

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
JOINVILLE



Roteiro da Experiência 8

Movimento de rolamento e momento de inércia

FÍSICA EXPERIMENTAL I – FEX1001

Joinville/SC, julho de 2022

1. Objetivo

Determinar experimentalmente o parâmetro adimensional β do momento de inércia de um objeto circular de massa m e raio R em rolamento suave em um plano inclinado.

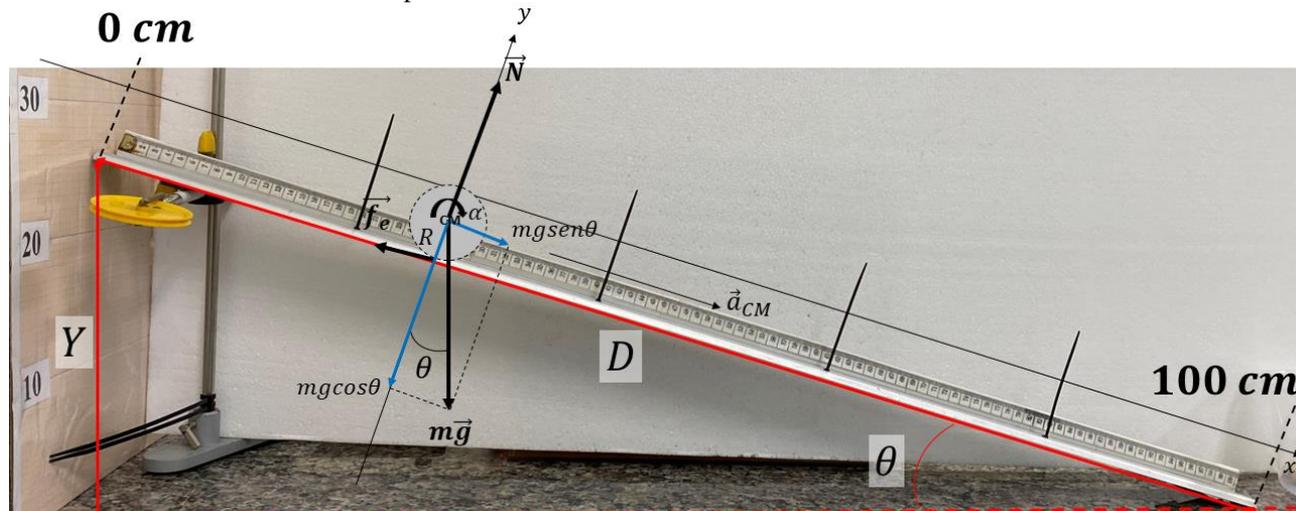


Figura 1: Diagrama de corpo livre de um objeto circular em rolamento suave num plano inclinado.

2. Teoria

A dinâmica do movimento de um objeto é descrita pela 2ª lei de Newton [1] $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ onde m é a massa e \vec{a} a aceleração de translação e $\sum \tau = I\alpha$ onde I é o momento de inércia e α a aceleração angular de rotação.

Na Figura 1, um objeto circular de massa m e raio R faz um movimento de rolamento suave em um plano inclinado com ângulo θ em relação a horizontal, e observa-se MRUV [2] do centro de massa do objeto (seção 7. Demonstração)

$$a_{CM} = \left(\frac{1}{1+\beta} \frac{g}{D} \right) Y, \quad (1)$$

onde $\beta \equiv I_{CM}/mR^2$ é o parâmetro adimensional do momento de inércia, g é a aceleração da gravidade local [3], D e Y são respectivamente o comprimento e a elevação lateral do plano inclinado.

3. Descrição da Experiência

Uma esfera sólida é solta a partir do repouso em um plano inclinado para um rolamento suave. Para cada elevação lateral Y escolhida arbitrariamente, a aceleração a_{CM} do centro de massa da esfera é calculada a partir das medidas do tempo que a esfera leva para percorrer o plano inclinado.

4. Equipamento/Material/Aplicativo

- 1 tripé, 1 haste longa, 1 polia com haste, 1 prendedor, 1 trilho com escala milimetrada, 1 anteparo com escala milimetrada, 1 esfera sólida e cronômetro digital ou filmadora do celular.

5. Procedimento Experimental

- Conecte a haste longa no tripé e com prendedor conecte a polia com haste.
- Anote na **Tabela 1** o comprimento D do trilho (Figura 1) medido com a própria escala do trilho.
- Anote na **Tabela 1** o erro de escala dos instrumentos utilizados para medir o comprimento e o tempo.
- Apoie uma das extremidades do trilho na superfície da bancada e apoie a outra extremidade na haste da polia.
- Fixe o anteparo com escala milimetrada na parede e encoste a extremidade elevada do trilho no anteparo.
- Para cada elevação lateral Y de referência na **Tabela 1** ajuste com auxílio de anteparo, meça e anote. Solte a esfera do repouso na origem (Figura 1: $x = 0$ cm) e meça o tempo com instrumento de medida [3] e anote os valores na tabela. Escolha uma das alternativas para medida do tempo.
 - Cronômetro digital:** Cronometre várias vezes até encontrar três valores próximos do tempo.
 - Vídeo-análise:** Posicione a filmadora frontalmente na região central do trilho a uma distância que apareça todo o trilho e a escala milimetrada. Grave três vídeos do movimento da esfera por todo trilho, faça vídeo-análise e obtenha o tempo.

6. Resultados

I. Identificação das variáveis físicas e os instrumentos utilizados para medida ou medida indireta.

Identifique as variáveis das quantidades físicas (veja a **3. Descrição da Experiência**) e o erro de escala dos instrumentos (veja o **4. Equipamento/Material/Aplicativo**) utilizados ou o erro propagado da medida indireta.

Quantidade Física	Variável	Instrumento/Medida indireta	Erro de escala/propagado
Elevação lateral Y		Escala milimetrada	$\Delta Y =$
Aceleração a_{CM}		Medida indireta	Tabela 3

II. Tabelas.

Tabela 1 (* valor de referência)						Tabela 2		Tabela 3
$D(m) =$		$\Delta x(m) =$		$\Delta t(s) =$				
$Y(cm) *$	$Y(cm)$	$t_1(s)$	$t_2(s)$	$t_3(s)$	$\bar{t}(s)$	$Y(m)$	$a_{CM}(m/s^2)$	$\Delta a(m/s^2)$
0	0					0	0	
8								
18								
26								
34								
43								

(a) Calcule o tempo médio e complete a **Tabela 1**.

(b) Complete a **Tabela 2** na unidade indicada.

(c) Pela equação de MRUV [2] de um objeto que parte do repouso e desloca D em um tempo t , a aceleração é $a = \frac{2D}{t^2}$ (2). Usando o tempo médio obtido anteriormente, calcule e complete a **Tabela 2**.

(d) Determine a equação do erro propagado na aceleração pela equação (2) e utilizando o tempo médio e a aceleração obtidos anteriormente, calcule e complete a **Tabela 3**.

III. Construção de gráfico linear e determinação dos coeficientes a' e b' da equação da reta $y'(x') = a'x' + b'$.

(a) A partir da **Tabela 2**, faça um gráfico linear.

(b) Indique na reta obtida no gráfico, os pontos P_1, P_2 e P_3 . Apresente os valores lidos com suas respectivas unidades.

(c) A partir dos valores dos pontos P_1, P_2 e P_3 , calcule os coeficientes o valor de a' e b' com suas respectivas unidades.

(d) Linearize a equação (1) para o gráfico construído e obtenha as equações para a' e b' .

IV. Determinação Experimental de β e Erro.

(a) Determine o valor experimental de β a partir dos valores de a' e b' da **6.III.(c)** e das equações obtidas na linearização da **6.III.(d)**. Considere $g = 9,79061 m/s^2$ [3] e D o valor anotado na **Tabela 1**.

(b) Determine o erro percentual de β . Considere como valor de referência da **Tabela 4**. Quais são as possíveis fontes de erro?

7. Demonstração

A aceleração do centro de massa (CM) a_{CM} de um objeto circular em rolamento suave deve ser proporcional ao raio R do objeto e da aceleração angular α em torno do eixo que passa pelo CM do objeto [1]

$$a_{CM} = R\alpha. (2)$$

Em um rolamento ao longo de um plano inclinado (*Figura 1*), é necessária uma força de atrito estático f_e para que o objeto não deslize e realize rolamento suave. Podemos escrever a segunda Lei de Newton para translação ao longo do movimento (eixo x) como:

$$\sum F_x = ma_{CM} \rightarrow mg\sin\theta - f_e = ma_{CM}. (3)$$

A segunda Lei de Newton para rotação em torno do eixo que passa pelo CM pode ser escrito como:

$$\sum \tau = I_{CM}\alpha \rightarrow Rf_e = I_{CM}\alpha, (4)$$

onde I_{CM} é o momento de inércia do objeto em relação a eixo que passa pelo CM. Considerando a equação (2) na equação (4), podemos escrever:

$$f_e = \frac{I_{CM}}{R^2} a_{CM}. (5)$$

Substituindo a equação (5) na equação (3), a equação aceleração do CM do movimento pode ser escrito como:

$$a_{CM} = \frac{1}{1 + \frac{I_{CM}}{mR^2}} (g\sin\theta). (6)$$

O momento de inércia de um objeto tem como definição

$$I \equiv \sum_{i=1}^N m_i r_i^2, (7)$$

que em termos de unidade é $[kg.m^2]$ e dessa forma a razão I_{CM}/mR^2 da equação (6) é um parâmetro adimensional do momento de inércia β que depende apenas de como é distribuído a massa do objeto em relação ao eixo que passa pelo CM. Dessa forma para objetos circulares com geometria simples, podemos escrever a equação (6) como

$$a_{CM} = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)(g\text{sen}\theta), \quad (8)$$

onde

$$\beta \equiv \frac{I_{CM}}{mR^2}. \quad (9)$$

A **Tabela 4** apresenta alguns valores teóricos do parâmetro adimensional do momento de inércia β para alguns objetos circulares simples.

Tabela 4: Momento de inércia e parâmetro adimensional do momento de inércia de alguns objetos circulares.		
Objeto	I_{CM}	$\beta = \frac{I_{CM}}{mR^2}$
Aro	$(1)mR^2$	1
Disco ou Cilindro	$(1/2)mR^2$	1/2
Esfera sólida	$(2/5)mR^2$	2/5
Esfera oca	$(2/3)mR^2$	2/3
Caso geral	$(\beta)mR^2$	β

O ângulo do plano inclinado pode ser obtido mediante a geometria da *Figura 1* e pelas definições das funções trigonométricas. Considerando o plano inclinado como um triângulo retângulo, temos:

$$\text{sen}\theta = \frac{Y}{D}, \quad (10)$$

onde Y e D correspondem as dimensões apresentadas na *Figura 1*.

Dessa forma a equação (8) é reescrita como

$$a_{CM} = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)\frac{g}{D}Y, \quad (11)$$

onde g é a aceleração da gravidade local.

Referências

[1] HALLIDAY, D., RENSICK, R. e WALKER, J. – Fundamentos de Física – Volume 1 – Mecânica – Livros Técnicos e Científicos Editora – 8ª Edição.

[2] Experiência 3 – Movimento Retilíneo Uniformemente Variável, FEX1001, UDESC/CCT, Joinville, 2022.

[3] Instrumentos de medidas, FEX1001, UDESC/CCT, Joinville, 2022.

[4] <https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=e856809e0d522d3153e2e7e8ec263bf2>

Para localidade Joinville/SC, Brasil