

Universidade Estadual de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Otimização Topológica de Mecanismos Flexíveis Distribuídos
Considerando Segurança em Relação ao Escoamento e a Flambagem

Luis Renato Meneghelli

Joinville, julho de 2012

Otimização Topológica de Mecanismos Flexíveis Distribuídos Considerando Segurança em Relação ao Escoamento e a Flambagem

por

Luis Renato Meneghelli

Engenheiro Mecânico

Proposta de dissertação submetida ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica,
PPGEM, do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina,
como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre

Área de Concentração: Modelagem e Simulação Numérica

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Lenz Cardoso

Aprovada por:

Prof. Dr. Eduardo Lenz Cardoso

Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz-Rojas

Prof. Dr. Otávio Augusto Alves da Silveira

Prof. Dr. Joel Martins Crichigno Filho

Coordenador do PPGEM

Joinville, julho de 2012

Conteúdo

1	Introdução	5
2	Otimização Topológica	7
2.1	Histórico	8
2.2	Modelo Material - SIMP	9
2.3	Filtros e Projeções	11
3	Mecanismos Flexíveis	13
3.1	Mecanismos com flexibilidade distribuída	15
3.1.1	Sensibilidade da função energia de deformação	17
3.1.2	Sensibilidade de uma Componente do Deslocamento	18
4	Restrição de Tensão	20
4.1	Medida de Tensão Global	22
4.1.1	Sensibilidade da Norma- P de Tensão	22
5	Flambagem	25
5.1	Conceitos Relativos à Ocorrência de Flambagem	25
5.1.1	Modos Localizados de Flambagem	27
6	Conclusões / Proposta	28

Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição	Unidade
$\mathbf{U}$	Vetor de deslocamentos nodais da malha de elementos finitos	m
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global da malha de elementos finitos	$\frac{N}{m}$
$\mathbf{K}_\sigma$	Matriz de rigidez geométrica	$\frac{N}{m}$
$\mathbf{B}$	Matriz de deformação	$\frac{1}{m}$
$\mathbf{F}$	Vetor força	N
$\mathbf{F}_{cr}$	Vetor força crítica de flambagem	N
Ω	Domínio fixo de projeto	
$\mathbf{E}^0$	Tensor constitutivo de elasticidade do material base	Pa
$\mathbf{E}$	Tensor constitutivo de elasticidade do material	Pa
V	Volume total do domínio	m^3
$\mathbf{L}$	Operador vetorial de localização do deslocamento restrito	
ρ	Campo de densidades do domínio	$\frac{Kg}{m^3}$
p	Fator de penalização do modelo SIMP	
$\mathbf{x}$	Variáveis nodais de projeto	$\frac{Kg}{m^3}$
ne	Número de elementos da malha	
np_g	Número de pontos de Gauss do elemento	
w	Peso de projeção	
R_{max}	Raio de projeção	m
E_{def}	Energia de deformação para um elemento com $\rho = 1$	J
$\bar{E}_{def}$	Energia de deformação efetiva do elemento	J
Ψ	Função energia de deformação	J
n	Parâmetro da função energia de deformação	
λ_{cr}	Autovalor associado à força crítica de flambagem	
λ	Vetor solução do problema adjunto	
$\mathbf{H}$	Operador matricial de localização dos deslocamentos nodais a partir do vetor global	
σ_{vm}	Tensão Equivalente de von Mises	Pa
σ_{lim}	Tensão limite do material	Pa
σ	Estado de tensão pontual	Pa
q	Parâmetro de aproximação-qp	
ϵ	Parâmetro da relaxação- ϵ	Pa
P	Parâmetro da <i>norma-P</i> da tensão	
c	Fator de correção da <i>norma-P de tensão</i>	
Φ	Função restrição de tensão	Pa
k	Contador das iterações	
$\ (\cdot)\ $	Norma Euclidiana de um vetor ou tensor $(\cdot)$	

Capítulo 1

Introdução

A presente proposta trata do projeto otimizado de mecanismos flexíveis distribuídos, considerando restrições quanto a segurança em flambagem e ao escoamento. Este tópico é bastante atual, uma vez que tanto o projeto de mecanismos flexíveis quanto a consideração de restrições relacionadas a segurança (neste caso restrições de tensão e de flambagem) tem sido ativamente pesquisadas nos últimos anos.

Neste trabalho, o projeto otimizado será obtido por meio da técnica de Otimização Topológica. A formulação utilizada para o projeto do mecanismo flexível distribuído será baseada no trabalho apresentado por Cardoso e Fonseca [15], que propõe a maximização de uma função da energia de deformação juntamente com restrições sobre o volume e sobre o comportamento cinemático requerido (deslocamentos). No entanto, observa-se nos resultados obtidos com esta formulação, que podemos encontrar regiões com tensões elevadas uma vez que a energia de deformação é proporcional ao nível de tensão em cada ponto do domínio. Ainda, são obtidas regiões esbeltas sob compressão, o que pode acarretar em flambagem (instabilidade elástica), conforme ilustrado na figura (1.0.1).

Desta forma, este trabalho propõe a consideração de uma restrição global de tensão mecânica baseada no trabalho de [16] e de uma restrição global de flambagem em adição a formulação originalmente proposta por [15]. Para isto, serão investigadas a influência dos parâmetros de parametrização das tensões mecânicas, proposto por [11], em problemas com grandes regiões de vazios e submetidas a deformações consideráveis, como as que ocorrem nas topologias obtidas no trabalho de Cardoso e Fonseca, [15].

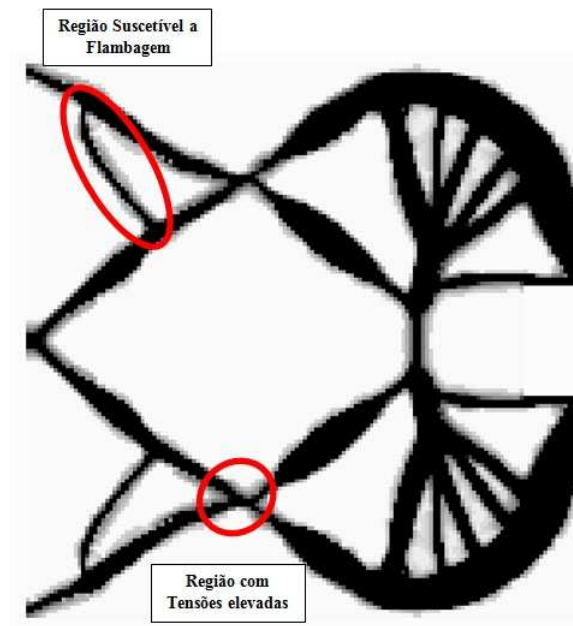


Figura 1.0.1: Mecanismo com flexibilidade distribuída sujeito a ocorrência de flambagem

No que segue, serão apresentadas a teoria e desenvolvimento das equações necessárias para o desenvolvimento deste trabalho, bem como as indicações sobre as contribuições que serão realizadas ao tema.

Capítulo 2

Otimização Topológica

A otimização topológica consiste em distribuir material em um domínio fixo de projeto previamente definido, Ω , de modo a satisfazer condições de contorno e restrições (como por exemplo flexibilidade, deslocamentos, tensões, frequências naturais, etc.) estabelecidas pelo problema de otimização. Um algoritmo é usado iterativamente combinando o método da otimização em questão e um método numérico de análise como por exemplo o método dos elementos finitos.

Este método de otimização é vantajoso em relação a otimização de forma e otimização paramétrica, por ser mais genérico e garantir uma distribuição de material de modo que, além promover os contornos adequados, permita a inclusão de buracos na estrutura (Fig. (2.0.1)).

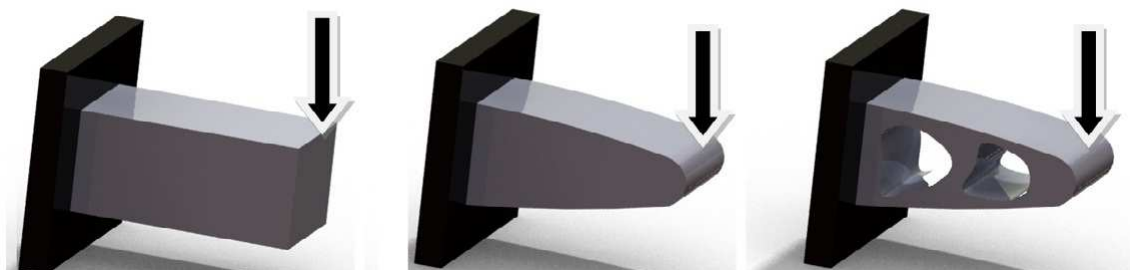


Figura 2.0.1: Otimização paramétrica, otimização de forma e otimização topológica

Este método é implementado de acordo com algumas etapas pré-definidas, a saber:

Pré-processamento: refere-se a condições geométricas e de carregamento. Basicamente é a definição de um problema de análise por Elementos Finitos com informações sobre objetivos e restrições do problema de otimização. As etapas do pré-processamento são:

- Escolher adequadamente o domínio de referência que permita a definição de carregamento e condições de contorno;
- Definir as regiões do espaço de projeto que devam obrigatoriamente conter ou não material;
- Construir uma malha de elementos finitos para o domínio de projeto. O tamanho da malha de ser tal que consiga representar adequadamente a estrutura.

Otimização Topológica:

- Fazer uma estimativa inicial das variáveis de projeto;
- Calcular as sensibilidades (gradientes);
- Utilizar um método de otimização como por exemplo o MMA (método das assíntotas móveis) ou PL (programação linear);
- Atualizar as variáveis de projeto e repetir o procedimento até que seja obtida a convergência.

A última etapa é a fase de pós-processamento.

- Os resultados obtidos na segunda etapa devem ser interpretados, analisados e representados como uma topologia definida.

2.1 Histórico

A Otimização Topológica é um campo de estudos consideravelmente novo e que vem se desenvolvendo muito rápido no contexto de estruturas mecânicas. A generalidade deste método vem atraindo muita atenção de pesquisadores e tornando este método objeto de muitas publicações ao longo dos últimos anos.

Conceitos clássicos de otimização estrutural foram propostos por Michell no início do século XX, conforme [39], em trabalhos cujo objetivo era otimizar estruturas baseado no limite plástico, usando elementos de barras para discretizar o domínio. Este método foi baseado em métodos analíticos, porém alguns anos mais tarde, métodos de programação matemática como as técnicas de programação linear e o método simplex foram utilizados em projetos ótimos de treliças com restrição de peso [47], [43], [45] e [46].

Cheng e Olhoff, [20], demonstraram um estudo sobre maximização da rigidez de placas delgadas considerando a espessura como variável de projeto. Eles observaram que quanto mais detalhada fosse a discretização do domínio, maior o número de reforços e constataram a dependência da malha e a falta de um domínio fechado capaz de fornecer uma solução para o caso.

Ainda estudando maximização da rigidez sob restrição de volume, [9] propuseram um método que levou em consideração a microestrutura do material, ou seja, que descreveu suas propriedades efetivas. Através deste método conhecido como método da homogeneização é possível estabelecer um domínio suficientemente amplo de modo a garantir a existência de uma solução.

O método SIMP, muito aplicado para materiais isotrópicos, será discutido posteriormente e foi apresentado por Bendsøe em 1989 [7], porém o termo SIMP surgiu em 1992 conforme [50]. Também em 1992, como pode ser visto em [25], Díaz e Kikuchi analisaram problemas que envolviam frequências de ressonância em estruturas contínuas.

Ambrósio e Buttazzo em 1993 [1] propuseram uma restrição do perímetro como forma de restringir o espaço de solução e garantir a existência de um ótimo global. Este método foi implementado por Harber, Jog e Bendsøe (1996) [31].

Outras contribuições relevantes surgem com os trabalhos [51] e [54] onde Sigmund propõe filtros para suavizar a distribuição das densidades eliminando assim o fenômeno do "tabuleiro de xadrez" ou *checkerboard*. Sigmund [56] apresenta uma proposta de filtro baseada em operadores como o de dilatação e erosão que levam as densidades dos elementos para o valor máximo e mínimo respectivamente. Com esta ideia consegue-se eliminar as áreas de transição com densidades intermediárias.

A consideração de restrições de tensão, devido a problemas apontados por [24] e por [19], sempre foi um desafio em otimização topológica. O grande número de restrições de tensão advindo do caráter local da tensão foi abordado por [42] pelo uso do método do Lagrangeano Aumentado e por [16] com a consideração de uma restrição global de tensão. O problema da singularidade da tensão, advindo da parametrização material foi abordado por diversos autores, como por exemplo [11, 24], [19]. Uma discussão sobre a qualidade das medidas de tensão pode ser encontrada em [22]. Uma formulação para tratar restrições locais de tensão pode ser vista em [2], que se baseia em um funcional de penalização para fazer com que as restrições se aproximem do campo de tensão de von Mises.

Estudos sobre flambagem em estruturas compostas por treliças são publicados conforme [18] e [48] abordando dificuldades relacionadas a fenômenos de singularidade e instabilidades de solução respectivamente. A análise da flambagem para topologias contínuas podem ser vistas nos trabalhos de [41] onde uma aproximação é realizada para considerar as forças críticas no problema, e [44], que tratam de estruturas com deformação hiperelástica e linear elástica.

Uma publicação recente [12] aborda a minimização de peso estrutural combinando restrições de flexibilidade e tensões locais usando o critério de falha de Drucker-Prager. Com este critério é possível trabalhar com corpos que possuem diferentes comportamentos em tração e compressão. Um aspecto interessante desta referência é o fato de os autores utilizarem uma regra heurística para a consideração de um conjunto ativo de restrições locais de tensão, ao invés de considerarem uma abordagem consistente como a apresentada por [42]. Aplicações da relaxação- ϵ e da aproximação-qp também são consideradas nesta referência.

2.2 Modelo Material - SIMP

Em sua essência, o problema de otimização topológica busca a distribuição de um material isotrópico no domínio fixo de projeto. Com isto, em cada ponto do domínio, temos que a relação constitutiva do material seria idealmente parametrizada de acordo com a Eq. (2.2.1).

$$\mathbf{E} = 1_{\Omega^{mat}} \mathbf{E}^0, \quad 1_{\Omega^{mat}} = \begin{cases} 1 & x \in \Omega^{mat} \\ 0 & x \in \Omega/\Omega^{mat} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

$$\int_{\Omega} 1_{\Omega^{mat}} d\Omega \leq Vol(\Omega^{mat}) \leq V$$

No entanto, esta abordagem é de natureza discreta e faz com que o problema contínuo não tenha solução [8]. Quando discretizado, o problema finito dimensional terá uma solução dependente da discretização (dependência de malha). Conforme discutido por [9], isto se deve ao fato da solução ótima para o problema não ser obtida com uma distribuição de um material homogêneo isotrópico e sim com o uso de materiais anisotrópicos (o que corresponde a uma relaxação do domínio de solução). Como resultado dos trabalhos de [9], verificou-se que a relaxação associada ao uso de um material isotrópico com variação contínua de propriedades em cada ponto já permitiria a solução do problema. Esta abordagem é conhecida como método das densidades ou SIMP (*Simple Isotropic Material with Penalization*), de acordo com a Eq. (2.2.2), onde $\rho(x)$ é uma função de projeto, $\mathbf{E}^0$ é o tensor constitutivo que representa as propriedades de um material base isotrópico, $\mathbf{E}$ é o tensor constitutivo efetivo e V é o volume total do domínio.

$$\mathbf{E}(x) = \rho(x)^p \mathbf{E}^0, \quad p > 1 \quad (2.2.2)$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq V \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad x \in \Omega;$$

Este modelo permite um ajuste da parametrização do material, sendo que para $p = 1$ obtemos o limite superior para a mistura de dois materiais e para $p > 1$ podemos representar diferentes leis de misturas. Se p tende a infinito, nos aproximamos da parametrização da Eq. (2.2.1). Um problema com esta penalização é o surgimento de valores intermediários de rigidez ("gray scales", ou escalas de cinza), que correspondem a um material poroso. Isto é indesejável, pois dificulta a interpretação dos resultados obtidos e consequentemente inviabiliza a fabricação do projeto. Este problema pode ser corrigido com o uso de expoentes p na ordem de 3 e/ou com o uso de projeções não-lineares [30]. Entretanto, se o valor de p for muito elevado, a parametrização material contínua se aproxima da discreta, que não possui solução. No entanto, devido ao fato do problema de equilíbrio ser finito dimensional, observa-se uma dependência do resultado com o nível de discretização. Outro problema que pode ocorrer é a formação de um número elevado de furos e a formação de reforços de baixa espessura. Embora isto não acarrete problemas ao otimizador, torna a fabricação dispendiosa.

A instabilidade do tabuleiro (*checkerboard*) é uma distribuição de material onde a densidade dos elementos adjacentes varia de forma periódica, com característica similar a um tabuleiro de xadrez. Díaz e Sigmund, [26], mostram que esse fenômeno surge devido a um modelamento inadequado do MEF pois a rigidez aparenta artificialmente ter um valor elevado quando comparado com uma distribuição de mesmo volume mas com distribuição homogênea de material.

Verifica-se, também, que para as funções de interpolação de alta ordem a instabilidade do tabuleiro não aparece. Para solucionar a instabilidade de tabuleiro e controlar a distribuição de material no domínio de projeto são utilizadas duas abordagens no âmbito da Otimização Topológica: filtros e projeções.

2.3 Filtros e Projeções

Filtros são operadores matemáticos aplicados sobre uma função não regular, tendo como objetivo suavizar sua distribuição. Com isto, ao aplicarmos um filtro sobre a distribuição de material obtida com o método da otimização topológica, podemos eliminar instabilidades numéricas tais como o tabuleiro de xadrez além obter algum controle sobre a complexidade da topologia obtida [14].

Os filtros podem ser classificados quanto a sua abrangência espacial em duas categorias: Filtros de vizinhança fixa [63] ou Filtros de vizinhança espacial [13]. Nos filtros de vizinhança fixa o valor de uma grandeza associada a um elemento depende das grandezas dos elementos adjacentes (vizinhos de nós e/ou de arestas) enquanto nos filtros de vizinhança espacial a grandeza associada a um elemento depende das grandezas de elementos contidos dentro de um raio de vizinhança. Com isto, podemos verificar que os filtros de vizinhança fixa eliminam a instabilidade de tabuleiro, mas não permitem eliminar a dependência do resultado com o refino da malha e nem um controle efetivo de complexidade. Por sua vez, os filtros de vizinhança espacial permitem um controle efetivo sobre todas estas questões.

Como uma generalização do conceito de filtro, [29] propuseram a utilização de um operador de projeção para o controle da distribuição de material. É interessante salientar que uma projeção Pr é um operador que mapeia uma determinada variável de um espaço U^s para um espaço V^s , na forma $Pr : U^s \rightarrow V^s$ e apresenta como propriedade $Pr : Pr = Pr$. Desta forma, o correto seria utilizar a expressão operador linear ao invés de projeção, mas iremos respeitar os termos utilizados na literatura da área. Se definirmos o problema de otimização em termos de variáveis auxiliares $\mathbf{x}$ e mapearmos estas variáveis para a malha de elementos finitos de modo a controlar a variação espacial das densidades, então iremos controlar o aparecimento da instabilidade de tabuleiro e controlar o tamanho dos reforços ($Pr : \mathbf{x} \rightarrow \rho$).

Neste trabalho será utilizada a projeção linear, conforme a equação (2.3.1), que determina a variável ρ_i de um elemento i a partir de uma média ponderada de variáveis nodais $\mathbf{x}$ definidas em uma região no entorno do elemento (vizinhança):

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=1}^{nv} x_j w_j}{\sum_{j=1}^{nv} w_j} \quad (2.3.1)$$

$$w_j = \frac{R_{max} - R_{ij}}{R_{max}} \quad (2.3.2)$$

onde nv é o número de nós vizinhos a um determinado elemento j , R_{ij} é a distância entre o

nó i e o centróide do elemento j e R_{max} é o raio de projeção. É importante salientar que a projeção linear permite um controle direto sobre o tamanho dos reforços estruturais através do raio de abrangência, verificando-se uma proporcionalidade entre o tamanho deste raio e tais reforços. Deve-se salientar que boa parte dos filtros pode ser vista como um caso particular de um operador de projeção e que, dependendo do operador de projeção utilizado, poderemos ter diferentes graus de penalização de densidades intermediárias [30].

Usualmente, obtemos as sensibilidades do problema de otimização em termos das densidades no centróide de cada elemento finito. No entanto, como no caso das projeções as variáveis do problema de otimização passam a ser as variáveis $\mathbf{x}$, devemos corrigir as sensibilidades utilizando a regra da cadeia, de acordo com a Eq. (2.3.3).

$$\frac{df}{dx_m} = \frac{df}{d\rho_i} \frac{d\rho_i}{dx_m} \quad (2.3.3)$$

Capítulo 3

Mecanismos Flexíveis

Um mecanismo é um dispositivo mecânico cuja função é transferir ou transformar movimento, força ou energia [60]. Mecanismos tradicionais são formados por diversas peças rígidas nas quais não são permitidas grandes deformações elásticas para que a eficácia do mecanismo não fique prejudicada. As articulações móveis entre as peças geram movimento relativo, ocasionando atrito e suas consequências como ruído, desgaste, folga e vibrações. Por sua vez, um mecanismo flexível (*compliant mechanism*), ilustrado na Figura (3.0.1), permite que as funções deste dispositivo mecânico sejam cumpridas utilizando-se apenas uma peça, eliminando assim as juntas móveis, o desgaste e a necessidade de lubrificação. A redução da quantidade de peças que o mecanismo flexível proporciona pode simplificar a produção eliminando a montagem, gerando assim uma grande redução nos custos de fabricação. Este tipo de mecanismo deve ter rigidez suficiente para transmitir esforços e em contrapartida deve ter flexibilidade suficiente para se deformar e atingir o objetivo ao qual se propõe.



Figura 3.0.1: Mecanismo flexível

Imagem extraída do site: <http://compliantmechanisms.byu.edu/image-gallery/grippers>, acesso em 26 de Março de 2012.

Estes mecanismos proporcionam grandes precisões nos movimentos e podem ser fabricados em microescala, por isso são aplicados em sistemas que exigem tais requisitos como sistema microeletromecânicos, *microeletromechanical systems* (MEMS). Podemos citar alguns produtos comerciais onde são empregados o MEMS: sensores de aceleração para *airbags*, sensores de pressão para instrumentos na área biomédica e microatuadores para movimentação de conjunto de espelhos em sistemas de projeção. Outra importante utilização dos mecanismos flexíveis é

na engenharia biomédica quando se fala em instrumentação cirúrgica, onde a precisão e a sensibilidade de movimentação são fatores determinantes para este tipo procedimento. O peso reduzido, a possibilidade de construção em tamanhos muito reduzidos e aplicação em ambientes hostis fazem deste tipo de mecanismo uma grande alternativa para indústrias eletrônicas e espaciais.

Assim como existem vantagens associadas a mecanismos flexíveis, existem também vários desafios e desvantagens para algumas aplicações. Talvez o maior desafio seja analisar e projetar tais sistemas, pois isto requer conhecimento dos métodos de análise de mecanismos e da deflexão dos membros flexíveis do dispositivo. Devido a estas dificuldades, no passado os mecanismos flexíveis foram desenvolvidos pelo método de tentativa erro. Tais métodos são aplicáveis apenas para sistemas muito simples que executam tarefas relativamente simples, e muitas vezes não são economicamente eficientes para muitas aplicações potenciais. Muitas teorias foram desenvolvidas para simplificar a análise e o projeto de mecanismos flexíveis. Mesmo considerando esses avanços, a tarefa de projetar e analisar esses sistemas ainda são desafiadores.

Dentre os vários desafios que este assunto gera, podemos citar a análise de fadiga, que é sem dúvida uma questão mais primordial para mecanismos flexíveis, já que as partes muitas vezes são submetidas a carregamentos cíclicos. Outro fator, é que esse tipo de mecanismo não pode produzir um movimento rotativo contínuo [60]. Embora esses desafios possam ser superados, é importante a compreensão para se avaliar quais as aplicações mais favoráveis para um mecanismo flexível.

Um dos aspectos mais importantes quando se trata de síntese de mecanismos flexíveis é o controle das relações entre os deslocamentos de saída e de entrada, bem como as forças de saída e entrada. Além disso, é essencial que seja viável projetar as configurações de saída baseada nas pré-definições de entrada.

Os métodos para síntese de mecanismos flexíveis se dividem dois tipos principais: a síntese cinemática e síntese do contínuo. A síntese cinemática [40] é baseada na síntese de mecanismos tradicionais constituídos de elementos rígidos, neste caso a flexibilidade fica concentrada apenas em algumas regiões do mecanismo, ocasionando tensões e deformações excessivas nessas regiões.

Alguns trabalhos foram desenvolvidos baseados nessa teoria onde a cinemática de corpos rígidos era aplicada para projetar um mecanismo parcialmente flexível ou com flexibilidade em algumas regiões somente [32]. Um outro método surgiu para projetar mecanismos com flexibilidade concentrada em alguns pontos, conforme [33], e é conhecido como pseudo-corpo rígido, possuindo barras rígidas e molas em sua constituição. Este método é aplicado para desenvolver mecanismos com grandes deslocamentos.

Por outro lado, um mecanismo flexível projetado com base na síntese do contínuo, [4], terá a flexibilidade distribuída em toda sua estrutura, conforme Figura (3.0.2). Esta concepção utiliza o Método da Otimização Topológica (MOT) [9] para encontrar o formato ótimo da estrutura mantendo o comportamento cinemático adequado. Entretanto, o MOT primeiramente foi desenvolvido para maximizar a rigidez de estruturas, [61], o que não satisfaz o projeto em questão, já que a flexibilidade é fundamental. Alguns anos mais tarde em 1995, Ananthasuresh

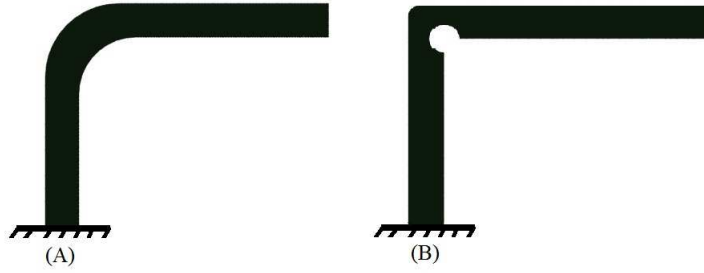


Figura 3.0.2: Flexibilidade distribuída (A) e flexibilidade concentrada (B)

e Kota, conforme [3], realizaram um trabalho sobre mecanismos com flexibilidade distribuída. Este método permite que a estrutura se deforme com magnitude e direções pré-estabelecidas quando submetidas a esforços especificados previamente.

As primeiras formulações que também levassem em consideração o comportamento cinemático da estrutura surgiram em 1995, conforme [52], e em 1996 de acordo com [28]. Larsen et al., (1997), [37], apresentaram uma função objetivo que permite o controle da força disponível na saída. Podemos citar outros trabalhos relevantes como [53] e [55] que tratam de atuadores flexíveis e mecanismos de pinça, e Jonsmann et al., (1999), conforme [34], sobre micromecanismos com atuação térmica.

Uma nova classe chamada mecanismos flexíveis multi-estáveis tem sido estudada nos últimos anos [17], propondo mecanismos com duas posições de equilíbrio estáveis sem qualquer adição de energia para mantê-las, aplicável em componentes eletrônicos como *switches*, relés e válvulas.

Diversas formulações propostas para projeto de mecanismos flexíveis como [54] e [64], apresentam em suas estruturas a ocorrência de nós isolados conectados a regiões rígidas (*hinges*), desta maneira a flexibilidade fica concentrada nestes nós gerando o efeito "dobradiça". Este efeito é causado por uma falha do modelo numérico [10] e consequentemente gera erros nos cálculos de tensão e deformação. A formulação que servirá de base para este estudo [15] é capaz de suprimir este fenômeno maximizando a energia de deformação sem adição de artifícios matemáticos que dificultem a implementação.

Uma abordagem sobre otimização multi-objetivo empregada em projeto de mecanismos flexíveis pode ser observada em [38]. O método é desenvolvido para realizar a minimização da energia de deformação e maximização do deslocamento na saída. Esta análise é feita usando o modelo SIMP juntamente com uma variação do método de otimização multi-objetivo conhecida como *physical programming* (PP). Porém, é perceptível que este método não elimina o efeito "dobradiça".

Uma aplicação do método *level set* para produzir mecanismos com flexibilidade distribuída é apresentada recentemente em [67].

3.1 Mecanismos com flexibilidade distribuída

Uma formulação adequada para o projeto de mecanismos com flexibilidade distribuída deve impor que uma parte da energia inserida seja armazenada na estrutura sob a forma de energia

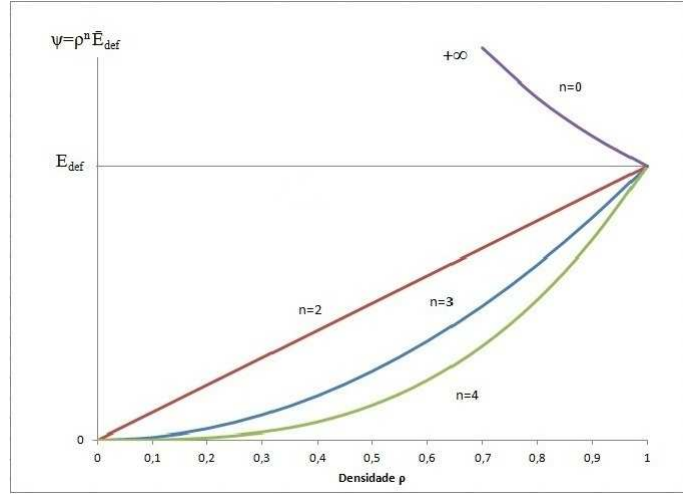


Figura 3.1.1: Comportamento da função energia de deformação para o elemento da malha

de deformação, para evitar que a flexibilidade se concentre em apenas alguns pontos formando um mecanismo parcialmente flexível. Além disso, ela deve ser facilmente aplicada a problemas não-lineares e multi-físicos e deve considerar características do meio externo pois a topologia do mecanismo ótimo depende delas.

Baseados nessa análise [15] mostram que a energia de deformação efetiva de um elemento $\overline{E}_{def}$ é inversamente proporcional a sua densidade, eq. (3.1.1), de modo que E_{def} expressa a energia de deformação para um elemento com $\rho = 1$.

$$\overline{E}_{def} = \frac{1}{\rho} E_{def} \quad (3.1.1)$$

Evidentemente, ao maximizar $\overline{E}_{def}$ as densidades tenderão a zero. Para lidar com este problema, é proposta pelos autores uma função de maximização da energia de deformação, escrita na eq. (3.1.2).

$$\psi = \rho^n \overline{E}_{def} = \rho^{n-1} E_{def} = \rho^{n-1} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (3.1.2)$$

Esta nova função apresenta um comportamento de proporcionalidade entre a densidade e a energia de deformação do elemento, penalizando as densidades intermediárias. A figura (3.1.1) ilustra este comportamento para alguns valores de n .

No contexto da malha discretizado a eq. (3.1.2) pode ser escrita:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{ne} \rho_i^{n-1} \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i \quad (3.1.3)$$

Agora, a maximização desta função conduz a uma topologia com densidade integral ($\rho = 1$) para todos os elementos, por isso é necessária uma restrição da quantidade de material permitida na topologia ótima. Para completar a formulação do problema, o comportamento cinemático do mecanismo é introduzido através de restrições no campo de deslocamentos da estrutura, resultando na eq. (3.1.4).

$$\begin{aligned}
Max \quad & \Psi \\
\text{Restrições.} \quad & \int_{\Omega} \rho d\Omega \leq V_{max} \\
& U_j \leq U_{jmax} \\
ou \quad & U_j \geq U_{jmin}
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Muitas vezes o projeto de tais mecanismos é inviável dependendo dos valores das restrições impostas, tanto para a fração volumétrica quanto para os deslocamentos. Também deve ser ressaltado que o ótimo encontrado pode variar dependendo a distribuição inicial de densidades pois a formulação proposta é não convexa.

3.1.1 Sensibilidade da função energia de deformação

A sensibilidade da função objetivo em relação as variáveis de projeto é demonstrada pelos autores em [15], para efetuar esta análise primeiramente reescrevemos a eq. (3.1.3) considerando o termo adjunto

$$\Psi = \sum_{i=1}^{ne} \left\{ \rho_i^n (\mathbf{H}_i \mathbf{U})^T \mathbf{K}_i (\mathbf{H}_i \mathbf{U}) \right\} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F}), \tag{3.1.5}$$

onde $\mathbf{H}$ é um operador de localização que mapeia o vetor deslocamento de um elemento $\mathbf{U}_i$ a partir do vetor de deslocamento global $\mathbf{U}$. O termo adicionado na Eq. (3.1.5) corresponde a equação de equilíbrio e não interfere na equação original. Derivando em relação a m -ésima variável de projeto obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi}{d\rho_m} = \sum_{i=1}^{ne} \left\{ \frac{d\rho_i^n}{d\rho_m} (\mathbf{H}_i \mathbf{U})^T \mathbf{K}_i (\mathbf{H}_i \mathbf{U}) + 2\rho_i^n (\mathbf{H}_i \mathbf{U})^T \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} \right. \\
\left. + \rho_i^n (\mathbf{H}_i \mathbf{U})^T \frac{d\mathbf{K}_i}{d\rho_m} (\mathbf{H}_i \mathbf{U}) \right\} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m},
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

agrupando os termos comuns teremos

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi}{d\rho_m} = \sum_{i=1}^{ne} \left\{ \frac{d\rho_i^n}{d\rho_m} \left[(\mathbf{H}_i \mathbf{U})^T \mathbf{K}_i (\mathbf{H}_i \mathbf{U}) \right] + \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} \left[2\rho_i^n (\mathbf{H}_i \mathbf{U})^T \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i \right. \right. \\
\left. \left. + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \right] + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} + \rho_i^n (\mathbf{H}_i \mathbf{U})^T \frac{d\mathbf{K}_i}{d\rho_m} (\mathbf{H}_i \mathbf{U}) + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} \right\},
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

para evitar o calculo da derivada do vetor deslocamento global em relação a ρ_i , a segunda parcela da eq. (3.1.7) deve ser levada a zero, resultando na seguinte equação

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^{ne} \left\{ -2\rho_i^n (\mathbf{H}_i \mathbf{U})^T \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i \right\} = \sum_{i=1}^{ne} \left\{ - (2\rho_i^n \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i) \mathbf{H}_i \right\}. \quad (3.1.8)$$

Se observarmos os termos da Eq. (3.1.7), iremos notar que a derivada da matriz de rigidez global em relação a variável ρ_i é igual a $\mathbf{K}_i$. Para problemas lineares, a dependência da matriz global em relação as densidades dos elementos é local. Assim, o último termo da eq. (3.1.8) é não nulo somente quando $i = m$, tal que a eq. (3.1.7) deve ser calculada somente neste caso, tal que

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \sum_{m=1}^{ne} \left\{ -2\rho_m^n \mathbf{U}_m^T \mathbf{K}_m \mathbf{H}_m \right\}. \quad (3.1.9)$$

Pode-se verificar na eq. (3.1.7) que

$$\sum_{i=1}^{ne} \frac{d\rho_i^n}{d\rho_m} \left[(\mathbf{H}_i \mathbf{U})^T \mathbf{K}_i (\mathbf{H}_i \mathbf{U}) \right], \quad (3.1.10)$$

é não nulo somente quando $i = m$, resultando em

$$n\rho_i^{n-1} \mathbf{U}_m^T \mathbf{K}_m \mathbf{U}_m = n\rho_i^n \mathbf{U}_m^T \mathbf{K}_m \mathbf{U}_m, \quad (3.1.11)$$

que também é um termo local, o termo remanescente

$$\sum_{i=1}^{ne} \rho_i^n (\mathbf{H}_i \mathbf{U})^T \frac{d\mathbf{K}_i}{d\rho_m} (\mathbf{H}_i \mathbf{U}) \quad (3.1.12)$$

é também local para problemas lineares, porque a derivada da matriz rigidez local é não nula somente quando $i = m$, resultando em

$$\rho_m^n \mathbf{U}_m^T \mathbf{K}_m \mathbf{U}_m. \quad (3.1.13)$$

Agrupando todos os resultados, finalmente obtemos a expressão desejada sendo que λ é calculado usando a eq. (3.1.9).

$$\frac{d\Psi}{d\rho_m} = (n\rho_m^{n-1} + \rho_m^n) \mathbf{U}_m^T \mathbf{K}_m \mathbf{U}_m + \lambda_m^T \mathbf{K}_m \mathbf{U}_m. \quad (3.1.14)$$

3.1.2 Sensibilidade de uma Componente do Deslocamento

Para calcular a sensibilidade devemos definir: o índice j define a componente do vetor de deslocamento global, o índice m diz respeito a variável de projeto e $\mathbf{L}$ é o vetor de localização contendo o valor 1 na posição j e zero nas demais posições. O deslocamento global pode ser escrito, utilizando a abordagem adjunta, como:

$$U_j = \mathbf{L}^T \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F}). \quad (3.1.15)$$

A derivada da j -ésima componente do vetor de deslocamento global em relação a m -ésima variável de projeto tem a forma:

$$\frac{dU_j}{d\rho_m} = \frac{d\mathbf{L}^T}{d\rho_m} \mathbf{U} + \mathbf{L}^T \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m}, \quad (3.1.16)$$

onde o primeiro termo é independente de ρ , sendo portanto nulo. Agrupando os termos comuns obtemos:

$$\frac{dU_j}{d\rho_m} = \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} (\mathbf{L}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K}) + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U}. \quad (3.1.17)$$

A derivada do deslocamento global na eq. (3.1.17) pode ser evitada resolvendo o sistema linear de equações:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{L}. \quad (3.1.18)$$

Para cada restrição de deslocamento presente no problema, devemos solucionar um problema adjunto associado a Eq. (3.1.18) e o cálculo da derivada propriamente dita, Eq. (3.1.19) empregando o vetor $\boldsymbol{\lambda}$ obtido na solução do problema adjunto.

$$\frac{dU_j}{d\rho_m} = \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_m} \mathbf{U} = \lambda_m^T \mathbf{K}_m \mathbf{U}_m, \quad (3.1.19)$$

Capítulo 4

Restrição de Tensão

A imposição de restrições de tensão tem sido um tema desafiador na otimização estrutural [23] e [62], devido ao elevado número de restrições não lineares e ao fato de estas definirem regiões viáveis disjuntas e/ou degeneradas.

Duas abordagens têm sido usadas para incluir restrições de tensão nos problemas de otimização discretizados através do método dos elementos finitos: No primeiro caso, a restrição de tensão é aplicada em cada elemento da malha discretizada, o que permite um controle eficaz porém implicando em um custo computacional extremamente alto [24]. Alternativas a esta abordagem consistem na utilização de um funcional aumentado [42] [27] ou em métodos de seleção de restrições ativas [12]. Já no segundo caso, as inúmeras restrições locais de tensão são substituídas por uma ou então por vários critérios integrados de tensão, e desta forma resolve-se o problema de otimização com um número pequeno de restrições globais [16].

Um aspecto importante a ser considerado é a parametrização do estado de tensões em um ponto do domínio de projeto. Caso seja utilizada uma parametrização no estilo SIMP, conforme proposto por [24], iremos observar tensões não-nulas em regiões de “vazios”. Isto causa uma série de dificuldades na otimização topológica, pois faz com que não seja possível obter uma topologia bem definida, além de não permitir uma correta avaliação de todo o espaço viável de projeto.

Para melhor compreendermos as dificuldades associadas a imposição de restrições de tensão, iremos considerar o problema de minimização de peso com restrição local de tensão:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\rho \in \mathbb{R}} \int_{\Omega} \rho d\Omega & = V \\ \text{restr. : } \mathbf{K}(\rho) \mathbf{U} & = \mathbf{F} \\ \sigma_{vm_i} & \leq \rho^q \sigma_{lim} \\ 0 \leq \rho \leq \bar{\rho} & = 1 \end{array} \right. \quad (4.0.1)$$

onde ρ representa as densidades, V é o volume como função objetivo, $\mathbf{U}$ é o vetor deslocamento, $\mathbf{F}$ indica o vetor força, $\mathbf{K}(\rho)$ é a matriz rigidez, σ_{vm} representa a tensão equivalente de von Mises em cada um dos elementos da malha e σ_{lim} é o limite de tensão do material em questão.

Para solucionar o problema que conduz a tensões não nulas em regiões onde a densidade

do elemento é muito próxima de zero, ou seja, aplicar a restrição somente onde há presença de material, pode-se considerar a seguinte formulação para a restrição:

$$(\sigma_{vm} - \rho^p \sigma_{lim})\rho \leq 0 \quad (4.0.2)$$

porém o comportamento assintótico da tensão permanece juntamente com a descontinuidade na restrição de tensão, em consequência disto, o algoritmo de otimização não procede satisfatoriamente a remoção das densidades intermediárias [24]. Tendo em vista esta dificuldade, [19] propuseram o uso da relaxação- ϵ que consiste na relaxação das restrições para regiões de baixa densidade na forma

$$(\sigma_{vm} - \rho^p \sigma_{lim})\rho \leq \epsilon \quad \epsilon^2 = \rho_{min} \leq \rho. \quad (4.0.3)$$

Cheng e Guo (1997) [19] demonstraram que para qualquer $\epsilon \geq 0$ a equação (4.0.3) é satisfeita quando ρ for suficientemente pequeno, isto significa que numa vizinhança com densidade nula, a restrição permanece satisfeita. Assim, a ampliação da região degenerada devido a singularidade da restrição de tensão original, é então removida. O processo de solução inicia-se resolvendo a otimização escolhendo um valor alto para ϵ como forma de aumentar a região degenerada do domínio, em seguida os valores do parâmetro de relaxação devem ser reduzidos gradativamente e os resultados devem ser utilizados como ponto inicial para a próxima equação mais restritiva. Desta forma elimina-se a dependência da escolha de ϵ e contribui para eliminar o fato da solução depender da escolha do ponto inicial.

Ainda pode-se apresentar uma outra abordagem para tratar o fenômeno da singularidade, trata-se de uma aproximação do método relaxação- ϵ descrito anteriormente chamado de aproximação-qp [11]. Este método foi baseado em estudos de Duysinx e Bendsøe em 1998 [24], que introduziram consistência física ao problema com restrição de tensão. Desta maneira, as tensões passam então a ser escritas conforme a Eq. (4.0.4).

$$\sigma = \rho^{p-q} \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (4.0.4)$$

Através desta relação os autores mostraram que para $q < p$ (sendo $p=3$) a descontinuidade nas tensões locais não aparecem para o caso onde as densidades são zero, e o fenômeno da singularidade é eliminado. No método da aproximação-qp, inicialmente adota-se um valor pequeno para q que satisfaça $q < p$ e encontra-se a solução para o problema de otimização. Então aumenta-se o valor de q e o novo ponto deve ser usado como o ponto inicial para encontrar a nova solução. Pode ser visto em [11] comparações entre os métodos relaxação- ϵ e aproximação-qp.

Rozvany e Sobieszczanski apresentam em [49] funções envelope de relaxação (*smooth envelope functions, SEF's*), para escrever as funções de tensão e relaxar as restrições nas regiões de baixa densidade que estão propensas ao fenômeno da singularidade. Um caso especial deste método é a relaxação- ϵ citada anteriormente.

4.1 Medida de Tensão Global

Como forma de evitar o alto custo computacional relacionado a aplicação de restrições locais em cada elemento, pode ser definida uma medida global de tensão na forma

$$\|\sigma_{vm}\|_P = \left(\sum_{i=1}^{ne} V_i \sum_{j=1}^{npg} \sigma_{vm}^P(i, j) \right)^{\frac{1}{P}} \leq \sigma_{lim} \quad (4.1.1)$$

onde ne e npg indicam respectivamente o número total de elementos da malha e o número de pontos de Gauss do elemento, V_i o volume de cada elemento e a notação (i, j) indica a posição discreta (elemento, ponto de Gauss) onde a tensão equivalente σ_{vm} está sendo calculada.

Esta medida é tratada como única restrição no processo de otimização e reduz o trabalho computacional de calcular as sensibilidades das tensões dos elementos, já que o problema geralmente possui um número grande de variáveis de projeto. Embora saibamos que para $P \rightarrow \infty$ a *norma-P* se aproxima do valor máximo da tensão equivalente $\max(\sigma_{vm})$ na malha, temos que na prática a escolha de valores de P deve ser tal que promova uma suavização satisfatória para que o algoritmo execute bem a tarefa e resulte em uma boa aproximação para o valor de tensão máxima, sem provocar instabilidades numéricas. Assim, valores baixos de P resultam em topologias similares a minimizações de flexibilidade com tensões concentradas em um ponto da estrutura, e para valores altos pode-se perceber uma distribuição uniforme de tensão com poucas concentrações de tensões [16].

A *norma-P* da tensão não tem um significado físico tampouco uma expressão explícita capaz de aproximá-la da tensão equivalente máxima, por isso [16] propõe um fator c que considera informações da iteração anterior ($k - 1$) a fim de obter uma tensão global que represente a tensão equivalente máxima da estrutura.

$$\Phi_k = c_k \|\sigma_{vm}^k\|_P \leq \sigma_{lim} \quad (4.1.2)$$

com

$$c_k = \frac{\max(\sigma_{vm})^{k-1}}{\|\sigma_{vm}^{k-1}\|_P}.$$

4.1.1 Sensibilidade da Norma-P de Tensão

Neste trabalho será utilizado o critério global de restrição de tensão apresentado na eq. (4.1.2). Sendo assim, necessitamos das sensibilidades de Φ_k com respeito as densidades da malha. De modo a utilizar uma abordagem adjunta, redefinimos a função Φ_k como

$$\Phi_k = c_k \|\sigma_{vm}^k\|_P + \lambda^T (\mathbf{KU} - \mathbf{F}). \quad (4.1.3)$$

Assim, derivando a Eq. (4.1.3) em relação a m -ésima densidade, obtemos

$$\frac{d\Phi_k}{d\rho_m} = c_k T_1 \left(\sum_{i=1}^{ne} \sum_{j=1}^{npg} \sigma_{vm}^{P-1}(i, j) \frac{d\sigma_{vm}(i, j)}{d\rho_m} \right) + \lambda^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} \right) \quad (4.1.4)$$

onde

$$T_1 = \left(\sum_{i=1}^{ne} \sum_{j=1}^{npg} \sigma_{vm}^P(i, j) \right)^{\frac{1}{P}-1} \quad (4.1.5)$$

é um termo que não depende das derivadas das tensões e pode ser obtido diretamente após a análise.

O primeiro termo na Eq. (4.1.4) corresponde a

$$\frac{d\sigma_{vm}(i, j)}{d\rho_m} = \frac{d}{d\rho_m} \left((\sigma_{i,j}^T \mathbf{M} \sigma_{i,j})^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\partial \sigma_{vm}(i, j)}{\partial \sigma_{i,j}} \frac{d\sigma_{i,j}}{d\rho_m} \quad (4.1.6)$$

com

$$\frac{\partial \sigma_{vm}(i, j)}{\partial \sigma_{i,j}} = \frac{1}{2} (\sigma_{i,j}^T \mathbf{M} \sigma_{i,j})^{\frac{1}{2}-1} 2\mathbf{M} \sigma_{i,j} = \frac{\mathbf{M} \sigma_{i,j}}{\sigma_{vm}(i, j)} \quad (4.1.7)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.1.8)$$

e

$$\frac{d\sigma_{i,j}}{d\rho_m} = \frac{d}{d\rho_m} (\mathbf{E}_{i,j} \rho_i^{(p-q)} \mathbf{B}_{i,j} \mathbf{U}_i) = (p-q) \delta_{im} \frac{\rho_i^{(p-q)}}{\rho_i} \mathbf{E}_{i,j} \mathbf{B}_{i,j} \mathbf{U}_i + \rho_i^{(p-q)} \mathbf{E}_{i,j} \mathbf{B}_{i,j} \frac{d\mathbf{U}_i}{d\rho_m} \quad (4.1.9)$$

tal que

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_k}{d\rho_m} &= c_k T_1 \sum_{i=1}^{ne} \sum_{j=1}^{npg} \sigma_{vm}^{P-1}(i, j) \frac{\sigma_{i,j}^T \mathbf{M}}{\sigma_{vm}(i, j)} \left((p-q) \delta_{im} \frac{\rho_i^{(p-q)}}{\rho_i} \mathbf{E}_{i,j} \mathbf{B}_{i,j} \mathbf{U}_i + \rho_i^{(p-q)} \mathbf{E}_{i,j} \mathbf{B}_{i,j} \frac{d\mathbf{U}_i}{d\rho_m} \right) \\ &+ \lambda^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} \right) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

que pode ser escrito como

$$\frac{d\Phi_k}{d\rho_m} = c_k T_1 \sum_{i=1}^{ne} \sum_{j=1}^{npg} \sigma_{vm}^{P-1}(i, j) \frac{\sigma_{i,j}^T \mathbf{M}}{\sigma_{vm}(i, j)} (p-q) \delta_{im} \frac{\rho_i^{(p-q)}}{\rho_i} \mathbf{E}_{i,j} \mathbf{B}_{i,j} \mathbf{U}_i \quad (4.1.11)$$

$$\begin{aligned}
& + c_k T_1 \sum_{i=1}^{ne} \sum_{j=1}^{npg} \sigma_{vm}^{P-1}(i, j) \frac{\sigma_{i,j}^T \mathbf{M}}{\sigma_{vm}(i, j)} \rho_i^{(p-q)} \mathbf{E}_{i,j} \mathbf{B}_{i,j} \frac{d\mathbf{U}_i}{d\rho_m} \\
& + \lambda^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} + \lambda^T \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m}.
\end{aligned}$$

De modo a isolar a derivada do vetor de estados em relação a uma densidade m , podemos fazer uso do operador de localização

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{U} \quad (4.1.12)$$

tal que

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{d\rho_m} = \frac{d(\mathbf{H}_i \mathbf{U})}{d\rho_m} = \mathbf{H}_i \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m}. \quad (4.1.13)$$

Assim, podemos reescrever a Eq. (4.1.11) na forma

$$\frac{d\Phi_k}{d\rho_m} = c_k T_1 \sum_{i=1}^{ne} \sum_{j=1}^{npg} \sigma_{vm}^{P-1}(i, j) \frac{\sigma_{i,j}^T \mathbf{M}}{\sigma_{vm}(i, j)} (p-q) \delta_{im} \frac{\rho_i^{(p-q)}}{\rho_i} \mathbf{E}_{i,j} \mathbf{B}_{i,j} \mathbf{U}_i + \lambda^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} \quad (4.1.14)$$

$$\left(+ \lambda^T \mathbf{K} + c_k T_1 \sum_{i=1}^{ne} \sum_{j=1}^{npg} \sigma_{vm}^{P-1}(i, j) \frac{\sigma_{i,j}^T \mathbf{M}}{\sigma_{vm}(i, j)} \rho_i^{(p-q)} \mathbf{E}_{i,j} \mathbf{B}_{i,j} \mathbf{H}_i \right) \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} \quad (4.1.15)$$

As duas parcelas finais da Eq. (4.1.15) são igualadas a zero a fim de eliminar a derivada $\frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m}$, dando origem a um sistema linear de equações para a determinação do vetor adjunto λ , conforme Eq. (4.1.16).

$$\mathbf{K} \lambda = -c_k T_1 \sum_{i=1}^{ne} \sum_{j=1}^{npg} \sigma_{vm}^{P-1}(i, j) \frac{\sigma_{i,j}^T \mathbf{M}}{\sigma_{vm}(i, j)} \rho_i^{(p-q)} \mathbf{E}_{i,j} \mathbf{B}_{i,j} \mathbf{H}_i \quad (4.1.16)$$

simplificando a expressão final da sensibilidade para

$$\frac{d\Phi_k}{d\rho_m} = c_k T_1 \sum_{j=1}^{npg} \sigma_{vm}^{P-2}(m, j) \left(\frac{p-q}{\rho_i} \right) \sigma_m^T \mathbf{M} \rho_m^{(p-q)} \mathbf{E}_{m,j} \mathbf{B}_{m,j} \mathbf{U}_m + \lambda^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} \quad (4.1.17)$$

ou, agrupando os termos em comum

$$\frac{d\Phi_k}{d\rho_m} = c_k T_1 \sum_{j=1}^{npg} \sigma_{vm}^P(m, j) \left(\frac{p-q}{\rho_m} \right) + \lambda^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U}. \quad (4.1.18)$$

Capítulo 5

Flambagem

A flambagem é um fator imprescindível na determinação da segurança de uma estrutura, e a falha estrutural devido a este modo é catastrófica. A flambagem tem atraído mais atenção nos últimos anos devido à necessidade de estruturas mais leves que requeiram menos material tornando-as mais propensas à flambagem.

Muitos trabalhos sobre otimização de treliças com restrição de flambagem foram realizados, mostrando as dificuldades e propondo soluções para tratar tais problemas. Dentre eles pode-se citar [18], que mostra a ocorrência do fenômeno da singularidade devido às restrições locais de flambagem e utiliza a relaxação- ϵ para tratar este caso. Rozvany apresenta em [48] a inclusão de restrições globais de estabilidade na formulação do problema, para eliminar as respostas instáveis devido às lacunas existentes na descrição das restrições locais. Em 2002, [36] visando maior eficiência, propõe uma nova formulação considerando restrições globais de estabilidade.

Para uma topologia contínua, uma forma de se considerar instabilidades geométricas é formular a estrutura com um comportamento linear elástico e solucionar um problema de autovalor para determinar a força crítica de flambagem, seja na função objetivo ou como restrição. Referências importantes a respeito deste tema são: Neves et al., [41], onde uma aproximação é realizada para considerar as forças críticas no problema, e Rahmatalla e Swan [44], que tratam de estruturas com deformação hiperelástica (em regime não-linear), e linear elástica calculando as forças críticas através de uma análise linearizada de flambagem. Esta segunda abordagem mostrou-se mais eficiente computacionalmente do que análise não-linear. E ainda é exposto, que o uso de uma flexibilidade generalizada como função objetivo é inadequado quando se busca um projeto confiável do ponto de vista da estabilidade estrutural.

5.1 Conceitos Relativos à Ocorrência de Flambagem

Uma placa simultaneamente apresenta tensões de flexão e tensões de membrana. As tensões de membrana agem no plano médio da estrutura e produzem forças tangentes a este plano. Este efeito é chamado de *Stress Stiffening* (aumento da rigidez sob carregamento de tração) ou ainda *Stress Softening* (decréscimo na rigidez sob carregamento de compressão).

A flambagem ocorre quando um membro da estrutura converte energia de deformação de membrana em energia de deformação de flexão sem mudança da força externa aplicada. Uma condição crítica, que implica em flambagem, existe quando o estado de deformação pode mudar sutilmente de forma que a perda de energia de deformação de membrana é numericamente igual ao ganho de energia de deformação de flexão. Pode-se também observar que as forças de membrana alteram a rigidez de flexão da estrutura. Dessa forma, a flambagem acontece quando as forças de compressão de membrana são grandes o suficiente para reduzir a rigidez de flexão a zero para algum modo de deformação fisicamente possível. Se as forças de membrana são invertidas, isto é, tornadas trativas ao invés de compressivas, a rigidez de flexão é efetivamente aumentada. Os efeitos das forças de membrana são levados em conta através da matriz $\mathbf{K}_\sigma$, chamada de Matriz de Rigidez Geométrica, que depende apenas do campo de deslocamento e do estado de tensão da estrutura.

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma)d\mathbf{U} = d\mathbf{F} \quad (5.1.1)$$

Uma força bifurcada de flambagem é a força para a qual uma configuração de referência da estrutura e uma configuração infinitesimalmente próxima da flambagem são ambas configurações de equilíbrio possíveis. Quando um deslocamento de flambagem $d\mathbf{U}$ toma o lugar da configuração de referência $\mathbf{U}$, a força externa não muda. Então:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma)d\mathbf{U} = 0 \quad (5.1.2)$$

Aplicando um nível de referência de carregamento para a estrutura:

$$\mathbf{F} = \lambda_{cr}\mathbf{F}_{ref} \quad (5.1.3)$$

Da mesma forma para Matriz de Rigidez Geométrica:

$$\mathbf{K}_\sigma = \lambda_{cr}\mathbf{K}_{\sigma ref} \quad (5.1.4)$$

Como consequência é obtido:

$$(\mathbf{K} + \lambda_{cr}\mathbf{K}_{\sigma ref})\mathbf{U} = (\mathbf{K} + \lambda_{cr}\mathbf{K}_{\sigma ref})(\mathbf{U} + d\mathbf{U}) = \lambda_{cr}\mathbf{F}_{ref} \quad (5.1.5)$$

Subtraindo a primeira equação da segunda chega-se a equação:

$$(\mathbf{K} + \lambda_{cr}\mathbf{K}_{\sigma ref})d\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (5.1.6)$$

A equação (5.1.6) define um problema de autovalor cujo menor autovalor λ_{cr} está associado com a flambagem. A força crítica de flambagem associada a este autovalor é obtida por

$$\mathbf{F}_{cr} = \lambda_{cr}\mathbf{F}_{ref}. \quad (5.1.7)$$

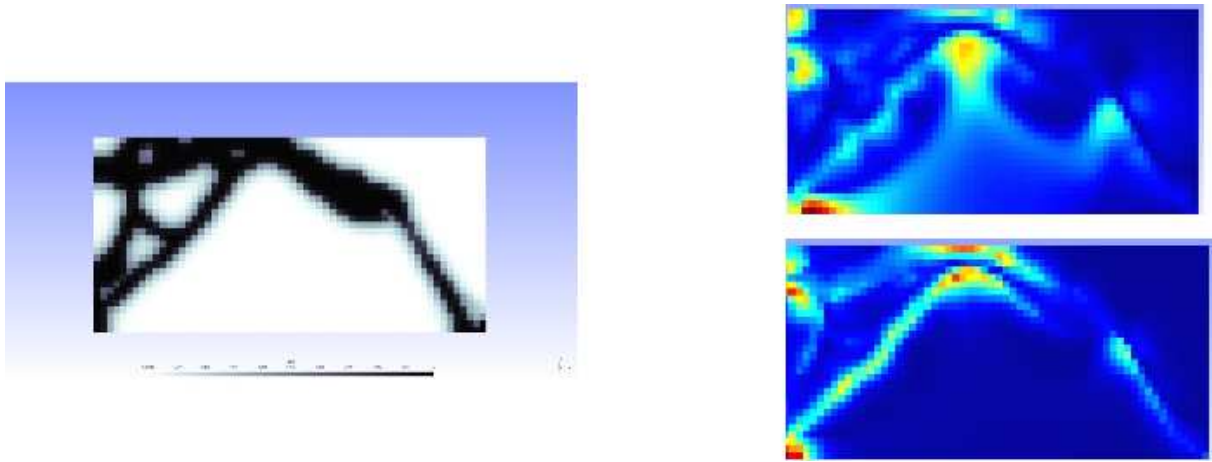


Figura 5.1.1:

Influência do valor de p na distribuição da tensão equivalente de von-Mises em um mecanismo flexível. Para q próximo de p observamos tensões em regiões de baixa densidade (acima) e para menores valores de q observamos tensões somente nas regiões com material (abaixo).

5.1.1 Modos Localizados de Flambagem

A ocorrência dos modos localizados de flambagem está associada às regiões de baixa densidade, fazendo com que o nível de esforços suportados pela estrutura (força crítica) seja muito baixo.

Para evitar esta ocorrência, podem ser desconsiderados no problema de autovalor os graus de liberdade de nós vizinhos de elementos cuja densidade é menor do que 1% ($\rho < 0,01$) [Buhl et al., 1999, apud Pedersen, 2000]. Conforme mostrado em [59] pode-se combinar esta ideia com uma alteração na penalização das propriedades elásticas do material para evitar modos de vibração localizados. No entanto, como a rigidez geométrica depende do nível de tensões em cada um dos pontos de Gauss de um elemento, podemos utilizar a relaxação de tensão para também fazer com que o termo de rigidez geométrica tenha uma queda significativa em regiões de baixa densidade. Conforme ilustrado na Fig. (5.1.1). Assim, não teremos problemas de flambagem em regiões com elementos de baixa densidade.

Capítulo 6

Conclusões / Proposta

O objetivo do estudo é projetar mecanismos com flexibilidade distribuída a partir da formulação base expressa em [15] incorporando um critério global de restrição ao escoamento e a flambagem. Para isso, utilizaremos o método da Otimização Topológica em meios contínuos (modelo SIMP) juntamente com o método dos elementos finitos. Conforme discutido neste texto será avaliada a influência da aproximação-qp nos modos localizados de flambagem com intuito de evitá-los e fornecer uma análise correta do que se refere a este modo de falha. Na sequência é mostrado um cronograma para guiar as atividades que devem realizadas para concluir o trabalho proposto, Fig. (6.0.1). Até o momento, o programa computacional desenvolvido em Scilab contempla o modelo SIMP com o esquema de projeção linear. Um critério de tensão global baseado na *norma-P* está implementado juntamente com a aproximação-qp. Foram feitos testes para minimização de volume em estruturas sob restrição de tensão utilizando malhas com elementos bilineares isoparamétricos de 4 nós.

Cronograma de Atividades - Projeto de Mecanismos Flexíveis sob Restrição de Flambagem e Escoamento								
Mestrando: Luís Renato Meneghelli Orientador: Eduardo Lenz Cardoso	Período							
Atividades	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ	JAN	FEV	Status
Implementação da formulação de mecanismos juntamente com a restrição de tensão								Não Iniciado
Implementação da análise de sensibilidade para flambagem e testes da implementação								Não Iniciado
Investigação sobre relaxação de tensão nos modos localizados								Não Iniciado
Testes com a formulação								Não Iniciado
Produção da Dissertação								Não Iniciado

Figura 6.0.1: Cronograma de atividades

Bibliografia

- [1] AMBROSIO, L., BUTTAZZO, G., 1993, "An optimal Design Problem with Perimeter Penalization", *Calculus and Variations and Partial Differential Equations*, 1, pp. 55-69.
- [2] AMSTUTZ, S., NOVOTNY, A. A., 2010, "Topological optimization of structures subject to Von Mises stress constraints", *Struct. Multidisc. Optim.* 41:407–420
- [3] ANANTHASURESH, G. K., KOTA, S., 1995, "Designing Compliant Mechanisms", *ASME Mechanical Engineering*, 117, pp. 93-96.
- [4] ANANTHASURESH, G. K., KOTA, S., GIANCHANDANI, Y., 1994, "A Methodical Approach to the Design of Compliant Micromechanisms", *Solid-State Sensor and Actuator Workshop*, pp. 189-192.
- [5] ARORA, J. S., 2007, "Optimization of Structural and Mechanical Systems", *World Scientific*.
- [6] BAHIA, M.T., 2005, "Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Mecanismos Flexíveis", *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina*.
- [7] BENDSØE, M. P., 1989, "Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem", *Structural Optimization*, 1, pp. 192-202.
- [8] BENDSØE, M. P., 1995, "Optimization of Structural Topology, Shape and Material", *Springer Verlag*.
- [9] BENDSØE, M. P., SIGMUND, O., 1999, "Material Interpolations Schemes in Topology Optimization", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 69, pp. 635-654
- [10] BENDSØE, M. P., SIGMUND, O., "Topology Optimization: Theory, Methods and Applications". *Springer-Verlag, New York*, 2003.
- [11] BRUGGI, M., 2008, "On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 36 pp. 125–141.
- [12] BRUGGI, M., DUYSINX, P., 2012, "Topology optimization for minimum weight with compliance and stress constraints", *Struct. Multidisc. Optim.*

- [13] CARDOSO, E. L., 2000, "Controle de Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas", Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [14] CARDOSO, E. L., FONSECA, J. S. O., 1999, "Intermediate Density Reduction and Complexity Control in the Topology Optimization", 20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE'99), Brasil.
- [15] CARDOSO, E. L., FONSECA, J. S. O., 2004, "Strain energy maximization approach to the design of fully compliant mechanisms using topology optimization", Latin American Journal of Solids and Structures, Vol. 1, pp. 263-275
- [16] LE, C., NORATO, J., BRUNS, T., HA, C., TORTORELLI, D., 2010, "Stress-based topology optimization for continua", Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 41 pp. 605–620.
- [17] CHEN, G., GOU, Y., YANG, L., 2010, "Research on Multistable Compliant Mechanisms: The State of the Art", Proceedings of the 9th International Conference on Frontiers of Design and Manufacturing
- [18] CHENG, G. D., 1995, "Some aspects on truss topology optimization", Struct. Optim., 10:173–179.
- [19] CHENG, G. D., GUO, X., 1997, " ϵ -relaxed approach in structural topology optimization", Struct. Optim., 13:258–266
- [20] CHENG, T. K., OLHOFF, N., 1981, "An investigation Concerning Optimal Design of Solid Elastic Plates", International Journal of Solid Structures, 17, pp. 305-323.
- [21] LIMA, C. R., 2002, "Projeto de Mecanismos Flexíveis Usando o Método de Otimização Topológica", Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Mecatrônica.
- [22] COLOMBO, J. F., CARDOSO, E. L., MUÑOZ-ROJAS P. A., 2011, "Topology optimization with stress constraints using superconvergent patch recovery", Mechanics of Solids in Brazil, E. A. Fancello, P. T. R. Mendonça & M. Alves, pp. 175-195.
- [23] DORN, W. S., GOMORY, R. E., GREENBERG, H. J., 1964, "Automatic design of optimal structures", J. Méc., Vol. 3, pp. 25–52.
- [24] DUYSINX, P., BENDSØE, M. P., 1998, "Topology optimization of continuum structures with local stress constraints", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 43, pp. 1453-1478.
- [25] DÍAZ, A. R., KIKUCHI, N., 1992, "Solution to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Problems Using a Homogenization Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 35, pp. 1487-1502.

- [26] DÍAZ, A. R., SIGMUND, O., 1995, "Checkerboard Patterns in Layout Optimization", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 10, pp. 40-45.
- [27] EMMENDOERFER JUNIOR, H., 2011, "Problema de Otimização Estrutural com restrição de Tensão Local Usando o Método Level Set", *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal de Santa Catarina.
- [28] FRECKER, M. I., KIKUCHI, N., KOTA, S., 1996, "Optimal Synthesis of Compliant Mechanisms to Satisfy Kinematic and Structural Requirements - Preliminary Results", *Proceedings of the 1996 ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers in Engineering Conference*, Irvine, CA, USA, August 18-22, pp. 177-192.
- [29] GUEST, J. K., PRÉVOST, J. H., BELYTSCHKO, T., 2004, "Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions", *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 61, pp. 238-254.
- [30] GUEST, J.K., 2009, "Topology optimization with multiple phase projections", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, pp. 123-135.
- [31] HARBER, R. B., JOG, C. S., BENDSØE, M. P., 1996, "A New approach to Variable-Topology Shape Design Using a Constraint on Perimeter", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 11, pp. 1-12.
- [32] HER, I., MIDHA, A., 1987, "A Compliance Number Concept for Compliant Mechanisms and Type Synthesis", *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Transaction of the ASME, 109, pp. 348-355.
- [33] HOWELL, L. L., MIDHA, A., 1996, "A Loop-closure Theory for the Analysis and Synthesis of Compliant Mechanisms", *Journal of Mechanical Design*, Transaction of the ASME, 118, pp. 121-125.
- [34] JONSMANN, J., SIGMUND, O., BOUWSTRA, S., 1999, "Compliant Thermal Microactuators", *Sensors and Actuators*, Vol. 76, pp. 463-469.
- [35] JONSMANN, J., SIGMUND, O., BOUWSTRA, S., 1999, "Compliant Electro-Thermal Microactuators", *Proceedings of MEMS 99*, pp. 588-593.
- [36] KOCVARA, M., 2002, "On the modeling and solving of the truss design problem with global stability constraints", *Struct. Multidisc. Optim.* 23:189-203.
- [37] LARSEN, U. D., SIGMUND, O., BOUWSTRA, S., 1997, "Design and Fabrication of Compliant Micromechanisms and Structures with Negative Poisson's Ratio", *Journal of Microelectromechanical Systems*, 6(2), pp. 99-106.
- [38] LIN, J., LUO, Z., TONG, L., 2010, "A new multi-objective programming scheme for topology optimization of compliant mechanisms", *Struct. Multidisc. Optim.*, 40:241-255.

- [39] MICHELL, A. G. M., 1904, "The Limits of Economy of Material in Frame Structures", *Philosophical Magazine*, Ser. 6, n. 8, pp. 589-597
- [40] MIDHA, A., NORTON, T. W., HOWELL, L. L., 1992, "On the Nomenclature and Classification of Compliant Mechanisms: Abstraction of Mechanisms and Mechanism Synthesis Problems", *Flexible Mechanisms, Dynamics and Analysis*, ASME 1992 Design Technical Conferences, 22nd Biennial Mechanisms Conferences, Scottsdale, Arizona, USA, Vol. 47, pp. 13-16.
- [41] NEVES, M. M., RODRIGUES, H., GUEDES, J. M., 1995, "Generalized Topology Design of Structures with a Buckling Load Criterion", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 10(2), pp. 71-78
- [42] PEREIRA, J. T., FANCELLO, E. A., BARCELLOS, C. S., 2004, "Topology optimization of continuum structures with material failure constraints", *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 26, pp. 50-56.
- [43] PRAGER, W., ROZVANY, G.I.N. 1977a: "Optimization of structural geometry", In: Bednarek, A.R.; Cesari, L. (eds.) *Dynamical systems*, pp. 265–293. New York: Academic Press Prager, W.
- [44] RAHMATALLA, S., SWAN, C. C., 2003, "Continuum Structural Topology Optimization of Buckling-Sensitive Structures", *AIAA*, Vol. 41, No. 6, pp. 1180-1189.
- [45] ROZVANY, G. I. N., ZHOU, M., BIRKER, T., 1992: "Generalized shape optimization without homogenization", *Struct. Optim.* 4, 250–254.
- [46] ROZVANY, G. I. N., BIRKER, T., 1994: "On singular topologies in exact layout optimization", *Struct. Optim.* 8, 228–235.
- [47] ROZVANY, G. I. N. 1977b: "Optimal layout of grillages", *J. Struct. Mech.* 5, 1–18.
- [48] ROZVANY, G. I. N., 1996, "Difficulties in truss topology optimization with local buckling and system stability constraints", *Struct. Optim.* 11:213–221.
- [49] ROZVANY, G. I. N., SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI, J., 1992, "New optimality criteria methods: forcing uniqueness of the adjoint strains by cornerrounding at constraint intersections", *Struct. Multidisc. Optim.* 4(3–4):244–246
- [50] ROZVANY, G. I. N., ZHOU, M., BIRKER, T., 1992, "Generalized Shape Optimization without Homogenization", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 4(3-4), pp. 250-252.
- [51] SIGMUND, O., 1994, "Design of Material Structures Using Topology Optimization", PhD thesis, Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark.

- [52] SIGMUND, O., 1995, "Some Inverse Problem in Topology Design of Materials and Mechanisms", Proceedings of IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical Systems, Stuttgart, Germany, pp. 26-31.
- [53] SIGMUND, O., 1996, "On the Design of Compliant Mechanisms using Topology Optimization", Mechanics of Structures and Machines, 25, pp. 495-526.
- [54] SIGMUND, O., 1997, "On the Design of Compliant Mechanisms Using Topology Optimization", Mechanics of Structures and Machines, 25(4), pp. 495-526.
- [55] SIGMUND, O., 1999, "Topology Synthesis of Two Phase Compliant Actuator", Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences, Las Vegas, Nevada, USA, pp. 12-15.
- [56] SIGMUND, O., 1999, "Morphology-based black and white filters for topology optimization", Struct. Multidisc. Optim., 33:401-424.
- [57] SILVA, E. C. N., NISHIWAKI, S., KIKUCHI, N., 2000, "Topology Optimization Design of Flexensional Actuators", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, vol. 47, pp. 657-671.
- [58] SILVA, E. C. N., FONSECA, J. S. O., KIKUCHI, N., 1997, "Optimal Design of Piezoelectric Microstructures", Computacional Mechanics, 19(5), pp. 397-410.
- [59] SILVEIRA, O. A. A., 2012, "Projeto Simultâneo de Otimização Topológica e Controle Para Redução de Vibrações Utilizando Material Piezelétrico", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [60] Compliant Mechanism Research Group [homepage na internet]. Provo: Brigham Young University. [acesso em 27 de março de 2012]. Disponível em: <http://compliantmechanisms.byu.edu/content/intro-compliant-mechanisms>
- [61] SUZUKI, K., KIKUCHI, N., 1991, "A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 93, pp. 291-318.
- [62] SVED, G., GINOS, Z., 1968, "Structural optimization under multiple loading". Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, pp. 803-805.
- [63] SWAN, C. C., KOSAKA, I., 1997, "Voigt-Reuss Topology Optimization for Structures with Linear Elastic Material Behaviors", International Journal of Numerical Methods in Engineering, 40, 1, pp. 3033-3057.
- [64] WERME, M., 2007, "Designing compliant mechanisms with stress constraints using sequential linear integer programming", 7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization.

- [65] YANG, R. J., CHEN C. J., 1996, "Stress-based topology optimization", *Struct. Optim.*, Vol.12, pp. 98–105.
- [66] YOO, J., KIKUCHI, N., 2000, "Topology Optimization in Magnetic Fields Using Homogenization Design Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48, pp. 1463-1479.
- [67] ZHU, B., ZHANG, X., 2012, "A new level set method for topology optimization of distributed compliant mechanisms", *International Journal For Numerical Methods In Engineering*.