UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA

PROVA ESCRITA
PROCESSO SELETIVO 04/2023 - UDESC
Área: Matemática e Estatística

Número de inscrição ____________________

Questão 1. (2,5 pontos) Defina vetor e disserte sobre a adição de vetores, abordando essa operação algébrica e geometricamente.

Referências:

[1] STEINBHUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. Makron Books Editora. 2a edição. 1987. P. 4, 7, 20

[2] VENTURI, J.J. Álgebra Vetorial e Geometria Analítica. Autores Paranaenses, 2009.Disponível em https://www.geometriaanalitica.com.br/copia-indice1, sob licença do autor. P. 64, 70

Modelo de Resposta:

Um vetor $\overrightarrow{v}$ no espaço é um objeto que possui direção, sentido e comprimento. Dois vetores no espaço são iguais se eles tem a mesma direção, sentido e comprimento. Por exemplo, os vetores na Figura 1 são iguais. Se dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são iguais, dizemos que $\overrightarrow{w}$ é um representante do vetor $\overrightarrow{v}$ (e vice-versa).

Vetores costumam ser representados por segmentos de reta orientados, com início e fim em pontos do espaço. Se um vetor tem início no ponto A e fim no ponto B, podemos representar esse vetor por $\overrightarrow{AB}$ ou $B - A$. Neste caso a direção do vetor é aquela da reta determinada por estes dois pontos, o sentido seria determinado pelo sentido de percurso de uma partícula viajando sobre essa reta saindo do ponto A em direção ao ponto B e o comprimento é a distância entre A e B. Vale notar que, para cada ponto A do espaço, existe um representante de um dado vetor $\overrightarrow{v}$ com início no ponto A.

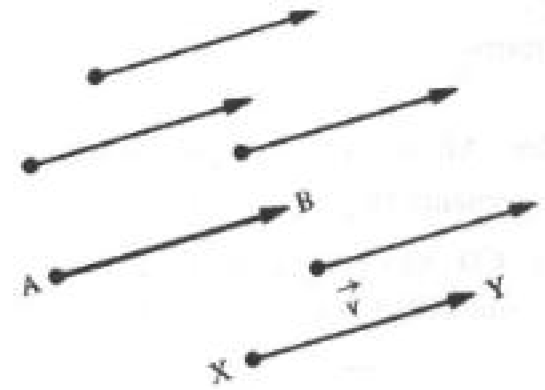

Figura 1: Vetores iguais.

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são dois vetores no espaço, e A, B e C são pontos no espaço tais que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são representantes de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, respectivamente (veja a Figura 2), então a *adição* (ou *soma*) dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, denotada por $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, é

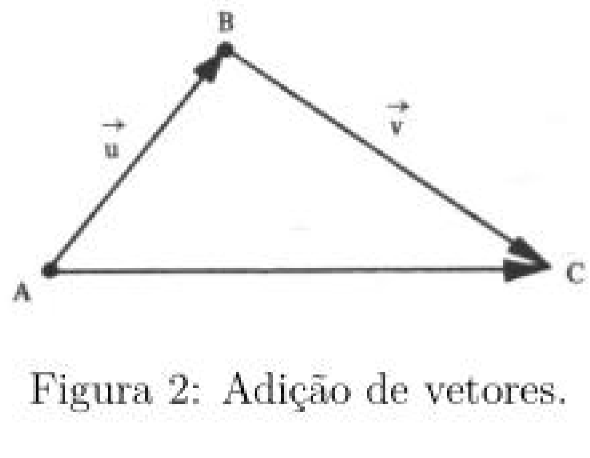

Figura 2: Adição de vetores.

definida como o vetor $\overrightarrow{AC}$, com início em A e fim em B (veja a Figura 2).

No que se segue, assumimos a definição e as propriedades da multiplicação por escalar de vetores, visto que o foco é falar sobre adição de vetores.

Se $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são vetores não colineares (isto é, com direções distintas) e não nulos, então para qualquer vetor $\overrightarrow{v}$ (coplanares com $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$) existem números reais a_1 e a_2 tais que $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$ (veja a Figura 3). Neste caso dizemos que $\overrightarrow{v}$ é uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$. O par de vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, não colineares, é chamado uma *base* para o plano. Os números a_1 e a_2 são chamadas as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ na base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$. Se não houver risco de confusão com relação à base considerada, podemos denotar o vetor $\overrightarrow{v}$ simplesmente por $\overrightarrow{v} = (a_1, a_2)$, onde a_1 e a_2 são as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ com relação à base usada. Isso mostra que um vetor no plano pode ser interpretado como um par ordenado de números reais.

Agora, se $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ é uma base para o plano, e $\overrightarrow{v} = (a_1, a_2)$ e $\overrightarrow{w} = (b_1, b_2)$ são vetores nesse plano, então a adição (ou soma) de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ é definida algebricamente por

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Note que, de acordo com a Figura (3), esta definição de adição coincide com a definição anterior.

Argumentos análogos podem ser apresentados para definir a soma de vetores no espaço tridimensional.

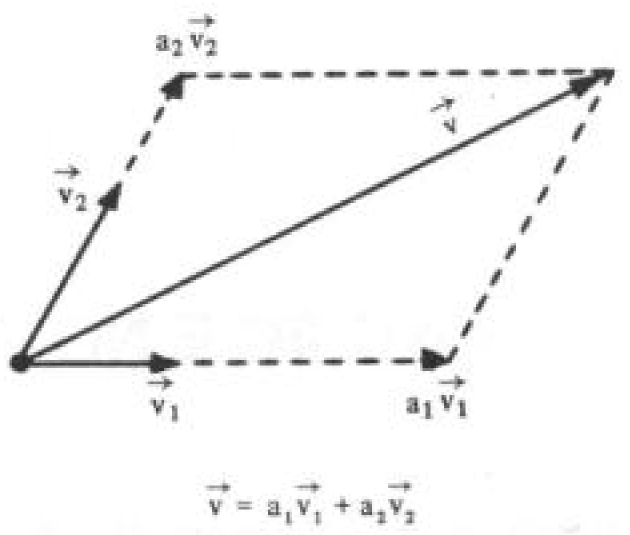

Figura 3: Combinação linear de vetores.

Questão 2. (2,5 pontos) Defina elipse e apresente seus elementos. Em seguida, deduza a equação da elipse centrada na origem com eixo maior sobre o eixo x.

Referências:

[2] VENTURI, J.J. Cônicas e Quádricas. Autores Paranaenses, 2003. Disponível em https://www.geometriaanalitica.com.br/copia-av, sob licença do autor. P. 69, 71, 82

Modelo de Resposta:

A elipse é uma curva plana que pode ser obtida a partir da interseção de um plano com um cone, por isso é conhecida como uma cônica.

Formalmente, uma *elipse* (Figura 4) é o conjunto dos pontos em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante igual a $2a$, onde $2a$ é maior que a distância entre os pontos F_1 e F_2.

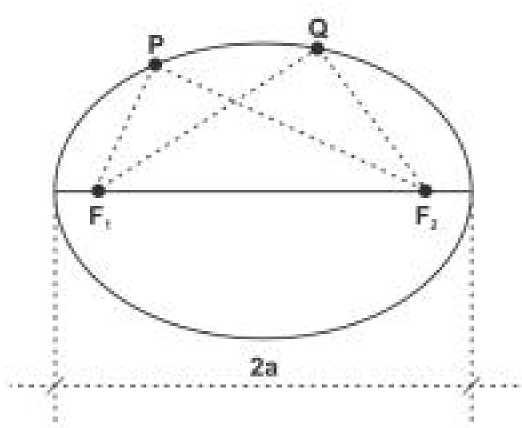

Figura 4: Uma elipse.

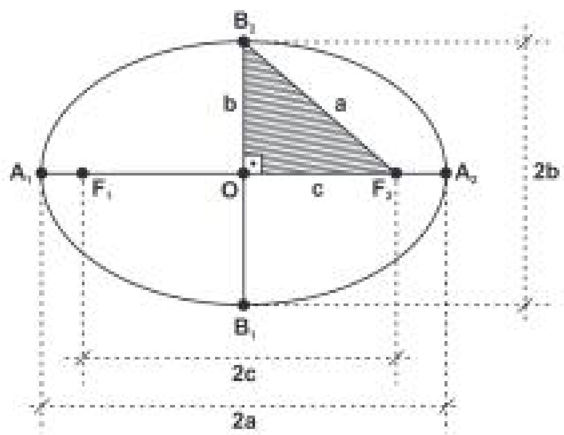

Figura 5: Os elementos de uma elipse.

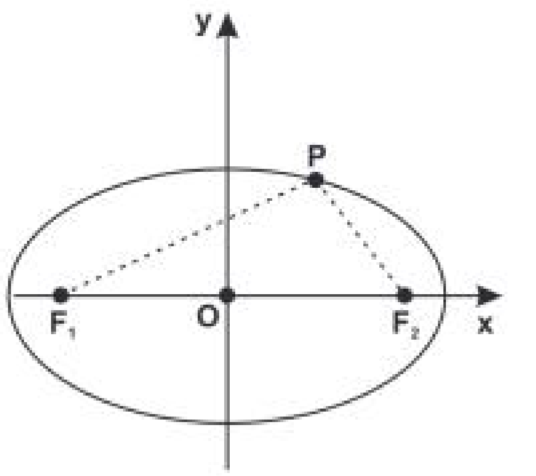

Figura 6: Elipse com eixo maior paralelo ao eixo x.

Os principais elementos de uma elipse estão representados na Figura 5. Os pontos F_1 e F_2 são chamados os *focos* da elipse. A distância entre os focos F_1 e F_2, igual a $2c$, denomina-se *distância focal*. O ponto O é chamado o *centro* da elipse, ele é o ponto médio do segmento de reta F_1F_2. Os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 são chamados os *vértices* da elipse. O *eixo maior* é o segmento A_1A_2, cujo comprimento é $2a$. O *eixo menor* é o segmento B_1B_2, cujo comprimento é $2b$.

Do triângulo OF_2B_2, hachurado na Figura 5, obtemos as relações

$$a^2 = b^2 + c^2 \iff c^2 = a^2 - b^2 \iff c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Considere uma elipse com centro na origem do plano cartesiano e cujos focos estejam contidos no eixo x (veja a Figura 6). Suponha que os focos sejam $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ e seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da elipse. Por definição, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, onde d é a distância usual em $\mathbb{R}^2$.

Usando essa definição, obtemos

$$\begin{aligned}
d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a &\Longrightarrow \sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a\\
&\Longrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a\\
&\Longrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
&\Longrightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2\\
&\Longrightarrow (x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\\
&\Longrightarrow x^2+2cx+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2\\
&\Longrightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx\\
&\Longrightarrow \left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(a^2-cx\right)^2\\
&\Longrightarrow a^2\left((x-c)^2+y^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2\\
&\Longrightarrow a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2\\
&\Longrightarrow x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\ \text{(usando a relação } a^2=b^2+c^2, \text{obtemos)}\\
&\Longrightarrow x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2\ \text{(dividindo por } a^2b^2,\ \text{obtemos)}\\
&\Longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1
\end{aligned}$$

Essa é a equação *canônica* ou *reduzida* da elipse com centro na origem e focos sobre o eixo x.

Questão 3. (2,5 pontos) Disserte acerca de probabilidade condicional e do Teorema de Bayes.

Referências:

[1] BARBETTA, REIS e BORNIA. Probabilidade e Estatística para Cursos de Engenharia e Informática, Editora Atlas, 2004. P. 102-112.

[2] BUSSAB, W. O., MORETTIN, P. A. Estatística Básica. 9a edição: Ed. Saraiva, 2017. p. 119-130.

[3] DOWNING, D.; CLARK, J. Estatística Aplicada. 3a edição: Ed. Saraiva, 2011. p. 69-75

Modelo de Resposta:

Em muitas situações há a necessidade de reavaliar probabilidades à medida que informações adicionais se tornam disponíveis. Isso ocorre quando estamos interessados em calcular a probabilidade de ocorrência de um evento A, dada a ocorrência de um evento B. Por exemplo:

1. Qual a probabilidade de chover em Joinville amanhã, sabendo que choveu hoje?

2. Qual a probabilidade de um dispositivo eletrônico funcionar sem problemas por 100 horas consecutivas sabendo que ele já funcionou por 75 horas?

Em outras palavras, queremos calcular a probabilidade de ocorrência de A condicionada à ocorrência prévia de B. Essa probabilidade é representada por $P(A|B)$ (lê-se probabilidade de A dado B). Se A e B são eventos quaisquer, com $P(B) > 0$, definimos a probabilidade condicional de A dado B por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Uma das consequências da definição da probabilidade condicional é a *regra do produto de probabilidades*

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \tag{1}$$

que nos diz como calcular a probabilidade de ambos os eventos, A e B, ocorrerem simultaneamente. A relação (1) pode ser estendida para um número finito qualquer de eventos.

Uma das relações mais importantes envolvendo probabilidades condicionais é dada pelo Teorema de Bayes. Em sua versão mais simples, esse teorema diz que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Podemos pensar em $P(A)$ como a probabilidade a *piori* de A e, com a informação adicional de que B ocorreu, obtemos a probabilidade a *posteriori* $P(A|B)$. Com isso é necessário atualizar a probabilidade a priori, multiplicando-a por $\frac{P(B|A)}{P(B)}$.

Para apresentar a versão geral do Teorema de Bayes, considere a seguintes definição: seja $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ uma partição do espaço amostral Ω, isto é,

1. $C_i \cap C_j \neq \varnothing$

2. $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n = \Omega$

Se A é um evento qualquer em Ω e são conhecidas as probabilidade $P(C_i)$ e $P(A|C_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então o Teorema de Bayes diz que

$$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i)P(C_i)}{P(A)} \tag{2}$$

Observando que $A = (A \cap C_1) \cup (A \cap C_2) \cup \cdots \cup (A \cap C_n)$ e que os eventos $A \cap C_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, são mutuamente exclusivos entre si, podemos escrever

$$\begin{aligned} P(A) =& P\big((A \cap C_1) \cup (A \cap C_2) \cup \cdots \cup (A \cap C_n)\big) \\ =& P(A \cap C_1) + P(A \cap C_2) + \cdots + P(A \cap C_n) \\ =& P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + \cdots + P(A|C_n)P(C_n) \\ =& \sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i) \end{aligned}$$

E assim, a expressão (2) toma a forma

$$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i)P(C_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)}$$

Questão 4. (2,5 pontos) Em Estatística, uma hipótese é uma afirmativa sobre uma propriedade da população, onde um teste de hipótese (ou teste de significância) é um procedimento padrão para testar uma afirmativa sobre uma propriedade da população. O teste de hipótese possui componentes formais, dentre eles: a hipótese nula, a hipótese alternativa, a estatística de teste, a região crítica, o nível de significância, o valor crítico, o erro tipo I e o erro tipo II. Disserte acerca desses componentes formais.

Referências:

[1] BARBETTA, REIS e BORNIA. Probabilidade e Estatística para Cursos de Engenharia e Informática, Editora Atlas, 2004. P. 198-221.

[2] BUSSAB, W. O., MORETTIN, P. A. Estatística Básica. 9a edição: Ed. Saraiva, 2017. p. 344-358.

[3] DOWNING, D.; CLARK, J. Estatística Aplicada. 3a edição: Ed. Saraiva, 2011. p. 181-186.

Modelo de Resposta:

A *hipótese nula* trata-se de uma afirmativa sobre alguma característica da população, em geral envolvendo o caso de nenhuma diferença existente.

A *hipótese alternativa* trata-se de uma afirmativa que equivale à negação da hipótese nula.

A *estatística de teste* é uma estatística amostral baseada em dados amostrais; usada na tomada de decisão sobre a rejeição da hipótese nula

A *região crítica* trata-se de um conjunto de todos os valores da estatística de teste que leva à rejeição da hipótese nula.

O *nível de significância* trata-se da probabilidade de se cometer o erro do tipo I ao se realizar o teste de hipótese.

O *valor crítico* trata-se do valor que separa a região crítica dos valores da estatística de teste que não levam à rejeição da hipótese nula.

O *erro tipo I* consiste em rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira.

O *erro tipo II* consiste em deixar de rejeitar a hipótese nula quando ela é falsa.

Banca Examinadora
Sidnei Furtado Costa (Presidente)
Débora Eloísa Nass Kieckhoefel (Membro)
Murilo Teixeira Carvalho (Membro)
Viviane Maria Beuter (Suplente)

Assinaturas do documento

Código para verificação: **ATO6R329**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

SIDNEI FURTADO COSTA (CPF: 012.XXX.493-XX) em 10/07/2023 às 08:42:58
Emitido por: "SGP-e", emitido em 11/07/2019 - 13:45:55 e válido até 11/07/2119 - 13:45:55.
(Assinatura do sistema)

DÉBORA ELOÍSA NASS KIECKHOEFEL (CPF: 069.XXX.559-XX) em 10/07/2023 às 08:55:47
Emitido por: "SGP-e", emitido em 05/09/2019 - 11:11:03 e válido até 05/09/2119 - 11:11:03.
(Assinatura do sistema)

MURILO TEIXEIRA CARVALHO (CPF: 741.XXX.167-XX) em 10/07/2023 às 09:01:53
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:34:36 e válido até 30/03/2118 - 12:34:36.
(Assinatura do sistema)

VIVIANE MARIA BEUTER (CPF: 033.XXX.019-XX) em 10/07/2023 às 13:28:29
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:37:28 e válido até 30/03/2118 - 12:37:28.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwMjY1MzdfMjY1NjBfMjAyM19BVE82UjMyOQ== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00026537/2023** e o código **ATO6R329** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.