

Neste trabalho investigamos os efeitos de um forçamento harmônico e do ruído no sistema Regulador de Watt. Mediante a aplicação das leis da mecânica, deduzimos as equações que regem a dinâmica do sistema. Após realizarmos pequenas transformações para torná-las adimensionais, adicionamos os termos das perturbações. Para essa análise, utilizamos os planos de parâmetro, cujas cores representam um dos maiores expoentes de Lyapunov, o número de máximos contidos em um período da série temporal (diagrama isoperiódico), ou o valor crítico para o ruído. Observamos que o acréscimo da amplitude do forçamento harmônico distorce os planos de parâmetros, de modo que para um intervalo de valores surge um comportamento quase-periódico no sistema. Observamos também que, ao aumentarmos a frequência de oscilação, o sistema recupera o seu comportamento sem as perturbações. Além disso, com a inclusão do termo de ruído, os planos de parâmetros apresentam deformações de acordo com o acréscimo desse, de maneira que as estruturas periódicas começaram a apresentar comportamento caótico, a partir de suas bordas para o centro.

Orientador: Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque

JOINVILLE, 2019

ANO 2019 | LUCAS ALEXANDRE SOUZA ROSA

EFEITOS DE PERTURBAÇÕES NO SISTEMA REGULADOR DE WATT



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – PPGF

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**EFEITOS DE PERTURBAÇÕES NO SISTEMA
REGULADOR DE WATT**

LUCAS ALEXANDRE SOUZA ROSA

JOINVILLE, 2019

LUCAS ALEXANDRE SOUZA ROSA

EFEITOS DE PERTURBAÇÕES NO SISTEMA REGULADOR DE WATT

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas - CCT, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque

**Joinville
2019**

Rosa, Lucas.

Efeitos de perturbações no sistema Regulador de Watt/ Lucas Rosa. - Joinville, 2019.

2 p.

Orientador: Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2019.

1. Sistema Regulador de Watt. 2. Plano de Parâmetros. 3. Expoentes de Lyaounov. 4. Diagramas Isoperiódicos. 5. Valor Crítico do Ruído I. Albuquerque, Holokx. II. Universidade do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação. III. Título.

Efeito de Perturbações no Sistema Regulador de Watt

por

Lucas Alexandre Souza Rosa

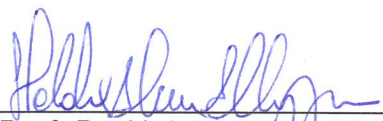
Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA


Área de concentração em “Física”
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

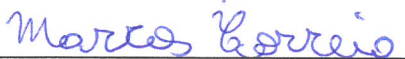
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque
CCT/UDESC (Orientador/Presidente)



Prof. Dr. Paulo Cesar Rech
CCT/UDESC



Prof. Dr. Marcos João Correia
IFC-Brusque

Joinville, SC, 19 de março de 2019.

Dedico este trabalho à minha mãe, à minha avó Maria e ao meu avô Gerônimo.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me proteger e me guiar durante toda a minha jornada. Agradeço a toda a minha família, que me apoiou em todos os momentos da minha vida. Em especial à minha mãe, que me ensinou nos estudos, nos esportes, na vida, e me apoiou em todas as decisões que eu tomei. À minha avó, que sempre me tratou como seu filho, provendo tudo aquilo que eu precisasse. E ao meu vizinho, que foi um verdadeiro pai pra mim, e mesmo sem ter se aprofundado nos estudos, sempre insistiu e proveu tudo o que eu precisei para que eu não precisasse trabalhar enquanto estudasse. Eu amo vocês!

Aos meus amigos que sempre me acompanharam, e aos que entraram em minha vida há pouco tempo, todos tiveram contribuição para que eu fosse quem sou hoje.

Aos professores doutores da Pós-Graduação em Física da UDESC-CCT, por terem me aceitado como aluno de mestrado, dando assim continuidade aos meus sonhos. Em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Holokx Abreu Albuquerque, por ter aceitado o desafio de orientar-me, pela dedicação, paciência, pelos conhecimentos e ensinamentos passados, servindo de inspiração na minha vida profissional, e por toda a empatia durante os momentos difíceis que passei no mestrado, sem a sua compreensão eu não conseguiria concluir este trabalho. Ao Prof Dr. Julio César Sagás, a quem eu sempre recorri quando tive dúvidas quanto à carreira acadêmica, até mesmo nos ônibus em que andamos juntos, e ao Prof. Dr. César Manchein, que foi o primeiro a me motivar a entrar na área e Sistemas Dinâmicos Não-Lineares, sempre me ajudou quando eu precisei, e contribuiu com o programa para obtermos todos os diagramas isoperiódicos contidos nesta dissertação. Aos professores que aceitaram participar da banca examinadora desta dissertação, Prof. Dr. Paulo Cesar Rech, Prof. Dr. Marcos João Correia e Dr. Andreson Hoff. À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo suporte financeiro.

Aos meus amigos adquiridos no mestrado, principalmente ao Henrique, ao Fróis, ao Vinicius, ao Heitor, à Darlene e ao Paulo, pelos clássicos churrascos e pelos momentos compartilhados na Udesc, vocês tornaram esses dois anos muito mais agradável. À Bruna pelas contribuições, e pelos dias de Surf e de academia. Ao Eduardo, ao Nathan e à Carolini pelos momentos de descontração e por toda a contribuição com seus conhecimentos. Ao Flávio, pelas conversas, e pela contribuição com todos os diagramas do valor crítico para o ruído contidos nesta dissertação. E àqueles que aqui não citei, agradeço da mesma maneira, todos tiveram contribuição para mim, seja pelos momentos de aula que compartilhamos, ou mesmo por sua amizade.

À Susele Mussoi e ao Sidnei da Costa Otero, secretários do Programa de Pós-Graduação em Física, pela dedicação nos procedimentos administrativos e por serem acima de tudo bons amigos.

“Não importa o que fizeram com você, o que importa é o que você faz com aquilo que fizeram com você.”

Jean-Paul Sartre, 1905-1980.

Resumo

Neste trabalho investigamos os efeitos de um forçamento harmônico e do ruído no sistema Regulador de Watt. Mediante a aplicação das leis da mecânica, deduzimos as equações que regem a dinâmica do sistema. Após realizarmos pequenas transformações para torná-las adimensionais, adicionamos os termos das perturbações. Para essa análise, utilizamos os planos de parâmetro, cujas cores representam um dos maiores expoentes de Lyapunov, o número de máximos contidos em um período da série temporal (diagrama isoperiódico), ou o valor crítico para o ruído. Observamos que o acréscimo da amplitude do forçamento harmônico distorce os planos de parâmetros, de modo que para um intervalo de valores surge um comportamento quase-periódico no sistema. Observamos também que, ao aumentarmos a frequência de oscilação, o sistema recupera o seu comportamento sem as perturbações. Além disso, com a inclusão do termo de ruído, os planos de parâmetros apresentam deformações de acordo com o acréscimo desse, de maneira que as estruturas periódicas começaram a apresentar comportamento caótico, a partir de suas bordas para o centro.

Palavras chaves: Sistema Regulador de Watt. Forçamento harmônico. Ruído. Planos de parâmetros. Expoentes de Lyapunov. Diagrama Isoperiódico. Línguas de Arnold.

Abstract

In this work, we have investigated the effects of the harmonic forcing and the noise in the Watt Governor system. Through the mechanical laws, we derived the equations which govern the system dynamics. After we have made some changes to turn them adimensional, we added the perturbation terms. In order to make this analysis, we used the parameter planes, which colors represent one of the two largest Lyapunov exponents, the number of the maxima in one period of the time series (isoperiodic diagram), or the critic value of the noise. We observed that the increase of the amplitude of the harmonic forcing deforms the parameter planes, in a way that in a range of values emerges a quasi-periodic behavior in the system, highlighted by the structures known as Arnold Tongues. We also observed that with the increase of the oscillation frequency, the system recovers its behavior as in the case of no perturbation. Besides, with the inclusion of the noise term, the parameter planes show deformations according with the increase of the noise, so that the periodic structures start to show chaotic behavior, from the borders to the center of the structures.

Key Words: Watt Governor system. Harmonic Forcing. Noise. Parameter Planes. Lyapunov Exponents. Isoperiodic Diagrams. Arnold Tongues.

Lista de Figuras

2.1	Esboço de uma trajetória (fluxo) em um sistema dinâmico contínuo tridimensional. .	17
2.2	Possíveis atratores em sistemas dinâmicos contínuos dissipativos tridimensionais. As figuras (a) e (b) representam os atratores do sistema de Rössler com $\alpha = 0$, ponto de equilíbrio e $\alpha = 0,25$, ciclo-limite, respectivamente [19]. Na figura (c) está representado um atrator quase-periódico de um sistema eletrônico [20] e na figura (d) o atrator caótico do sistema de Lorenz [21].	18
2.3	Órbitas esquemáticas $\vec{x}_1(t)$ e $\vec{x}_2(t)$ geradas evoluindo temporalmente o sistema a partir de duas condições iniciais próximas $\vec{x}_1(0)$ e $\vec{x}_2(0)$	19
2.4	Planos de parâmetros do maior e do segundo maior expoente de Lyapunov para o Regulador de Watt Forçado, respectivamente, representados por (a) e (b).	23
2.5	Diagramas Isoperiódicos ($r_L \times R$) para o circuito de Chua. As cores representam o número de máximos contidos em um período da série temporal. Figura retirada da referência [18].	24
2.6	Planos de parâmetros com as intensidades do ruído crítico A_{crit} . A barra de cores acima indica para quais valores de A_{crit} as estruturas periódicas perdem estabilidade e dão lugar ao comportamento caótico. Figura retirada da referência [18].	26
3.1	O sistema Regulador de Watt. Figura retirada da dissertação de mestrado referenciada em [22].	28
4.1	Planos de parâmetros ($\varepsilon \times \alpha$) do maior expoente de Lyapunov para o Regulador de Watt, sem forçamento e sem ruído, com $\beta = 0,8$	33
4.2	Planos de parâmetros ($\varepsilon \times \alpha$) do maior expoente de Lyapunov para o Regulador de Watt, para distintos valores de γ , de acordo com o escrito em cada figura do painel, com $\beta = 0,8$	35
4.3	Ampliações do plano de parâmetros da Figura 4.2(d). Em (a) e (b), os planos de parâmetros com as cores representando o maior e o segundo maior expoentes de Lyapunov, respectivamente. A escala de cores são apresentadas ao lado direito da figura.	36
4.4	Diagramas isoperiódicos relacionados às Figuras (a) 4.2(d), e (b) 4.3. O número de picos contidos em um período da série temporal é codificada pelas cores da seguinte maneira: 5 oliva, 8 cinza, 9 amarelo escuro, 11 salmão, 12 verde, 15 verde floresta, 16 magenta, 17 vermelho, 18 roxo, 20 dourado, 21 laranja, 22 vermelho escuro, 23 azul, 24 salmão escuro, 27 azul escuro, 30 marrom, 34 preto, 36 ciano, 40 ciano escuro, 41 cinza escuro, 42 azul marinho. Valores maiores ou iguais a 43, representados pela cor branca, são considerados comportamentos caóticos ou quase-periódicos.	36
4.5	Planos de parâmetros do sistema Regulador de Watt forçado, e sem ruído, com amplitude fixa $\gamma = 1 \times 10^{-2}$, com diferentes valores para a frequência angular ω . A escala de cores representa o maior expoente de Lyapunov.	37

4.6	Planos de parâmetros para as intensidades críticas A_{crit} do ruído, para os modelos com ruído (a) descrito pela Eq. 3.10, adicionando $\xi(t)$, e (b) descrito pela Eq. 3.12. A barra de cores à direita apresenta os valores de A_{crit} , para os quais o comportamento periódico é substituído pelo comportamento caótico, nas estruturas.	38
4.7	Planos de parâmetros para o modelo sem forçamento, e com os seguintes valores para o ruído: (a) $A = 1 \times 10^{-10}$, (b) $A = 1 \times 10^{-9}$, (c) $A = 1 \times 10^{-8}$, (d) $A = 1 \times 10^{-7}$, (e) $A = 1 \times 10^{-6}$ e (f) $A = 1 \times 10^{-5}$. A barra de cores à direita apresenta os valores do maior expoente de Lyapunov.	39

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	SISTEMAS DINÂMICOS	15
2.1	Espaço de Fases e Atratores	16
2.2	Expoentes de Lyapunov	19
2.3	Plano de Parâmetros	21
2.4	Diagramas Isoperiódicos	23
2.5	Valor Crítico para o Ruído	25
3	O SISTEMA REGULADOR DE WATT	27
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	32
4.1	Motivação	32
4.2	Caso forçado e sem ruído	34
4.3	Casos forçado e sem forçamento, com ruído.	37
5	CONCLUSÃO	40
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	42

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A palavra CAOS, comumente associada a um estado de completa desordem, denomina uma área de estudo que investiga sistemas com um comportamento dinâmico especial, o qual apesar de não apresentar um padrão, pode decorrer da ordem de regras claras e precisas. O procedimento de modelar sistemas dinâmicos permite conhecer estados futuros mediante o conhecimento de estados passados, e das leis que regem a sua evolução [1].

A aparente imprevisibilidade de um sistema caótico ocorre devido à sua sensibilidade às condições iniciais, característica ilustrada na frase “O bater das asas de uma borboleta num extremo do globo terrestre, pode provocar uma tormenta no outro extremo.”, associada ao termo Efeito Borboleta, e cunhada pelo matemático E. N. Lorenz (1917-2008) [2]. Para que se torne possível haver comportamento caótico em um sistema, a sua dinâmica deve ser descrita por no mínimo três equações diferenciais ordinárias, acopladas, autônomas, de primeira ordem no tempo, linearmente independentes e possuir ao menos uma não-linearidade em uma de suas equações [3].

Também conhecida como dinâmica não-linear, esta área aborda sistemas que apresentam a característica de não serem integráveis. Entretanto, a caracterização qualitativa da dinâmica de um sistema de interesse pode prover mais informações úteis a respeito desses do que as soluções quantitativas, tal qual proposto pelo matemático J. H. Poincaré (1854-1912) [4], ao abordar o problema dos três corpos sob a interação gravitacional. Em sua tese de doutorado A. M. Lyapunov (1857-1918) definiu o que se conhece por expoentes de Lyapunov, os quais permitem analisar qualitativamente a dinâmica de um sistema [5].

Ao aplicar modelos matemáticos em diversas áreas, tais quais Biologia [6, 7], Economia [8], e Ciências Sociais [9], dentre outros, nota-se que o comportamento caótico é comum na natureza. Na Física temos exemplos desse em fenômenos naturais, como a citada interação gravitacional entre corpos celestes [10] e a dinâmica das correntes de convecção na atmosfera terrestre [2], ou artificiais, como o comportamento de circuitos eletrônicos oscilatórios [11] e reguladores de pressão e fluxo

em máquinas térmicas [12, 13]. Um exemplo desses últimos é o regulador de Watt, desenvolvido por J.Watt (1736-1819) com o objetivo de controlar automaticamente o fluxo de vapor nas máquinas térmicas.

Ao aplicar a Segunda Lei de Newton ao sistema Regulador de Watt obtêm-se as três equações diferenciais que descrevem sua dinâmica. Com o intuito de nos aproximarmos ao caso real, introduzimos um forçamento harmônico às equações, simulando as variações na intensidade do vapor que entra no sistema, e também um ruído branco, para levar em conta fatores que não foram considerados na construção do modelo, como os efeitos da dilatação térmica, ou de forças dissipativas, a exemplo do atrito. Para análise do comportamento do sistema utilizamos os planos de parâmetros, onde os dois eixos do plano cartesiano representam pares de parâmetros, e o terceiro eixo, representado por cores, fornece o valor do maior ou do segundo maior expoente de Lyapunov, caracterizando assim a dinâmica do sistema. Outro método de análise adotado foi o de diagramas isoperiódicos, semelhante ao anterior, porém apresenta no terceiro eixo o valor dos períodos, permitindo analisar com mais detalhes as estruturas periódicas do plano de parâmetros. Realizamos ainda a análise dos valores críticos do ruído, ou seja, os valores suficientes para destruição das regiões periódicas citadas.

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos. No capítulo 2, denominado “SISTEMAS DINÂMICOS”, apresentamos os aspectos teóricos da área que utilizamos para a construção e compreensão dos resultados obtidos. O capítulo “O SISTEMA REGULADOR DE WATT” contém a análise da configuração experimental, tal como a dedução do modelo matemático e a introdução dos termos de forçamento periódico e ruído. No quarto capítulo estão presentes os “RESULTADOS NUMÉRICOS”, ou seja, os planos de parâmetros contendo os maiores expoentes de Lyapunov, os diagramas isoperiódicos e os valores críticos para o ruído. Por fim, apresentamos as conclusões e as referências bibliográficas utilizadas nesta dissertação.

Capítulo 2

SISTEMAS DINÂMICOS

Um sistema pode ser definido como um conjunto de elementos agrupados por alguma interação, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com esses. Para que este sistema seja denominado dinâmico, algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes devem variar no tempo[3].

Na ciência, é possível prever o futuro, e até mesmo redescobrir o passado, mediante o conhecimento do estado presente e o uso de uma ferramenta poderosa, denominada equação diferencial. A forma desta restringe e ordena o fenômeno investigado. Suas soluções são as responsáveis por fornecer informações sobre o passado e o futuro, a partir do conhecimento do estado presente [14]. Um sistema dinâmico é determinístico quando os seus estados futuros podem ser completamente determinados pelo estado presente. Se houver uma indeterminação, pode-se tratar de um sistema dinâmico estocástico, cujo estado presente apenas fornece informações que podem estabelecer probabilidades para quais direções o sistema pode seguir. Um exemplo de um processo estocástico é aquele em que se considera uma variável associada a algum tipo de ruído no modelo do sistema [15, 17, 18].

Quando a evolução temporal ocorre de maneira discreta, ou seja, a variável tempo assume somente valores inteiros, o sistema denomina-se mapa, e é representado por um conjunto de equações de diferenças. Aquele cujo tempo varia de maneira contínua recebe o nome de fluxo, e tem sua dinâmica descrita por equações diferenciais ordinárias (EDO's). Um fluxo é caótico somente se satisfizer as seguintes condições: conter pelo menos três variáveis independentes que evoluam no tempo; as suas EDO's possuírem ao menos uma não-linearidade; duas condições iniciais muito próximas divergirem exponencialmente no tempo [1, 3]. Um fluxo n -dimensional não linear autônomo pode ser representado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\frac{dx^{(1)}}{dt} &= \dot{x}_1 = F_1(x^1, x^2, \dots, x^n), \\
\frac{dx^{(2)}}{dt} &= \dot{x}_2 = F_2(x^1, x^2, \dots, x^n), \\
&\vdots \\
\frac{dx^{(n)}}{dt} &= \dot{x}_n = F_n(x^1, x^2, \dots, x^n),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Ou de forma compacta, na notação vetorial:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}[\vec{x}(t)], \tag{2.2}$$

onde \vec{x} é um vetor n -dimensional e \vec{F} uma função vetorial desta variável [19]. Esse conjunto de equações representa um sistema dinâmico, pois dado um estado inicial $\vec{x}(0)$, mediante a solução das Equações 2.1, obtém-se o estado final $\vec{x}(t)$ para qualquer $t > 0$. Existem três maneiras de estudar o comportamento de um fluxo: (i) em casos raros, pode-se integrá-lo analiticamente, aplicando alguma metodologia matemática para resolução de EDO's, para encontrar as soluções $\vec{x}(t)$; (ii) estudá-lo qualitativamente, procurando descobrir quais famílias de soluções podem ser associadas a determinados valores dos parâmetros e/ou das condições iniciais do sistema dinâmico em questão; (iii) resolvê-lo numericamente, mediante o uso de um computador para integrar as EDO's do sistema e obter as séries temporais de $\vec{x}(t)$ para um determinado tempo de integração [3].

2.1 Espaço de Fases e Atratores

O Regulador de Watt é um exemplo de um sistema dissipativo. Para compreender qual a diferença entre um sistema dissipativo e um conservativo, é necessária a definição de um espaço de fases, também conhecido como espaço de estados ou espaço das variáveis.

O espaço de fases é um espaço n -dimensional, cujos eixos coordenados são as variáveis dinâmicas do sistema. Um estado é representado como um ponto nesse espaço, o qual possui coordenadas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ e tem sua dinâmica regida pelas Equações 2.1 [3].

A Figura 2.1 mostra o caminho seguido pelo estado de um sistema hipotético, com três dimensões, à medida que este evolui temporalmente. O espaço gerado pelas variáveis x , y e z é denominado

espaço de fases, no qual $\vec{r}(0)$ e $\vec{r}(t)$ representam o conjunto de condições iniciais e a solução do sistema após passado um tempo t , respectivamente. O caminho percorrido nesse espaço é conhecido como trajetória ou órbita. Quando se tratam de sistemas dinâmicos contínuos, essa trajetória é chamada de fluxo [19].

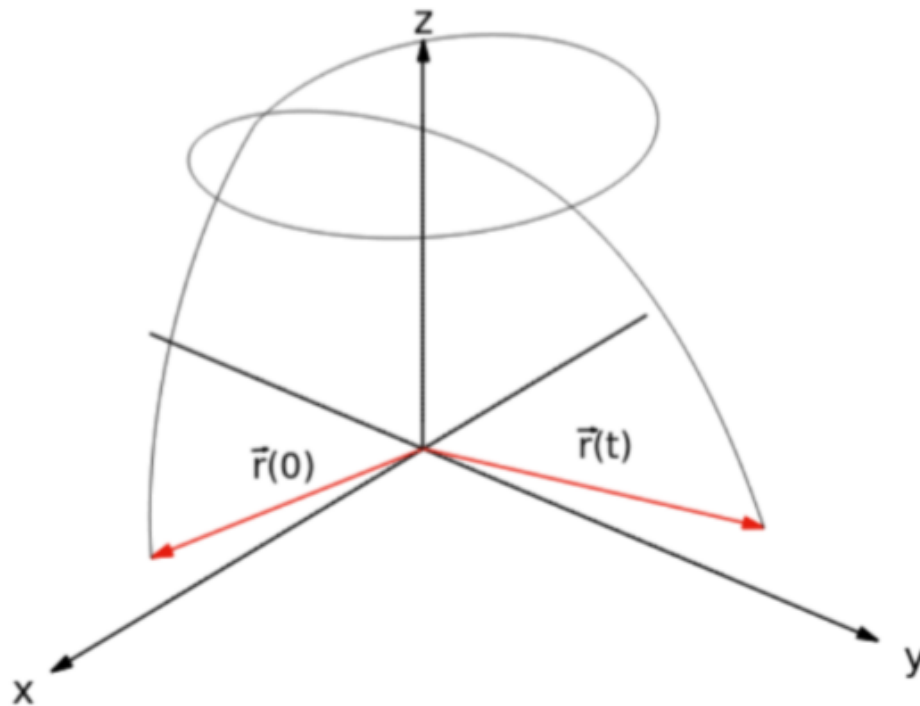


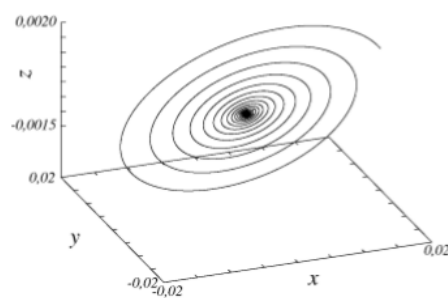
Figura 2.1: Esboço de uma trajetória (fluxo) em um sistema dinâmico contínuo tridimensional.

Tomando um conjunto de condições iniciais de maneira que forme um volume no espaço de fases, pode-se definir o sistema como dissipativo, caso esse volume se contraia com o decorrer do tempo, ou conservativo, quando este for preservado. O sistema abordado nesta dissertação possui um forçamento periódico, o levando a assumir uma quarta equação diferencial para que torne-se autônomo. Nesse caso o espaço de fases se torna quadridimensional e o conjunto de pontos, o qual formava um volume no caso anterior, passa a denominar-se hipervolume.

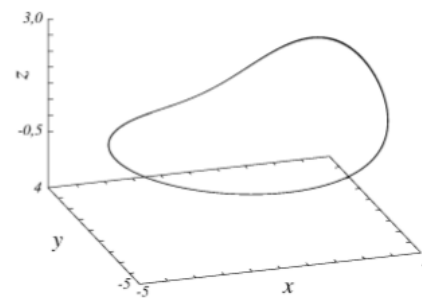
Existe um conjunto invariante de pontos no espaço de fase, em sistemas dissipativos, para o qual as órbitas próximas convergem após um tempo suficientemente longo. Este se chama atrator [3]. Em sistemas autônomos contínuos tridimensionais, o atrator pode ser dos seguintes tipos:

- **ponto de equilíbrio:** é uma solução do sistema, ou seja, um ponto do espaço de fases, para o qual o comportamento do sistema converge e independe do tempo. Na Figura 2.2(a) está representado um ponto de equilíbrio para o qual o sistema de Rössler convergiu;

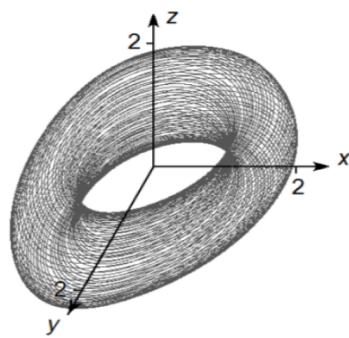
- **ciclo limite ou periódico:** representa um comportamento periódico no tempo, com amplitude e período determinados pelos valores dos parâmetros e pela forma das equações. A Figura 2.2(b) apresenta um ciclo-limite do sistema de Rössler;
- **quase-periódico:** representa um regime quase-periódico com duas frequências fundamentais independentes, cuja razão entre estas é um número irracional. Nesse caso as trajetórias nunca fecham sobre si mesmas, assim como representado na Figura 2.2(c), a qual foi gerada por equações arbitrárias.
- **caótico:** apresenta um comportamento aperiódico e dependência sensível às condições iniciais. Isto é, tomadas duas trajetórias vizinhas no espaço de fases e evoluído o sistema no tempo, a distância entre estas divergirá exponencialmente. A Figura 2.2(d) apresenta o atrator caótico de Lorenz.



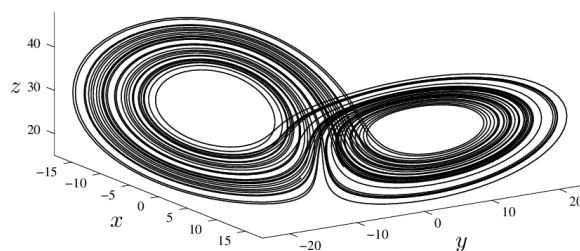
(a) Ponto de equilíbrio.



(b) Periódico.



(c) Quase-periódico.



(d) Atrator caótico.

Figura 2.2: Possíveis atratores em sistemas dinâmicos contínuos dissipativos tridimensionais. As figuras (a) e (b) representam os atratores do sistema de Rössler com $\alpha = 0$, ponto de equilíbrio e $\alpha = 0,25$, ciclo-limite, respectivamente [19]. Na figura (c) está representado um atrator quase-periódico de um sistema eletrônico [20] e na figura (d) o atrator caótico do sistema de Lorenz [21].

A partir de um estudo mediante os expoentes de Lyapunov podemos classificar os atratores, conforme abordado na próxima seção.

2.2 Expoentes de Lyapunov

Para que um sistema apresente comportamento caótico é necessária uma dependência sensível às condições iniciais. Considerando duas condições $\vec{x}_1(0)$ e $\vec{x}_2(0)$, separados por uma distância muito pequena, a rigor infinitesimal $\Delta(0)$, se supõe que estas evoluam no tempo por um sistema contínuo gerando as trajetórias $\vec{x}_1(t)$ e $\vec{x}_2(t)$ respectivamente, de acordo com a representação da Figura 2.3 [19].

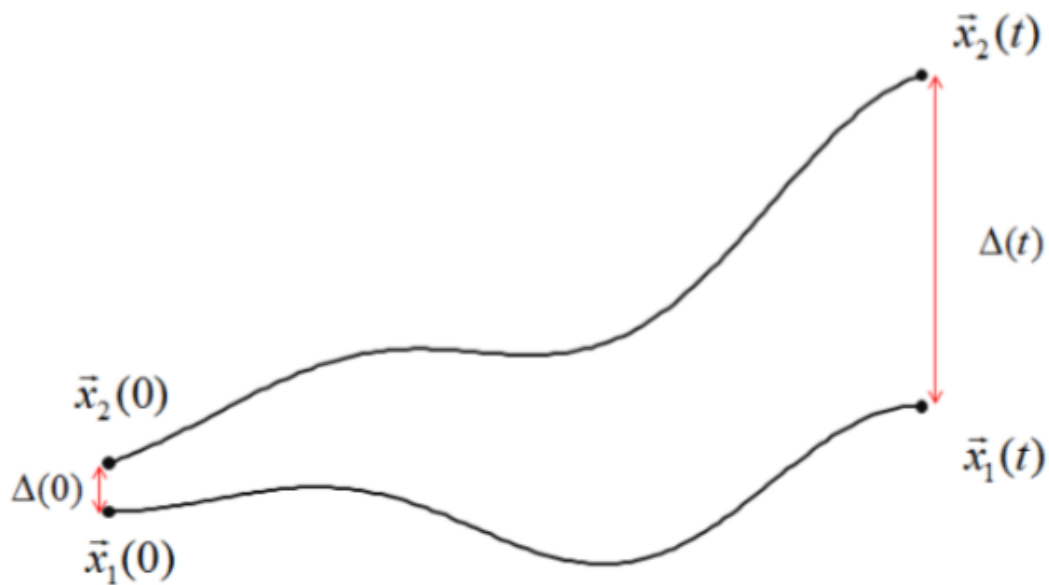


Figura 2.3: Órbitas esquemáticas $\vec{x}_1(t)$ e $\vec{x}_2(t)$ geradas evoluindo temporalmente o sistema a partir de duas condições iniciais próximas $\vec{x}_1(0)$ e $\vec{x}_2(0)$.

Para qualquer instante $t > 0$ a separação entre as trajetórias é $\Delta(t) = \vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)$. O sistema apresenta dependência sensível às condições iniciais se, em média, o módulo da diferença entre as trajetórias cresce exponencialmente com o tempo, ou seja, se $|\Delta(t)| = |\Delta(0)|e^{\lambda t}$. Esse comportamento decorre da presença das não-linearidades no sistema. Uma maneira de quantificar a taxa de divergência das trajetórias e definir a caoticidade do sistema é analisar os expoentes de Lyapunov [19].

Seja um sistema de n equações ordinárias, e uma hipersfera de condições iniciais centrada em $\vec{x}(t_0)$. Conforme o tempo evolui, esta deve sofrer deformações. Tomando uma direção j , considerando que o raio inicial $d_j(t_0)$ varie exponencialmente no tempo, podemos escrever a relação entre $d_j(t_0)$ e o raio $d_j(t)$ em um tempo posterior t da seguinte maneira:

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (2.3)$$

com $j = 1, 2, \dots, n$. Rearranjando temos:

$$\lambda_j = \lim_{d_j(t_0) \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t - t_0)} \ln \left(\frac{d_j(t)}{d_j(t_0)} \right), \quad (2.4)$$

sendo os λ_j os expoentes de Lyapunov. Apesar de os números de dimensões e expoentes de Lyapunov coincidirem, estes não estão associados diretamente às direções no espaço de fase. A orientação muda continuamente à medida que o sistema evolui. Um destes acompanha o sentido de evolução do fluxo, enquanto o restante está associado às direções perpendiculares.

O volume da hipersfera num instante $t > t_0$ deve ser proporcional ao produto das distâncias $d_j(t)$ que o caracterizam, isto é:

$$V(t) \propto \prod_{j=1}^n d_j(t) = V(t_0)e^{(t-t_0)\sum_{j=1}^n \lambda_j}, \quad (2.5)$$

onde $V(t_0)$ é o volume no instante t_0 . Em um sistema conservativo o volume no espaço de fases é conservado, ou seja, $V(t) = V(t_0)$. Isso implica que:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 0. \quad (2.6)$$

Em sistemas dissipativos o volume no espaço de fase deve sofrer uma contração, portanto $V(t) < V(t_0)$ para qualquer $t > t_0$, o que equivale a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j < 0. \quad (2.7)$$

Em uma órbita periódica fechada a distância entre duas condições iniciais se mantém em média constante ao decorrer do tempo, portanto o expoente de Lyapunov associado a essa direção é nulo. Nas direções perpendiculares a essa os expoentes são negativos, pois o volume no espaço de fases sofre uma contração. O comportamento caótico é caracterizado pelo afastamento das trajetórias vizinhas, o que indica a existência de pelo menos um expoente de Lyapunov com sinal positivo

[3].

Com o objetivo de classificar os tipos de atratores, calculamos o espectro de Lyapunov neste trabalho. Em sistema quadridimensional, como no Sistema Regulador de Watt Forçado, existem quatro expoentes de Lyapunov, todos com direções perpendiculares entre si. Nesse caso pode existir os quatro tipo de atratores, mencionados na Seção 2.1, e mais um, com características semelhantes ao caótico. Ordenando os expoentes de Lyapunov em ordem decrescente, podemos relacioná-los com a forma do atrator da seguinte maneira:

- **ponto de equilíbrio:** $\lambda_{1,2,3,4} < 0$, ou seja, haverá uma contração em todas as direções, levando o sistema a convergir em um ponto no espaço de fases.
- **ciclo limite ou periódico:** $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3,4} < 0$, com o expoente nulo correspondendo à direção ao longo da órbita fechada.
- **quase-periódico:** $\lambda_{1,2} = 0$ e $\lambda_{3,4} < 0$, ou $\lambda_{1,2,3} = 0$ e $\lambda_4 < 0$, onde as trajetórias atratoras se encontram sobre uma superfície.
- **caótico:** $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_{3,4} < 0$, ou $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{2,3} = 0$ e $\lambda_4 < 0$, dos quais o expoente positivo está associado à direção na qual trajetórias vizinhas divergem exponencialmente no espaço de fase, após o sistema evoluir no tempo. Por se tratar de um sistema dissipativo, a soma dos expoentes deve ser negativa, portanto os expoentes negativos somados, em módulo, devem sempre ser maiores do que o expoente positivo.
- **hipercaótico:** $\lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_3 = 0$ e $\lambda_4 < 0$. Apesar de distinto no espectro dos expoentes de Lyapunov, não apresenta diferenças notáveis na forma do atrator, se comparado ao caótico. Nesse caso, a soma dos valores dos maiores expoentes não deve ultrapassar o módulo do menor.

A tabela 2.1 mostra o comportamento acima representado para os respectivos valores dos expoentes de Lyapunov:

Na próxima seção apresentaremos uma maneira de analisar o comportamento do sistema mediante cálculo do espectro dos expoentes de Lyapunov.

2.3 Plano de Parâmetros

Todos os sistemas dinâmicos que descrevem sistemas físicos reais dependem de parâmetros, os quais são denominados parâmetros de controle. Alterando os valores desses é possível modificar o comportamento dinâmico de um sistema. O plano de parâmetros pode ser interpretado como uma seção transversal de um espaço de parâmetros n -dimensional de um sistema com mais de dois parâmetros de controle. Trata-se de um gráfico tridimensional, sendo a representação bidimensional

Tabela 2.1: Valores dos expoentes de Lyapunov e seus respectivos atratores para um sistema quadridimensional [19]

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	Atratores
—	—	—	—	1 - Ponto de Equilíbrio
0	—	—	—	2 - Periódico
0	0	—	—	3 - Quasi-periódico
0	0	0	—	4 - Quasi-periódico
+	0	—	—	5 - Caótico
+	0	0	—	6 - Caótico
+	+	0	—	7 - Hipercaótico

correspondente à variação de quaisquer dois parâmetros, e um gradiente de cores indicando o valor do maior, ou do segundo maior expoente de Lyapunov associado a cada região do plano. O algoritmo usado para calcular o espectro do expoente de Lyapunov é descrito em [24].

Analisando a variação de cores para o maior expoente de Lyapunov pode-se verificar para quais pares de parâmetros o atrator é ponto de equilíbrio, periódico, caótico, ou que levam os cálculos a divergirem. Na Figura 2.4(a) a cor preta representa atratores do tipo periódico, e o gradiente de amarelo para o vermelho, o regime caótico do sistema. Caso houvesse regiões onde o maior expoente fosse negativo, ou seja, onde o atrator seria ponto de equilíbrio, poder-se-ia associar a cor branca, e a cor azul para onde o cálculo divergisse.

Se analisar a variação de cores também para o segundo maior expoente de Lyapunov, comparando à do maior, pode-se encontrar ainda as regiões onde há comportamento quase-periódico e hipercaótico. Na Figura 2.4(b) identificam-se as regiões quase-periódicas com a cor preta, desde que nesses mesmos pontos o plano de parâmetros do maior expoente também seja preto. Caso houvesse hipercaos, ou seja, o segundo maior expoente de Lyapunov fosse positivo, um gradiente do amarelo para o vermelho poderia ser escolhido.

A Figura 2.4(b) apresenta uma região com um tom fraco de amarelo, porém isso pode acontecer devido a uma imprecisão numérica. Uma maneira de identificar se trata-se de uma região de domínio hipercaótico, ou simplesmente de imprecisão numérica, é comparando o valor máximo dos dois maiores expoentes de Lyapunov. Neste caso tem-se respectivamente 0,12 e 0,05, sendo que o amarelo indica um valor provavelmente inferior a 0,02, na Figura 2.4(b) identifica-se então que não deve haver um comportamento hipercaótico nesse plano de parâmetros. Para obter as Figuras 2.4(a) e 2.4(b) variamos os parâmetros ε e α , fixando os demais. Resolvemos numericamente o conjunto de equações diferenciais obtidos a partir do sistema Regulador de Watt Forçado, o qual será apresentado em maior detalhe no próximo capítulo, utilizando o método Runge-Kutta de quarta ordem, com passo fixo de 1×10^{-2} e um tempo de integração de 1×10^6 , em uma malha discretizada de 600×600

pontos igualmente espaçados. Escolhemos esses valores para que obtivéssemos uma resolução suficientemente boa para que os contornos das estruturas periódicas se tornassem nítidas. Os demais planos de parâmetros do maior expoente de Lyapunov que obtivemos neste trabalho serão analisados no Capítulo 4

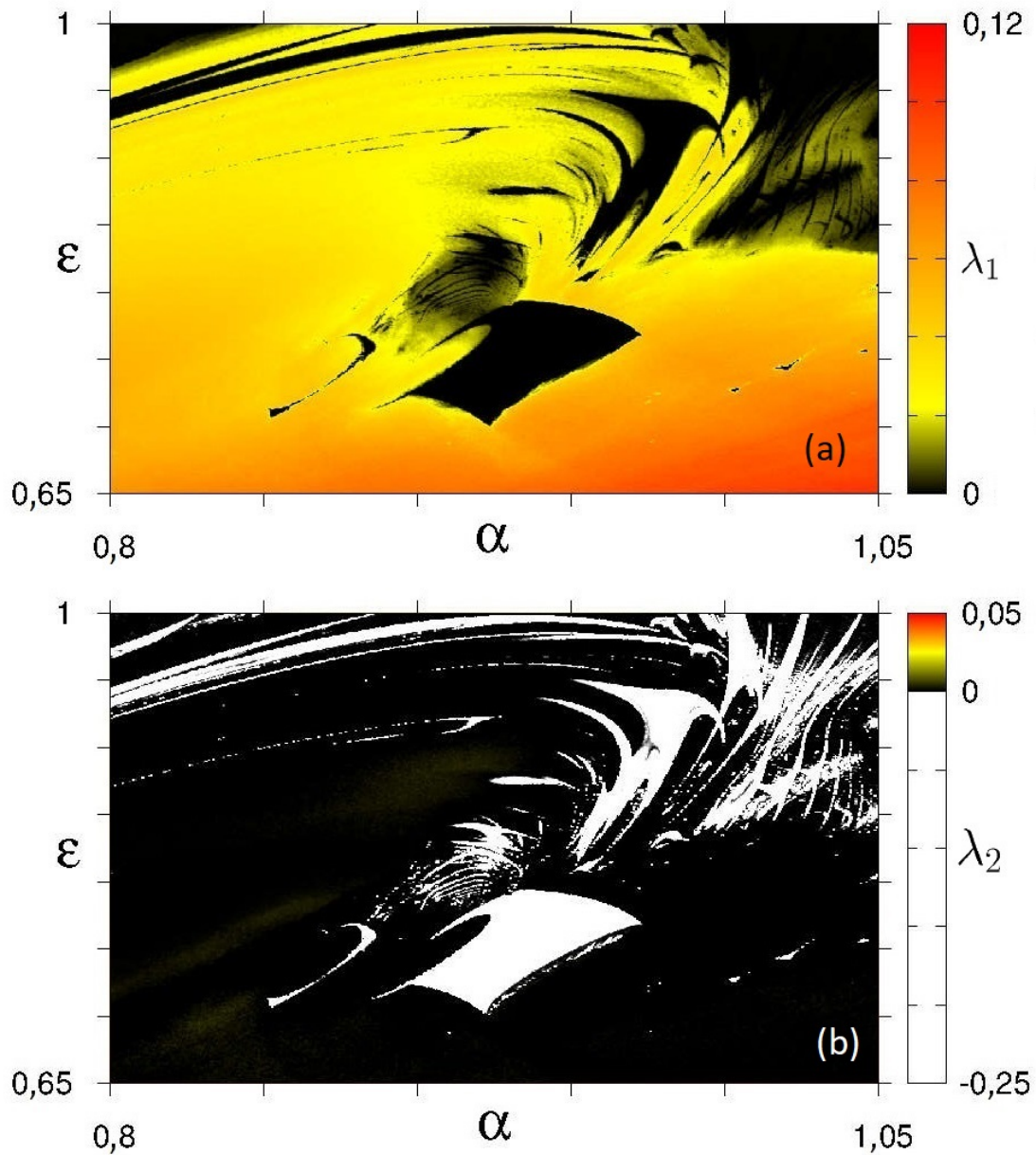


Figura 2.4: Planos de parâmetros do maior e do segundo maior expoente de Lyapunov para o Regulador de Watt Forçado, respectivamente, representados por (a) e (b).

2.4 Diagramas Isoperiódicos

Os diagramas isoperiódicos servem como análise complementar ao diagrama de Lyapunov, uma vez que além de exibir as mesmas informações fornecidas por este, apresentam duas adicionais [25,

26, 27]. Uma é a identificação do número de máximos contidos em cada oscilação periódica na série temporal, mediante a variação de cores, conforme exibido nas Figuras 2.5. A outra é permitir a observação dos limites entre distintos domínios periódicos, o que torna possível verificar como o número de máximos das oscilações periódicas evolui quando os parâmetros de controle são alterados.

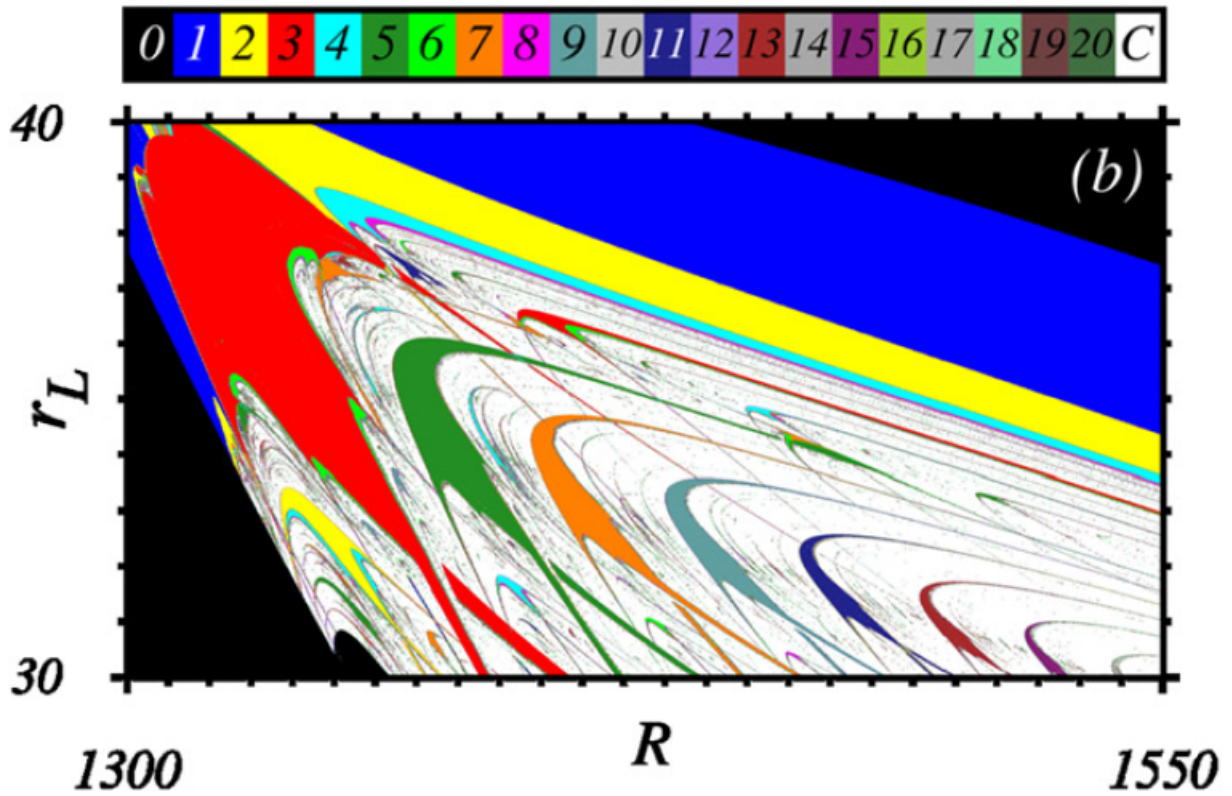


Figura 2.5: Diagramas Isoperiódicos ($r_L \times R$) para o circuito de Chua. As cores representam o número de máximos contidos em um período da série temporal. Figura retirada da referência [18].

Neste trabalho determinamos a periodicidade do atrator assintótico associado a cada condição inicial para um conjunto de valores fixos de parâmetros. O procedimento iniciou com o descarte de um tempo transitório suficientemente longo, denominado transiente, para que o atrator se aproximasse ao atrator assintótico correspondente à condição inicial escolhida [27]. Em seguida determinamos a periodicidade da órbita, considerando a contagem de períodos até um valor máximo. Um ponto (x^*, y^*) é considerado como pertencente a uma órbita de período k se k for o menor inteiro tal que, para todos os pontos da órbita:

$$\|\mathbf{x}_{t+k} - \mathbf{x}_t\| < \epsilon_d, \quad (2.8)$$

onde ϵ_d representa a precisão numérica do teste [26]. Determinamos os períodos das estruturas periódicas no plano de parâmetros do Regulador de Watt Forçado mediante o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Discretizamos uma malha quadrada $10^3 \times 10^3$, integramos o sistema com passo fixo de 1×10^{-3} e um tempo de integração de 1×10^7 , descartando um transiente de 1×10^6 para encontrar os períodos com uma precisão de 1×10^{-3} . Esse valor de precisão é diferente do utilizado para obter os planos de parâmetros com o maior expoente de Lyapunov devido à exigência dos diagramas isoperiódicos, os quais requerem maior precisão para diferenciar as periodicidades das estruturas contidas na figura. Os resultados deste trabalho serão apresentados no Capítulo 4.

2.5 Valor Crítico para o Ruído

Comumente associados à inconveniência no meio científico, os ruídos são os principais responsáveis por os resultados experimentais não coincidirem com as previsões teóricas — desde que o aparato experimental tenha sido devidamente preparado. Estes estão presentes em todo o mundo real e afetam todos os sistemas físicos macroscópicos, portanto não podem ser desconsiderados em procedimentos experimentais, pois mesmo que sejam minimizados, não podem ser eliminados [15].

Os ruídos podem surgir a partir de flutuações do meio em que o sistema se encontra, ou de flutuações internas do próprio sistema. No Regulador de Watt podem ser provenientes do atrito entre as engrenagens do sistema, de impurezas, da dilatação térmica ou das deformidades dos seus componentes, do mau posicionamento do dispositivo, ou a ação de algum agente externo, por exemplo. Apesar de nesta dissertação não estarem presentes resultados de simulações experimentais, alguns trabalhos na literatura nos motivaram ao estudo numérico do sistema com a adição de um termo correspondente a um ruído branco [15, 16, 17, 18].

Analizamos planos de parâmetros cuja variação de cores representa a intensidade crítica A_{crit} para um ruído branco, ou seja, um ruído Gaussiano $\xi(t)$, tal que $\langle \xi(t) \rangle = 0$. O procedimento numérico para obter A_{crit} pode ser descrito da seguinte maneira: adicionou-se um gerador de números aleatórios $\xi(t)$ à rotina do integrador numérico, com $\langle \xi(t) \rangle = 0$, e para cada par de parâmetros, A , na relação $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2Ah\delta(t-t')$, foi acrescido até o maior expoente de Lyapunov atingir valores dentro da precisão 10^{-3} , o qual representa o máximo permitido para que o comportamento do sistema seja considerado periódico. Desta maneira definimos o valor crítico A_{crit} , responsável por levar o comportamento periódico do sistema a se transformar em caótico [17, 18].

A Figura 2.6 apresenta plano de parâmetros com o gradiente de cores representando o A_{crit} para o sistema circuito de Chua.

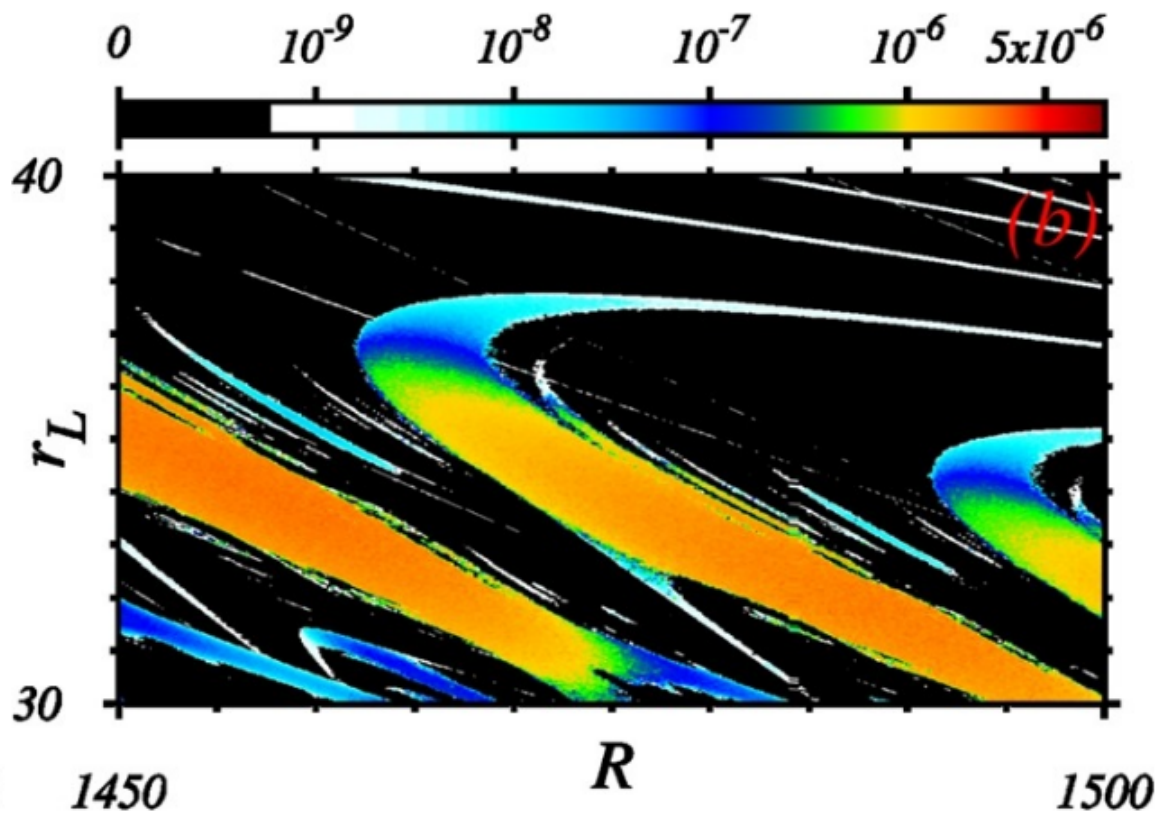


Figura 2.6: Planos de parâmetros com as intensidades do ruído crítico A_{crit} . A barra de cores acima indica para quais valores de A_{crit} as estruturas periódicas perdem estabilidade e dão lugar ao comportamento caótico. Figura retirada da referência [18].

Capítulo 3

O SISTEMA REGULADOR DE WATT

A Revolução Industrial foi marcada pelo avanço da tecnologia, tendo sido desenvolvidas máquinas como moinhos de grãos, fornos, caldeiras, e o maior símbolo desse período, o motor movido a vapor. Este funciona a partir da produção de vapor mediante o aquecimento de água, que exerce pressão sobre um mecanismo de transmissão e rotaciona um eixo, processo que pode transformar essa energia térmica em trabalho útil para determinado fim, como produção e locomoção. Devido à demanda dentro das indústrias, um controle preciso sobre a rotação desse eixo fazia-se necessário. Foi então que, em 1788, James Watt propôs um mecanismo simples, cuja função seria o controle automatizado de um motor a vapor. Este ficou conhecido como Regulador de Watt, e está representado na Figura 3.1.

O dispositivo é composto por duas hastes l e duas massas m unidas pelo eixo e , o qual está acoplado ao rotor da máquina. Estas podem deslizar sob a ação da força gravitacional e do torque exercido pelo eixo girante e , o qual apresenta velocidade angular ω . A velocidade angular Ω do rotor é acoplada pelas engrenagens T , D e E . Em repouso, as massas m deslizam sob a ação da gravidade de maneira a empurrar o pistão H , abrindo a válvula de vapor V . Com o acréscimo da velocidade angular Ω do rotor, as massas sob a ação do torque tendem a levar as hastes a uma posição mais próxima a horizontal, aumentando o ângulo φ , e por consequência reduzindo o fluxo de vapor na válvula V . O desejado seria um estado estacionário em que Ω é constante, porém não é o que acontece.

O controle da máquina a vapor era atingido somente em casos bem específicos da sua construção, o que levou o Regulador de Watt a não se tornar viável. Todavia, posteriormente chegou-se à conclusão que a dinâmica do sistema apresenta caoticidade para determinados conjuntos de parâmetros, os quais estão associados à construção do dispositivo. Esse fato o tornou útil em estudos na área de dinâmica não linear.

As equações que regem o comportamento do sistema são obtidas aplicando-se as leis da mecânica.

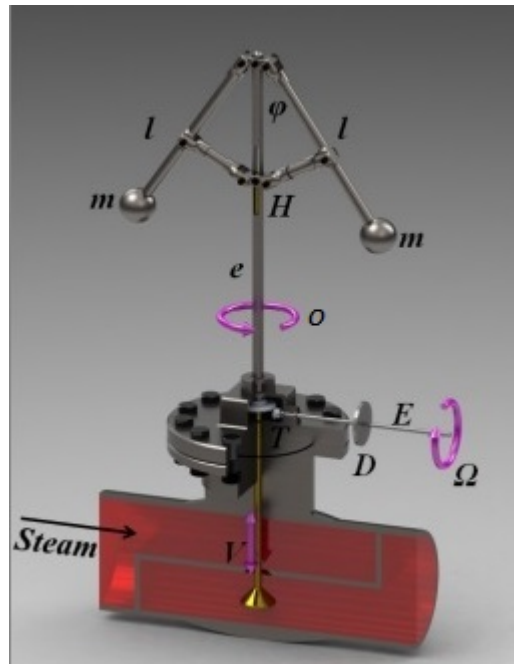


Figura 3.1: O sistema Regulador de Watt. Figura retirada da dissertação de mestrado referenciada em [22].

As deduções a seguir foram baseadas em [23]. As energias cinética e potencial, e a lagrangiana podem ser dadas por:

$$E_c = m(\text{sen}\varphi)^2 o^2 + ml^2 \dot{\varphi}^2, \quad (3.1)$$

$$U = 2mgl(1 - \cos\varphi), \quad (3.2)$$

$$L = E_c - U = m(\text{sen}\varphi)^2 o^2 + ml^2 \dot{\varphi}^2 - 2mgl(1 - \cos\varphi). \quad (3.3)$$

De acordo com a equação de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Substituindo o valor de L da Equação 3.3 na Equação 3.4, a resolvendo e isolando $\ddot{\varphi}$, temos:

$$\ddot{\varphi} = c^2 \Omega^2 \text{sen}\varphi \cos\varphi - \frac{g}{l} \text{sen}\varphi - \frac{b}{m} \dot{\varphi}, \quad (3.5)$$

onde c é uma constante de acoplamento das velocidades angulares $o^2 = c^2 \Omega^2$, e $b = \frac{\lambda_1}{2l^2} > 0$ é a constante da força de atrito do sistema. Analisando o movimento rotacional, o torque resultante é dado por:

$$I \dot{\Omega} = \tau - \tau_{dis}, \quad (3.6)$$

onde τ_{dis} é o torque dissipativo no sistema. O torque τ pode ser escrito como:

$$\tau = \bar{\tau} + \mu(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \quad (3.7)$$

sendo $\bar{\tau}$ o torque médio do eixo, e o segundo termo do lado direito da Equação 3.7 correspondente a variação no torque relacionado à mudança na altura das massas, onde $\mu > 0$ é uma constante de proporcionalidade.

Substituindo a Equação 3.7 na Equação 3.6, temos:

$$I\dot{\Omega} = \mu\cos\varphi - F \quad (3.8)$$

com $F = \tau_{dis} + \mu\cos\varphi_0 - \bar{\tau}$, e I sendo o momento de inércia associada às hastes l e às massas m .

A Equação 3.5, com $\dot{\varphi} = \psi$ para transformá-la em duas equações diferenciais de primeira ordem no tempo, e a Equação 3.8 compõem o conjunto de equações diferenciais autônomas, de primeira ordem, que descrevem a dinâmica do sistema Regulador de Watt:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dT} = \psi, \\ \dot{\psi} = \frac{d\psi}{dT} = c^2\Omega^2\text{sen}\varphi\cos\varphi - \frac{g}{l}\text{sen}\varphi - b\psi, \\ \dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dT} = \frac{1}{I}(\mu\cos\varphi - F). \end{cases} \quad (3.9)$$

Na forma adimensional as Equações 3.9 se tornam:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = y, \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = z^2\text{sen}x\cos x - \text{sen}x - \varepsilon y, \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} = \alpha(\cos x - \beta), \end{cases} \quad (3.10)$$

onde:

$$x = \varphi, \quad y = \sqrt{\frac{l}{g}}\psi, \quad z = \sqrt{\frac{l}{g}}\Omega, \quad \varepsilon = \frac{b}{m}\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \alpha = \frac{cl\mu}{gI}, \quad \beta = \frac{F}{\mu}, \quad (3.11)$$

e o tempo adimensional $t = \sqrt{\frac{g}{l}}T$, o qual é usado na representação das taxas de variação das grandezas numéricas. Os novos parâmetros de controle só possuem significado físico para $\alpha > 0$ e $\varepsilon > 0$, pois estas estão relacionadas às variáveis $b > 0$ e $\mu > 0$, respectivamente.

Na terceira das Equações 3.10 o β , no qual está contido o parâmetro F , é o parâmetro de controle correspondente ao fluxo de vapor no sistema. No caso real esse fluxo não é constante, pois naturalmente pode haver oscilações na produção de vapor pelo aquecimento da água, por exemplo. Para simular essas, foi proposto em [28, 29, 30] uma oscilação periódica do tipo seno.

Como comentado na Seção 2.5, pode haver perturbações, conhecidas como ruídos, no Regulador de Watt provenientes do atrito entre as engrenagens do sistema, de impurezas, da dilatação térmica ou das deformidades dos seus componentes, do mau posicionamento do dispositivo, ou da ação de algum agente externo. Outros trabalhos [17, 18] adicionaram um ruído branco ao conjunto de equações nos sistemas investigados, com o objetivo de simular perturbações como essas.

Motivado por esses estudos prévios, adicionamos independentemente um forçamento harmônico e um ruído Gaussiano, os analisando posteriormente de maneira simultânea. Com ambas as perturbações, que adicionamos para nos aproximarmos mais ao caso real, o sistema de equações adimensionais se torna:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = y, \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = z^2 \text{sen}x \cos x - \text{sen}x - \varepsilon y, \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} = \alpha(\cos x - \beta) + \gamma \text{sen}(\omega t) + \xi(t). \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Sendo o termo $\gamma \text{sen}(\omega t)$ correspondente ao forçamento harmônico, e o termo $\xi(t)$ correspondente ao ruído. Para tornar o conjunto de equações 3.12 autônomo novamente, fizemos a transformação $w = \omega t$. Assim, as reescrevemos da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = y, \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = z^2 \text{sen} x \cos x - \text{sen} x - \varepsilon y, \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} = \alpha(\cos x - \beta) + \gamma \text{sen}(w) + \xi(t), \\ \dot{w} = \frac{dw}{dt} = \omega. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Agora, o sistema volta a ser autônomo, e passa a ser quadridimensional. Não fizemos uma nova transformação, no termo correspondente ao ruído $\xi(t)$, pelo fato de esse não aparecer explicitamente nas equações que regem a dinâmica do sistema, mas ter sido implementado na rotina do integrador numérico.

Capítulo 4

RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentamos os resultados numéricos, obtidos a partir da investigação do sistema Regulador de Watt, com um forçamento harmônico e com ruído branco, considerados independente e simultaneamente. Geramos planos de parâmetros para o maior expoente de Lyapunov usando um integrador numérico, mediante o método Runge-Kutta de quarta ordem [24], com condições iniciais $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 1; 0, 1; 0, 1; 0, 1)$, passo fixo de 1×10^{-2} e um tempo de integração de 1×10^6 , em uma malha discretizada de 600×600 pontos igualmente espaçados. Esse método é amplamente utilizado em estudos de sistemas e fenômenos cuja dinâmica é regida por equações diferenciais. Para obter os diagramas isoperiódicos também utilizamos o Runge-Kutta de quarta ordem [25, 26, 27], porém nestes discretizamos uma malha quadrada $10^3 \times 10^3$, e integramos o sistema com passo fixo de 1×10^{-3} e um tempo de integração de 1×10^7 , descartando um transiente de 1×10^6 , para encontrar os períodos com uma precisão de 1×10^{-3} . Apesar de essa análise requerir uma precisão maior, se comparada à usada para obter os diagramas de Lyapunov, os resultados de ambos se apresentaram coerentes. Para os planos de parâmetros com os valores críticos do ruído foi utilizado o mesmo método de integração que para o maior expoente de Lyapunov, com o mesmo padrão, porém com a adição de um termo associado ao ruído branco, o qual possui as propriedades $\langle \xi(t) \rangle = 0$ e $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2Ah\delta(t-t')$ [17, 18].

4.1 Motivação

Durante a revisão bibliográfica encontramos trabalhos que nos serviram de motivação e guia para, conduzirmos este estudo. Podemos citar a referência [13], a qual apresenta um estudo numérico e analógico do sistema Regulador de Watt, no qual se observa os comportamentos dinâmicos periódico e caótico. Dentre os periódicos se destacam as denominadas estruturas periódicas estáveis, as quais frequentemente se encontram imersas em domínios caóticos e apresentam autossimilaridade. Algumas figuras obtidas nesse trabalho apresentaram um conjunto dessas estruturas, mais especificamente

aquelas denominadas camarões. A Figura 4.1 é a Figura 3(a) da referência [13].

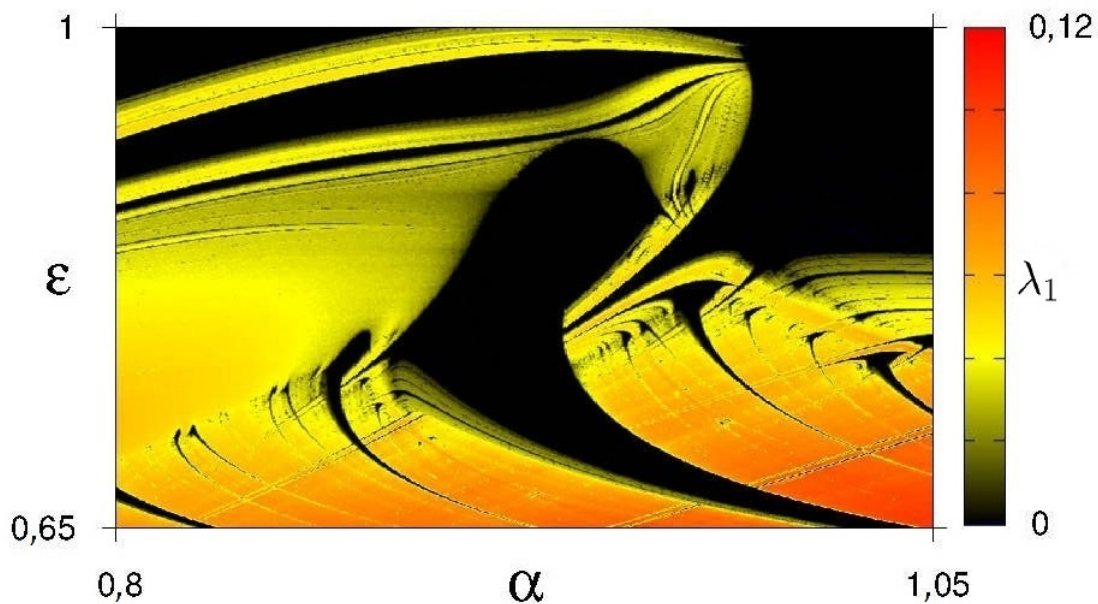


Figura 4.1: Planos de parâmetros ($\varepsilon \times \alpha$) do maior expoente de Lyapunov para o Regulador de Watt, sem forçamento e sem ruído, com $\beta = 0,8$.

Com o intuito de simular as flutuações na entrada de vapor na máquina, alguns autores propuseram um forçamento harmônico do tipo seno na equação correspondente ao torque do eixo principal, o qual é relacionado diretamente com a produção de vapor. Nos trabalhos [28, 29] foram realizados estudo de bifurcação e rota para o caos, mediante diagramas de bifurcação e espectro de Lyapunov, e encontrou-se hipercaos no sistema. Esse comportamento é possível apenas em sistemas autônomos quadridimensionais, o qual o Regulador de Watt se tornou decorrente da adição do forçamento. Na referência [30] os autores realizaram um estudo numérico, mediante planos de parâmetros com o maior expoente de Lyapunov e diagramas isoperiódicos, e observou-se comportamento quase-periódico, o qual surge se a razão entre a frequência do forçamento harmônico e a frequência natural de oscilação do sistema for um número irracional. Esses três trabalhos abordaram um sistema Regulador de Watt com uma montagem experimental diferente do considerado em [13] — adotado também por nós. Além dessa diferença também escolhemos, adicionalmente ao maior expoente de Lyapunov e aos diagramas isoperiódicos, a análise do valor crítico para o ruído.

Na referência [17] foi investigada a dinâmica de uma partícula massiva, carregada, em um campo elétrico de um pacote de onda eletromagnética, sujeita a flutuações térmicas. Já em [18] foram descritos, quantitativa e qualitativamente, os efeitos intrínsecos do ruído no circuito eletrônico de Chua. Em ambos se observou que as estruturas periódicas foram corroídas pelas extremidades, conforme se aumentava o valor do ruído, levando o sistema a um comportamento caótico nessas regiões. Em [15]

os autores se preocuparam em apresentar justificativas para se estudar os efeitos de ruído, por exemplo os fatos de ser intrínseco em todos os sistemas reais, e de terem sido essenciais em determinados momentos da evolução da vida na Terra. Uma proposta de um algoritmo, com a inclusão de um termo estocástico ao Runge-Kutta determinístico, é apresentada pela autora em [16]. Para obter os planos de parâmetros com os valores críticos para o ruído, desta dissertação, um algoritmo semelhante foi utilizado.

Após a revisão bibliográfica, decidimos investigar os efeitos da adição dos termos de forçamento e ruído branco no sistema Regulador de Watt, cuja configuração experimental é aquela apresentada em [13], a qual apresentamos também no Capítulo 3. Para essa análise obtivemos planos de parâmetros, contendo como o terceiro eixo os valores para os dois maiores expoentes de Lyapunov, o número de máximos em um período na série temporal (diagramas isoperiódicos), e o valor crítico para o ruído.

4.2 Caso forçado e sem ruído

Inicialmente nós consideramos o caso do sistema 3.12 sem a variável estocástica $\xi(t)$, apenas com o forçamento harmônico.

Na Figura 4.2 apresentamos planos de parâmetros $(\varepsilon \times \alpha)$, com $\beta = 0, 8$, para o maior expoente de Lyapunov, variando independentemente a amplitude de oscilação γ para seis diferentes valores, em ordem crescente, e fixando a frequência angular $\omega = 1, 0$. Como mencionado na Seção 2.3, a cor preta representa comportamento do tipo periódico, e o gradiente do amarelo para o vermelho, o regime caótico do sistema. Comparando a Figura 4.2 com a Figura 4.1, apresentada em [13], sem o termo de forçamento, podemos observar como a perturbação harmônica distorce o plano de parâmetros. Para pequenos valores de γ , podemos notar nas Figuras 4.2(a) e 4.2(b) a destruição das menores estruturas periódicas imersas no domínio caótico. Nas Figuras 4.2(c) e 4.2(d) os efeitos começam a se tornar mais visíveis, tendo em vista que além da destruição de mais estruturas periódicas pequenas, há a distorção da estrutura periódica maior, localizada no centro destas. Nas Figuras 4.2(e) e 4.2(f), com valores elevados de γ , quase todas as estruturas periódicas são destruídas, sendo substituídas pelas caóticas, as quais preenchem os planos de parâmetros quase por completo.

Dentre os casos apresentados na Figura 4.2, a Figura 4.2(d) se mostrou interessante. Expandindo o quadro rosa no canto superior direito dessa, nós apresentamos na Figura 4.3 planos

de parâmetros, para o primeiro (a) e segundo (b) maiores expoentes de Lyapunov, com o objetivo de analisarmos em mais detalhes a organização das estruturas periódicas. Nesse caso, com $\gamma = 1 \times 10^{-2}$, a dinâmica do caso forçado, e sem ruído, do modelo 3.12 do Regulador de Watt apresenta um comportamento quase-periódico, além dos comportamentos periódico e caótico, já obtidos para valores menores de γ . Os comportamentos periódicos são caracterizados pelas regiões de

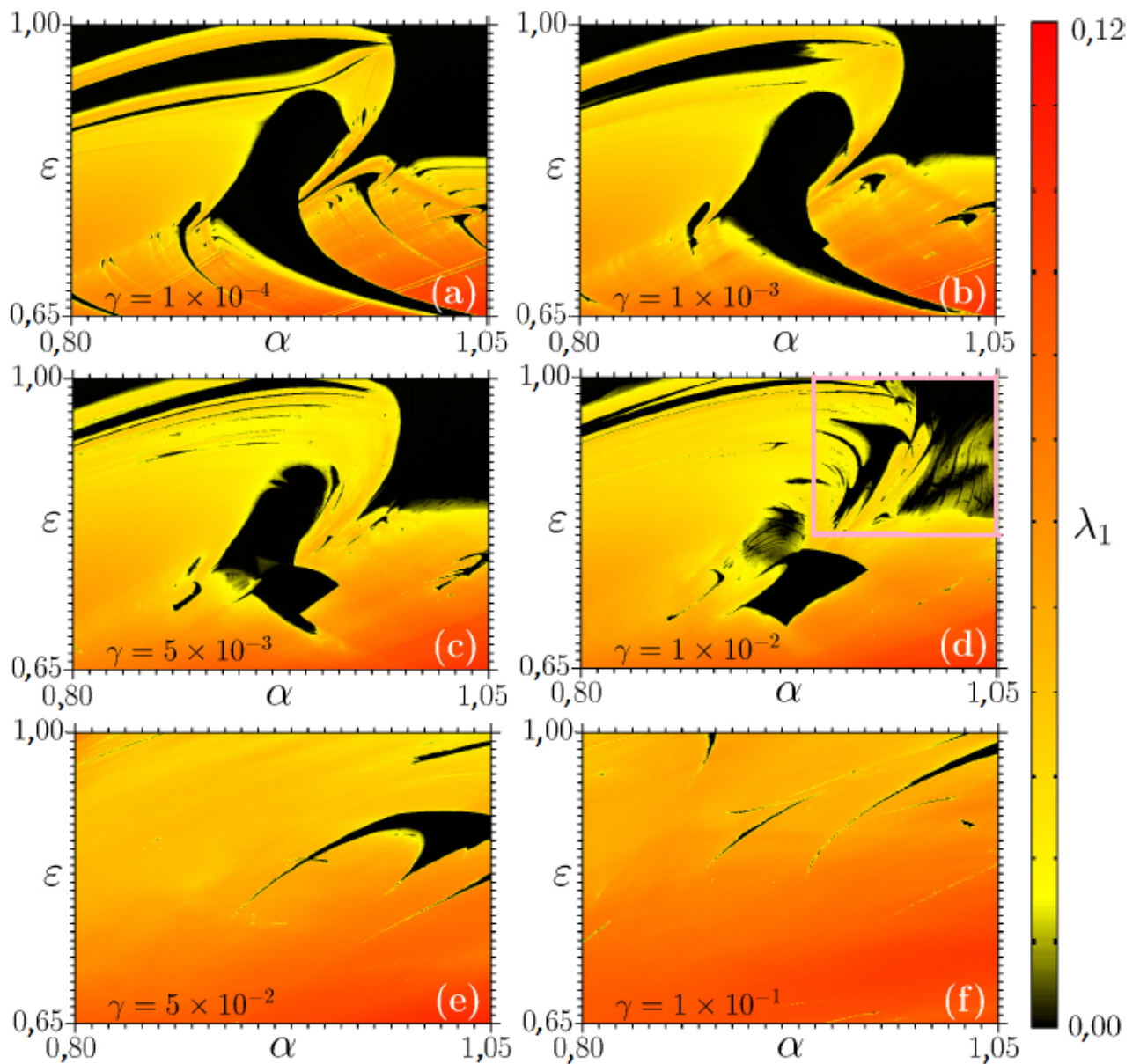


Figura 4.2: Planos de parâmetros ($\varepsilon \times \alpha$) do maior expoente de Lyapunov para o Regulador de Watt, para distintos valores de γ , de acordo com o escrito em cada figura do painel, com $\beta = 0,8$.

cores preto e branco nas Figuras 4.3(a) e 4.3(b), respectivamente. Já os comportamentos caóticos são caracterizados pelas regiões amarela-vermelha e preta nas Figuras 4.3(a) e 4.3(b), respectivamente, e os quase-periódicos pelas regiões pretas em ambos os planos de parâmetros. Analisando esses, notamos no canto superior direito uma região de quase-periodicidade acima das estruturas periódicas conhecidas como Línguas de Arnold [31].

Com o objetivo de examinarmos as dinâmicas relacionadas às Línguas de Arnold, nós obtivemos os diagramas isoperiódicos para os mesmos intervalos usados para obtermos os planos de parâmetros das Figuras 4.2 e 4.3, respectivamente. Como mencionado na seção 2.4, os diagramas isoperiódicos são planos de parâmetros, cuja escala de cores representa o número de máximos em um período da série temporal de um atrator, para determinado par de parâmetros. Esses são comumente usados como

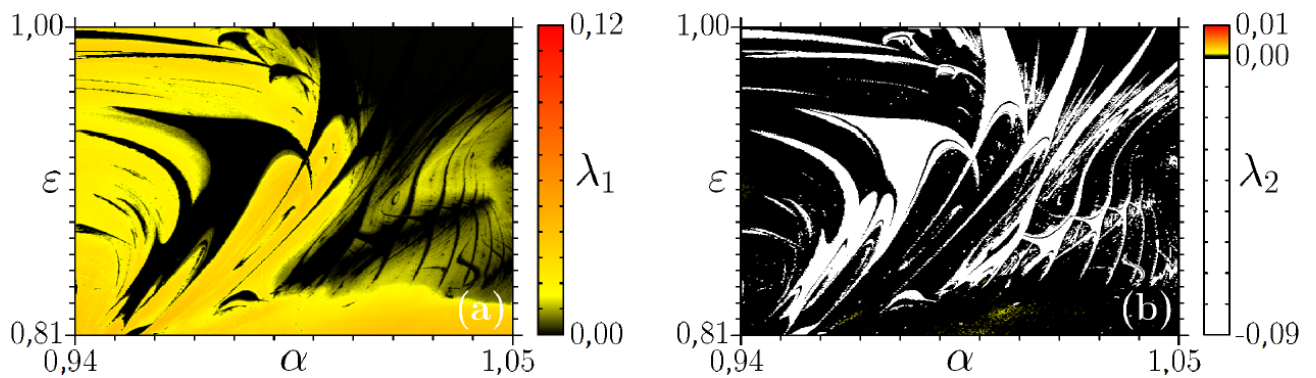


Figura 4.3: Ampliações do plano de parâmetros da Figura 4.2(d). Em (a) e (b), os planos de parâmetros com as cores representando o maior e o segundo maior expoentes de Lyapunov, respectivamente. A escala de cores são apresentadas ao lado direito da figura.

análise complementar aos planos de parâmetros do maior expoente de Lyapunov, tornando possível identificar as regras de organização das estruturas periódicas, por exemplo. Neste caso, notamos que algumas Línguas de Arnold estão conectadas com estruturas periódicas imersas no domínio caótico, mantendo o mesmo número de máximos destas.

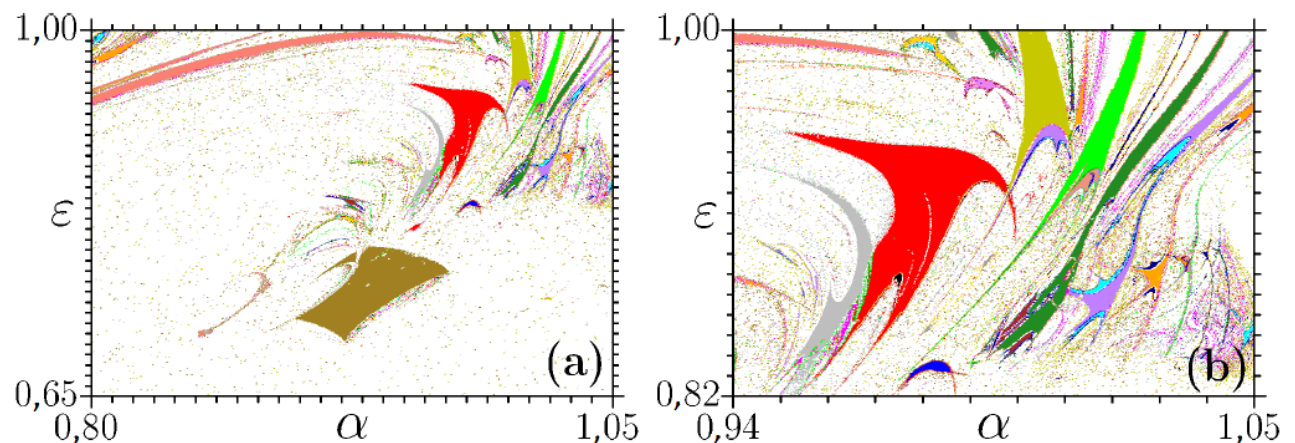


Figura 4.4: Diagramas isoperiódicos relacionados às Figuras (a) 4.2(d), e (b) 4.3. O número de picos contidos em um período da série temporal é codificada pelas cores da seguinte maneira: 5 oliva, 8 cinza, 9 amarelo escuro, 11 salmão, 12 verde, 15 verde floresta, 16 magenta, 17 vermelho, 18 roxo, 20 dourado, 21 laranja, 22 vermelho escuro, 23 azul, 24 salmão escuro, 27 azul escuro, 30 marrom, 34 preto, 36 ciano, 40 ciano escuro, 41 cinza escuro, 42 azul marinho. Valores maiores ou iguais a 43, representados pela cor branca, são considerados comportamentos caóticos ou quase-periódicos.

Na Figura 4.5 apresentamos o efeito da frequência ω no modelo 3.12, sem o termo $\xi(t)$, para quatro valores distintos, mantendo fixo $\gamma = 1 \times 10^{-2}$. Em (a) e (b) observamos que o plano de parâmetros está bem distorcido, se comparado ao caso sem forçamento na Figura 4.1. Contudo podemos recuperar a dinâmica anterior aumentando o valor do parâmetro ω , assim como é possível notar em (c). Em (d) o plano de parâmetros se torna qualitativamente igual ao do caso sem forçamento. Isso significa que no modelo 3.12, sem o ruído $\xi(t)$, pode-se recuperar todos os comportamentos e as estruturas periódicas presentes do caso sem forçamento, no caso forçado, ajustando a amplitude e

a frequência de oscilação do termo de forçamento. Essa característica está relacionada a natureza da perturbação harmônica, uma vez que aumentando a frequência ω , com γ constante, essa perturbação se aproxima a um valor constante.

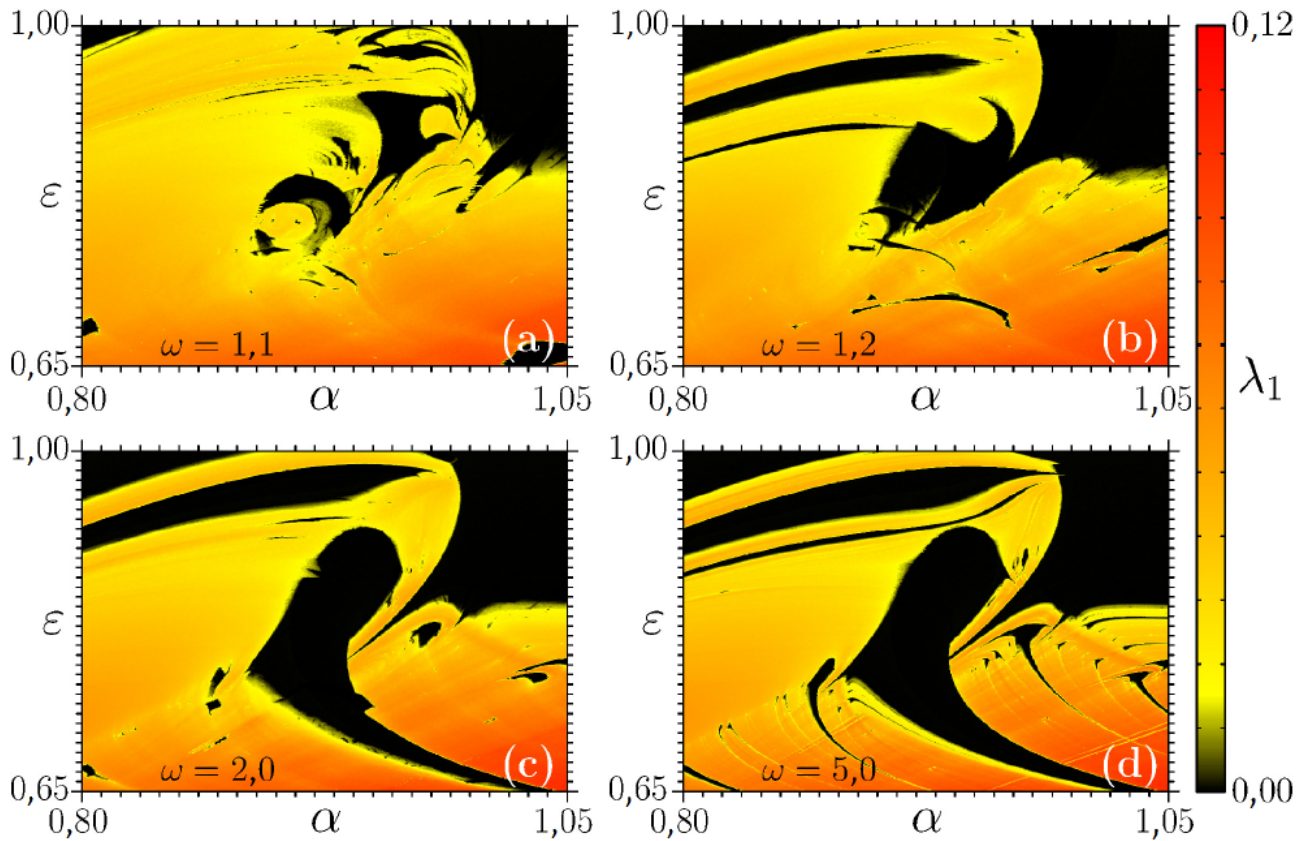


Figura 4.5: Planos de parâmetros do sistema Regulador de Watt forçado, e sem ruído, com amplitude fixa $\gamma = 1 \times 10^{-2}$, com diferentes valores para a frequência angular ω . A escala de cores representa o maior expoente de Lyapunov.

4.3 Casos forçado e sem forçamento, com ruído.

Mediante o método descrito na seção 2.5, apresentamos na Figura 4.6 planos de parâmetros para a intensidade crítica A_{crit} do ruído Gaussiano. Na Figura 4.6(a) temos as simulações para o modelo 3.12 sem o termo de forçamento, mantendo apenas o ruído Gaussiano $\xi(t)$, enquanto 4.6(b) apresenta a simulação do caso da Figura 4.3(a), desta vez, considerando ambas as perturbações. Os planos de parâmetros mostram que o aumento da intensidade do ruído leva à corrosão das estruturas periódicas, partindo das bordas para o centro, começando pelas menores. Essa corrosão representa a substituição do comportamento periódico pelo caótico, para determinados valores de A_{crit} , os quais são codificados pelas cores na barra de cores à direita das figuras. Tendo em vista que já foi observado em outros trabalhos, tanto em sistemas discretos [17], quanto em sistemas contínuos [18], esse parece ser um comportamento comum em resposta ao aumento da intensidade do ruído.

Nas Figuras 4.7 são apresentados seis planos de parâmetros, com o maior expoente de Lyapunov associado às cores. Nesses, é possível observar como acontece a corrosão das estruturas periódicas conforme aumenta a intensidade do ruído, no caso sem forçamento, apresentado na

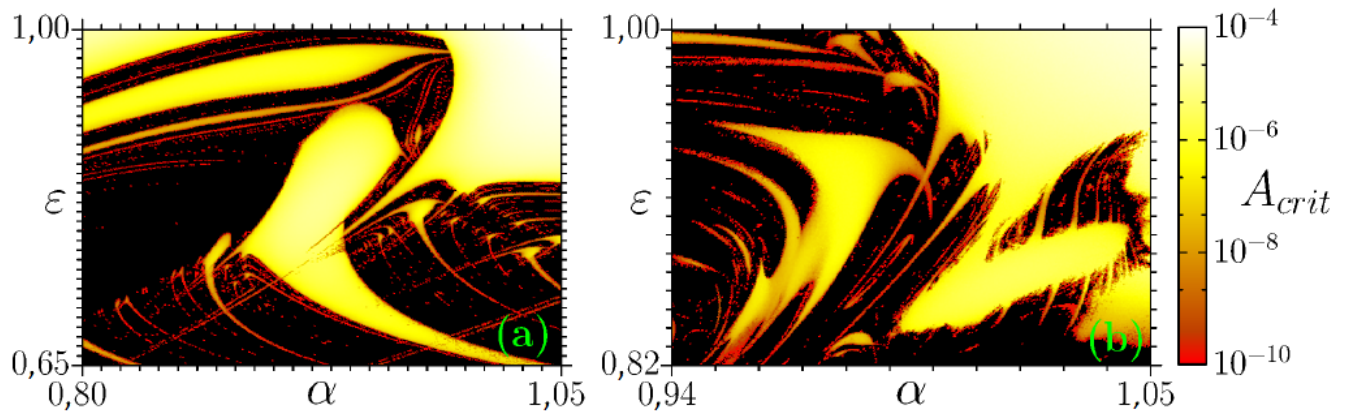


Figura 4.6: Planos de parâmetros para as intensidades críticas A_{crit} do ruído, para os modelos com ruído (a) descrito pela Eq. 3.10, adicionando $\xi(t)$, e (b) descrito pela Eq. 3.12. A barra de cores à direita apresenta os valores de A_{crit} , para os quais o comportamento periódico é substituído pelo comportamento caótico, nas estruturas.

Figura 4.6(a). Em (a), (b) e (c) apenas as pequenas estruturas foram distorcidas. Em (d) e (e) as estruturas menores começam a ser destruídas, enquanto as bordas das maiores começam a ter o comportamento periódico substituído pelo caótico. Por fim, em (f), quase todo o plano de parâmetros apresenta um comportamento caótico.

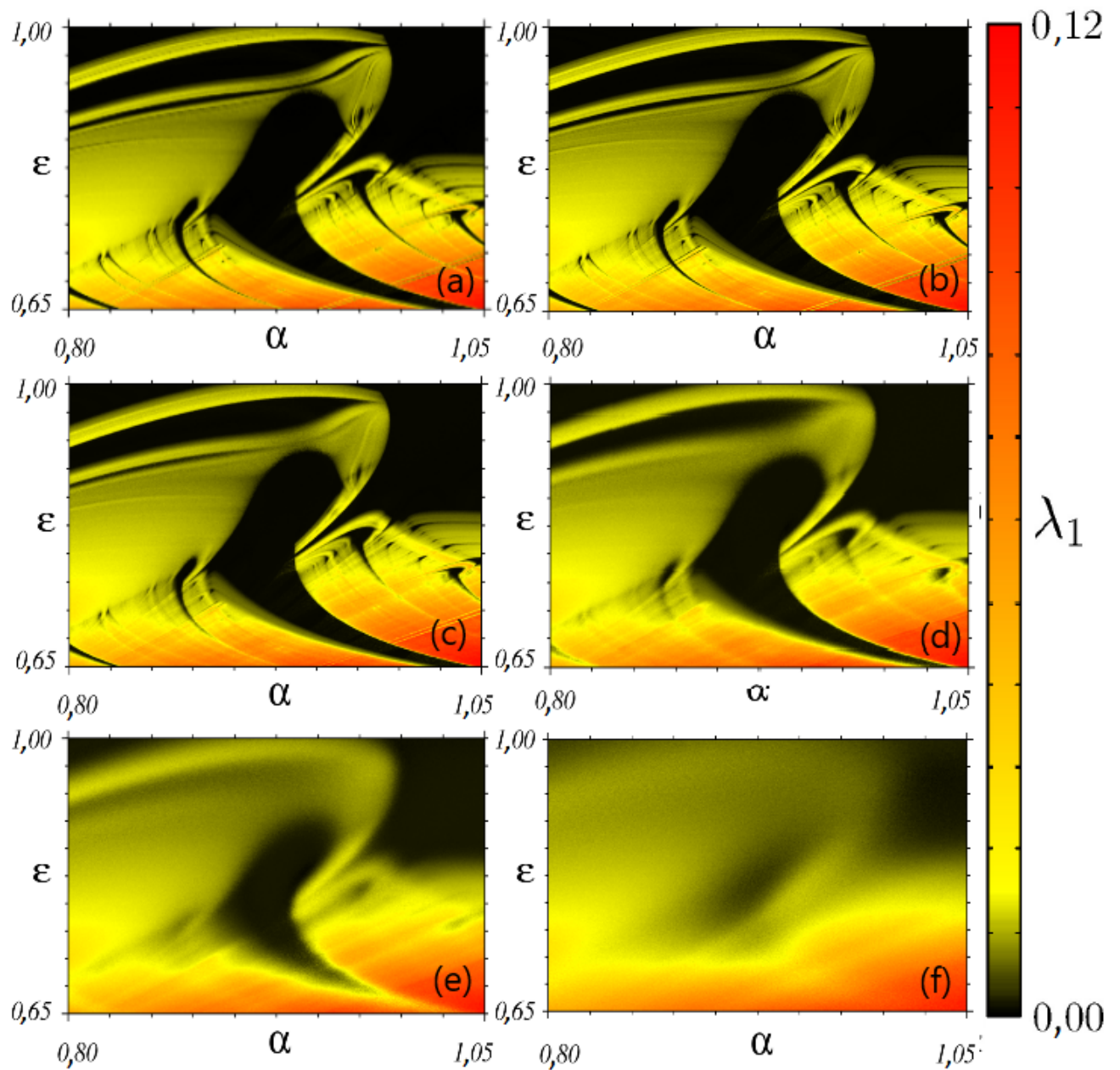


Figura 4.7: Planos de parâmetros para o modelo sem forçamento, e com os seguintes valores para o ruído: (a) $A = 1 \times 10^{-10}$, (b) $A = 1 \times 10^{-9}$, (c) $A = 1 \times 10^{-8}$, (d) $A = 1 \times 10^{-7}$, (e) $A = 1 \times 10^{-6}$ e (f) $A = 1 \times 10^{-5}$. A barra de cores à direita apresenta os valores do maior expoente de Lyapunov.

Capítulo 5

CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho concentrou-se em investigar os efeitos da perturbação harmônica e do ruído no sistema Regulador de Watt. Mediante a aplicação das leis da mecânica, deduzimos as Equações 3.9 que regem a dinâmica do sistema. Adicionamos os termos de perturbação harmônica e de ruído, independente e simultaneamente, para aproximarmos a simulação numérica ao caso real. Para a análise escolhemos utilizar os planos de parâmetros, associando as cores ao maior expoente de Lyapunov, ao número de máximos em um período da série temporal ou ao valor crítico para o ruído.

Inicialmente, sem o termo de ruído $\xi(t)$, variamos o parâmetro γ e obtivemos as Figuras 4.2. O plano de parâmetros foi distorcido, se comparado ao caso sem forçamento (Figura 4.1), com uma deformação progressiva das estruturas periódicas, até que reste somente o comportamento caótico. Em certo ponto dessa perturbação periódica, na Figura 4.2(d), um comportamento quase-periódico surge, assim como as estruturas periódicas denominadas Línguas de Arnold, imersas em regiões caóticas, como observamos de maneira mais detalhada nas Figuras 4.3 e 4.4(b). Um fenômeno que pode levar a esse comportamento quase-periódico é a diferença de fase entre as oscilações natural do sistema e do termo de forçamento, de modo que a razão entre ambas as frequências seja um número irracional.

Nós também realizamos simulações variando o parâmetro ω , mantendo o a amplitude γ fixa, conforme apresentado nas Figuras 4.5. Aumentando a frequência de oscilação do termo de forçamento, nós praticamente recuperamos o plano de parâmetros do modelo sem perturbação, apresentado na Figura 4.1. Como discutido em [32], uma explicação para as estruturas periódicas imersas em domínios caóticos, devido ao aumento do termo de amplitude do forçamento, observado na Figura 4.2, é o fenômeno de antissincronização periódica entre as oscilações periódicas das estruturas estáveis, no domínio caótico, com o forçamento periódico externo, aniquilando a soma das amplitudes, dando lugar ao comportamento periódico. Por outro lado, nas Figuras 4.5, aumentamos a frequência, mantendo a amplitude fixa, e esse fenômeno de antissincronização foi anulado. Dessa maneira, recupera-

mos todas as estruturas periódicas do caso sem forçamento.

Uma perturbação natural que ocorre na vida real é o ruído. Um sinal indesejado, aleatório, e inevitável em sistemas físicos reais, este pode ser decorrente de diferentes origens [15]. Em [18] os autores demonstraram, por simulações numéricas, que o ruído Gaussiano distorce os planos de parâmetros dos sistemas dinâmicos modelados por um conjunto de equações diferenciais ordinárias acopladas. Dessa maneira, implementamos no modelo 3.12 um ruído com uma variável estocástica $\xi(t)$ seguindo uma distribuição Gaussiana. Na Figura 4.6 apresentamos o efeito da corrosão das estruturas periódicas, ou seja, a substituição do comportamento periódico pelo caótico, com a intensidade A_{crit} do ruído. Notamos que, assim como em estudos prévios [17, 18], as estruturas periódicas e quase-periódicas são corroídas das bordas para o centro. Isso é corroborado pelas Figuras 4.7, onde as estruturas periódicas são destruídas conforme o aumento do valor A_{crit} , das bordas para o centro.

Uma sugestão para trabalhos futuros seria a implementação de um sistema análogo ao Regulador de Watt, ou seja, que seja regido pelas mesmas equações diferenciais, com e sem forçamento, em um circuito eletrônico. Desta maneira será possível observar como o ruído distorce os planos de parâmetros em um sistema físico real, e então compará-lo com os resultados numéricos obtidos com o ruído Gaussiano. Outra sugestão seria a obtenção de mais planos de parâmetros, com valores para a amplitude γ próximos ao da Figura 4.2(d), para observar como ocorre a formação e a destruição das Línguas de Arnold.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FERRARA N., PRADO C. *Caos: Uma Introdução*. Edgard Blöcher Ltda, 1995.
- [2] LORENZ, E N.. *Deterministic Nonperiodic Flow*. Journal of the Atmospheric Sciences, vol 20, 1963.
- [3] ALVES MONTEIRO, L. H. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- [4] POINCARÉ, H. *New Methods of Celestial Mechanics*. American Institute of Physics, 3 vols, 1892, 1892, 1899..
- [5] LYAPUNOV, A. M. *The General Problem of the Stability of Motion*. Doctoral dissertation, University of Kharkov, Kharkov Mathematical Society, 1892.
- [6] STROGATZ, S. H., STEWART, I. *Coupled oscillators and biological synchronization*. Scientific American, vol. 269, 1993.
- [7] SAVI, M. *Chaos and order in biomedical rhythms*. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, SciELO Brasil, vol. 27, 2005.
- [8] J.A. HOLYSTT, M. ZEBROWSKA, K. URBANOWICZ. *Observations of deterministic chaos in financial time series by recurrence plots, can one control chaotic economy?* The European Physical Journal B, vol. 20, 2001.
- [9] M. SLIPANTSCHUK, J.; ULLNER, E; BAPTISTA, M. S.; ZEINEDDINE, M.; THIEL. “*Abundance of stable periodic behavior in a red grouse population model with delay: A consequence of homoclinicity*”. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, vol. 20, 2010.
- [10] C. L. SIEGEL , J. K. MOSER. *Lectures on celestial mechanics*. Vol. 187. Springer Science Business Media, 2012.
- [11] L. O. CHUA. *The genesis of Chua’s circuit*. Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California, 1992.
- [12] A. AL-HUMADI, N. D. KAZARINOFF. *Hopf bifurcation in the Watt steam engine*. Em: Bull. Inst. Math. Appl 21 (1985), pp. 133–136.
- [13] MARCONDES, D. W. C., COMASSETTO, G. F., PEDRO, B. G., VIEIRA, J. C. C., HOFF, A., PREBIANCA, F., MANCHEIN, C. ALBUQUERQUE, H.A. *Extensive Numerical Study and Circuitry Implementation of the Watt Governor Model*. Int. J. Bifur. Chaos 27, 1750175, 2018.
- [14] KUZNETSOV, I. *Elements of applied bifurcation theory*. [S.1], Springer, 1998.
- [15] MANNELA, R., McCLINTOCK, P. V. E. *Noise in nonlinear dynamical systems*. Contemporary Physics 31, 179, 1990.
- [16] HONEYCUTT, R. I. *Stochastic Runge-Kutta Algorithms. I. White Noise*. Phys. Rev. A 45, 600, 1992.

- [17] HORSTMANN, A. C. C., ALBUQUERQUE, H. A., MANCHEIN, C. *The effect of temperature on generic stable periodic structures in the parameter space of dissipative relativistic standard map*. Physics of Condensed Matter, 90, 96, 2017.
- [18] PREBIANCA, F., ALBUQUERQUE, H. A., BEIMS, M. W. *Describing intrinsic noise in Chua's circuit*. Phys. Lett. A, 382, 2420, 2018.
- [19] OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. New York: Cambridge University Press, 2002.
- [20] KUZNETSOV, A.P., KUZNETSOV, S.P., STANKEVICH, N.V. *A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 15, 1676–1681, 2010.
- [21] CLEMONS, P.T., STEFANOVSKA, A. *Discerning non-autonomous dynamics*. Physics Reports, 2014.
- [22] VIEIRA, J.C.C. *Estudo Numérico das Bifurcações do Sistema Regulador de Watt*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 40 páginas, 2011.
- [23] SOTOMAYOR, J., MELLO, L.F., BRAGA, D.C. *Bifurcation analysis of the Watt governor system*. Comp. Appl. Math. 26, 19, 2007.
- [24] WOLF, A., SWIFT, J. B., SWINNEY, H. L., VASTANO, J. A. *Determining Lyapunov exponents from a time series*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 16, 285, 1985.
- [25] VITOLO, R.; GLENDINNING, P.; GALLAS, J. A. C. *Global structure of periodicity hubs in Lyapunov phase diagrams of dissipative flows*. Physical Review E Stat. Nonlinear Soft Matter Phys. 84, 016216, 2011.
- [26] GALLAS, M. R.; GALLAS, J. A. C. *Distribution of chaos and periodic spikes in three-cell population model of cancer*. Eur. Phys. J. Special Topics, v. 223, p. 2131-2144, 2014.
- [27] MARTINS, L. C.; GALLAS, J. A. C. *Multistability, Phase Diagrams and Statistical Properties of the Kicker Rotor: A Map with many Coexisting Attractors*. International Journal of Bifurcation and Chaos, v. 18, n. 6, p. 1705-1717, 2008.
- [28] ZHANG, J.G., MELLO, L. F., CHU, Y. D., LI, X. F. AN, X. L. *Hopf bifurcation in an hexagonal governor system with a spring*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 15, 778, 2010.
- [29] ZHANG, J.G., LI, X.F., CHU, Y. D., YU, J.N., Chang, Y.X. *Hopf bifurcations, Lyapunov exponents and control of chaos for a class of centrifugal flywheel governor system*. Chaos, Solitons and Fractals, 39, 2150-2168, 2009.
- [30] RAO, X. B., CHU, Y. D., Lu-Xu, CHANG, Y. X., ZHANG, J. G. *Fractal structures in centrifugal flywheel governor system*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 50, 330, 2017.
- [31] H.G. SCHUSTER, W. JUST *Deterministic Chaos, An Introduction*. Wiley–VCH, Weinheim, 2005.
- [32] RECH, P. C. *Cleaning the Periodicity in Discrete- and Continuous-Time Nonlinear Dynamical Systems*. Int. J. Bifur. Chaos 24, 1430020, 2014.
- [33] HOFF, A.; SILVA, D. T. S.; MANCHEIN, C.; ALBUQUERQUE, H. A. *Bifurcation structures and transient chaos in a four-dimensional Chua model*. Physics Letters A, v. 378, p. 171-177, 2014.