada por

$$r_b = \sigma \phi_a, \quad (2.46)$$

ou ainda, de maneira mais formal, a seção de choque para um dado processo pode ser definida como

$$\sigma = \frac{\text{número de interações por unidade de tempo por partícula alvo}}{\text{fluxo incidente}}. \quad (2.47)$$

A seção de choque diferencial do espalhamento pode ser expressa em termos do módulo quadrado da amplitude de espalhamento, do fluxo incidente e do produto do espaço de fase das partículas do estado final, em que é dada por:

$$\sigma = \frac{\Lambda}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} N_1 N_2 (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n p'_i \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \prod_{i=1}^n \frac{N'_i d^3 p'_i}{2E'_i (2\pi)^3}. \quad (2.48)$$

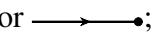
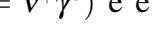
O fator da raiz quadrada é o fluxo invariante de partículas, dado pela velocidade relativa das partículas incidentes. Além disso, o produtório representa um fator de espaço de fase para cada partícula que sai. Temos ainda o fator de degenerescência Λ que é incluído para o caso de termos partículas indistinguíveis no estado final, que é definida como $\Lambda = \prod_k \frac{1}{(g_k!)}$, onde g_k é a multiplicidade de partículas k . O último termo está associado ao espaço de fase das partículas do estado final.

2.5 REGRAS DE FEYNMAN

Na seção anterior apresentamos o elemento de matriz invariante \mathcal{M}_{fi} . Em QED, o cálculo de \mathcal{M}_{fi} para diversos processos, como as interações eletromagnéticas de criação de

partículas, pode ser feito de maneira prática ao utilizarmos as regras de Feynman. Essas regras nos permitem construir representações gráficas associadas aos termos que devem ser calculados em um processo de interação eletromagnética, que são chamados de diagramas de Feynman. Esses diagramas representam processos quânticos e não devem ser confundidos com partículas se propagando pelo espaço, mas sim pelo tempo. Aqui adotamos a evolução temporal da esquerda para a direita. Os diagramas possuem três elementos fundamentais:

(i) Linhas externas, que representam as partículas antes e depois da interação. A cada partícula, atribui-se:

1. Férmion chegando ao vértice, atribui-se um espinor $u(p, s)$ e é representado por 
2. Antiférmion chegando ao vértice, atribui-se um espinor adjunto $\bar{v}(p, s) (= v^\dagger \gamma^0)$ e é representado por 
3. Férmion deixando o vértice, atribui-se um espinor adjunto $\bar{u}(p, s) (= u^\dagger \gamma^0)$ e é representado por 
4. Antiférmion deixando o vértice, atribui-se um espinor $v(p, s)$ e é representado por 
5. Fóton chegando no vértice, atribui-se $\epsilon_\mu(\kappa, \lambda)$ e é representado por 
6. Fóton saindo do vértice, atribui-se $\epsilon_\mu^*(\kappa, \lambda)$ e é representado por 

Em que p e s são o quadrimomento e o spin do férmion, enquanto que κ e λ são o momento e estado de polarização do fóton.

Apresentamos os espinores de Dirac u e v e seus conjugados \bar{u} e \bar{v} , que satisfazem a equação de Dirac no espaço de momento $(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0$ e apresentam as soluções [24]

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E+mc^2} \end{pmatrix},$$

$$v^{(1)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = -N \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

com $E = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}$.

Apresentamos também os vetores de polarização ϵ_μ , que caracteriza o spin do fóton. Ele apresenta quatro componentes, que não são, porém, todas independentes, em que a condição de Lorenz ($\partial_\mu A^\mu = 0$) requer que

$$p^\mu \epsilon_\mu = 0. \quad (2.50)$$

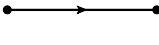
Os dois estados de polarização do fóton real são ortogonais entre si, no sentido que

$$\epsilon_{(1)}^{\mu*} \epsilon_{\mu(2)} = 0, \quad (2.51)$$

e são normalizados por

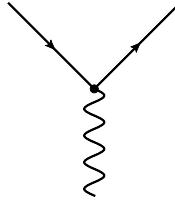
$$\epsilon^{\mu*} \epsilon_{\mu} = 1 \quad (2.52)$$

(ii) Linhas internas, os propagadores. Os propagadores conectam os vértices e representam partículas virtuais não detectáveis. Há dois tipos:

1. propagador do fóton, o qual atribuímos $-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$, representado por 
2. propagador do férmion, o qual atribuímos $-\frac{i\gamma^\mu q_\mu + m}{q^2 - m^2}$, representado por 

(iii) Vértices de interação. São nos vértices que ocorrem as interações, as partículas são trocadas e os quadrimomentos são alterados. Em QED, os vértices contribuem para a matriz invariante com $-iQe\gamma^\mu$ (em que Q é o número de carga elétrica da partícula interagindo no vértice, o qual em QED será sempre igual a 1) e tem a forma como representado na Figura 4.

Figura 4 – Vértice de interação



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

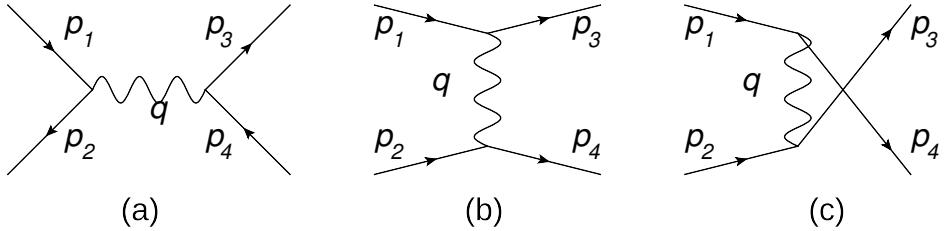
Os diagramas nos permitem calcular a amplitude invariante, contudo, é possível que um mesmo processo apresente mais de um diagrama topologicamente distinto possível para uma mesma ordem de perturbação. Nesses casos, todos os diagramas distintos possíveis devem ser somados para obtermos a amplitude total. Com as regras de Feynman, podemos então calcular a amplitude total $-i\mathcal{M}_{fi}$ para o processo de criação de estados ligados de léptons a partir da fusão de dois fótons. Com isso, é possível obter a seção de choque total para o evento.

2.5.1 Variáveis de Mandelstam

Diagramas de Feynman envolvendo a troca de uma única partícula mediadora de força, podem ser desenhados nas três categorias mostradas na Figura 5. Para um processo envolvendo duas partículas no estado inicial 1 e 2 e duas partículas no estado final 3 e 4, é útil apresentarmos as variáveis de Mandelstam

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2, \end{aligned} \quad (2.53)$$

Figura 5 – Os diagramas de Feynman para os processos pelos canais s , t e u



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

que são equivalentes ao quadrimomento quadrado q^2 do propagador na respectiva classe de diagrama. Na Figura 5, cada diagrama representa o processo de aniquilação via um canal distinto. O diagrama (a) representa o processo de aniquilação via canal s . O diagrama (b) representa o processo de espalhamento via canal t . O diagrama (c) representa o espalhamento via canal u .

Para partículas idênticas no estado final, se faz necessário a distinção entre os canais u e t , pois a partícula do estado final com quadrimomento p_3 pode ter sido originado de outro vértice de interação, de modo que o quadrimomento q da partícula virtual é diferente para os dois casos.

Como as variáveis de Mandelstam são produtos escalares de quadrivetores, elas são manifestamente invariantes de Lorentz e podem ser avaliadas em qualquer referencial. Mais adiante, veremos que a quantidade \sqrt{s} pode ser interpretada como a energia total da colisão no referencial do centro de massa. Podemos construir a seção de choque para o processo de criação de estados ligados de léptons em termos da largura de decaimento para o processo de aniquilação, uma quantidade que pode ser obtida experimentalmente. Dessa forma, vamos calcular na Seção 2.5 o processo de aniquilação.

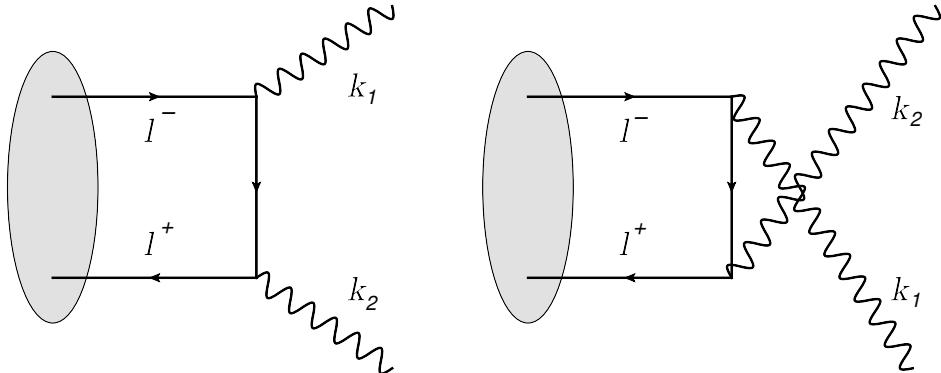
2.6 ANIQUILAÇÃO DE ESTADOS LIGADOS DE LÉTPONS EM DOIS FÓTONS

Em nosso trabalho estamos interessados na criação de estados ligados de léptons, os quais denotamos por (l^+l^-) , em que $l = e, \mu, \tau$. Estes estados ligados são átomos exóticos com tempo de vida finito que surgem da interação eletromagnética de um lépton e seu antilépton correspondente. As partículas possuem a mesma massa e cargas elétricas opostas, portanto orbitam o centro de massa do sistema localizado na metade da distância entre as partículas.

Por existirem três léptons eletricamente carregados, há três estados ligados possíveis, o positrônio (e^+e^-), o muônio ($\mu^+\mu^-$) e o tauônio ($\tau^+\tau^-$), porém apenas os dois primeiros são considerados genuínos estados ligados da QED, pois o positrônio tem constituintes estáveis e o muônio, mesmo não tendo constituintes estáveis, tem tempo de vida menor que o tempo de vida do μ , portanto seu decaimento ocorre majoritariamente por canais eletromagnéticos. Já o tauônio não é considerado um genuíno estado ligado da QED porque seu tempo de vida é compatível com o tempo de vida do τ , portanto seu decaimento por canais de interação fraca (mudança de sabor) compete com os decaimentos pelo canal eletromagnético [9].

Como os léptons possuem spin 1/2, os estados ligados podem existir em duas configura-

Figura 6 – Diagramas topologicamente distintos da aniquilação de estado ligado singlet



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

ções de spin distintas, com spin $s = 0$, chamado de singlet ou paraestado e representado por $(l^+l^-)_S$, e com spin $s = 1$, chamado de triplet ou ortoestado e representado por $(l^+l^-)_T$. O estado singlet possui, no estado fundamental, conjugação de carga $C = +1$ e paridade $P = -1$ e o estado triplet possui conjugação de carga $C = -1$ e paridade $P = -1$ também no estado fundamental [24].

Em notação espectroscópica, o número conjugação de carga do estado ligado é dado por $(-1)^{l+s}$ (aqui l é o número quântico de momento angular e s o número de spin do estado). Para n fótons, teremos que a conjugação de carga será dada por $C = (-1)^n$ [24]. Portanto, como a conjugação de carga é conservada em processos eletromagnéticos, segue a regra que

$$(-1)^{l+s} = (-1)^n, \quad (2.54)$$

para o estado ligado de dois léptons, no estado fundamental que estamos trabalhando, teremos $l = 0$. Portanto, o estado singlet ($s = 0$) deve decair em um número par de fótons (tipicamente dois) e o estado triplet ($s = 1$) em um número ímpar de fótons (tipicamente três).

Vamos então utilizar as regras de Feynman estudadas na seção anterior para desenhar os diagramas em mais baixa ordem de teoria de perturbação correspondentes à aniquilação de um estado ligado singlet em um par de fótons. Com o diagrama de Feynman podemos calcular a largura de decaimento em termos do módulo quadrado da amplitude invariante deste processo em seu referencial de repouso. Os diagramas são apresentados na Figura 6. Ambos os diagramas representam o mesmo processo, mas são topologicamente distintos por apresentar partículas idênticas em seu estado final.

Podemos então utilizar a definição de seção choque diferencial dada pela Equação (2.48) para obter [17, 25]

$$\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{4M} \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d^3 \vec{k}_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |\mathcal{M}_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2), \quad (2.55)$$

em que M é a energia do estado ligado, que em unidades naturais é dada pela soma das massas de seus componentes, $\vec{k}_1(\vec{k}_2)$, $\omega_1(\omega_2)$ e $k_1(k_2)$ são o momento, a energia e o quadrimomento do

primeiro (segundo) fóton e p é o quadrimomento do estado ligado. A somatória em λ_1, λ_2 é a soma em todos os estados possíveis para a polarização dos dois fótons. Podemos escrever a delta de Dirac da conservação do quadrimomento como o produto de duas deltas de Dirac, uma para a energia e a outra para o momento. Com isso e outras simplificações, obtemos

$$\Gamma_{(l^+l^-)s \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{4M} \int \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3\vec{k}_1}{2\omega_1} \frac{d^3\vec{k}_2}{2\omega_2} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |\mathcal{M}_{(l^+l^-)s \rightarrow \gamma\gamma}|^2 \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \delta(M - \omega_1 - \omega_2). \quad (2.56)$$

Como estamos analisando a partir do referencial de repouso do estado ligado, podemos utilizar a conservação da energia e do momento, em que se fazem válidas as relações $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ e $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Podemos então utilizar as propriedades da delta de Dirac para resolver a integral no momento dos fótons a partir do referencial de repouso. Dessa forma, obtemos

$$\Gamma_{(l^+l^-)s \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{4M} \int \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3\vec{k}_1}{(2\omega)^2} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |\mathcal{M}_{(l^+l^-)s \rightarrow \gamma\gamma}|^2 \delta(M - 2\omega). \quad (2.57)$$

Podemos resolver a integral em $d^3\vec{k}_1$ utilizando coordenadas esféricas, tomando $d^3\vec{k}_1 = \omega^2 d\omega d\Omega$, em que $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido. Assim, temos

$$\Gamma_{(l^+l^-)s \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{16M} \int \frac{1}{(2\pi)^2} d\omega d\Omega \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |\mathcal{M}_{(l^+l^-)s \rightarrow \gamma\gamma}|^2 \delta(M - 2\omega). \quad (2.58)$$

Podemos ainda utilizar a propriedade $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$ para alterar o argumento da função delta e escrever

$$\Gamma_{(l^+l^-)s \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{32M} \int \frac{1}{(2\pi)^2} d\omega d\Omega \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |\mathcal{M}_{(l^+l^-)s \rightarrow \gamma\gamma}|^2 \delta\left(\frac{M}{2} - \omega\right). \quad (2.59)$$

Dessa forma podemos finalmente resolver a integral em ω com auxílio da propriedade $\int f(x)dx\delta(x-a) = f(a)$ da função delta de Dirac. Considerando que não há qualquer dependência angular na amplitude invariante, a integral em Ω é resolvida trivialmente. Portanto, obtemos por fim a largura de decaimento de um estado ligado singlet em termos da amplitude invariante do processo, que é dada por

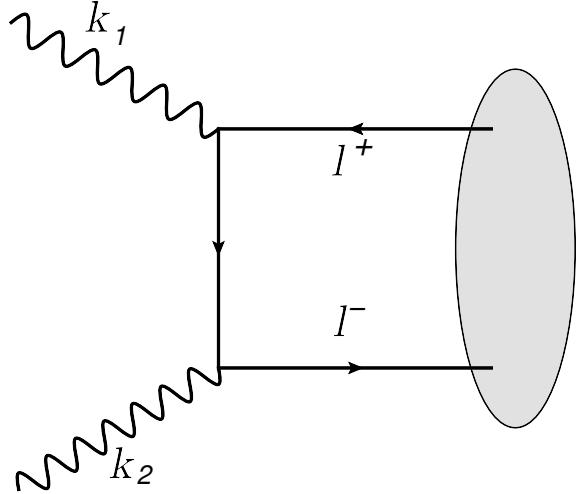
$$\Gamma_{(l^+l^-)s \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{32\pi M} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |\mathcal{M}_{(l^+l^-)s \rightarrow \gamma\gamma}|^2. \quad (2.60)$$

Este resultado será importante para calcularmos a seção de choque do processo de criação de um estado ligado de léptons a partir da fusão de dois fótons, que será estudado na próxima seção.

2.7 CRIAÇÃO DE ESTADOS LIGADOS DE LÉPTONS

O processo de criação de estados ligados de léptons a partir da fusão de dois fótons tem amplitude invariante proporcional ao processo de decaimento de estados ligados de léptons em

Figura 7 – Criação de estado ligado de lépton pela fusão de dois fótons



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

dois fótons estudado na seção anterior, com diferença apenas nos termos da média sobre os spins e fatores cinemáticos. Isso ocorre porque os componentes do diagrama de Feynman para ambos os processos são os mesmos, mas ocorrem no sentido inverso. A Figura 7 apresenta o diagrama de Feynman do processo de criação do estado ligado singuleto a partir da fusão de dois fótons.

Temos então que a média do módulo quadrado da amplitude invariante do processo descrito é dada por

$$\langle |\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}|^2 \quad (2.61)$$

em que o fator $1/4$ é referente à média nas polarizações iniciais dos fótons.

Poderemos, assim, escrever a seção de choque para o processo em termos da largura de decaimento que obtivemos na Equação (2.60). Esta dedução foi primeiro realizada por Francis Eugene Low [26] em seu estudo sobre a produção de píons neutros por fusão de dois fótons. A seção de choque para a produção de estados ligados que utilizaremos em nosso trabalho e deduziremos a seguir, recebe o nome de fórmula de Low.

Vamos então utilizar a definição de seção de choque diferencial apresentada na Equação (2.48) para escrever a seção de choque diferencial para a produção do estado ligado de léptons como

$$d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = \frac{1}{8\omega_1 \omega_2} \langle |\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}|^2 \rangle \frac{d^3 \vec{p}}{2E} (2\pi) \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2), \quad (2.62)$$

e utilizando a Equação (2.61), podemos escrever

$$d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = \frac{1}{8\omega_1 \omega_2} \langle |\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}|^2 \rangle \frac{d^3 \vec{p}}{2E} (2\pi) \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2), \quad (2.63)$$

em que podemos reescrever o termo do espaço de fase como [23]

$$\int d^4 p \delta(p^2 - M^2) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{2p_0} \Theta(p_0), \quad (2.64)$$

onde incluímos a função degrau $\Theta(p_0)$, que tem imagem zero quando seu argumento é menor que zero e imagem um quando seu argumento é maior que zero, de modo a impor que a energia do estado ligado seja positiva. Como

$$\begin{aligned}\int d^4 p \delta(p^2 - m^2) &= \int d^4 p \delta[(p_0^2 - \vec{p}^2) - m^2] \\ &= \int d^4 p \delta[p_0^2 - (\vec{p}^2 + m^2)],\end{aligned}\quad (2.65)$$

$$\text{e } (\vec{p}^2 + m^2) = E^2,$$

$$\int d^4 p \delta(p^2 - m^2) = \int d^4 p \delta[p_0^2 - E^2], \quad (2.66)$$

podemos demonstrar a validade da equação (2.64) ao reescrever a delta de Dirac utilizando a propriedade

$$\delta[f(p_0)] = \sum_i \frac{\delta(p_0 - p_{0i})}{\left| \frac{\partial f}{\partial p_0} \right|_{p_0=p_{0i}}}, \quad (2.67)$$

em que $f(p_0) = p_0^2 - E^2$. Pela Equação (2.66) podemos concluir que as raízes de $f(p_0)$ são $p_0 = \pm E$, em que, no caso de interesse, $E = \text{energia de repouso} = M$, portanto

$$\begin{aligned}\delta(p_0^2 - M^2) &= \sum_i \frac{\delta(p_0 - p_{0i})}{2p_{0i}} \\ &= \frac{\delta(p_0 - M)}{2M} - \frac{\delta(p_0 + M)}{2M},\end{aligned}\quad (2.68)$$

levando à Equação (2.64), temos

$$\frac{d^3 \vec{p}}{2E} = \int d^4 p \Theta(p_0) \left[\frac{\delta(p_0 - M)}{2M} - \frac{\delta(p_0 + M)}{2M} \right]. \quad (2.69)$$

Podemos então eliminar a segunda delta de Dirac acima devido à definição da função degrau Θ . Assim,

$$\frac{d^3 \vec{p}}{2M} = \int d^3 \vec{p} dp_0 \Theta(p_0) \frac{\delta(p_0 - M)}{2M}. \quad (2.70)$$

Ao realizar a integração em p_0 com a delta de Dirac, provamos a validade da Equação (2.64), o que nos permite levá-la à Equação (2.63). Integrando a Equação (2.63) de ambos os lados, teremos

$$\int d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = \frac{1}{8\omega_1\omega_2} \int \langle |\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}|^2 \rangle (2\pi) \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2) d^4 p \delta(p^2 - M^2). \quad (2.71)$$

A primeira delta de Dirac nos permite integrar em $d^4 p$, assim

$$\begin{aligned}\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} &= \frac{2\pi}{8\omega_1\omega_2} \langle |\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}|^2 \rangle \delta[(k_1 + k_2)^2 - M^2] \\ &= \frac{\pi}{4\omega_1\omega_2} \langle |\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}|^2 \rangle \delta(k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 \cdot k_2 - M^2).\end{aligned}\quad (2.72)$$

Aqui estamos lidando com o processo envolvendo fótons reais, ou seja, fótons em sua camada de massa ($k^2 = m^2$), portanto temos $k_1^2 = k_2^2 = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} 2k_1 \cdot k_2 &= 2(\omega_1, \vec{k}_1) \cdot (\omega_2, -\vec{k}_2) \\ &= 2(\omega_1 \omega_2 + |\vec{k}_1| |\vec{k}_2|), \end{aligned} \quad (2.73)$$

usando $\omega_i = |\vec{k}_i|$,

$$2k_1 \cdot k_2 = 4\omega_1 \omega_2, \quad (2.74)$$

dessa forma

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = \frac{\pi}{4\omega_1 \omega_2} \langle |\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}|^2 \rangle \delta(4\omega_1 \omega_2 - M^2). \quad (2.75)$$

Como a delta de Dirac só será diferente de zero se seu argumento for nulo, podemos utilizar $4\omega_1 \omega_2 = M^2$, obtendo

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = \frac{\pi}{M^2} \langle |\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}|^2 \rangle \delta(4\omega_1 \omega_2 - M^2). \quad (2.76)$$

Como mencionamos no início da seção, o processo de criação do estado ligado de léptons a partir da fusão de dois fótons é o processo inverso da aniquilação de um estado ligado de léptons em dois fótons, de modo que o módulo quadrado da amplitude invariante para os dois processos se diferem apenas por termos cinemáticos. Estes termos são considerados na seção de choque e na largura de decaimento que obtivemos das Equações (2.60) e (2.63). Portanto, podemos fazer

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |\mathcal{M}_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}|^2 \\ &= \frac{1}{4} (32\pi M \Gamma_{(l^+l^-)_S}) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Levando à Equação (2.76), temos

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = \frac{\pi}{M^2} \delta(4\omega_1 \omega_2 - M^2) \frac{1}{4} (32\pi M \Gamma_{(l^+l^-)_S}). \quad (2.78)$$

Substituindo a Equação (2.60) na Equação (2.78),

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = \frac{8\pi^2}{M} \Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma} \delta(4\omega_1 \omega_2 - M^2). \quad (2.79)$$

Esta é, então, a fórmula de Low para a produção de estados ligados a partir da fusão de dois fótons reais. Esta equação é importante por ser escrita em termos da largura de decaimento de estados ligados em dois fótons, uma quantidade já muito bem conhecida [27]. Podemos considerar uma aproximação não-relativística em que se é possível demonstrar que a largura de decaimento de estados singletos é dada por $\Gamma_{(l^+l^-)_S \rightarrow \gamma\gamma}(n^1S_0) = \alpha^5 M / 4n^3$. Substituindo este valor conhecido, obtemos a fórmula de Low para a produção de estados singletos no estado fundamental ($n = 1$)

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} = 2\pi^2 \alpha^5 \delta(4\omega_1 \omega_2 - M^2). \quad (2.80)$$

2.8 FECHAMENTO

Nesse capítulo apresentamos a fundamentação da Eletrodinâmica Quântica com a sua lagrangiana. Iniciamos nosso estudo com a definição de alguns conceitos prévios fundamentais que serão de grande serventia ao longo de todo o texto. Apresentamos também as regras de Feynman da QED e definimos a seção de choque. Estudamos a aniquilação de estados ligados em dois fótons e deduzimos a equação de Low para obter a seção de choque para a produção de estados ligados de léptons a partir da fusão de dois fótons. Os resultados aqui obtidos serão de grande ajuda nos capítulos seguintes para estudarmos as seções de choque elétron-pósitron e elétron-núcleo.

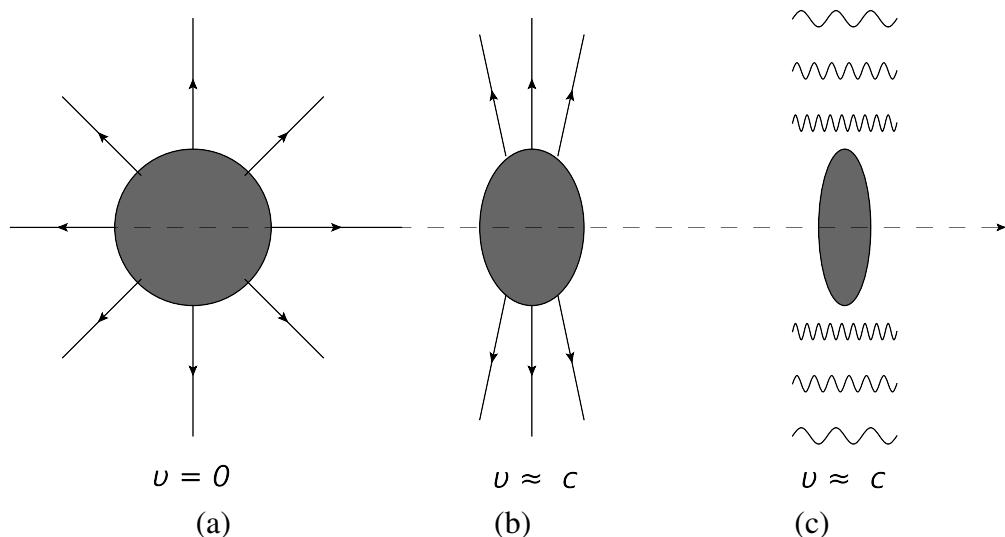
3 APROXIMAÇÃO DE FÓTONS EQUIVALENTES

Apresentaremos, neste capítulo, um poderoso método para o estudo de criação de partículas via interação fóton-fóton no limite de altas energias, a Aproximação de Fótons Equivalentes. Este método foi inicialmente proposto por Enrico Fermi [28] e, posteriormente, desenvolvido por Carl Friedrich von Weizsäcker [29] e Evan James Williams [30] de forma concomitante e independente, em um método semi-clássico que substitui o efeito de campos eletromagnéticos de uma partícula carregada por um pulso de radiação equivalente. A seguir, apresentaremos a derivação clássica do método. Para a derivação quântica, ver Apêndice A.

3.1 DERIVAÇÃO CLÁSSICA DO ESPECTRO DE FÓTONS EQUIVALENTES

Primeiramente, vamos analisar o fenômeno descrito na Figura 8, em que estudaremos o comportamento dos campos elétrico e magnético de uma partícula carregada em velocidades relativísticas, onde serão discutidas as transformações de Lorentz para os campos. A Figura 8 apresenta em (a) o campo eletromagnético clássico de uma carga em repouso. Em (b) a carga se aproxima da velocidade da luz enquanto o campo se achata em um pulso. Em (c), com a partícula em velocidade próxima a da luz, o campo eletromagnético se comporta como um pulso de radiação equivalente. Dessa forma, o método nos permite fatorizar a seção de choque total de duas partículas carregadas como o produto da seção de choque de fóton-produção de pares $\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow X}$ e do fluxo de fótons equivalentes de cada uma das partículas carregadas, em que integraremos sobre todo o espectro de fótons.

Figura 8 – (a) Campo eletromagnético de uma carga em repouso . (b) Campo se aproximando de um pulso com velocidade próxima à da luz na aproximação de fótons equivalentes. (c) Campos eletromagnéticos trocados pela radiação equivalente.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

3.1.1 Transformação dos campos eletromagnéticos

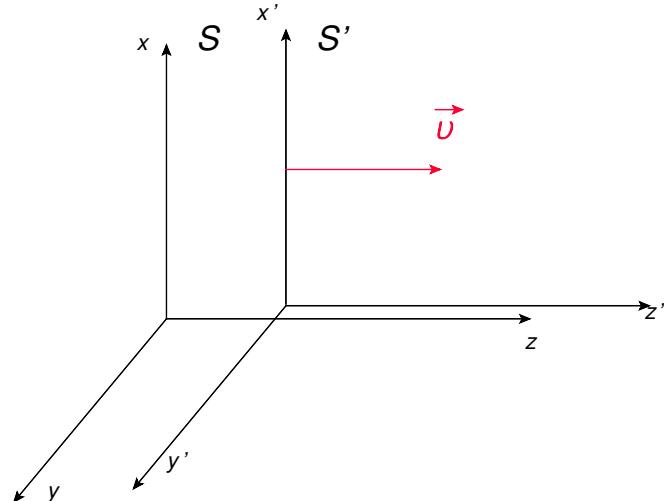
Sejam, então, dois referenciais inerciais S e S' , conforme a Figura 9. Temos que os eixos z e z' são paralelos e que $\vec{v} = v\hat{z}'$ é a velocidade de S' em relação a S . Consideramos ainda que a origem dos referenciais coincidem em $t = 0$. Estabelecidos estes parâmetros e definindo o fator γ e β de Lorentz como

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad e \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (3.1)$$

podemos utilizar as transformações de Lorentz [31] para relacionar os campos nos dois referenciais, com os quais obtemos:

$$\begin{aligned} E'_x &= \gamma(E_x - \beta B_y) & e \quad B'_x &= \gamma(B_x + \beta E_y), \\ E'_y &= \gamma(E_y + \beta B_x) & e \quad B'_y &= \gamma(B_y - \beta E_x), \\ E'_z &= E_z & e \quad B'_z &= B_z. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Figura 9 – Movimento relativo entre os referenciais S e S'



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

As transformadas inversas são obtidas fazendo $\beta \rightarrow -\beta$ e trocando os campos com linha pelos sem linha e vice-versa. Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned} E_x &= \gamma(E'_x + \beta B'_y) & e \quad B_x &= \gamma(B'_x - \beta E'_y), \\ E_y &= \gamma(E'_y - \beta B'_x) & e \quad B_y &= \gamma(B'_y + \beta E'_x), \\ E_z &= E'_z & e \quad B_z &= B'_z. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Vamos então analisar como um observador percebe o campo eletromagnético criado por uma partícula de carga q fixa na origem do referencial S' , como mostrado na Figura 10. Primeiramente obtemos as componentes do campo eletromagnético medido em S' no ponto $P = (b, 0, 0)$ fixo no referencial S . Como a carga q está em repouso em relação ao referencial de

S' , temos que os campos em P , em unidades gaussianas e naturais (nesse sistema, $\alpha = e^2/\hbar c$, como $\hbar = c = 1, \alpha = e^2$), ficam

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \frac{q\vec{r}}{(r)^3} \\ &= \frac{qb\hat{x} - qvt'\hat{z}}{(r)^3},\end{aligned}\quad (3.4)$$

que levam à

$$E'_x = \frac{qb}{r^3}, \quad E'_y = 0 \quad e \quad E'_z = -\frac{qvt'}{r^3} \quad (3.5)$$

e como a carga está em repouso no referencial S'

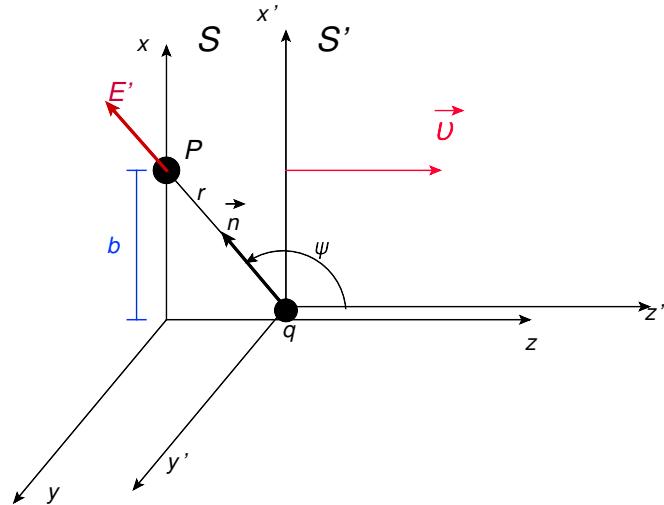
$$B'_x = B'_y = B'_z = 0. \quad (3.6)$$

Pela Figura 10, podemos definir $r = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$, com $t' = \gamma t$. Escrevemos então as equações em termos das coordenadas do referencial S e utilizamos as transformações de Lorentz, com as quais obtemos para os campos não nulos em S'

$$\begin{aligned}E_x &= \gamma E'_x = \frac{q\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ E_z &= E'_z = -\frac{q\gamma v t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ B_y &= \gamma \beta E'_x = \beta E_x.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Temos então que no limite ultrarelativístico, isto é, quando $\gamma \gg 1$ e $\beta \approx 1$, a indução magnética na direção y é igual à componente E_z do campo elétrico. A componente E_z apresenta máximos e mínimos que alternam em $t = 0$ entre valores positivos e negativos. A componente em E_x , no limite $v \rightarrow c$, tende a uma delta de Dirac, em que seus valores tendem a zero para $t \neq 0$ e tem um pico em $t = 0$ que tende ao infinito, como apresentado na Figura 11.

Figura 10 – Partícula de carga q fixa na origem de S' e gerando um campo eletromagnético em P



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Este comportamento justifica o método da Aproximação de Fótons Equivalentes, já que um observador em P percebe estes campos transversais à direção de movimento e perpendiculares entre si. Desta forma, o observador não consegue distinguir o campo gerado por uma partícula carregada movendo-se na velocidade da luz de um campo de radiação plana que se propaga na mesma direção que a partícula, ou seja, uma onda plana polarizada.

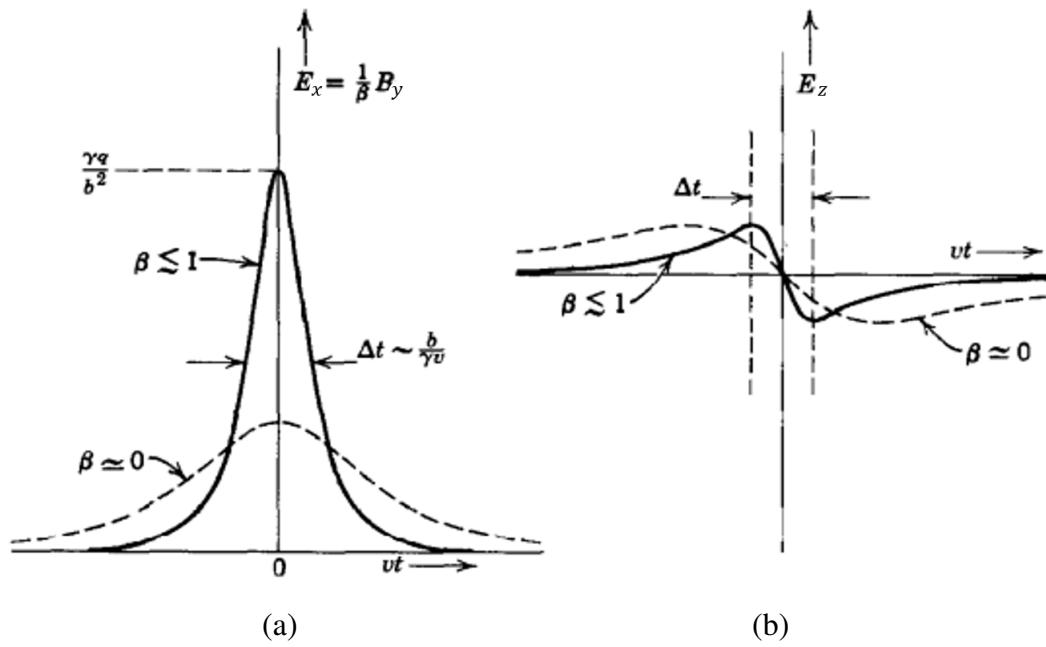
Assim, os campos E_x e B_y podem ser representados por um pulso P_z que desloca na direção z , como mostrado na Figura 12. A componente longitudinal de E_z não é acompanhada por um campo magnético, portanto, sozinha, não pode representar um pulso. Contudo, os efeitos de E_z são menos relevantes quando $v \approx c$. Como seu correspondente campo magnético seria da ordem de vE_z/c , podemos acrescentar esta componente nas equações dos campos e considerar como um pulso de onda plana P_x que se desloca na direção x .

3.1.2 Fluxo de Fótons

Na seção 3.1.1 interpretamos os campos eletromagnéticos gerado por uma partícula carregada relativística como pulsos de radiação P_z e P_x . Dessa forma podemos, então, calcular a quantidade de energia incidente sobre o alvo por unidade de área e por intervalo de frequência, isso é, o espectro de frequência $I(\omega, b)$. Pela eletrodinâmica clássica [31, 32], é possível mostrar que

$$I(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} |E(\omega)|^2, \quad (3.8)$$

Figura 11 – Campos devido ao movimento uniforme de uma partícula carregada em função do tempo. Em (a) a componente E_x tende a uma delta de Dirac com pico máximo em $t = 0$. Em (b) a componente E_z apresenta máximos e mínimos que alternam em torno de $t = 0$.



Fonte: [31]

em que $E(\omega)$ é a transformada de Fourier do campo elétrico do pulso de radiação, dada por

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt. \quad (3.9)$$

Os espectros de frequência dos pulsos P_z e P_x são, respectivamente

$$\begin{aligned} I_z(\omega, b) &= \frac{c}{2\pi} |E_x(\omega)|^2, \\ I_x(\omega, b) &= \frac{c}{2\pi} |E_z(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Levando as expressões para os campos obtidos em (3.7), nas equações acima, obtemos

$$I_z(\omega, b) = c \left(\frac{q}{\pi v b} \right)^2 \left[\frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right)^2 K_0^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) \right] \quad (3.11)$$

e

$$I_x(\omega, b) = c \left(\frac{q}{\pi v b} \right)^2 \left[\left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right)^2 K_1^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) \right], \quad (3.12)$$

nas quais K_0 e K_1 são as funções modificadas de Bessel.

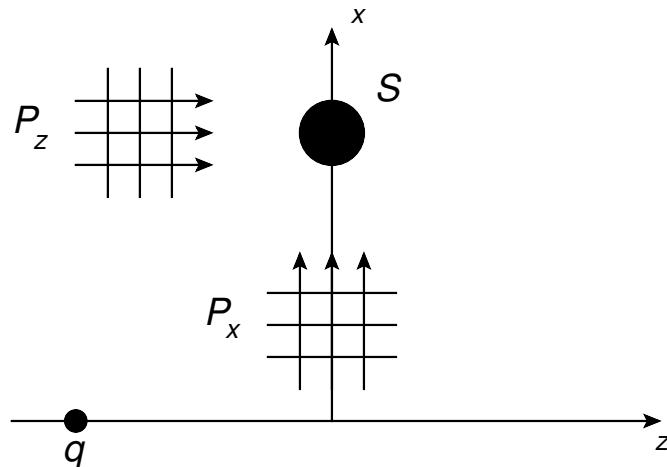
Podemos estimar a probabilidade de ocorrência de um certo processo eletromagnético $P(b)$ em termos da seção de choque deste processo gerado por um pulso de luz induzido [33] com :

$$P(b) = \int I(\omega, b) \sigma_\gamma(\hbar\omega) d(\hbar\omega) = \int N(\omega, b) \sigma_\gamma(\omega) \frac{d\omega}{\omega}, \quad (3.13)$$

onde σ_γ é a seção de choque de interação de um fóton com energia $E_\gamma = \hbar\omega$ que dá origem ao evento eletromagnético de interesse. $N(\omega, b)$ é o número de fótons equivalentes incidentes no alvo por unidade de área, dado pelo espetro de frequência dividido pela energia do fóton e dividido pela constante de Planck, logo

$$N(\omega, b) = \frac{1}{\hbar c} \left(\frac{q}{\pi} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\gamma v} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \left[K_1^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) + \frac{1}{\gamma^2} K_0^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) \right], \quad (3.14)$$

Figura 12 – Pulso de radiação devido ao movimento da carga q



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Podemos escrever esta equação em unidades naturais, com $\hbar = c = 1$. Podemos ainda escrever a carga elétrica em termos da constante de estrutura fina α , em que $q^2 = Z^2 e^2 = Z^2 \alpha$ em unidades gaussianas. Como estamos lidando com o limite ultrarrelativístico, adotamos $v \approx c = 1$. Dessa forma, a equação (3.14) torna-se

$$N(\omega, b) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 \omega b^2} \left(\frac{\omega b}{\gamma} \right)^2 \left[K_1^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma^2} K_0^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma} \right) \right]. \quad (3.15)$$

Podemos ainda definir o fluxo de fótons em função apenas da energia dos fótons como

$$\frac{n(\omega)}{\omega} = \int N(\omega, b) d^2 \vec{b}. \quad (3.16)$$

O intervalo de integração em b é dado por $b_{min} \leq b \leq \infty$, em que b_{min} é obtido a partir da relação de incerteza $b_{min} \geq 1/p_{max}$ [31]. Portanto, é comum tomar o limite inferior como $b_{min} = 1/mv$ ou $b_{min} = R$, com R sendo o raio da partícula carregada não-pontual. Então, ao substituir a Equação (3.15) na Equação (3.16) e integrando na distância transversa no intervalo $R \leq b \leq \infty$, obtemos o fluxo de fótons em função da energia do fóton emitido por uma partícula carregada,

$$n(\omega) = \frac{2Z^2 \alpha}{\pi} \left\{ \left(\frac{\omega R}{\gamma} \right) K_0 \left(\frac{\omega R}{\gamma} \right) K_1 \left(\frac{\omega R}{\gamma} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega R}{\gamma} \right)^2 \left[K_1^2 \left(\frac{\omega R}{\gamma} \right) - K_0^2 \left(\frac{\omega R}{\gamma} \right) \right] \right\}. \quad (3.17)$$

O momento transverso q_t dos fótons, tipicamente, é muito pequeno. No entanto, em nosso trabalho, será de fundamental importância estimar com exatidão a distribuição angular até ângulos de dispersão muito pequenos para que possamos calcular os ângulos de produção do estados ligados, de modo que precisamos incluir a distribuição de momento transverso. Assim, podemos seguir os passos descritos em [34] e considerar uma partícula de massa m e energia E e definir a fração de energia do fóton como $x \equiv \omega/E$. O processo ocorre pelo canal t , de modo que a magnitude do momento transferido entre a partícula e o fóton é dada por $q^2 = |t|$, no qual

$$t(x, q_t) = -\frac{q_t^2 + x^2 m^2}{1 - x}. \quad (3.18)$$

Definindo $q_{min}^2 = -t(x, 0)$, a distribuição de fótons pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \gamma(x, q_t^2) &= \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{x(1-x)} \frac{1}{q^2} \left[1 - x + \frac{x^2}{2} - (1-x) \frac{q_{min}^2}{q^2} \right] \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1 + (1-x)^2}{x} \frac{q_t^2}{(q_t^2 + x^2 m^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Podemos mostrar que

$$n(\omega) = x \int d\vec{q}_t^2 \gamma(x, \vec{q}_t^2) \quad (3.20)$$

A Equação (3.19) é válida para partículas pontuais com carga unitária, como o elétron. Para prótons ou íons, é necessário fazer modificações para incluir os apropriados fatores de forma eletromagnéticos, que serão melhor discutidos posteriormente. Contudo, vamos considerar

que o momento transverso do fóton emitido por um próton ou núcleo será muito menor que o momento transverso do fóton emitido por um elétron, por considerar que esse sofrerá maior deflexão devido a sua massa menor. Dessa forma, para o fluxo de fótons emitidos pelo próton ou núcleo, a Equação (3.17) se faz válida, enquanto que para a distribuição de fótons emitidos por um elétron utilizamos a Equação (3.19).

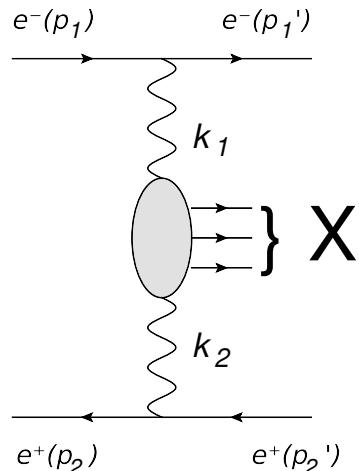
3.2 FOTOPRODUÇÃO DE ESTADOS LIGADOS COM A APROXIMAÇÃO DE FÓTONS EQUIVALENTES

Vamos supor o caso de um elétron e um pósitron interagindo em uma situação em que cada um emite um fóton. A interação entre estes fótons geram um estado final X , como mostra a Figura 13. Assim, devemos associar a cada partícula carregada um espectro de fótons equivalentes. Sejam, então, $\bar{\sigma}_{(e^+e^- \rightarrow e^+e^-X)}$ a seção de choque de interação entre o elétron e o pósitron e $\bar{\sigma}_{(\gamma\gamma \rightarrow X)}$ a seção de choque para a criação do estado X devido a fusão de dois fótons reais. Então, aplicando a equação básica da aproximação de fótons equivalentes obtida na Equação (A.20) do Apêndice A, temos

$$\bar{\sigma}_{(e^+e^- \rightarrow e^+e^-X)} = \int_0^{E_1} \frac{d\omega_1}{\omega_1} n(\omega_1) \int_0^{E_2} \frac{d\omega_2}{\omega_2} n(\omega_2) \bar{\sigma}_{(\gamma\gamma \rightarrow X)}. \quad (3.21)$$

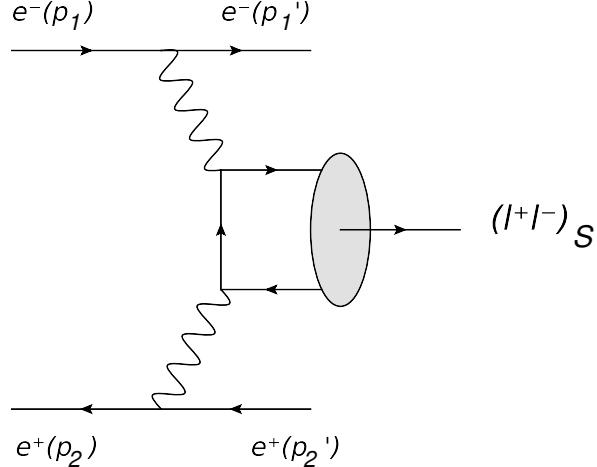
Em nossa dissertação estamos interessados na produção de estados ligados de léptons, sobretudo no estado singlet. Portanto, podemos então substituir o termo $\bar{\sigma}_{(\gamma\gamma \rightarrow X)}$ referente a criação de um estado X genérico pela seção de choque correspondente a produção do estado de nosso interesse, com o auxílio da fórmula de Low que obtivemos no Capítulo 2 na Equação (2.80). A Figura 14 apresenta o diagrama da interação. Além disso, como estamos lidando com partículas pontuais de carga unitária, podemos utilizar a distribuição de fótons obtida com a

Figura 13 – Interação e^+e^- pela troca de fótons virtuais indo a um estado X



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Figura 14 – Diagrama para a produção de estado ligado singletos pela fusão de dois fótons



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Equação (3.19). Dessa forma, nossa seção de choque torna-se

$$\sigma_{(e^+e^- \rightarrow e^+ + (l^+l^-)_S + e^-)} = \int \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} \gamma(x_1, q_{t1}^2) \gamma(x_2, q_{t2}^2) dx_1 dx_2 dq_{t1}^2 dq_{t2}^2. \quad (3.22)$$

É também de nosso interesse estudar interações do tipo elétron-núcleo, de modo que precisamos fazer as devidas alterações no fluxo de fótons provenientes do núcleo para que os apropriados fatores de forma eletromagnéticos sejam incluídos. Dessa forma, o espectro de fótons equivalentes para partículas com estrutura interna, como prótons ou núcleos, é escrito como

$$f(x) = \frac{\alpha Z^2}{2\pi} \frac{1 + (1 - x^2)}{x} \int_{Q_{min}^2}^{\infty} \frac{Q^2 - Q_{min}^2}{Q^4} |F(Q^2)|^2 dQ^2, \quad (3.23)$$

com

$$x f(x) = n(\omega) \quad e \quad x = \frac{\omega}{E},$$

onde ω é a energia do fóton, E a energia da partícula ou íon que age como fonte de fótons equivalentes, $F(Q^2)$ o fator de forma, x é a fração de energia do hadrôn carregada pelo fóton e Q^2 é o quadrimomento transferido do íon, com valor mínimo dado por

$$Q_{min}^2 = \frac{(xM_A)^2}{(1 - x)},$$

em que M_A é a massa do íon.

Para prótons, podemos utilizar o fator de forma de dipolo elétrico [35, 36]

$$F_E(Q^2) = \frac{1}{(1 + Q^2/0,71 GeV^2)^2},$$

com o qual o espectro de fótons equivalentes escreve-se como

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1 - x + 1/2x^2}{x} \left[\ln(\Omega) - \frac{11}{6} + \frac{3}{\Omega} - \frac{3}{2\Omega^2} + \frac{1}{3\Omega^3} \right], \quad (3.24)$$

onde $\Omega = 1 + (0,71 GeV^2)/Q_{min}^2$.

Para núcleos pesados, usando um fator de forma pontual, temos [31]

$$f(x) = \frac{\alpha Z^2}{\pi} \frac{1}{x} \{ 2YK_0(Y)K_1(Y) - Y^2 [K_1^2(Y) - K_0^2(Y)] \} \quad (3.25)$$

onde $Y = xM_A b_{min}$ e b_{min} é a distância mínima do hadrôn até a região de interação entre ambos os fluxos. Esse resultado, derivado quanticamente, é equivalente ao resultado clássico obtido na seção anterior pela Equação (3.17).

De maneira genérica, a seção de choque para a produção de estados ligados singletos é dada por

$$\sigma_{AB} = \int \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{n_A(\omega_1)}{\omega_1} \frac{n_B(\omega_2)}{\omega_2} \sigma_{\gamma\gamma}(\omega_1, \omega_2). \quad (3.26)$$

Como já definimos $x_i = \omega_i/E$, podemos escrever

$$\sigma_{AB} = \int \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} n_A(\omega_1) n_B(\omega_2) \sigma_{\gamma\gamma}(\omega_1, \omega_2), \quad (3.27)$$

e usando $n(\omega_i) = x_i f(x_i)$, temos

$$\sigma_{AB} = \int \int dx_1 dx_2 f_A(x_1) f_B(x_2) \sigma_{\gamma\gamma}(x_1, x_2). \quad (3.28)$$

Com esses resultados, podemos fazer as devidas substituições e obter a seção de choque $\sigma_{e+A \rightarrow e+(l^+l^-)_S+A}$, referente a interação entre um elétron e e um núcleo pesado A , no qual fazemos $f_e(x_e) = \int \gamma_e(x_e, q_t^2) dq_t^2$ e então escrevemos

$$\sigma_{(eA \rightarrow e+(l^+l^-)_S+A)} = \int \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} \gamma(x_e, q_t^2) f(x_A) dx_e dq_t^2 dx_A. \quad (3.29)$$

3.3 PROCESSO NO REFERENCIAL DO CENTRO DE MASSA

Estudaremos, então, a cinemática do processo no referencial de centro de massa da colisão elétron-núcleo que denotamos por eA . Assumiremos o eixo z como o eixo de incidência das partículas. Desta forma, no limite ultrarrelativístico, os quadrimomentos serão

$$p_e = (E, 0, 0, E) \quad (3.30)$$

e

$$p_A = (E, 0, 0, -E). \quad (3.31)$$

Podemos assim definir a variável s de Mandelstam para o sistema como

$$\begin{aligned} s &= (p_e + p_A)^2 \\ &= [(E, 0, 0, E) + (E, 0, 0, -E)]^2 \\ &= 4E^2, \end{aligned} \quad (3.32)$$

de modo que a variável de Mandelstam s é interpretada como a energia de centro de massa da colisão, válida para o limite de altas energias, com $E = \sqrt{s}/2$.

Na interação entre o elétron e o núcleo, cada um emitirá um fóton. Esses fótons se fundirão dando origem ao estado ligado de léptons. Cada fóton carrega uma fração x da energia da partícula (núcleo) que o emitiu, definido por

$$x_e = \frac{\omega_e}{E_e} \quad (3.33)$$

e

$$x_A = \frac{\omega_A}{E_A} \quad (3.34)$$

nas quais ω_e e ω_A são a energia dos fótons emitidos, respectivamente, pelo elétron e pelo núcleo. Como estamos utilizando como referencial o centro de massa, temos que as energias são $E_e = E_A = E$. Dessa forma, podemos escrever o quadrimomento dos fótons em termos das energias das partículas (núcleo) que os emitiram, na forma

$$p_{\gamma_e} = (\omega_e, 0, 0, \omega_e) = x_e p_e = x_e E(1, 0, 0, 1) \quad (3.35)$$

e

$$p_{\gamma_A} = (\omega_A, 0, 0, -\omega_A) = x_A p_A = x_A E(1, 0, 0, -1). \quad (3.36)$$

Agora, conhecendo os quadrimomentos dos fótons, podemos definir a variável s de Mandelstam para o sistema fóton-fóton (o qual denotaremos por $s = W^2$) como

$$\begin{aligned} W^2 &= (p_{\gamma_e} + p_{\gamma_A})^2 \\ &= [x_e E(1, 0, 0, 1) + x_A E(1, 0, 0, -1)]^2 \\ &= [E(x_e + x_A), 0, 0, E(x_e - x_A)]^2 \\ &= E^2(4x_e x_A). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Substituindo as equações (3.35) e (3.36), temos

$$\begin{aligned} W^2 &= E^2 \left(4 \frac{\omega_e}{E} \frac{\omega_A}{E} \right) \\ W^2 &= 4\omega_e \omega_A. \end{aligned} \quad (3.38)$$

De maneira análoga, interpretamos W como a energia do sistema fóton-fóton no referencial do centro de momento dos dois fótons, que é comumente denominada como massa invariante.

Com auxílio das equações (3.35) e (3.36), podemos obter o quadrimomento p do estado criado em termos de x_e , x_A e E , que escrevemos:

$$\begin{aligned} p &= p_{\gamma_e} + p_{\gamma_A} \\ &= E(x_e, 0, 0, x_e) + E(x_A, 0, 0, -x_A) \\ &= E(x_e + x_A, 0, 0, x_e - x_A). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Assim, estamos aptos para calcular a rapidez Y do estado ligado criado pela fusão dos dois fótons. A rapidez Y é expressa como

$$Y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z} \right), \quad (3.40)$$

que podemos substituir na Equação (3.39) e obter

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{E(x_e + x_A) + E(x_e - x_A)}{E(x_e + x_A) - E(x_e - x_A)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{E x_e + x_A + x_e - x_A}{E x_e + x_A - x_e + x_A} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x_e}{x_A} \right). \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

Utilizando a definição da fração de energia dada pelas equações (3.33) e (3.34), podemos escrever

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\omega_e/E}{\omega_A/E} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\omega_e}{\omega_A} \right). \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

Podemos ainda utilizar a Equação (3.37) para escrever a rapidez em termos da massa invariante ao isolar ω_A e substituir na Equação (3.42), que nos leva a

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\omega_e}{\frac{W^2}{4\omega_e}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4\omega_e^2}{W^2} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{2\omega_e}{W} \right). \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

Agora podemos isolar o ω_e e obter

$$\omega_e = \frac{W}{2} e^Y, \tag{3.44}$$

levando este resultado na Equação (3.37) e isolando ω_A temos

$$\omega_A = \frac{W}{2} e^{-Y}. \tag{3.45}$$

Com esses resultados, podemos obter a distribuição de rapidez para o estado criado. Contudo, precisamos realizar uma transformação das coordenadas, que é possível a partir da obtenção do jacobiano J da transformação $(\omega_e, \omega_A) \rightarrow (W, Y)$, que conseguimos com

$$\begin{aligned}
 J &= \left\| \frac{\partial(\omega_e, \omega_A)}{\partial(W, Y)} \right\| \\
 &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial \omega_e}{\partial W} & \frac{\partial \omega_e}{\partial Y} \\ \frac{\partial \omega_A}{\partial W} & \frac{\partial \omega_A}{\partial Y} \end{array} \right\| \\
 &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{e^Y}{2} & \frac{We^Y}{2} \\ \frac{e^{-Y}}{2} & -\frac{We^{-Y}}{2} \end{array} \right\| \\
 &= \left| -\frac{e^Y}{2} \frac{We^{-Y}}{2} - \left(\frac{We^Y}{2} \frac{e^{-Y}}{2} \right) \right| \\
 &= \frac{W}{4} + \frac{W}{4} \\
 &= \frac{W}{2}. \tag{3.46}
 \end{aligned}$$

Assim, a nossa seção de choque total para a colisão elétron-núcleo definida na Equação (3.29), em termos da massa invariante W e da rapidez Y torna-se

$$\sigma_{(eA \rightarrow e + (l^+l^-)_S + A)} = \int \frac{W}{2} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} \gamma(\omega_e, q_t^2) f(\omega_A) dq_t^2 dW dY. \quad (3.47)$$

Podemos obter a distribuição de rapidez diretamente da Equação (3.47), de modo que

$$\frac{d\sigma_{(eA \rightarrow e + (l^+l^-)_S + A)}}{dY} = \int \frac{W}{2} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} \gamma(\omega_e, q_t^2) f(\omega_A) dq_t^2 dW. \quad (3.48)$$

Poderíamos ainda, de maneira análoga, obter uma distribuição de massa invariante. Contudo, é inviável estudarmos essa distribuição porque há um pico muito grande e estreito para um valor central de massa invariante que cai abruptamente com pequenas variações [25].

3.4 FECHAMENTO

Neste capítulo estudamos a aproximação de fótons equivalentes com a sua derivação clássica. Este método é uma ferramenta poderosa para vários cálculos de processos eletromagnéticos pois nos permite escrever a seção de choque de interação de duas partículas em termos da seção de choque de interação de uma partícula com o fluxo de fótons induzidos da outra partícula. Estudamos também a generalização do método para a interação de dois fluxos de fótons emitidos cada um de uma partícula carregada, gerando um estado final X e, sobretudo, ao processo de produção de estados ligados de léptons em colisões elétron-pósitron e elétron-núcleo. Construímos, ainda, a distribuição de rapidez com referencial no centro de massa da colisão, que será de fundamental importância para a nossa análise. No próximo capítulo apresentaremos os resultados de nosso estudo.

4 RESULTADOS

Neste capítulo apresentaremos as nossas previsões para a fotoprodução de estados ligados de léptons no estado singuleto em colisões de altas energias dos tipos elétron-pósitron, elétron-núcleo (de chumbo) e elétron-próton. Escolhemos estudar a produção de estados singuletos por serem melhor entendidos na literatura [37, 38]. As colisões podem ser tratadas como colisões entre fótons utilizando o formalismo da Aproximação de Fótons Equivalentes. Construiremos nossos resultados na forma de distribuições de rapidez e virtualidade, com os quais obteremos as seções de choque totais e uma estimativa para a taxa de eventos com cada um dos colisores.

Em nosso estudo, estamos interessados na análise da produção de estados singuletos em processos de fusão de fótons virtuais, sobretudo com fótons de virtualidade não desprezível. A motivação de nosso estudo é considerar as partículas ultrarrelativísticas dos colisores como fontes de fótons virtuais, que irão interagir via fusão de fótons e dar origem ao estado de nosso interesse. Esse processo foi estudado em detalhes no Capítulo 3. Os processos que estudamos consistem de partículas incidentes intactas no estado final, com o estado ligado de léptons. No entanto, esses estados ligados são instáveis, gerando produtos de decaimento que podem ser observados nos detectores. Estamos interessados nos estados singuletos, que decaem majoritariamente em dois fótons.

Apresentaremos nossas análises utilizando energias de colisores futuros: o *International Linear Collider*, o *Future Circular Collider* e o *Electron-Ion Collider*. Para maiores detalhes acerca dos colisores, ver Apêndice B.

4.1 FLUXO DE FÓTONS

No processo estudado, podemos fatorar a seção de choque total na seção de choque fóton-fóton multiplicada pelo fluxo de fótons de cada partícula e integrar no momento transverso quadrado e na massa invariante W [39]. Para esse processo, construímos a distribuição de rapidez

$$\frac{d\sigma_{(eA \rightarrow e + (l^+l^-)_S + A)}}{dY} = \int \frac{W}{2} \sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S} \gamma(\omega_e, q_t^2) f(\omega_A) dq_t^2 dW, \quad (4.1)$$

onde utilizamos a seção de choque fóton-fóton para a produção de estados singuletos de léptons fornecida pela fórmula de Low, discutida no Capítulo 2, dada pela equação

$$\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow (l^+l^-)_S}(W) = 2\pi^2 \alpha^5 \delta(W^2 - M^2). \quad (4.2)$$

Os fluxos presentes na Equação (4.1) são referentes ao elétron e ao núcleo envolvidos na colisão. Porém, partículas pontuais apresentam fluxos de fótons diferentes dos fluxos de fótons emitidos por prótons e núcleos, para os quais devemos incluir fatores eletromagnéticos apropriados. Nas próximas seções, discutiremos em detalhes os diferentes fluxos que utilizamos para a obtenção de nossas seções de choque totais a partir das discussões estabelecidas no Capítulo 3.

No Capítulo 3 derivamos os fluxos de fótons provenientes de cargas relativísticas, tanto pontuais como o elétron e o pósitron, quanto com uma estrutura interna, como o próton e núcleos atômicos pesados. Para cargas pontuais, utilizamos o fluxo [40]:

$$f(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[2m_e^2 x \left(\frac{1}{k_{max}^2} - \frac{1}{k_{min}^2} \right) + \frac{1 + (1-x)^2}{x} \ln \frac{k_{min}^2}{k_{max}^2} \right], \quad (4.3)$$

que tem dependência na fração de energia do elétron carregada pelo fóton x . Definimos os limites para o momento quadrado k^2 como

$$k_{max}^2 = -\frac{m_e^2 x^2}{1-x} \quad (4.4)$$

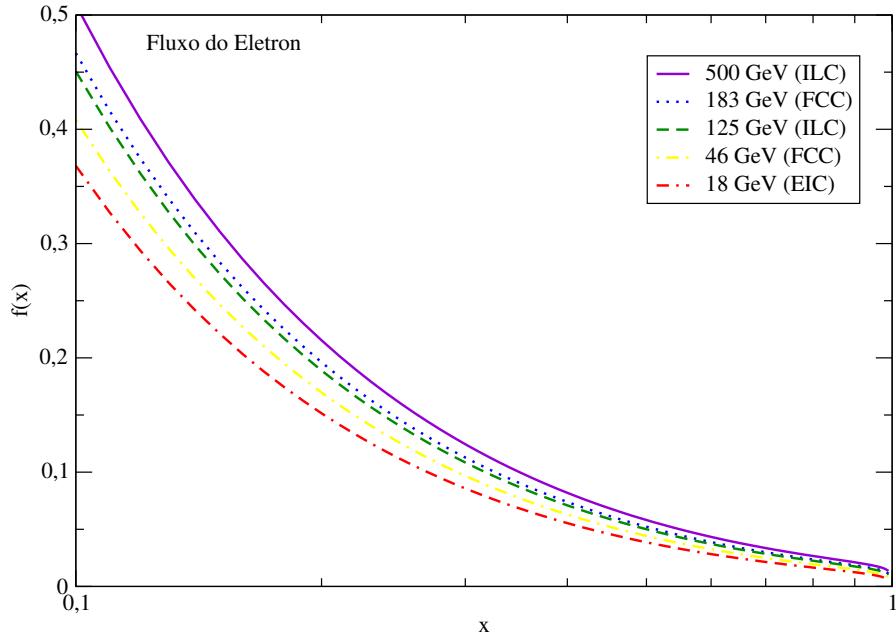
e

$$k_{min}^2 = -\frac{m_e^2 x^2}{1-x} - E^2 (1-x) \theta_c^2, \quad (4.5)$$

onde m_e é a massa do elétron, E a energia do feixe e θ_c é o ângulo de espalhamento máximo, que adotamos ser igual a $3,3 \times 10^{-2}$.

Utilizando as energias dos colisores que estudamos em nossa análise, o fluxo em função de x se comporta de acordo com a Figura 15. Como podemos verificar, o fluxo de fótons cai

Figura 15 – Fluxos de elétrons com energias dos colisores estudados



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

com o aumento da fração de energia do elétron carregada pelo fóton, mas é maior para maiores energias de centro de massa. Esse resultado nos indica que teremos muitos fótons com energias mais baixas contra poucos fótons com energias mais altas.

No Capítulos 3 mencionamos o fator de forma nuclear sem nos aprofundarmos em detalhes. O fator de forma trata-se de uma transformada de Fourier da distribuição espacial

de cargas, normalizado pela carga total [39, 41]. Podemos interpretá-la como a distribuição de cargas no espaço de momento transferido pelo núcleo:

$$F(q) = \frac{1}{N} \int \rho(\vec{b}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{b}} d^3\vec{b}, \quad (4.6)$$

com

$$N = \int \rho(\vec{b}) d^3\vec{b}, \quad (4.7)$$

onde $\rho(\vec{b})$ é a densidade espacial de cargas e \vec{q} é o momento transferido pelo núcleo na colisão.

Podemos encontrar diversos fatores de forma na literatura, a exemplo do fator de forma de monopolo [39], que considera uma distribuição espacial de cargas de modo que a densidade de cargas diminui exponencialmente com o inverso da distância do centro do núcleo, onde obtém-se

$$F(q^2) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2}, \quad (4.8)$$

em que Λ é uma constante obtida experimentalmente, inversamente proporcional ao raio quadrático médio do núcleo. Com este fator de forma, podemos obter o fluxo de monopolo, que é dado por

$$N(\omega, b) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi \omega} \left[\frac{\omega}{\gamma} K_1 \left(\frac{\omega b}{\gamma} \right) + \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \Lambda^2 \right)} K_1 \left(b \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \Lambda^2 \right)} \right) \right]^2. \quad (4.9)$$

Contudo, nesta dissertação, utilizamos o fator de forma nuclear pontual, pois, como podemos ver na Figura 16, ambos os fluxos em função da distância transversa possuem comportamento semelhante para os interesses de nosso estudo no regime de baixa virtualidade. Assim, podemos considerar o fator de forma pontual

$$F(q^2) = 1, \quad (4.10)$$

e obter o fluxo de fôtons

$$N(\omega, b) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 \omega b^2} \left(\frac{\omega b}{\gamma} \right)^2 K_1^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma} \right). \quad (4.11)$$

Esta equação recupera o resultado para o fluxo de fôtons dependente da distância transversa, que obtivemos pelo método clássico na Equação (3.15), já que no limite ultrarrelativístico ($\gamma \gg 1$) o segundo termo da Equação (3.15) torna-se desprezível.

Para os prótons, um fator de forma comumente encontrado na literatura é o de dipolo, que é construído considerando o próton um dipolo elétrico. Tem a forma

$$F(q^2) = \frac{\Lambda^4}{(\Lambda^2 + q^2)^2}, \quad (4.12)$$

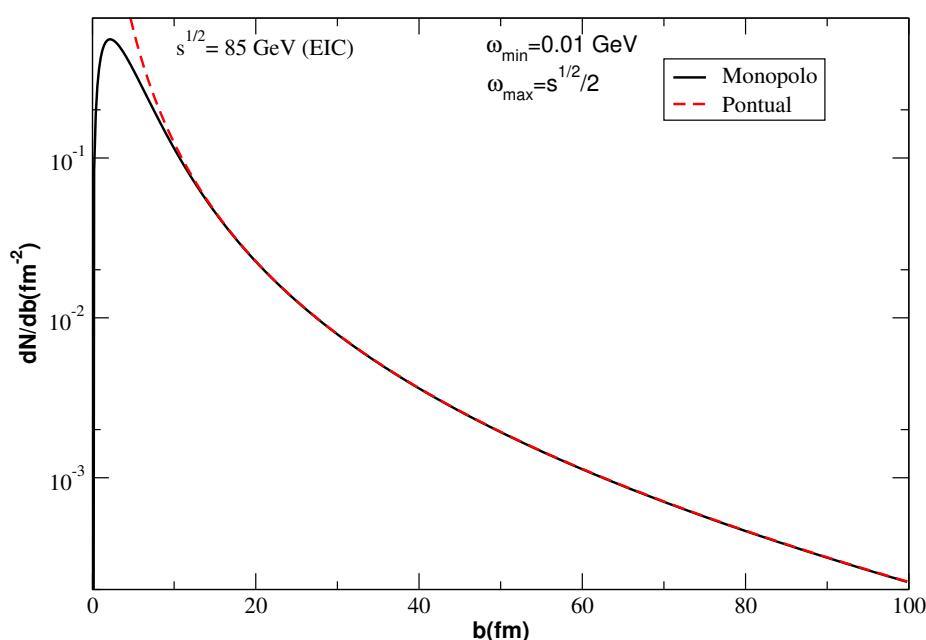
com $\Lambda = 0,71 \text{ GeV}^2$ [35, 36]. Com esse fator de forma podemos obter o fluxo de fôtons abaixo

$$N(\omega, b) = \frac{\alpha}{\pi^2 \omega} \left[\frac{\omega}{\gamma} K_1 \left(\frac{\omega b}{\gamma} \right) - \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \Lambda^2 \right)} K_1 \left(b \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \Lambda^2 \right)} \right) + \right. \\ \left. - \frac{b \Lambda^2}{2} K_0 \left(b \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \Lambda^2 \right)} \right) \right]^2. \quad (4.13)$$

Contudo, diferente do caso do núcleo, não podemos utilizar o fator de forma pontual sem prejuízos, como podemos observar na Figura 17. Dessa forma, utilizamos o fator de forma de dipolo para o fluxo de fótons provenientes do próton.

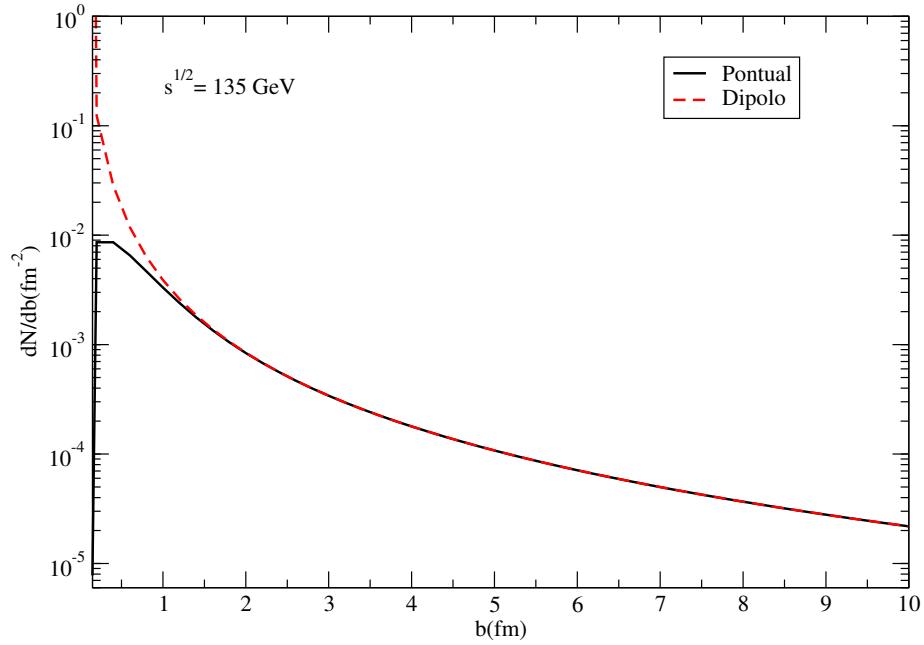
Com todos os colisores de nossa análise apresentados no Apêndice B e os fluxos estudados, podemos enfim retornar para a Equação (4.1) e estimar nossas distribuições de rapidez, com as quais poderemos calcular as seções de choque totais e as taxas de eventos. Apresentamos nossas previsões na próxima seção.

Figura 16 – Fluxos em função da distância transversa b do núcleo de chumbo com fator de forma pontual e monopolo com energia do EIC



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Figura 17 – Fluxos em função da distância transversa b do próton com fator de forma pontual e monopolo com energia do EIC



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

4.2 DISTRIBUIÇÕES DE RAPIDEZ E DE VIRTUALIDADE

Nossos resultados, obtidos para as distribuições de rapidez para a produção de paraestados por fusão de dois fótons na colisão elétron-pósitron para os colisores ILC e FCC são apresentados na subseção a seguir. Em seguida, apresentamos os resultados obtidos para as colisões elétron-próton e elétron-núcleo para o EIC em distribuições de rapidez e de virtualidade.

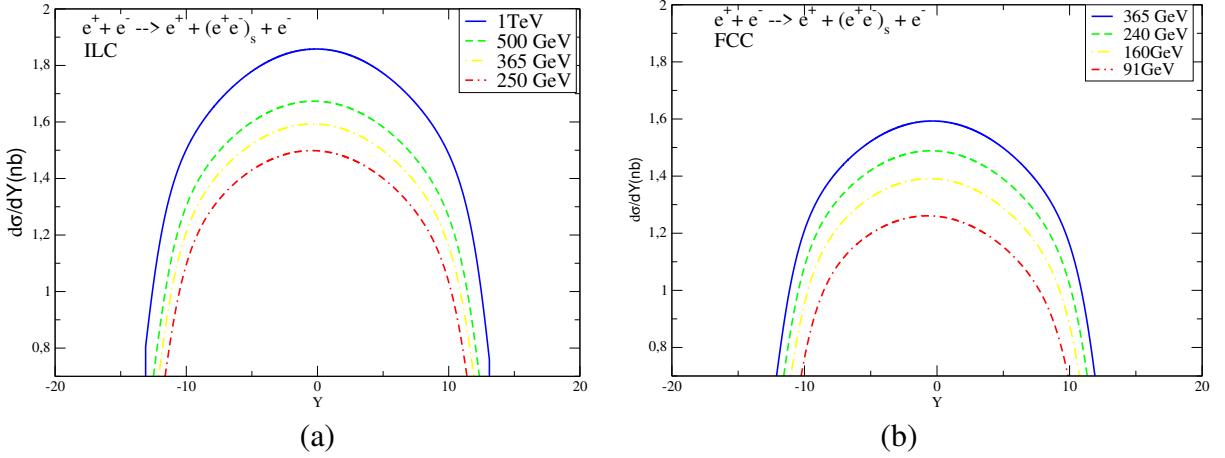
4.2.1 Distribuições de rapidez em colisões elétron-pósitron

As Figuras 18, 19 e 20 apresentam as previsões para cada um dos três sabores de estados ligados de léptons. Na primeira coluna dos gráficos, temos as previsões para colisões com energias do ILC ($\sqrt{s} = 250 \text{ GeV}, 365 \text{ GeV}, 500 \text{ GeV}$ e 1 TeV). Na segunda coluna, temos as previsões para as colisões com energias do FCC ($\sqrt{s} = 91 \text{ GeV}, 160 \text{ GeV}, 240 \text{ GeV}$ e 365 GeV) [42].

Podemos observar diferentes ordens de grandeza para a produção dos diferentes sabores de estados ligados. Esta diferença é consequência da diferença de energia necessária para a produção de cada um dos sabores, visto que o muônio tem maior massa que o positrônio e o tauônio tem maior massa que o muônio. Dessa forma, o que podemos interpretar é que quanto maior a massa do estado ligado, menos ele é produzido.

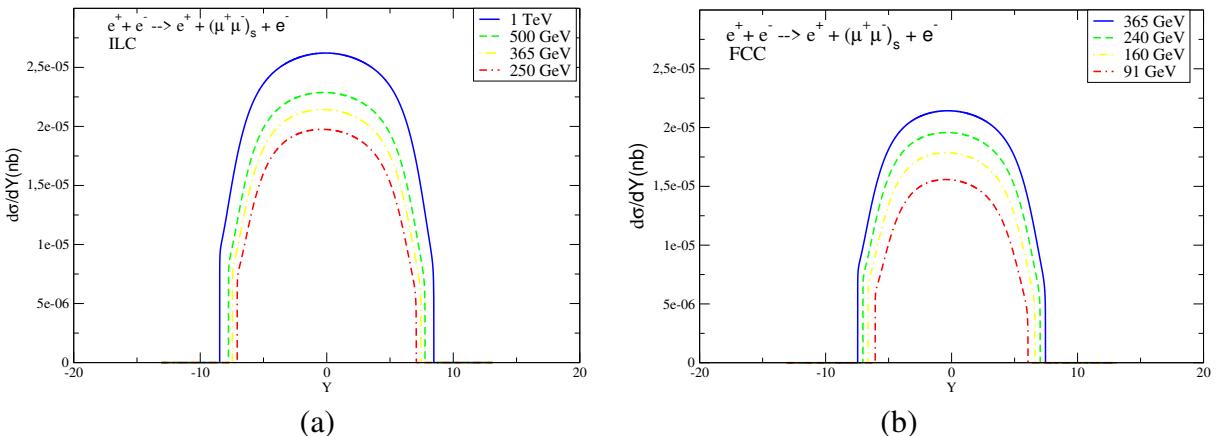
Nota-se, também, a variação nos intervalos de rapidez, que decrescem com o aumento da massa dos léptons produzidos. Como as colisões são simétricas, isso é, as partículas envolvidas na colisão possuem a mesma carga e, consequentemente, o mesmo fluxo de fótons, as distribuições

Figura 18 – Distribuições de rapidez em nanobarn para a produção de positrônio em colisões e^+e^- . Em (a) energias do ILC e em (b) energias do FCC.



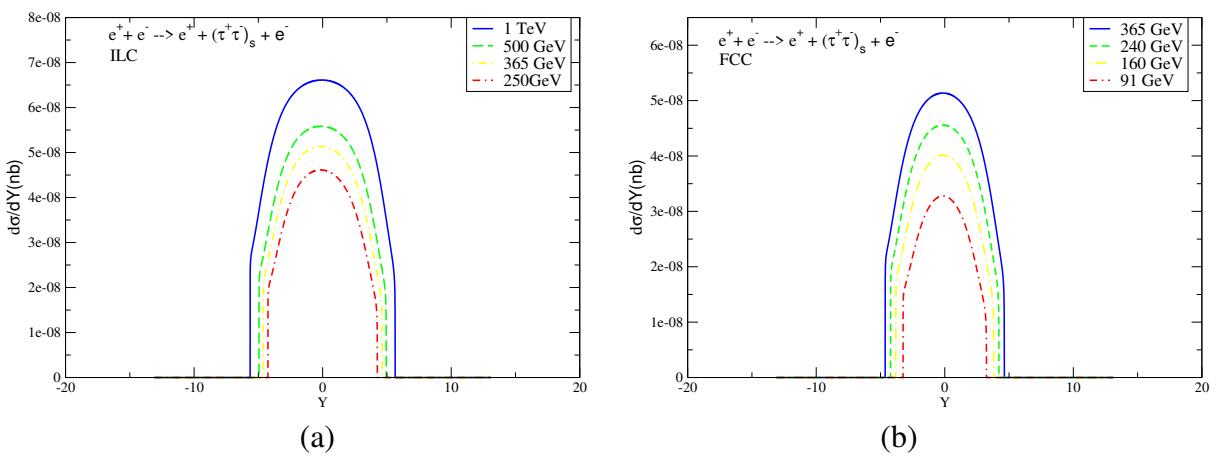
Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Figura 19 – Distribuições de rapidez em nanobarn para a produção de muônio em colisões e^+e^- . Em (a) energias do ILC e em (b) energias do FCC.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Figura 20 – Distribuições de rapidez em nanobarn para a produção de tauônio em colisões e^+e^- . Em (a) energias do ILC e em (b) energias do FCC.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

são simétricas em relação ao eixo de rapidez.

4.2.2 Distribuições de rapidez em colisões elétron-próton e elétron-núcleo

As Figuras 21, 22 e 23 apresentam, respectivamente, as distribuições de rapidez em nanobarn para a produção de positrônio, tauônio e muônio. Na primeira coluna, apresenta a distribuição de rapidez para a colisão elétron-próton e na segunda coluna para a colisão elétron-chumbo, ambas com energias de centro de massa possíveis para o EIC, que determinamos com auxílio da equação

$$\sqrt{s} = \sqrt{4E_1 E_2}, \quad (4.14)$$

com E_1 sendo a energia máxima do elétron (18 GeV), E_2 a energia mínima (60 GeV) ou máxima (250 GeV) do próton ou a energia máxima do íon pesado (100 GeV). Para estabelecermos um intervalo de comparação, utilizamos a energia mínima do próton como energia mínima para o íon pesado, isto é, 60 GeV. Como podemos observar, em todos os casos, temos uma distribuição não simétrica em relação ao eixo de rapidez devido aos diferentes fluxos de elétrons das colisões.

Para a colisão do tipo elétron-núcleo, em que estão envolvidos núcleos com $Z \gg 1$, tornam-se relevantes as correções de mais alta ordem da QED para a produção de estados ligados singletos de léptons, conhecidas como correções coulombianas, pois as interações multifótons tornam-se significativas. Essa correção permite considerar a interação entre mais de dois fótons para a produção de estados singletos. A Figura 24 apresenta o diagrama para essa interação.

Vamos calcular a seção de choque diferencial da correção coulombiana baseados no que foi desenvolvido nas referências [43, 44], nas quais foi considerado a interação de um fóton com um núcleo no referencial de laboratório. A seção de choque diferencial da correção coulombiana é dada por

$$d\sigma_{CC} = d\sigma_1 + d\sigma_2, \quad (4.15)$$

com $d\sigma_1$ e $d\sigma_2$ sendo as contribuições no primeiro e segundo núcleo, respectivamente. No entanto, como estamos lidando com apenas um núcleo, o segundo termo desaparece. A contribuição é estimada com a aproximação de fótons equivalentes e com uma seção de choque fóton-núcleo em que o núcleo alvo interage pela troca de mais de um fóton, que pode ser escrito como

$$d\sigma_1 = -2\zeta(3)\sigma_0 C(Z) \ln \gamma^2 \frac{d\omega}{\omega}, \quad (4.16)$$

em que

$$\omega = \frac{M_{Ps}}{2} e^Y, \quad (4.17)$$

portanto, podemos tomar a derivada em ω ,

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{\omega} \frac{M_{Ps} e^Y}{2} dY = dY, \quad (4.18)$$

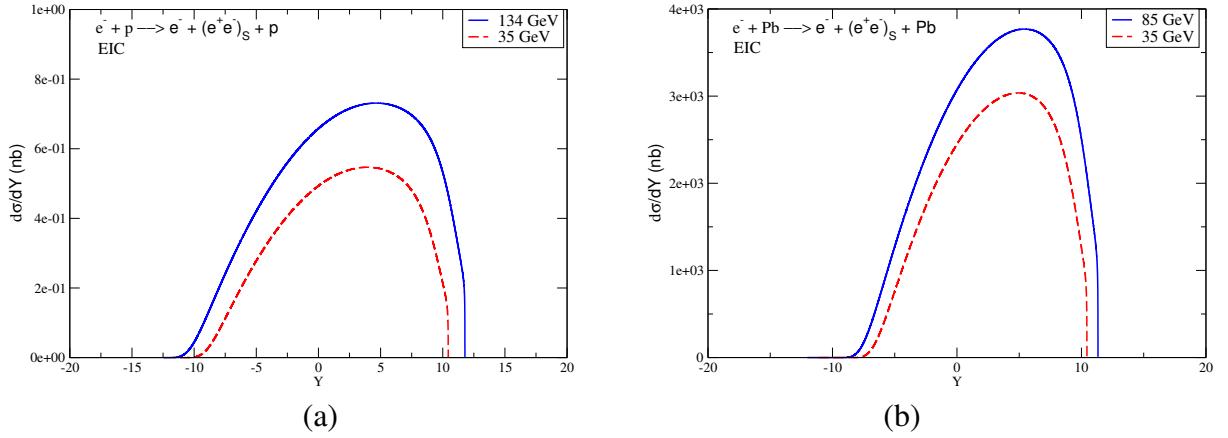
e escrever

$$d\sigma_1 = -2\zeta(3)\sigma_0 C(Z) \ln \gamma^2 dY. \quad (4.19)$$

Definindo as funções presentes na Equação (4.19), temos que

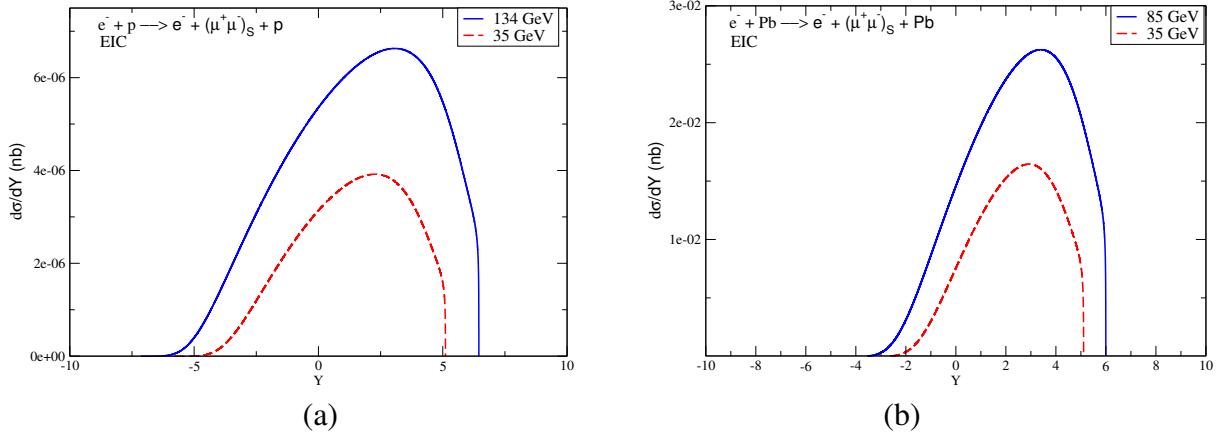
$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1,202\dots, \quad (4.20)$$

Figura 21 – Distribuições de rapidez em nanobarn para a produção de positrônio em colisões elétron-próton em (a) e elétron-chumbo em (b) com energias do EIC



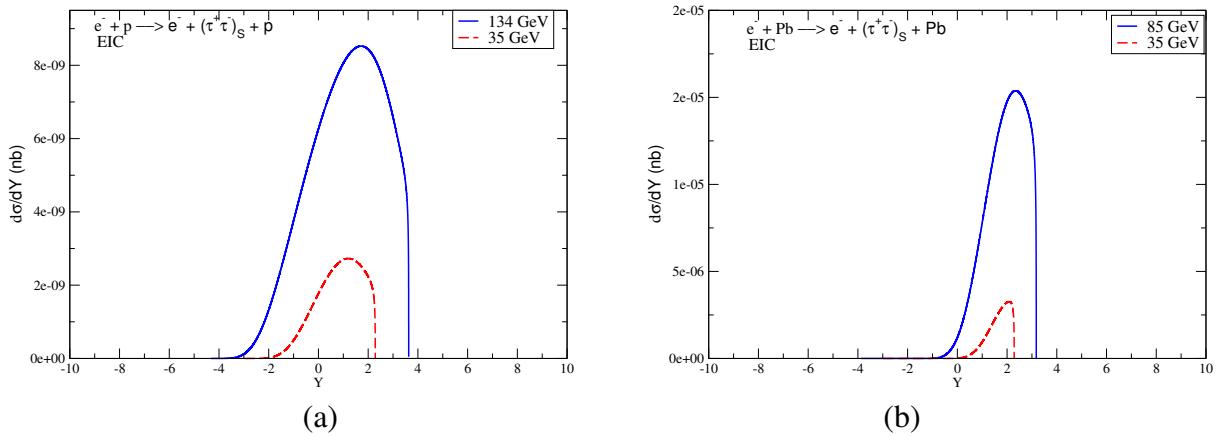
Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Figura 22 – Distribuições de rapidez em nanobarn para a produção de muônio em colisões elétron-próton em (a) e elétron-chumbo em (b) com energias do EIC



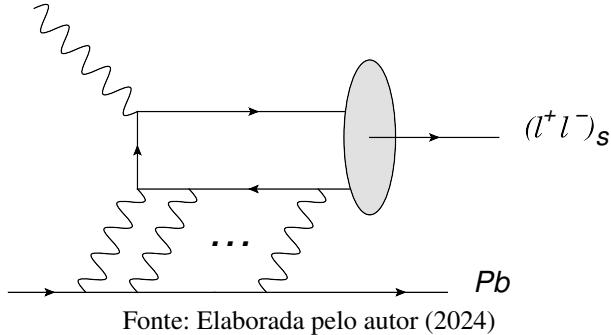
Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Figura 23 – Distribuições de rapidez em nanobarn para a produção de tauônio em colisões elétron-próton em (a) e elétron-chumbo (b) com energias do EIC



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Figura 24 – Diagrama para a produção de estados ligados singletos de léptons em colisões envolvendo interações multifótons.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

é a zeta de Riemann, necessária para considerar a produção de estados singletos em todos os estados quânticos possíveis para o número quântico principal. A função

$$C(Z) = \int_0^\infty F(\tau, Z) d\tau, \quad (4.21)$$

caracteriza o núcleo responsável pela multiemissão de fótons, com

$$F(\tau, Z) = \frac{1}{2\tau(1+\tau)^2} \left\{ 1 - \left[F(iZ\alpha, -iZ\alpha; 1; z) \frac{\pi Z\alpha}{\sinh(\pi Z\alpha)} \right]^2 \right\}, \quad (4.22)$$

onde $F(iZ\alpha, -iZ\alpha; 1; z)$ é a função hipergeométrica de Gauss, e os parâmetros τ e z são definidos como

$$\tau = \left(\frac{\vec{p}_T}{2m_e} \right)^2, \quad z = \left(\frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^2. \quad (4.23)$$

A curva $C(Z)$ e as propriedades da função $F(\tau, Z)$ são dadas na referência [44], aqui mencionamos apenas que para os núcleos de chumbo, em que $Z = 82$, a função $C(Z)$ assume o valor 0,7080. A seção de choque σ_0 é dada por

$$\sigma_0 = \frac{Z^2 \alpha^7}{m_e^2}. \quad (4.24)$$

Conforme visto na Equação (4.19), as correções coulombianas são negativas, de modo a diminuir a seção de choque total (sem correção). Isso ocorre porque ao se considerar que dois ou mais fótons do núcleo alvo interagem com um fóton da partícula incidente, a probabilidade de interação envolvendo apenas um fóton de cada partícula emissora diminui.

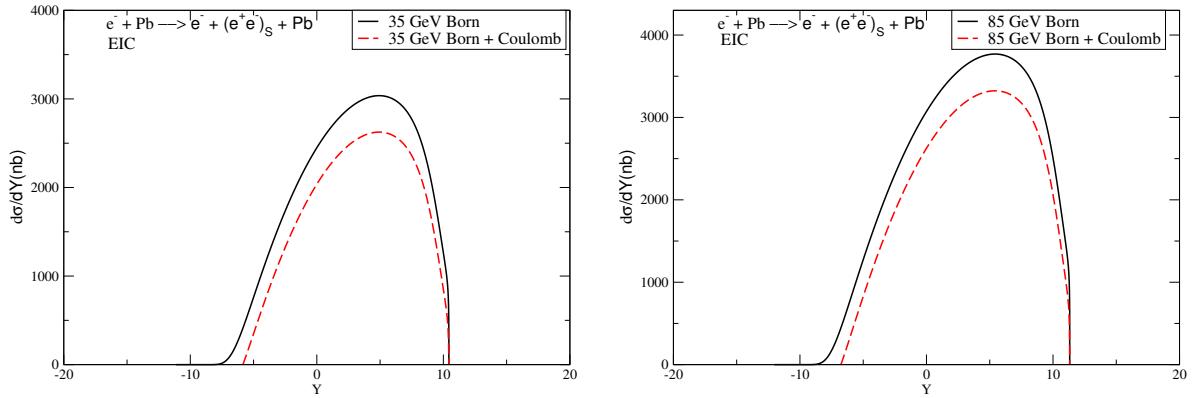
É possível, agora, construir uma distribuição de rapidez para a correção coulombiana, que é dada por

$$\frac{d\sigma_{CC}}{dY} = -2\zeta(3) \frac{Z^2 \alpha^7}{m_e^2} C(Z) \ln \gamma^2. \quad (4.25)$$

Assim, a distribuição de rapidez total será a soma da distribuição de rapidez a nível de Born, obtida com a aproximação de fótons equivalentes e já apresentada na Figura 21, com a distribuição de rapidez da correção coulombiana

$$\frac{d\sigma_{total}}{dY} = \frac{d\sigma_{Born}}{dY} + \frac{d\sigma_{CC}}{dY}. \quad (4.26)$$

Figura 25 – Comparação entre as distribuições de rapidez para a produção de positrônio a nível de Born e com correção coulombiana



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Vale ressaltar que, no entanto, não existe consenso na literatura acerca da relevância para a produção de diferentes sabores de léptons, em que alguns autores tratam as correções coulombianas para a produção de léptons pesados como significativamente relevantes [45], enquanto outros afirmam que seus impactos são mais significativos para a produção de positrônio [46]. Devido a essa falta de consenso, analisaremos os impactos das correções apenas para a produção de positrônio, pois não há na literatura a menção de tais correções na produção de estados ligados de léptons pesados.

Apresentamos, então, na Figura 25, nossas previsões para as distribuições de rapidez com as correções coulombianas para a produção de parapositrônio com energias do EIC, onde comparamos com as previsões para a produção a nível de Born. O que podemos notar é que a correção coulombiana conserva a mesma forma da distribuição a nível de Born mas reduz o seu valor. Essa redução é justificada pelo fato de que a probabilidade da interação ocorrer apenas entre um fóton emitido por cada partícula diminui quando uma das partículas emite vários fótons.

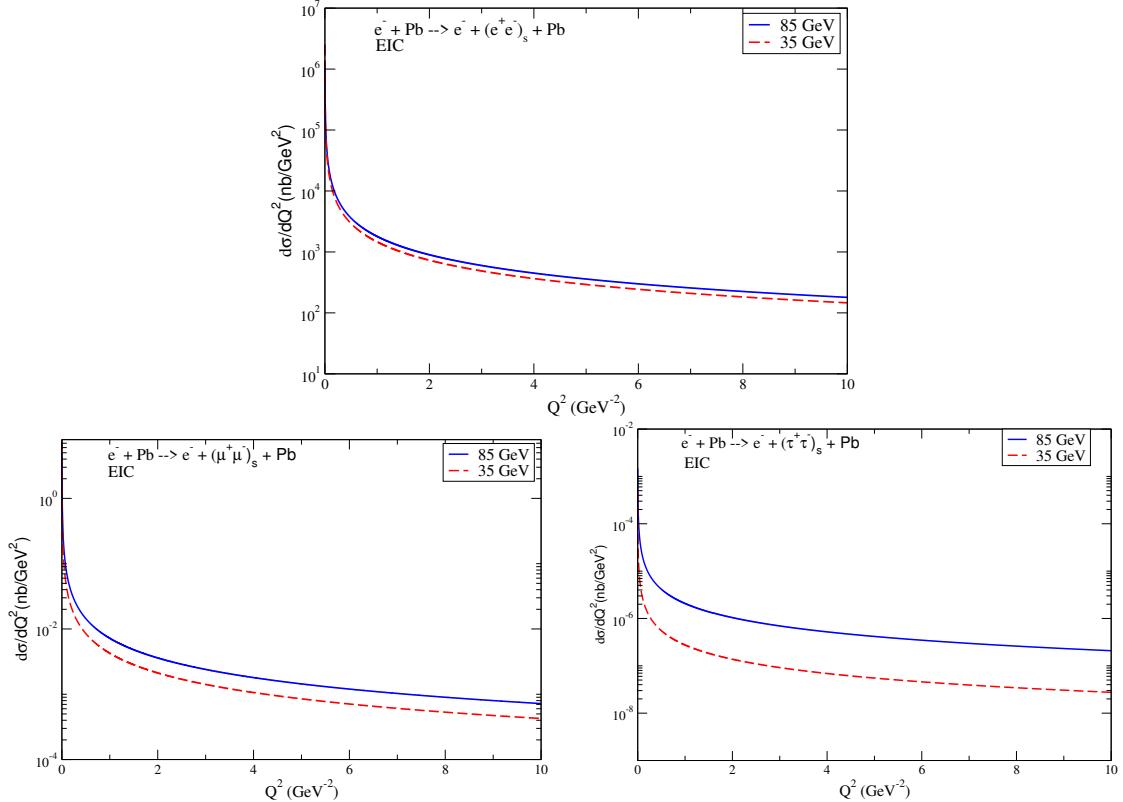
Todas essas distribuições em rapidez são importantes por sua significância experimental, pois, como podemos recordar do Capítulo 2, a pseudorapidez se relaciona com o ângulo de deflexão em relação à reta de incidência das partículas, o que nos indica a região do colisor onde teremos a maior incidência de estados gerados.

4.2.3 Distribuição de virtualidade e momento transverso

Outro resultado de suma importância para nosso estudo é a distribuição na virtualidade Q^2 que obtivemos da colisão elétron-chumbo com energias do EIC e apresentamos na Figura 26. Podemos observar na figura uma queda acentuada com o aumento de Q^2 , um comportamento típico de eventos eletromagnéticos. Este resultado é interessante porque podemos supor a transferência do quadrimomento do fóton emitido pelo elétron ao estado ligado produzido, que se traduz em momento transverso pela relação

$$Q^2 = m^2 x^2 + q_t^2. \quad (4.27)$$

Figura 26 – Distribuições de virtualidade para a produção de estados ligados singletos de léptons em colisões elétron-chumbo com energias do EIC



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Como o chumbo é muito mais pesado que o elétron, supomos que todo o momento transverso transferido ao estado ligado produzido tenha vindo do elétron, que sofrerá grande deflexão na colisão. Isso significa que fótons virtuais com virtualidade não desprezível podem produzir estados ligados com momento transverso não desprezível. A Figura 27 apresenta a distribuição de momento transverso para a produção de positrônio na colisão elétron-núcleo.

A Figura 27 nos sugere um pico para valores de q_t muito pequenos, dos quais testamos momentos transversos de 10^{-5} a 10^{-2} GeV. A Figura 28 apresenta os intervalos considerados. Para valores maiores que 10^{-2} GeV ocorre uma queda muito acentuada para os valores de distribuição, que representa poucas produções de estados ligados para maiores valores de momento transverso. Esse comportamento se repete para ambos níveis de energia de centro de massa. A partir do momento transverso e da rapidez, é possível calcularmos o momento longitudinal [23]

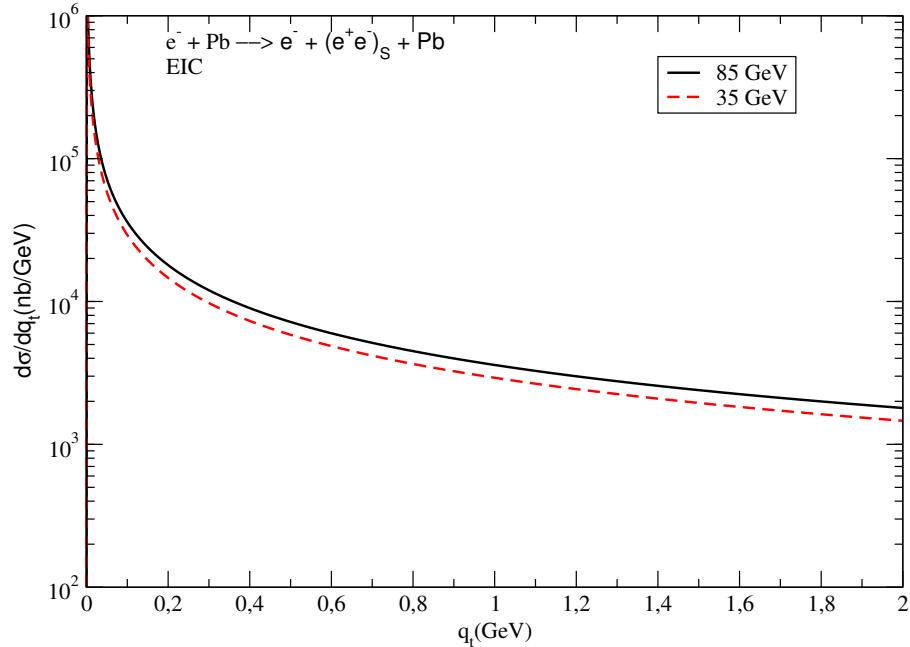
$$q_z = \sqrt{m^2 + \vec{q}_t^2 \sinh Y}, \quad (4.28)$$

que nos permite calcular o momento q total

$$q = \sqrt{q_t^2 + q_z^2}. \quad (4.29)$$

Definido q , podemos estabelecer a relação

Figura 27 – Distribuição de momento transverso para a produção de positrônio na colisão eA .



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Tabela 2 – Ângulos de espalhamento para cada momento transverso típico na faixa do pico de rapidez

$\sqrt{s} = 85 \text{ GeV}$	$Y = 3$	$Y = 5.5$	$Y = 8$
q_t	θ°	θ°	θ°
10^{-5}	$5,70 \times 10^{-2}$	$4,70 \times 10^{-2}$	$3,84 \times 10^{-4}$
10^{-4}	$5,69 \times 10^{-1}$	$4,65 \times 10^{-2}$	$3,82 \times 10^{-3}$
10^{-3}	4,04	$3,31 \times 10^{-1}$	$2,71 \times 10^{-2}$
10^{-2}	5,67	$4,66 \times 10^{-1}$	$3,82 \times 10^{-2}$

Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

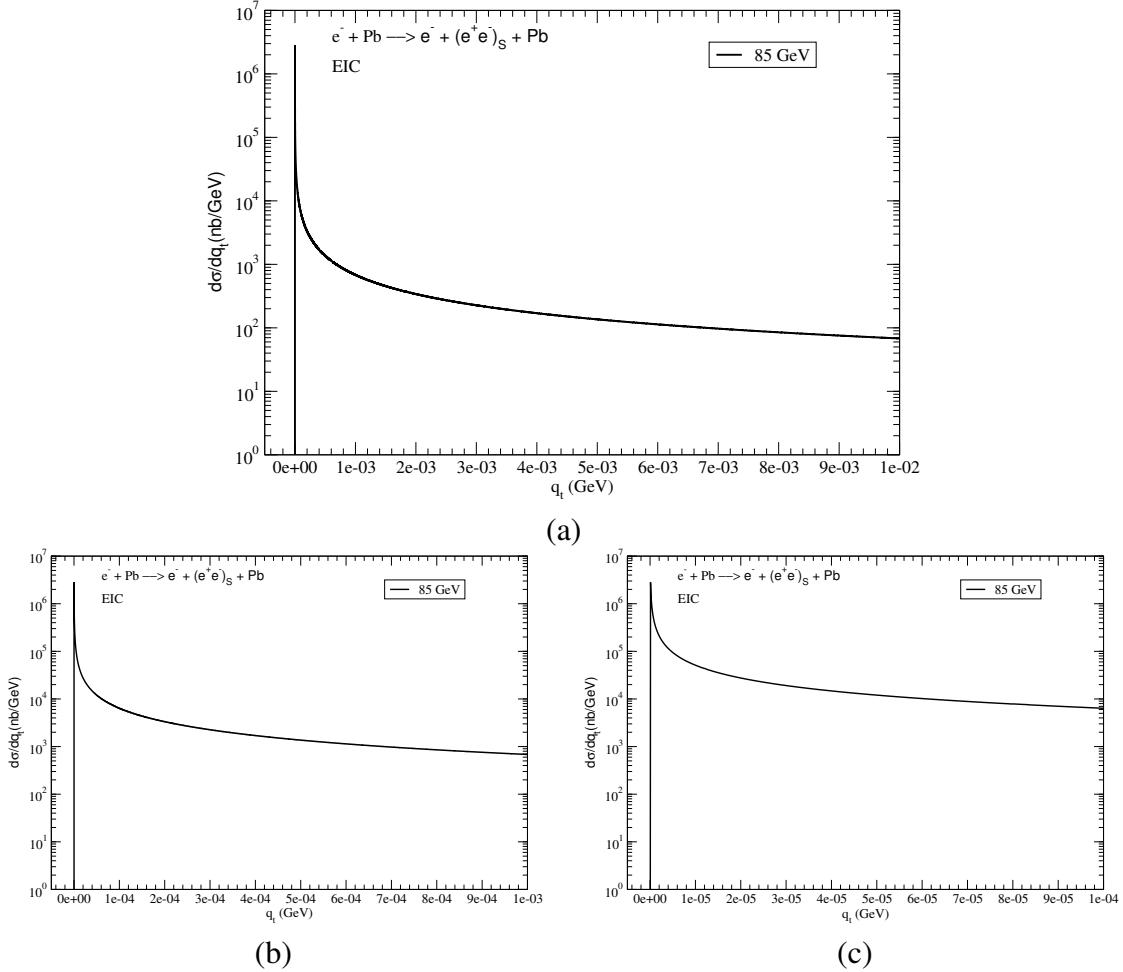
$$\frac{q_t}{q} = \sin \theta, \quad (4.30)$$

que nos permite determinar ângulos de espalhamento para o estado ligado produzido. Espera-se, contudo, que os ângulos mais expressivos sejam para o positrônio, pois apresenta maior número de produções para maiores virtualidades e momentos transversos, sendo desprezível para outros sabores de estados ligados.

Dessa forma, podemos tomar valores em torno do pico da distribuição de rapidez e da distribuição de momento transverso para calcularmos o ângulo de produção. Nossas previsões para os ângulos, associados aos momentos transversos típicos e em faixas em torno do pico da rapidez, são apresentadas na Tabela 2.

Percebe-se que temos maiores ângulo de deflexão para maiores momentos transversos e rapidez mais próxima de zero. Escolhemos os valores para rapidez ao conferir na Figura 21 onde se concentra o pico de produção, que fica entre 3 e 8 com pico máximo em 5.5. Apesar de termos menores taxas de produção de estados ligados para maiores momentos transversos,

Figura 28 – Intervalos de momento transverso considerados para o cálculo dos ângulo de produção. Em (a) q_t máximo vai até 10^{-2} GeV; em (b) q_t máximo vai até 10^{-3} GeV; em (c) q_t máximo vai até 10^{-4} GeV.



na faixa estabelecida ainda apresenta um pico considerável, que permite um ângulo de deflexão razoável, com valor acima dos 5 graus. Para maiores momentos transversos, a queda da curva se torna muito acentuada, variando cerca de duas ordens de grandeza.

4.3 SEÇÕES DE CHOQUE TOTAIS E TAXAS DE EVENTOS

Com todas as distribuições de rapidez que obtivemos na seção anterior, podemos agora integrar em Y sobre as curvas e assim obter a seção de choque total σ , com

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{dY} dY. \quad (4.31)$$

A seguir, nas próximas subseções apresentaremos nossas predições.

4.3.1 Seções de choque totais

A Tabela 3 apresenta as seções de choque totais (em nanobarn) para a produção de estados ligados de léptons em colisões elétron-pósitron com as energias do ILC. Já a Tabela 4

apresenta as seções de choque totais para as colisões com energias do FCC.

Tabela 3 – Seções de choque totais em nanobarn para a colisão elétron-pósitron com energias do ILC.

	Parapositrônio (nb)	Paramuônio (nb)	Paratauônio (nb)
$e^+e^- (\sqrt{s} = 250\text{GeV})$	31,25	$2,34 \times 10^{-4}$	$3,18 \times 10^{-7}$
$e^+e^- (\sqrt{s} = 365\text{GeV})$	34,30	$2,69 \times 10^{-4}$	$3,89 \times 10^{-7}$
$e^+e^- (\sqrt{s} = 500\text{GeV})$	36,99	$3,00 \times 10^{-4}$	$4,54 \times 10^{-7}$
$e^+e^- (\sqrt{s} = 1000\text{GeV})$	42,50	$3,77 \times 10^{-4}$	$6,21 \times 10^{-7}$

Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Tabela 4 – Seções de choque totais em nanobarn para a colisão elétron-pósitron com energias do FCC.

	Parapositrônio (nb)	Paramuônio (nb)	Paratauônio (nb)
$e^+e^- (\sqrt{s} = 91\text{GeV})$	23,99	$1,56 \times 10^{-4}$	$1,70 \times 10^{-7}$
$e^+e^- (\sqrt{s} = 160\text{GeV})$	27,89	$1,97 \times 10^{-4}$	$2,46 \times 10^{-7}$
$e^+e^- (\sqrt{s} = 240\text{GeV})$	30,93	$2,30 \times 10^{-4}$	$3,11 \times 10^{-7}$
$e^+e^- (\sqrt{s} = 365\text{GeV})$	34,30	$2,69 \times 10^{-4}$	$3,89 \times 10^{-7}$

Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

De forma condizente com as distribuições de rapidez discutidas nas subseções anteriores, em ambos os colisores, as seções de choque totais crescem com o aumento da energia e decrescem com o aumento da massa do estado gerado, com variação de até oito ordens de grandeza do positrônio para o tauônio.

A Tabela 5 apresenta as seções de choque totais em nanobarn para as colisões elétron-próton e elétron-chumbo a nível de Born e Born + Coulomb (B+C) com energias do EIC. Para as colisões no EIC, nota-se que as colisões do tipo ep apresentam aproximadamente mesma ordem de grandeza que as colisões e^+e^- para a produção de positrônio, o que é esperado devido às cargas unitárias das partículas envolvidas na colisão. No entanto, para as colisões do tipo eA , nota-se seções de choque totais com valores três ordens de grandeza maiores. Isso ocorre devido ao fato de que o fluxo de fótons emitido pelo núcleo é muito maior, já que o fluxo cresce com Z^2 . Nota-se, também, o impacto das correções coulombianas, que representam uma diminuição em cerca de 16,6% para a energia de colisão de 85 GeV e 19% para a energia de colisão de 35 GeV nas seções de choque totais.

4.3.2 Taxas de eventos

Utilizando as luminosidades apresentadas na Seção 4.1 e sintetizadas na Tabela 6 para o ILC e FCC, podemos calcular as taxas de eventos de nosso interesse. A luminosidade de um

colisor é definida como o número de partículas por unidade de área por unidade de tempo no eixo de colisão. Assim, ao integrarmos a luminosidade no tempo, teremos o número de partículas por unidade de área no período em que foi integrada. Podemos obter o número de eventos da relação

$$N = \sigma \mathfrak{L}, \quad (4.32)$$

onde \mathfrak{L} é a luminosidade integrada no tempo.

As Tabelas 7 e 8 apresentam as taxas de eventos por uma *run* típica do ILC e do FCC, respectivamente. É importante mencionar que as luminosidades utilizadas estão de acordo com estimativas prévias para os colisores, conforme os dados obtidos em [42].

Diferente do ILC e do FCC em que as luminosidades são dadas para uma *run* típica, para o EIC utilizamos as luminosidades integradas de 1500 ab^{-1} por mês e 30000 ab^{-1} correspondente

Tabela 5 – Seções de choque totais para a colisão ep e ePb .

	Parapositrônio (nb)	Paramuônio (nb)	Paratauônio (nb)
$e^- p(\sqrt{s} = 35 \text{ GeV})$	7,56	$2,36 \times 10^{-5}$	$6,74 \times 10^{-9}$
$e^- p(\sqrt{s} = 134 \text{ GeV})$	11,57	$5,20 \times 10^{-5}$	$3,49 \times 10^{-8}$
$e^- Pb(\sqrt{s} = 35 \text{ GeV})$ (Born)	$36,68 \times 10^3$	$7,42 \times 10^{-2}$	$3,34 \times 10^{-6}$
$e^- Pb(\sqrt{s} = 85 \text{ GeV})$ (Born)	$50,45 \times 10^3$	$1,48 \times 10^{-1}$	$3,28 \times 10^{-5}$
$e^- Pb(\sqrt{s} = 35 \text{ GeV})$ (B+C)	$29,70 \times 10^3$	-	-
$e^- Pb(\sqrt{s} = 85 \text{ GeV})$ (B+C)	$42,08 \times 10^3$	-	-

Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Tabela 6 – Luminosidades para cada execução (*run*) típica em diferentes energias do ILC e FCC

	ILC \sqrt{s} (Gev), \mathfrak{L} (ab^{-1})	FCC \sqrt{s} (GeV), \mathfrak{L} (ab^{-1})
<i>run 1</i>	250, 2	91, 204
<i>run 2</i>	365, 0.2	160, 9.6
<i>run 3</i>	500, 4	240, 7.2
<i>run 4</i>	1000, 5.4	365, 2.68

Fonte: Adaptado de [42]

Tabela 7 – Taxas de eventos nas colisões elétron-pósitron com energias do ILC por *run*.

	Parapositrônio	Paramuônio	Paratauônio
$e^+ e^- (\sqrt{s} = 250 \text{ GeV})$	$6,25 \times 10^{10}$	$4,68 \times 10^5$	$6,36 \times 10^2$
$e^+ e^- (\sqrt{s} = 365 \text{ GeV})$	$6,86 \times 10^9$	$5,38 \times 10^4$	$7,78 \times 10^1$
$e^+ e^- (\sqrt{s} = 500 \text{ GeV})$	$1,48 \times 10^{11}$	$1,20 \times 10^6$	$1,82 \times 10^3$
$e^+ e^- (\sqrt{s} = 1000 \text{ GeV})$	$2,29 \times 10^{11}$	$2,04 \times 10^6$	$3,35 \times 10^3$

Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Tabela 8 – Taxas de eventos por *run* nas colisões elétron-pósitron com energias do FCC.

	Parapositrônio	Paramuônio	Paratauônio
$e^+e^- (\sqrt{s} = 91 \text{ GeV})$	$4,89 \times 10^{12}$	$3,18 \times 10^7$	$3,46 \times 10^4$
$e^+e^- (\sqrt{s} = 160 \text{ GeV})$	$2,68 \times 10^{11}$	$1,89 \times 10^6$	$2,36 \times 10^3$
$e^+e^- (\sqrt{s} = 240 \text{ GeV})$	$2,23 \times 10^{11}$	$1,65 \times 10^6$	$2,24 \times 10^3$
$e^+e^- (\sqrt{s} = 365 \text{ GeV})$	$9,19 \times 10^{10}$	$7,21 \times 10^5$	$1,04 \times 10^3$

Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

a 30 semanas de funcionamento [47, 48]. Na Tabela 9, apresentamos as taxas de eventos por mês e para 30 semanas para as colisões no EIC.

Tabela 9 – Taxas de eventos nas colisões elétron-núcleo de chumbo com energias do EIC.

	Parapositrônio		Paramuônio		Paratauônio	
	por mês	30 sem.	por mês	30 sem.	por mês	30 sem.
$ep(\sqrt{s} = 35 \text{ GeV})$	$1,13 \times 10^7$	$2,27 \times 10^8$	$3,54 \times 10^1$	$7,08 \times 10^2$	$1,01 \times 10^{-2}$	$2,02 \times 10^{-1}$
$ep(\sqrt{s} = 134 \text{ GeV})$	$1,16 \times 10^7$	$3,47 \times 10^8$	$7,8 \times 10^1$	$1,56 \times 10^3$	$5,23 \times 10^{-2}$	$1,05 \times 10^{-1}$
$ePb(\sqrt{s} = 35 \text{ GeV})$ (Born)	$5,5 \times 10^{10}$	$1,1 \times 10^{12}$	$1,11 \times 10^5$	$2,23 \times 10^6$	$5,01$	$1,0 \times 10^2$
$ePb(\sqrt{s} = 85 \text{ GeV})$ (Born)	$7,57 \times 10^{10}$	$1,51 \times 10^{12}$	$2,22 \times 10^5$	$4,44 \times 10^6$	$4,92 \times 10^1$	$9,8 \times 10^2$
$ePb(\sqrt{s} = 35 \text{ GeV})$ (B+C)	$4,45 \times 10^{10}$	$8,91 \times 10^{11}$	-	-	-	-
$ePb(\sqrt{s} = 85 \text{ GeV})$ (B+C)	$6,31 \times 10^{10}$	$1,26 \times 10^{12}$	-	-	-	-

Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Como podemos observar, prevemos uma grande taxa de eventos em todas as colisões, sobretudo para o parapositrônio, com taxa de produção na ordem de até 10^{12} por *run* no FCC e para 30 semanas no EIC. Observamos também que a produção de paramuônio e paratauônio podem ser pequenas, que é um resultado esperado, conforme já observado nas distribuições, a produção desses estados ligados é mais difícil devido a energia requerida por suas massas.

Vale ressaltar, também, que as luminosidades utilizadas aqui estão de acordo com estimativas prévias para os colisores, conforme os dados obtidos em [42] para o ILC e para o FCC, e os dados obtidos em [47, 48] para o EIC. Estas estimativas prévias podem ter valores menores que aqueles de fato alcançados, visto que, para o EIC por exemplo, o valor utilizado é o mínimo previsto, podendo alcançar valores maiores, de até 100 fb^{-1} .

Ao compararmos nossos resultados com outros estudos que também analisam a fotoprodução de estados ligados, como nas referências [38] e [37] que analisam a fotoprodução em colisões hadrôn-hadrôn, notamos que nossas predições para seções de choque totais são menores que as predições para esse tipo de colisão. Isso ocorre devido à diferença nos fluxos que cresce com Z^2 . A Tabela 10 apresenta os resultados obtidos nas referências [38] e [37].

Como os processos envolvidos são diferentes, é natural que os resultados sejam diferentes, com a observação da conservação da ordem de grandeza. A grande diferença em relação aos nossos resultados se dá na taxa de eventos, em que encontramos até três ordens de grandeza

Tabela 10 – Seções de choque totais em nanobarn para a produção de estados ligados da QED em colisões AuAu e PbPb.

		Parapositrônio (nb)	Paramuônio (nb)	Paratauônio (nb)
[38]	AuAu ($\sqrt{s} = 0,2$ TeV)	$1,36 \times 10^8$	$2,0 \times 10^2$	$9,68 \times 10^{-3}$
	PbPb ($\sqrt{s} = 2,76$ TeV)	$5,85 \times 10^8$	$1,2 \times 10^3$	$6,55 \times 10^{-1}$
	PbPb ($\sqrt{s} = 5,02$ TeV)	$4,01 \times 10^9$	$1,59 \times 10^3$	1,08
[37]	AuAu ($\sqrt{s} = 0,2$ TeV)	$1,12 \times 10^8$	$1,5 \times 10^2$	$3,8 \times 10^{-3}$
	PbPb ($\sqrt{s} = 5,02$ TeV)	$3,33 \times 10^8$	$1,29 \times 10^3$	$8,32 \times 10^{-1}$
	PbPb ($\sqrt{s} = 10,6$ TeV)	$4,0 \times 10^8$	$1,79 \times 10^3$	1,45
	PbPb ($\sqrt{s} = 39$ TeV)	$5,37 \times 10^8$	$2,94 \times 10^3$	3,14

Fonte: Adaptado de [38] e [37]

maior para a produção de positrônio, quatro para o muônio e seis para o tauônio, como mostra a Tabela 11 que apresenta as taxas de eventos por ano obtidas em [37]. Essas diferenças para as taxas de eventos ocorrem devido às diferentes luminosidades dos colisores estudados.

Tabela 11 – Taxas de eventos por ano para a produção de estados ligados da QED em colisões AuAu e PbPb.

	Parapositrônio	Paramuônio	Paratauônio
AuAu ($\sqrt{s} = 0,2$ TeV)	$1,12 \times 10^9$	$1,5 \times 10^3$	$3,8 \times 10^{-2}$
PbPb ($\sqrt{s} = 5,02$ TeV)	$3,33 \times 10^9$	$1,29 \times 10^4$	8,32
PbPb ($\sqrt{s} = 10,6$ TeV)	$4,0 \times 10^9$	$1,79 \times 10^4$	$1,45 \times 10^1$
PbPb ($\sqrt{s} = 39$ TeV)	$5,91 \times 10^{10}$	$3,24 \times 10^5$	$3,45 \times 10^2$

Fonte: Adaptado de [37]

4.4 FECHAMENTO

Neste capítulo apresentamos e discutimos nossos resultados para a fotoprodução de estados ligados singletos de léptons em colisões elétron-pósitron, elétron-próton e elétron-chumbo. Apresentamos as especificações dos futuros colisores que serão capazes de realizar essas colisões, com atenção especial para as energias alcançadas e as luminosidades previstas. Para a colisão elétron-núcleo, estimamos a correção de mais alta ordem em relação ao nível de Born (mais baixa ordem) da QED e avaliamos seu impacto, bem como apresentamos e discutimos a distribuição de virtualidade e momento transverso, que nos permite predizer um ângulo de espalhamento para os estados ligados produzidos. Estimamos, também, a taxa de eventos em cada uma das colisões estudadas e obtivemos resultados que apontam para uma grande produção de estados, principalmente o parapositrônio, o qual prevemos produções na ordem de 10^{12} estados produzidos por cada *run* típica.

5 CONCLUSÃO

Apresentamos nesta dissertação o nosso estudo a respeito da produção de parapositrônio, paramuônio e paratauônio em colisões de partículas eletricamente carregadas em velocidades relativísticas. Utilizamos diferentes energias de centro de massa possíveis para os colisores ILC, FCC e EIC. Consideramos também as distribuições em virtualidades não desprezíveis.

Observamos que apesar de não atingir energias tão altas quanto as colisões hadrônicas realizadas em colisores atuais, como *Large Hadron Collider*, que pode chegar a 14 TeV em colisões próton-próton, os colisores estudados apresentam alta taxa de eventos, devido a suas altas luminosidades.

Foi possível observar, também, que nas colisões assimétricas, como elétron-próton e elétron-chumbo, as distribuições de seção de choque em rapidez se comportam de forma assimétrica em relação ao eixo de rapidez, o que indica diferença entre os fluxos das partículas envolvidas, nesse caso, o próton e o núcleo de chumbo. Consideramos eventos em que a partícula de menor massa sofrerá maior deflexão, emitindo fôtons com maiores virtualidades pela relação $Q^2 = m^2 x^2 + q_t^2$.

Por conservação de momento, esse momento transverso carregado pelo fóton emitido pelo elétron será transmitido ao estado ligado produzido, afastando-o do eixo de incidência das partículas. Essa deflexão é importante por fornecer informações relevantes nos experimentos, como o pico de momento transverso. Observamos, também, que o ângulo de deflexão cresce com o aumento do momento transverso, o que dificulta a detecção dos estados ligados, já que a produção do estados cai com o aumento do momento transverso.

Dadas as altas taxas de produção nos colisores, é possível novas observações de positrônio e, de maneira inédita, a detecção de muônio, pois as altas taxas de eventos indicam que a observação experimental futura pode ser factível. Contudo, mesmo para os novos colisores e alta luminosidade, ainda são baixas as taxas de produção de tauônio. Observamos, por exemplo, taxas de produção na ordem de 10^{12} para uma *run* típica do FCC para o positrônio e de até 10^7 para o muônio, enquanto que nossa melhor estimativa para o tauônio foi na ordem de 10^4 .

No entanto, as luminosidades aqui utilizadas são estimativas para o valor mínimo esperado e podem ser ainda maiores, o que aumentaria a possibilidade de detecção dos estados ligados de todos os sabores. É interessante, ainda, notarmos que a taxa de eventos não necessariamente é maior para maiores energias de centro de massa, como ocorre no FCC, onde a luminosidade decresce com o aumento da energia. Diferentemente, para o ILC e EIC, as taxas de eventos crescem com a energia de centro de massa e, nos três casos, decrescem com o aumento da massa do estado ligado produzido.

Em comparação com os colisores hadrônicos, observamos que devido às diferenças nas luminosidades dos colisores, as colisões elétron-pósitron apresentam maiores taxas de eventos, em que encontramos até três ordens de grandeza maior para a produção de positrônio, quatro para o muônio e seis para o tauônio para cada uma *run* típica dos diferentes colisores.

Em estudos futuros, pretendemos incluir a produção de ortoestados e expandir as distribuições de momento transverso em colisões elétron-pósitron, bem como considerar a deflexão do hadrón como não desprezível nas colisões elétron-próton e elétron-núcleo. Pretendemos também analisar colisões no EIC com o íon alvo fixo, pois de acordo com a referência [38], teremos maiores momentos transversos para menores energias. Como o tempo de vida dos estados ligados é pequeno, pretendemos estimar a produção e as distribuições cinemáticas dos produtos de decaimento dos estados ligados, que pode ser importante por ser uma forma de medir os próprios estados.

APÊNDICE A – DERIVAÇÃO QUÂNTICA DO ESPECTRO DE FÓTONS EQUIVALENTES

Na presente seção obteremos a derivação quântica do espectro de fótons equivalentes. Em primeiro momento, nos concentraremos no caso em que os fótons são emitidos por uma carga pontual [21]. Dessa forma, vamos supor um elétron em alta energia com quadrimomento inicial $p = (E, \mathbf{p})$ espalhado para um estado final $p' = (E', \mathbf{p}')$ o qual emite um fóton virtual com quadrimomento $k = p - p'$. Os detalhes da reação não são necessariamente importantes para nosso estudo neste momento, então vamos supor que o fóton emitido atinge uma partícula de massa M e dá origem à reação que produz N partículas no estado final X , como descrito na Figura 29. A seção de choque do processo é dada por

$$d\bar{\sigma} = \frac{mM}{\sqrt{(p \cdot P)^2 - m^2 M^2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_X + p' - P - p) \frac{md^3 p'}{(2\pi)^3 E'} \prod_{n=1}^N \frac{m_n d^3 P'_n}{(E'_n)}. \quad (\text{A.1})$$

Por regras de Feynman, temos que o elemento de matriz invariante é

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{4\pi}{k^2} j_{fi}^\mu(p', p) J_{fi\mu}(P'_n, P), \quad (\text{A.2})$$

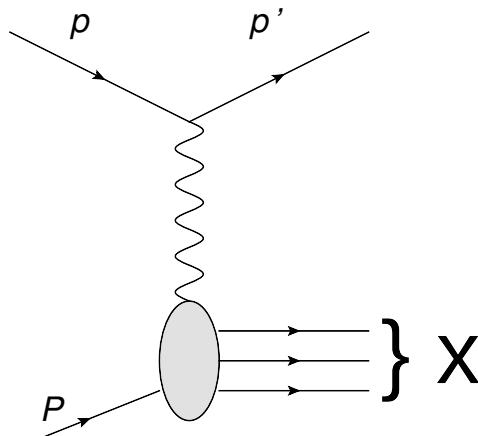
onde $j_{fi}^\mu = e\bar{u}\gamma^\mu u$ é a corrente de transição do elétron e J_{fi}^μ é a corrente de transição do alvo, que pode ter uma estrutura muito complexa que nos impossibilita conhecer os detalhes. Contudo, para o cálculo de (A.1), precisamos do módulo quadrado da amplitude de espalhamento média, que é dada por

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = (4\pi)^2 \frac{e^2}{(k^2)^2} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \quad (\text{A.3})$$

em que

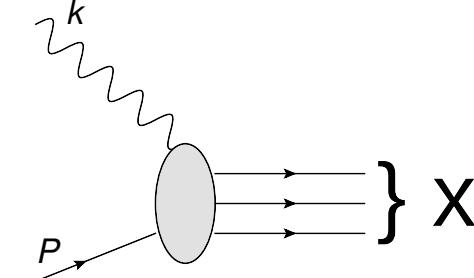
$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^\nu \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{m^2} [p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} (p' \cdot p - m^2)], \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Figura 29 – Espalhamento por um fóton virtual



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

Figura 30 – Absorção de um fóton real



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

é o tensor leptônico devido ao elétron, no qual utilizamos a notação *slash* de Feynman onde $\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$. Em (A.3) temos ainda $H_{\mu\nu}$, que é o tensor hadrônico, o qual é obtido de

$$H^{\mu\nu} = \sum_{spins} J_{fi}^{\mu*}(P'_n, P) J_{fi}^\nu(P'_n, P). \quad (\text{A.5})$$

A partir da invariância de gauge que implica na conservação da corrente eletromagnética e da condição de transversalidade quadridimensional que é satisfeita pelo tensor hadrônico, isto é, $k_\mu H^{\mu\nu} = H^{\mu\nu} k_\nu = 0$, podemos utilizar que $p' = p - k$ e $k^2 = (p - p')^2 = 2m^2 - 2p \cdot p'$ para escrever a seção de choque do espalhamento integrado sobre o estado final dos elétrons como

$$d\bar{\sigma} = \int \frac{d^3 p'}{|\mathbf{p}| E' 2\pi^2} \frac{\alpha}{k^2} \left(\frac{1}{k^2} \right)^2 \left(2p^\mu p^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} k^2 \right) H_{\mu\nu} 2\pi d\Gamma, \quad (\text{A.6})$$

assumindo que o alvo está em repouso, isso é $P = (M, 0)$. Aqui inserimos o símbolo $d\Gamma$, que representa o volume do espaço de fase do estado final do alvo

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^4(P_X - P - k) \prod_{n=1}^N \frac{m_n d^3 P'_n}{(2\pi)^3 E'_n} \quad (\text{A.7})$$

Vamos agora estudar o processo de espalhamento iniciado por um fóton real. O diagrama de Feynman correspondente é apresentado na Figura 30. A seção de choque do processo com o fóton real é dada por

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma}_\gamma &= \frac{2M4\pi}{4\sqrt{(k \cdot P)^2}} |\mathbf{\epsilon} \cdot \mathbf{J}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_X - P - k) \prod_{n=1}^N \frac{m_n d^3 P'_n}{(2\pi)^3 E'_n} \\ &= \frac{1}{2\omega} 4\pi \sum_{spins} \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \mathbf{\epsilon}_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) \mathbf{\epsilon}_\nu(\mathbf{k}, \lambda) J_{fi}^{\mu*} J_{fi}^\nu d\Gamma, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

e, utilizando a relação de completeza do vetor polarização do fóton $\sum_{\lambda} \mathbf{\epsilon}_\mu^* \mathbf{\epsilon}_\nu = -g_{\mu\nu}$, temos

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma}_\gamma &= \frac{1}{2\omega} 2\pi \sum_{spins} (-g_{\mu\nu}) J_{fi}^{\mu*} J_{fi}^\nu d\Gamma \\ &= \frac{1}{2\omega} 2\pi (-H_\mu^{0\mu}) d\Gamma, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde o índice 0 no tensor hadrônico indica que o cálculo está sendo realizado para fótons reais, ou seja, que satisfazem a condição de camada de massa $k^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2 = 0$, enquanto que na Equação (A.5) não há nenhuma relação fixa entre entre a frequência e o momento do fóton. Sabemos apenas que os fótons virtuais satisfazem a relação $k^2 < 0$, que pode ser deduzido de $k^2 = (p - p')^2 = 2m^2 - 2p \cdot p'$. O negativo deste momento quadrado é conhecido como virtualidade do fóton $Q^2 = -k^2 \geq 0$.

Vamos então expressar a seção de choque do elétron, obtida na Equação (A.6), em termos da seção de choque do fóton, obtida na Equação (A.8). Para isso, precisamos descobrir sob quais condições os tensores $H_{\mu\nu}$ e $H_{\mu}^{0\mu}$ são proporcionais. Dessa forma, é útil escolhermos um calibre que nos permita identificar os graus de liberdade transversais correspondentes aos fótons reais. Isso pode ser atingido com o calibre de Coulomb, definido pela condição $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Vamos ainda considerar o problema sem fontes externas, portanto $A_0 = 0$ e o vetor polarização dos fótons é na forma $\varepsilon^\mu = (0, \varepsilon)$. Sob estas condições, a seção de choque da fotoprodução é dada por

$$d\bar{\sigma}_\gamma = \frac{1}{2\omega} 2\pi H_{ii}^{0\perp} d\Gamma, \quad (\text{A.10})$$

onde $i = 1, 2, 3$ e o símbolo de perpendicularidade (\perp) indica que devido ao calibre de Coulomb, o tensor hadrônico é tridimensionalmente transverso.

Para o processo de espalhamento envolvendo o elétron, a seção de choque no calibre de Coulomb será

$$d\bar{\sigma} = \int \frac{d^3 p'}{|\mathbf{p}'| E' 2\pi^2} \left(\frac{1}{k^2} \right)^2 \left(2p_i p_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} k^2 \right) H_{ij}^\perp 2\pi d\Gamma, \quad (\text{A.11})$$

com

$$H_{ij}^\perp = \left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{\mathbf{k}^2} \right) \left(\delta_{jl} - \frac{k_j k_l}{\mathbf{k}^2} \right) H_{kl} \quad (\text{A.12})$$

No limite de altas energias ($E \gg m, |\mathbf{p}| \simeq E$) e para pequenos ângulos de espalhamento, $p_i p_j H_{ij}^\perp$ se relaciona com H_{ii}^\perp a partir da integração no ângulo azimutal do momento final \mathbf{p}' do elétron. Dessa forma, podemos mostrar que [21]

$$\int_0^{2\pi} d\phi p_i p_j H_{ij}^\perp \simeq \frac{E^2 E'^2}{2\mathbf{k}^2} \sin^2 \theta \int_0^{2\pi} d\phi H_{ii}^\perp. \quad (\text{A.13})$$

Usando a relação da Equação (A.13), a seção de choque para o processo de espalhamento do elétron torna-se

$$d\bar{\sigma} = \frac{\alpha}{2\pi^2} \int \frac{d^3 p'}{EE'} \left(\frac{1}{k^2} \right)^2 \left(-\frac{k^2}{2} + \frac{E^2 E'^2}{\mathbf{k}^2} \sin^2 \theta \right) H_{ii}^\perp 2\pi d\Gamma, \quad (\text{A.14})$$

onde utilizamos $k^2 \approx 0$ e negligenciamos o fato de que a corrente de transição tem de ser avaliada para fótons fora da camada de massa. Estas aproximações nos permitem identificar

$$H_{ii}^\perp \simeq H_{ii}^{\perp 0}. \quad (\text{A.15})$$

Sob estas condições, a integral em (A.14) pode ser escrita utilizando a seção de choque do fóton obtida na Equação (A.10) como um fator, que nos leva a

$$d\bar{\sigma} = \frac{\alpha}{2\pi^2} \int \frac{d^3 p'}{EE'} \left(\frac{1}{k^2} \right)^2 \left(-\frac{k^2}{2} + \frac{E^2 E'^2}{\mathbf{k}^2} \sin^2 \theta \right) 2\omega d\bar{\sigma}_\gamma. \quad (\text{A.16})$$

Utilizando $k^2 = (p - p')^2 = 2m^2 - 2p \cdot p' = 2m^2 - 2EE' + |\mathbf{p}||\mathbf{p}'|cos\theta$, a integração sobre o momento final do elétron pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \int d^3 p' &= \int_0^{|\mathbf{p}|} d|\mathbf{p}'| |\mathbf{p}'|^2 \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \simeq 2\pi \int_0^E dE' E'^2 \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \\ &\simeq 2\pi \int_0^E dE' E'^2 \frac{1}{2EE'} \int_{k_+^2}^{k_-^2} dk^2. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Os limites utilizados na segunda integral são os quadrimomentos transferidos, o qual é máximo quando o ângulo de espalhamento θ do elétron é igual a π e é mínimo quando $\theta = 0$. No limite ultrarrelativístico, o quadrimomento transferido máximo é dado por

$$k_+^2 = 2m^2 - 2EE' + 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'| \simeq -4EE'. \quad (\text{A.18})$$

Para o quadrimomento transferido mínimo precisamos tomar um certo cuidado e levar em conta a massa finita do elétron, ou então a integral iria divergir devido ao polo proveniente do propagador do fóton. Devemos então inserir uma expansão de Taylor de $|\mathbf{p}| = \sqrt{E^2 - m^2} \simeq E(1 - m^2/(2E^2))$. Assim, o quadrimomento transferido mínimo será dado por

$$k_-^2 = 2m^2 - m^2 \frac{E^2 + E'^2}{EE'} \simeq -m^2 \frac{\omega^2}{EE'}. \quad (\text{A.19})$$

Levando estes resultados na Equação (A.16), obtemos a equação básica do método da aproximação de fótons equivalentes de Weizsäcker–Williams:

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma} &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^E dE' E'^2 \frac{2\omega}{2(EE')^2} \int_{k_+^2}^{k_-^2} dk^2 \left(\frac{1}{k^2} \right)^2 \left(-\frac{k^2}{2} + \frac{E^2 E'^2}{\mathbf{k}^2} \sin^2\theta \right) d\bar{\sigma}_\gamma(\omega) \\ &= \int_0^E \frac{d\omega}{\omega} n(\omega) d\bar{\sigma}_\gamma(\omega), \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

onde $n(\omega)$ pode ser interpretado como o espectro de fótons equivalentes.

Deduzimos $n(\omega)$ a partir da corrente de transição dada pela eletrodinâmica quântica. Para termos uma derivação completa, é necessário obter uma expressão para o espectro de fótons equivalentes. Usando o fato de que para energias relativísticas $m \ll EE'$, $p^2 \simeq E^2$ e $p'^2 \simeq E'^2$, o espectro se torna

$$\begin{aligned} n(\omega) &= \frac{\alpha \omega^2}{\pi E^2} \int_{k_+^2}^{k_-^2} dk^2 \left(\frac{1}{k^2} \right)^2 \left(-\frac{k^2}{2} + \frac{E^2 E'^2}{\mathbf{k}^2} \sin^2\theta \right) \\ &= \frac{\alpha \omega^2}{\pi E^2} \int_{k_+^2}^{k_-^2} dk^2 \left(\frac{1}{k^2} \right)^2 \left(-\frac{k^2}{2} + \frac{m^2 \omega^2 - \frac{1}{4} k^4 - k^2 EE'}{\omega^2 - k^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Integrando a expressão acima, obtemos uma expressão fechada para o espectro de fótons equivalentes

$$n(\omega) = \frac{\alpha}{\pi E^2} \left[(E^2 + E'^2) \ln \frac{2E}{m} + \frac{1}{2} (E - E')^2 \ln \frac{E'}{E - E'} + \frac{1}{2} (E + E')^2 \ln \frac{E'}{E + E'} - EE' \right]. \quad (\text{A.22})$$

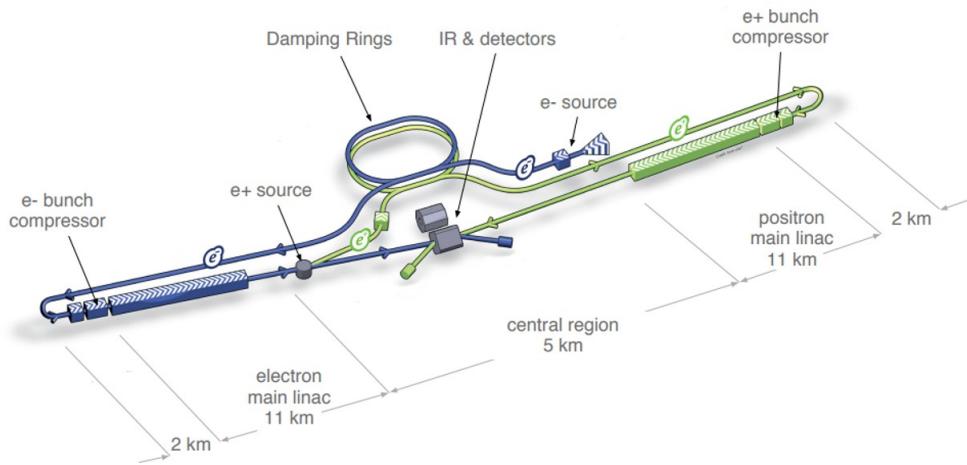
Esse resultado nos mostra que para energias ultrarrelativísticas, $n(\omega)$ é dominado por um aumento logarítmico com energia E . Os termos restantes dependem apenas da perda de energia do elétron E'/E .

APÊNDICE B – COLISORES

Nossas análises são realizadas em torno de três futuros colisores, que têm previsão de funcionamento para as próximas décadas. São eles o *International Linear Collider* (ILC), o *Future Circular Collider* (FCC) e o *Electron-Ion Collider* (EIC). A seguir apresentaremos detalhes técnicos de cada um deles.

B.1 INTERNATIONAL LINEAR COLLIDER

Figura 31 – Desenho esquemático do *International Linear Collider* (fora de escala).



Fonte: [49]

O *International Linear Collider* (ILC) será um colisor composto por dois aceleradores lineares que se estenderão por 30 a 50 quilômetros de comprimento, colidirá elétrons e pósitrons com velocidades próximas às da luz, com aproximadamente 7.000 colisões por segundo. Sua construção será realizada no norte do Japão como um projeto global e apoio do governo japonês.

O ILC está previsto para operar em energias de centro de massa de até 250 GeV com a possibilidade de expansão para até 1 TeV. Será baseado em tecnologia supercondutora de radiofrequência usando cavidades de nióbio como estruturas de aceleração. Será constituído por [49]:

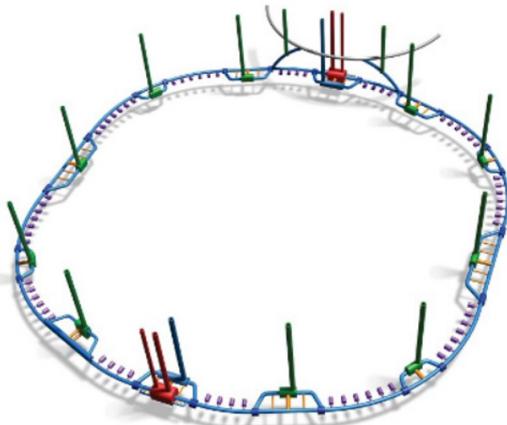
1. Uma fonte de elétrons polarizados baseado em um canhão DC fotocátodo;
2. Uma fonte de pósitrons polarizados. Os pósitrons são obtidos a partir de um par elétron-pósitron por conversão de fótons de alta energia produzidos pela passagem do feixe principal de elétrons de alta energia através de um ondulador;
3. Anéis amortecedores de elétrons e pósitrons de 5 GeV com circunferência de 3,2 km, alojados em um túnel comum;

4. Transporte de feixe dos anéis de amortecimento para os *Linear Particle Accelerators* (LINACs) principais, seguido por um sistema de compressão de feixe de dois estágios antes da injeção no LINAC principal;
5. Dois LINACs principais de 11 km, utilizando cavidades supercondutores de radio-frequência de 1,3 GHz operando em um gradiente médio de 31,5 MV/m, com duração de pulso de 1,6 ms;
6. Dois sistemas de distribuição de feixes, cada um com 2,2 km de comprimento, que colocam os feixes em colisão com um ângulo de cruzamento de 14 mrad, em um único ponto de interação que pode ser ocupado por dois detectores em uma configuração chamada “*push-pull*”.

A Figura 31 apresenta o esquema do complexo do acelerador, indicando a localização dos principais sub-sistemas. As luminosidades integradas esperadas, em attobarn^{-1} , para as colisões e^+e^- durante a operação típica *run*, para cada intervalo de energia são 2 ab^{-1} para 250 GeV, $0,2 \text{ ab}^{-1}$ para 365 GeV, 4 ab^{-1} para 500 GeV e $5,4 \text{ ab}^{-1}$ para 1 TeV [42].

B.2 FUTURE CIRCULAR COLLIDER

Figura 32 – Esquema 3D do FCC (fora de escala)



Fonte: [50]

O *Future Circular Collider* (FCC) é um projeto internacional do *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire* (CERN) com ênfase em um colisor de hadrons com uma energia de centro de massa da ordem de 100 TeV em um novo túnel de 80-100 km. Tem o propósito de hospedar a próxima geração de colisores de partículas, substituindo o *Large Hadron Collider* (LHC), assim que concluir sua fase de alta luminosidade (HL-LHC) por volta de 2040, com o objetivo de ampliar as fronteiras de energia e intensidade dos colisores atuais. A Figura 32 apresenta um esquema em 3D das estruturas subterrâneas do FCC fora de escala.

Atualmente, examina-se cenários para três tipos diferentes de colisões de partículas: colisões de hadrons com o FCC-hh, colisões do tipo elétron-pósitron com o FCC-ee e colisões de tipo lepton-hádron com o FCC-he. Estudos de física e detectores para cada opção estão sendo conduzidos atualmente. Paralelamente, equipes dedicadas de especialistas estão realizando análises aprofundadas da infraestrutura, dos conceitos de operação e das principais tecnologias necessárias. Para os propósitos de nosso estudo, nos concentramos no FCC-ee.

O FCC-ee é desenhado para fornecer alta luminosidade em cada uma das diferentes energias de colisão, que variam de 88 a 365 GeV. O *layout* do colisor segue o do colisor de hadrons com uma circunferência de 97,75 km. As luminosidades integradas por *run*, em atobarn⁻¹ são 204 ab⁻¹ para 91 GeV, 9,6 ab⁻¹ para 160 GeV, 7,2 ab⁻¹ para 240 GeV e 2,68 ab⁻¹ para 365 GeV [42].

B.3 ELECTRON-ION COLLIDER

O *Electron-Ion Collider* será um acelerador de partículas que colidirá elétrons com prótons e núcleos atômicos, construído pelo *Brookhaven National Laboratory* (BNL) na cidade de Upton, em Nova Iorque, nos Estados Unidos. Sua construção foi anunciada em 2020 pela *The United States Department of Energy* e deve operar já na próxima década.

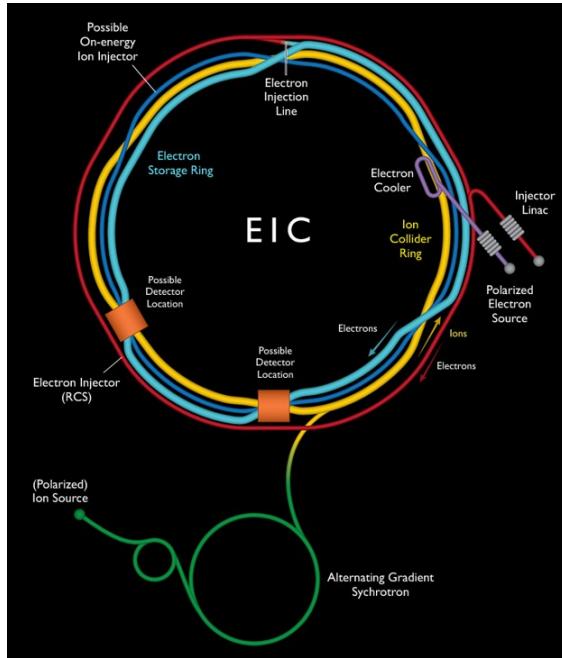
O colisor consistirá de dois aceleradores que se cruzam, um produzindo um intenso feixe de elétrons, o outro um feixe de alta energia de prótons ou núcleos atômicos mais pesados, como o chumbo, que são direcionados para colisões frontais. O hardware do colisor é composto por:

1. Uma fonte de íons, onde um átomo é confinado em uma câmara eletricamente carregada dentro de um ímã cilíndrico enquanto é atingido por um feixe de elétrons para arrancar os elétrons dos átomos presos;
2. Uma fonte de elétrons, que utiliza como princípio para o efeito fotoelétrico um cátodo e um ânodo;
3. Ímãs aceleradores supercondutores, que geram um poderoso campo magnético pela passagem de corrente elétrica em bobinas de fio supercondutor, que atingem a supercondutividade ao serem resfriados a 4 K;
4. Pré-aceleradores, que fornecem a energia inicial às partículas.

A Figura 33 mostra o esquema da estrutura do colisor. As principais características do EIC são:

- Sua alta luminosidade, superior a $10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$;
- Uma grande faixa de energia de centro massa, atingindo energias entre 5 e 18 GeV para os elétrons, 60 e 250 GeV para os prótons, e até 100 GeV/*u* para os núcleos pesados;

Figura 33 – Desenho esquemático da estrutura do EIC



Fonte: *Brookhaven National Laboratory*

- Os feixes serão polarizados, o que permite alterar o alinhamento para obter informações sobre o spin do próton e outras questões de física;
- Uma grande variedade de espécies de íons;
- Pelo menos um detector de grande aceitação, que permite capturar a maioria das partículas espalhadas pelas colisões em todas as direções e em uma ampla faixa de energias.

Com esses dados e especificações, podemos estimar as seções de choque totais e taxas de eventos.

REFERÊNCIAS

- 1 FROLOV, A. M. Annihilation, bound state properties and photodetachment of the positronium negatively charged ion. *Chemical Physics Letters*, v. 626, p. 49–54, 2015. ISSN 0009-2614. Citado na página 13.
- 2 CASSIDY, D. B.; DENG, S. H. M.; MILLS, A. P. Evidence for positronium molecule formation at a metal surface. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 76, Dec 2007. Citado na página 13.
- 3 MOSKAL, P. et al. Positronium imaging with the novel multiphoton pet scanner. *Science Advances*, American Association for the Advancement of Science, v. 7, n. 42, 2021. Citado na página 13.
- 4 MOSKAL, P.; STEPIEŃ, E. Ł. Positronium as a biomarker of hypoxia. *Bio-Algorithms and Med-Systems*, De Gruyter, v. 17, n. 4, p. 311–319, 2021. Citado na página 13.
- 5 DEUTSCH, M. Evidence for the formation of positronium in gases. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 82, p. 455–456, May 1951. Citado na página 13.
- 6 HUGHES, V. W. et al. Formation of muonium and observation of its larmor precession. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 5, p. 63–65, Jul 1960. Citado na página 13.
- 7 COOMBES, R. et al. Detection of $\pi - \mu$ coulomb bound states. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 37, p. 249–252, Aug 1976. Citado na página 13.
- 8 BRODSKY, S. J.; LEBED, R. F. Production of the smallest qed atom: True muonium. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 102, n. 21, maio 2009. ISSN 1079-7114. Citado na página 13.
- 9 D'ENTERRIA, D.; SHAO, H.-S. Discovering true tauonium via two-photon fusion at e^+e^- . *arXiv preprint arXiv:2202.02316*, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 28.
- 10 THOMSON, J. J. Cathode rays. *Philosophical Magazine*, 1897. Citado na página 15.
- 11 GIRARDI, T. J. *Aspectos da Eletrodinâmica Quântica em dimensões espaciais extras*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2015. 96 p. Citado na página 15.
- 12 WEINBERG, S. *The quantum theory of fields*. v. 2. New York: Cambridge University Press, 1996. Citado na página 15.
- 13 FARRAR, G. R. Stable sexaquark. *arXiv preprint arXiv:1708.08951*, 2017. Citado na página 16.
- 14 MATHIEU, V.; KOCHELEV, N.; VENTO, V. The physics of glueballs. *International Journal of Modern Physics E*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 18, n. 01, p. 1–49, jan. 2009. ISSN 1793-6608. Citado na página 16.
- 15 STACHEL, J. The early history of quantum gravity (1916–1940). In: _____. *Black Holes, Gravitational Radiation and the Universe: Essays in Honor of C.V. Vishveshwara*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1999. p. 525–534. Citado na página 17.

- 16 HALZEN, F.; MARTIN, A. D. *Quark & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. v. 1. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1984. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 20 e 21.
- 17 THOMSON, M. *Modern Particle Physics*. v. 1. New York: Cambridge University Press, 2013. Citado 7 vezes nas páginas 17, 19, 20, 21, 24, 25 e 29.
- 18 FEYNMAN, R. P. The theory of positrons. *Physical Review*, American Physical Society, v. 76, n. 6, p. 749, 1949. Citado na página 21.
- 19 TOMONAGA, S. On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. *Progress of Theoretical Physics*, The Physical Society of Japan, v. 1, n. 2, p. 27–42, 1946. Citado na página 21.
- 20 SCHWINGER, J. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Physical Review*, American Physical Society, v. 73, n. 4, p. 416, 1948. Citado na página 21.
- 21 GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field Quantization*. v. 1. [S.l.]: Spring Science & Business Media, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 21, 24, 66 e 68.
- 22 AITCHISON, I. J. R.; HEY, A. J. G. *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction*; 3nd ed. Bristol: IoP, 2003. (Graduate student series in physics). Citado na página 22.
- 23 BARONE, V.; PREDAZZI, E. *High-Energy Particle Diffraction*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. v.565. (Texts and Monographs in Physics, v.565). ISBN 978-3-540-42107-8. Citado 3 vezes nas páginas 24, 31 e 57.
- 24 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to elementary particles*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 29.
- 25 FRANCENER, R. *Fotoprodução de estados ligados de léptons em colisões hadrônicas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2022. 117 p. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 46.
- 26 LOW, F. E. Proposal for measuring the π^0 lifetime by π^0 production in electro-electron or electron-positron collision. *Physical Review, APS*, v. 120, n. 2, p. 582, 1960. Citado na página 31.
- 27 STROSCIO, M. A. Positronium: A review of the theory. *Physics Reports, Elsevier*, v. 22, n. 5, p. 215–277, 1975. Citado na página 33.
- 28 FERMI, E. On the theory of collisions between atoms and electrically charged particles. *arXiv preprint hep-th/0205086*, 2002. Citado na página 35.
- 29 WEIZSÄCKER, C. F. V. Radiation emitted in collisions of very fast electrons. *Z.Phys.*, v. 88, n. 612, p. 95, 1934. Citado na página 35.
- 30 WILLIAMS, E. J. Nature of the high energy particles of penetrating radiation and status of ionization and radiation formulae. *Physical Review, APS*, v. 45, n. 10, p. 729, 1934. Citado na página 35.
- 31 JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 36, 38, 40 e 43.

- 32 CARUSO, P. Sobre o método de weizsäcker-williams e suas primeiras aplicações. *Monografia do CBPF, MO-001/09*, 2009. Citado na página 38.
- 33 BERTULANI, C. A.; BAUR, G. Electromagnetic processes in relativistic heavy ion collisions. *Physics Reports*, v. 163, n. 5, p. 299–408, 1988. ISSN 0370-1573. Citado na página 39.
- 34 DÖBRICH, B. et al. Alptraum: Alp production in proton beam dump experiments. *J. High Energ. Phys.*, v. 18, 2016. Citado na página 40.
- 35 DREES, M.; ZEPPENFELD, D. Production of supersymmetric particles in elastic ep collisions. *Physical Review D*, APS, v. 39, p. 2536, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 49.
- 36 BUDNEV, V. M. et al. The two-photon particle production mechanism. physical problems. applications. equivalent photon approximation. *Physics Reports*, v. 15, n. 4, p. 181–282, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 49.
- 37 FRANCENER, R.; GONÇALVES, V. P.; MOREIRA, B. D. Photoproduction of relativistic qed bound states in hadronic collisions. *The European Physical Journal A*, Springer Science and Business Media LLC, v. 58, n. 2, fev. 2022. ISSN 1434-601X. Citado 3 vezes nas páginas 47, 62 e 63.
- 38 DAI, J.-P.; ZHAO, S. *Production of para-true muonium in linearly polarized photon fusions*. 2024. Citado 4 vezes nas páginas 47, 62, 63 e 65.
- 39 KŁUSEK-GAWENDA, M.; SZCZUREK, A. Exclusive muon-pair production in ultrarelativistic heavy-ion collisions: Realistic nucleus charge form factor and differential distributions. *Phys. Rev. C*, American Physical Society, v. 82, p. 014904, Jul 2010. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 49.
- 40 FRIXIONE, S. et al. Improving the weizsäcker-williams approximation in electron-proton collisions. *arXiv:hep-ph/9310350v1*, Oct 1993. Citado na página 48.
- 41 BARRETT, R. C.; JACKSON, D. *Nuclear sizes and structure*. [S.l.]: Clarendon Press: Oxford, 1977. Citado na página 49.
- 42 TELES, P. R. et al. *Searches for axion-like particles via $\gamma\gamma$ fusion at future e^+e^- colliders*. [S.l.], 2023. Citado 5 vezes nas páginas 51, 61, 62, 71 e 72.
- 43 KOTKIN, G. L. et al. Production of parapositronium and orthopositronium at relativistic heavy ion colliders. *Physical Review C*, American Physical Society (APS), v. 59, n. 5, p. 2734–2743, maio 1999. ISSN 1089-490X. Citado na página 53.
- 44 GEVORKYAN, S. R. et al. Production of relativistic positronium in collisions of photons and electrons with nuclei and atoms. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 58, n. 6, p. 4556–4564, dez. 1998. ISSN 1094-1622. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 55.
- 45 BALTZ, A. J. Higher-order qed calculation of ultrarelativistic heavy-ion production of $\mu^+\mu^-$ pairs. *Phys. Rev. C*, American Physical Society, v. 80, p. 034901, Sep 2009. Citado na página 56.
- 46 IVANOV, D.; MELNIKOV, K. Lepton pair production by a high energy photon in a strong electromagnetic field. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 57, n. 7, p. 4025–4034, abr. 1998. ISSN 1089-4918. Citado na página 56.

- 47 ACCARDI, A. et al. *Electron Ion Collider: The Next QCD Frontier - Understanding the glue that binds us all*. 2014. Citado na página 62.
- 48 WILLEKE, F.; BEEBE-WANG, J. Electron ion collider conceptual design report 2021. 2 2021. Citado na página 62.
- 49 BEHNKE, T. et al. *The International Linear Collider Technical Design Report - Volume 1: Executive Summary*. 2013. Citado na página 70.
- 50 ABADA, A. et al. FCC-ee: The lepton collider. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, p. 261–623, 2019. Citado na página 71.