UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA

PROCESSO SELETIVO – 05/2022

Área de Conhecimento: MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

QUESTÃO 1:

Dizemos que uma variável aleatória X descreve um processo de Bernoulli se atribui 0 ou 1 à ocorrência de fracasso ou sucesso, respectivamente. Se p, com $0 \leq p \leq 1$, denota a probabilidade de sucesso, então X tem função discreta de probabilidade dada por

X	0	1
p_i	$1-p$	p

ou

$$P(X=x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1. \quad (1)$$

Seja a repetição de n experimentos (ou amostragens) de Bernoulli independentes, todos com a mesma probabilidade p de sucesso. A variável aleatória X que descreve o número total de sucessos é denominada variável aleatória binomial. Ela depende de p e n e sua função de probabilidade é dada por

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n \quad (1)$$

sendo $\binom{n}{x}$ o coeficiente binomial dado por

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \qquad (2)$$

Tal fator corresponde ao número total de possibilidades de arranjar n eventos, sendo x sucessos e $n-x$ insucessos.
Determinemos a média de uma variável aleatória binomial.
Definimos as variáveis aleatórias X_i da seguinte forma:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se a tentativa } i \text{ for um sucesso.} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Então $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
Para cada X_i temos o valor esperado

$$E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p \qquad (3)$$

e variância

$$V(X_i) = (1-p)^2 p + (0-p)^2 (1-p) = p(1-p). \qquad (4)$$

Usando o fato de que $E(\sum_i X_i) = \sum_i E(X_i)$ e $V(\sum_i X_i) = \sum_i V(X_i)$, temos

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np. \qquad (5)$$

e

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p) \qquad (6)$$

A distribuição pode ser usada em todos os processos aleatórios que envolvem amostragens independentes que envolvem dois resultados: sucesso ou falha, com probabilidade constante p de sucesso.

Típicas aplicações são:

(i) Controle de qualidade no fornecimento de peças que podem ser defeituosas (sucesso) ou não.
(ii) Ocupação de assentos em um vôo comercial, dependendo da probabilidade conhecida de um passageiro comparecer ou não comparecer (sucesso).
(iii) Probabilidade de cura de um determinado número de pacientes sujeitos a um tratamento que tem uma probabilidade fixa de ser efetivo ou não-efetivo (sucesso).

Referência:

BUSSAB, W. O., MORETTIN, P. A. Estatística Básica. 5a Edição. São Paulo. Ed. Saraiva, 2002
Seções 6.6.2 e 6.6.3

QUESTÃO 2:

Quando realizamos uma amostragem aleatória de alguma grandeza de interesse numa população, nosso interesse é na determinação de parâmetros desconhecidos dessa população.

Consideremos uma amostragem aleatória

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \qquad (1)$$

de tamanho n, de uma população. Dizemos que este conjunto constitui uma amostra aleatória se todos os X_i forem variáveis aleatórias independentes, com a mesma distribuição de probabilidade.

Uma estatística é uma característica da amostra,

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

descrita em termos dos X_i. As estatísticas de maior interesse são a média e variância amostrais:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \,. \quad (2)$$

Podemos mostrar que $\overline{X}$ é também uma variável aleatória. De fato, cada processo de amostragem irá gerar um valor diferente de $\overline{X}$. Suponhamos que uma variável aleatória X tenha média μ e variância σ^2. Então o valor esperado da amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$, $\mu_{\overline{X}}$ é dado por

$$\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu \,, \quad (3)$$

sendo a variância da média σ_X^2 dada por

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{V(X_i)}_{\sigma^2} = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \,. \quad (4)$$

Na fórmula acima usamos a propriedade da variância

$$V(aX) = a^2 V(X) \,, \quad (5)$$

sendo a um parâmetro. Notamos que $\sigma_{\overline{X}}^2 \to 0$ quando $n \to \infty$.

É interessante notar que no desenvolvimento acima não especificamos um tipo particular de distribuição de X na população. Mesmo assim, é possível mostrar que se o tamanho da amostra for suficientemente grande, a distribuição de $\overline{X}$ será aproximadamente normal, com média μ e variância σ^2/n. Caso μ e σ^2 sejam desconhecidos, eles podem ser estimados por meio das relações (2). Este resultado é conhecido como Teorema do Limite Central, que pode ser enunciado da seguinte maneira:

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de tamanho n, obtida a partir de uma população com média μ e variância σ^2, e se $\overline{X}$ for a média amostral, então quando $n \to \infty$, a variável aleatória

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (6)$$

tem distribuição normal padrão.

Na prática, o valor de n necessário para que passamos a aproximação normal depende da forma da distribuição da população. Se esta tiver uma forma similar àquela da distribuição normal, $n \simeq 5$ é suficiente. Caso contrário, é necessário tomar $n > 30$, como regra geral.

Referência:

BUSSAB, W. O., MORETTIN, P. A. Estatística Básica. 5a Edição. São Paulo. Ed. Saraiva, 2002
Seções 10.6, 10.7 e 10.8

QUESTÃO 3

Uma série

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

é dita <u>absolutamente</u> <u>convergente</u> se a série de valores absolutos

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_n| \qquad (2)$$

é convergente. Por exemplo, a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots \qquad (3)$$

é absolutamente convergente, pois

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad (4)$$

é convergente pois, pelo teste da integral,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1 . \qquad (5)$$

Por outro lado, a série harmônica alternada

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \qquad (6)$$

é convergente (pois, pelo teste da série alternada, se $b_n = 1/n$, $b_{n+1} < b_n \ \forall n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$), mas não absolutamente convergente, pois

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \qquad (7)$$

é divergente, pois

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{x} \qquad (8)$$

diverge. Este é um exemplo de série condicionalmente convergente. Ou seja,

Uma série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é dita <u>condicionalmente</u> <u>convergente</u> se ela for convergente, mas não absolutamente convergente.

Embora a convergência de uma série não seja suficiente para garantir a sua convergência absoluta, podemos mostrar que a convergência absoluta implica convergência, ou seja,

Se uma série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente então ela é convergente.

Para provar tal resultado partiremos do seguinte resultado:

$$a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \qquad (9)$$

Se $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum_{i=1}^{\infty}|a_n|$ converge, de modo que $\sum_{i=1}^{\infty} 2|a_n|$ também converge. Por outro lado, pelo teste da comparação, Usando (9), concluímos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(a_n + |a_n|\right) \qquad (10)$$

também converge. Isso agora implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + |a_n| - |a_n|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + |a_n|\right) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad (11)$$

é convergente, pois é a diferença entre duas séries convergentes.

Tal resultado é extremamente útil para determinar a convergência de séries. Por exemplo, a série (3) é convergente pois é absolutamente convergente. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \qquad (12)$$

pode ter sua convergência examinada por esse método. Notemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| = \sum_{n=}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2} \quad . \qquad (13)$$

Como $|\cos n| \leq 1$, $\forall n$,

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \qquad (14)$$

de modo que, pelo teste da comparação, a série (13) converge pois $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Portanto, (12) é absolutamente convergente e, consequentemente, convergente.

O teste da razão também faz uso desse resultado.

Referência:
STEWART, James. Cálculo. São Paulo: Cengage Learning 2009. vol 2
Seção 11.6

QUESTÃO 4

Façamos um esboço do gráfico da região de interesse (Fig. 1)

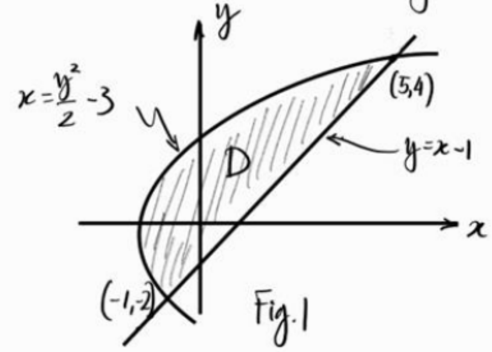

Fig. 1

A região D pode ser especificada da seguinte forma:

$$D = \left\{ (x,y),\ -2 \leq y \leq 4,\ \frac{1}{2}y^2 - 3 \leq x \leq y+1 \right\}. \quad (1)$$

Podemos calcular a área de D da seguinte forma:

$$A = \iint_D dx\,dy = \int_{-2}^{4} \left[\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} dx \right] dy = \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\frac{y^2}{2} - 3 \right) \right] dy \quad (2)$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\frac{y^2}{2} + y + 4 \right) dy = \left[-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} + 4y \right]_{-2}^{4} \quad (3)$$

ou

$$A = \iint_D dx\,dy = \left(-\frac{4^3}{6} + \frac{4^2}{2} + 4 \cdot 4 \right) - \left(\frac{-(-2)^3}{6} + \frac{2^2}{2} - 4 \cdot 2 \right) \quad (4)$$

$$= \frac{40}{3} + \frac{14}{3} = 18. \quad (5)$$

Referência:
STEWART, James. Cálculo. São Paulo: Cengage Learning 2009. vol 2
Seção 15.3

Membros da Banca:

Avaliador 1 (Fernando Deeke Sasse)

Avaliador 2 (Jarbas Cleber Ferrari)

Presidente da Banca (Elisa Henning)