

Processo Seletivo 06/2023 - Matemática e Estatística

Questão 1 (2,5 pontos)

- (a) Defina parábola e apresente seus elementos.
- (b) Deduza a equação canônica da parábola com vértice na origem e o eixo de simetria coincide com o eixo y .
- (c) Da equação deduzida no item (b), analise quando a concavidade é voltada para cima e quando é voltada para baixo.

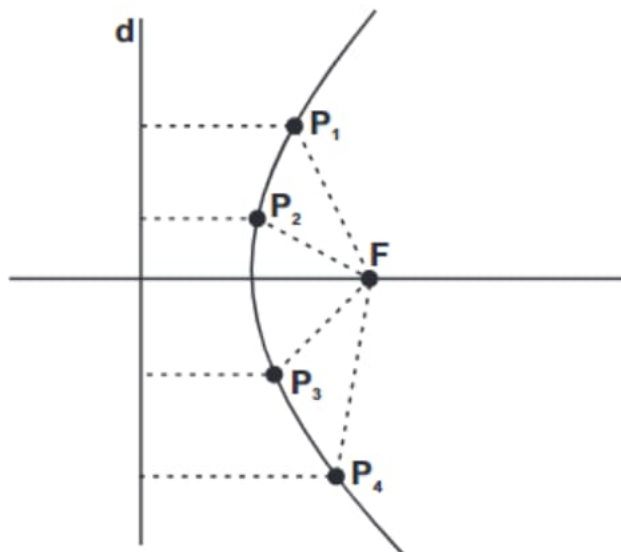
Referências:

STEINBHUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. Makron Books Editora. 2a edição. 1987. P. 204, 205, 206 e 207.

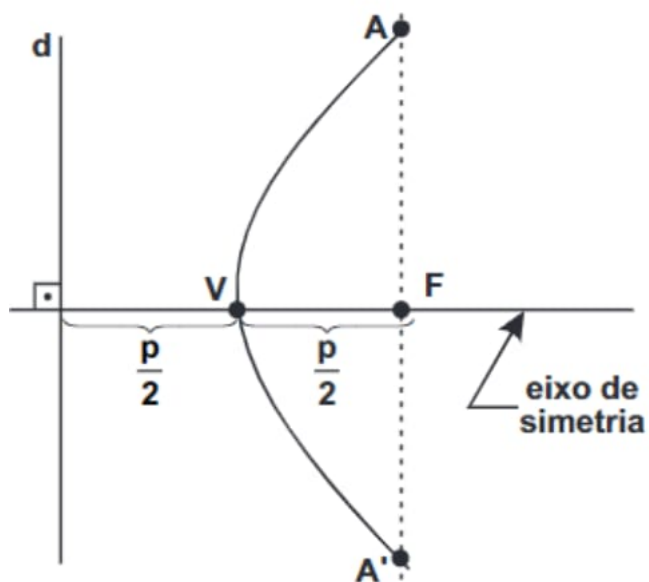
VENTURI, J.J. Cônicas e Quádricas. Autores Paranaenses, 2003. Disponível em <https://www.geometriaanalitica.com.br/copia-av>, sob licença do autor. P 41, 42, 43 e 44.

Modelo de Resposta:

- (a) Consideremos em um plano α , uma reta d e um ponto F não pertencente a d . Denominamos **parábola** de foco F e diretriz d ao lugar geométrico dos pontos do plano α que equidistam de d e F .



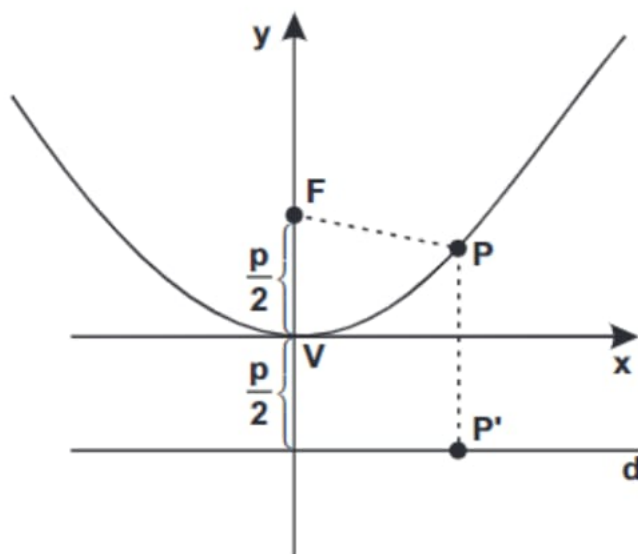
Elementos da Parábola:



- F : foco

- d : diretriz
- V : vértice
- reta VF : eixo de simetria da parábola
- p : parâmetro, que representa a distância do foco à diretriz ($p \neq 0$).

(b) A Figura abaixo reproduz uma parábola de concavidade voltada para cima e vértice na origem.



Observamos que:

- A reta $y = -p/2$ é a equação da diretriz;
- O ponto $F = (0, p/2)$ é o foco da parábola;
- $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola;
- $P'(x, y) = (x, -p/2)$ é o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a diretriz.

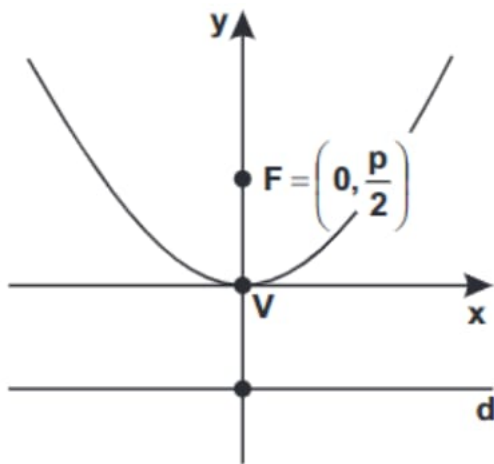
Pela definição da parábola temos:

$$\begin{aligned}d(P, F) &= d(P, P') \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-p/2)^2} &= \sqrt{(x-x)^2 + (y+p/2)^2} \\ (x-0)^2 + (y-p/2)^2 &= (x-x)^2 + (y+p/2)^2 \\ x^2 + y^2 - py + p^2/4 &= y^2 + py + p^2/4 \\ x^2 &= 2py.\end{aligned}$$

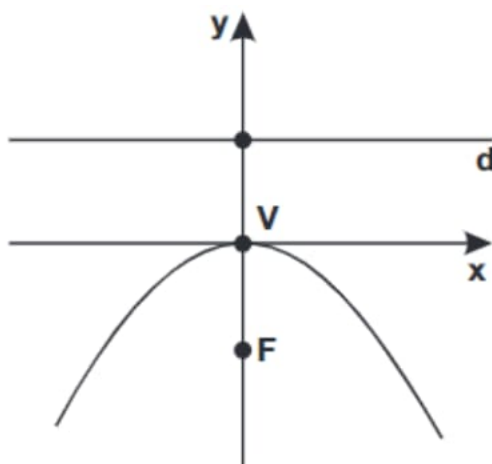
Portanto, a equação $x^2 = 2py$ representa a equação canônica da parábola com vértice na origem e cujo eixo de simetria é o eixo y .

- (c) Da análise da equação $x^2 = 2py$ conclui-se que, uma vez que $x^2 \geq 0$ deve-se ter $2py \geq 0$, ou seja, os sinais de p e de y são sempre iguais. Portanto,

- se $p > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima (pois $y \geq 0$).



- se $p < 0$ a parábola tem concavidade voltada para baixo (pois $y \leq 0$).



<https://pt.overleaf.com/project/65565e2b727cf1539f5cdc17>

Questão 2 (2,5 pontos)

Mostre que a distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ é dada pela equação

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

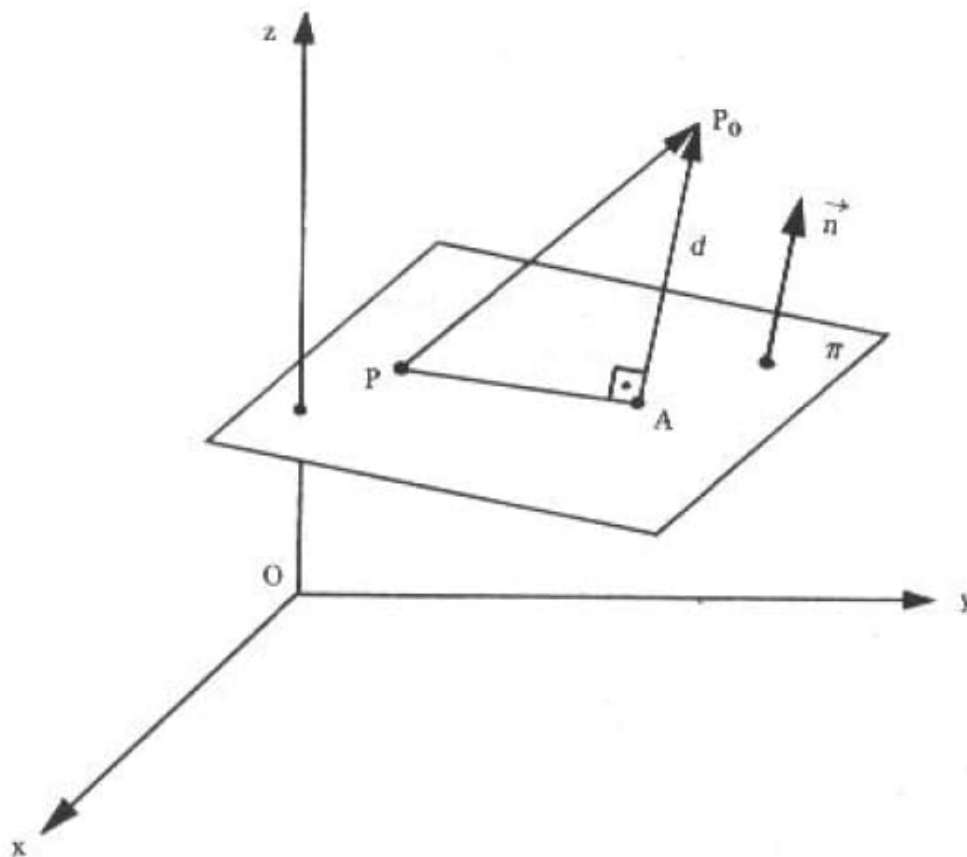
Referências:

STEINBHUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. Makron Books Editora. 2a edição. 1987. P. 196, 197 e 198.

VENTURI, J.J. . Álgebra Vetorial e Geometria Analítica. Autores Paranaenses, 2009. Disponível em <https://www.geometriaanalitica.com.br/copia-indice1>, sob licença do autor. P. 135, 179 e 180.

Modelo de Resposta:

Para isso, lembre que se \vec{w} é o vetor projeção de um vetor $\vec{u} \neq 0$ sobre um vetor $\vec{v} \neq 0$, então $\vec{w} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v}$.



Sejam A o pé da perpendicular conduzida por P_0 sobre o plano π e $P(x, y, z)$ um ponto qualquer desse plano. Veja figura acima.

O vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é normal ao plano π e, por conseguinte, o vetor $A\vec{P}_0$ tem a mesma direção de \vec{n} .

A distância $d(P_0, \pi)$ do ponto P_0 ao plano π é:

$$d(P_0, \pi) = |A\vec{P}_0|.$$

Observando que o vetor $A\vec{P}_0$ é a projeção do vetor $P\vec{P}_0$ na direção de \vec{n} temos:

$$A\vec{P}_0 = \left(\frac{P\vec{P}_0 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \right) \vec{n}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}d(P_0, \pi) &= |A\vec{P}_0| = \left| \left(\frac{P\vec{P}_0 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \right) \vec{n} \right| \\&= \frac{|P\vec{P}_0 \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|^2} |\vec{n}| \\&= \frac{|P\vec{P}_0 \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \\&= \frac{|(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\&= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - ax - by - cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\end{aligned}$$

Em virtude de P pertencer ao plano π temos $d = -ax - by - cz$ e, portanto,

$$d(P_0, \pi) = |A\vec{P}_0| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Questão 3 (2,5 pontos)

A importância de trabalharmos com a amostragem estatística reside no fato de que a amostra examinada é selecionada cientificamente, o que implica dizer que os resultados obtidos são considerados válidos para a população. Isto nos permite trabalhar com diversas “ferramentas estatísticas”, dentre elas a Estimção de uma Proporção Populacional. Discorra sobre Estimção de uma Proporção Populacional e seus principais elementos

Referências

DOWNING, D.; CLARK, J. Estatística Aplicada. 3a edição: Ed. Saraiva, 2011. p. 181-186

BUSSAB, W. O., MORETTIN, P. A. Estatística Básica. 9a edição: Ed. Saraiva, 2017. p. 344-358.

BARBETTA, REIS e BORNIA. Probabilidade e Estatística para Cursos de Engenharia e Informática, Editora Atlas, 2004. P. 198-221.

Padrão desejado de resposta:

A resposta do candidato deve conter, no mínimo:

- Se ao discorrer sobre o conceito de Estimativa Intervalar foi considerado que ela é a faixa de valores usada para estimar algum parâmetro populacional com nível específico de confiança; também chamado de intervalo de confiança.

- Se foram citados os elementos Nível de Confiança, Valores Críticos, Margem de Erro e Tamanho da Amostra.

- Se ao discorrer sobre o Nível de Confiança foi considerado que ele é a probabilidade de que um parâmetro populacional esteja contido dentro de um intervalo de confiança particular; também chamado grau de confiança.

- Se ao discorrer sobre Valores Críticos foi considerado que eles são os valores que separam a região crítica dos valores da estatística de teste que não levam à rejeição da hipótese nula.

- Se ao discorrer sobre Margem de Erro foi considerado que se trata da diferença máxima provável entre a estatística amostral observada e o verdadeiro valor do parâmetro populacional.

- Se ao discorrer sobre a Tamanho da Amostra foi considerado que é o

número de itens de uma amostra e que ele impacta na estimação.

Questão 4 (2,5 pontos)

Existem métodos estatísticos que fazem inferências baseadas em dados amostrais que aparecem em pares. Esses métodos têm por objetivo determinar se há, ou não, uma relação entre as duas variáveis e, se tal relação existir, descrevê-la como uma equação que possa ser usada para predições. Se considerarmos apenas as relações lineares, o que significa que, quando colocadas em gráficos, os pontos se aproximam do padrão de uma reta, discorra, em no máximo 30 linhas, sobre: diagrama de dispersão, coeficiente de correlação linear, interpretação do coeficiente de correlação linear, equação de regressão e predição.

Referências

DOWNING, D.; CLARK, J. Estatística Aplicada. 2a edição: Ed. Saraiva, 2003. p. 228-253.

BARBETTA, REIS e BORNIA. Probabilidade e Estatística para Cursos de Engenharia e Informática, Editora Atlas, 2004. P. 316-343.

Padrão desejado de resposta:

A resposta do candidato deve conter, no mínimo:

- Se ao discorrer sobre o Diagrama de Dispersão foi considerado que trata-se de um gráfico no qual os dados amostrais emparelhados são plotados com eixo horizontal x e um eixo vertical y , onde cada par individual (x,y) é plotado como um único ponto.
- Se ao discorrer sobre o Coeficiente de Correlação Linear foi considerado

que ele é representado por r e mede a intensidade da relação linear entre os valores quantitativos emparelhados x e y em uma amostra. Seu valor é calculado através de uma fórmula, onde os valores variam de -1 a $+1$.

- Se ao discorrer sobre a Interpretação do Coeficiente de Correlação Linear foi considerado que o valor de r deve estar sempre entre -1 e $+1$, inclusive. Sendo que, se r estiver muito próximo de 0 , concluímos que não há correlação linear significativa entre x e y , mas se r estiver próximo de -1 ou de $+1$, concluímos que há uma relação linear significativa entre x e y .

- Se ao discorrer sobre a Equação de regressão foi considerado que se trata de uma descrição algébrica da relação entre duas variáveis, na qual o gráfico da equação de regressão é chamado de reta da regressão, ou reta do melhor ajuste, ou reta dos mínimos quadrados.

- Se ao discorrer sobre a Predição foi considerado que as equações de regressão podem ser úteis para prever o valor de uma variável, dado algum valor particular da outra variável, porém, destacando que só devemos usar a equação de regressão para predição quando r indicar que há uma correlação linear.



Assinaturas do documento



Código para verificação: **S0P7W1Z9**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

- ✓ **LEARCINO DOS SANTOS LUIZ** (CPF: 932.XXX.279-XX) em 20/11/2023 às 10:20:03
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:44:14 e válido até 30/03/2118 - 12:44:14.
(Assinatura do sistema)

- ✓ **VIVIANE MARIA BEUTER** (CPF: 033.XXX.019-XX) em 20/11/2023 às 14:19:03
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:37:28 e válido até 30/03/2118 - 12:37:28.
(Assinatura do sistema)

- ✓ **MURILO TEIXEIRA CARVALHO** (CPF: 741.XXX.167-XX) em 20/11/2023 às 14:21:50
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:34:36 e válido até 30/03/2118 - 12:34:36.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link <https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwNTI0OTJfNTI1NDJfMjAyM19TMFA3VzFaOQ==> ou o site <https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo> e informe o processo **UDESC 00052492/2023** e o código **S0P7W1Z9** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.