UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA

PROCESSO SELETIVO 05/2022
Área de Conhecimento: MATEMÁTICA
PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

Questão 01) Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita.

(a) Escreva a definição de *combinação linear*;

(b) Escreva a definição de *conjunto linearmente independente* e *conjunto linearmente dependente*;

(c) Escreva a definição de *base* de V;

(d) Dado um sistema linear $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$, discuta a relação entre o subespaço gerado pelos vetores coluna de A e a quantidade de soluções do sistema linear $Ax = b$.

Gabarito 01) Conforme capítulo 4 do livro "ANTON, Howard; RORRES, Chris. Álgebra linear com aplicações. 10.ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 788 p."

(a)

DEFINIÇÃO 2 Dizemos que um vetor $\mathbf{w}$ num espaço vetorial V é uma ***combinação linear*** dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ em V se $\mathbf{w}$ puder ser expresso na forma

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r \tag{2}$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_r$ são escalares. Esses escalares são denominados ***coeficientes*** da combinação linear.

(b)

DEFINIÇÃO 1 Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ for um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V, então a equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

tem uma solução, pelo menos, a saber,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \ldots, \quad k_r = 0$$

Dizemos que essa é a solução trivial. Se essa for a única solução, dizemos que S é um ***conjunto linearmente independente***. Se existem outras soluções além da trivial, dizemos que S é um ***conjunto linearmente dependente***.

(c)

DEFINIÇÃO 1 Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma ***base*** de V se valerem as duas condições a seguir.

(a) S é linearmente independente.

(b) S gera V.

(d) Resumidamente:

Se $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ é o conjunto formado pelas colunas de A então:

- O sistema é possível e determinado se ger$(S) = \mathbb{R}^n$.
- O sistema é possível e indeterminado se ger$(S) \subsetneq \mathbb{R}^n$ e $b \in$ ger(S).
- O sistema é impossível se ger$(S) \subsetneq \mathbb{R}^n$ e $b \notin$ ger(S).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Segue da Fórmula (10) da Seção 1.3 que se $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ denotam os vetores coluna de A, então o produto $A\mathbf{x}$ pode ser expresso como uma combinação linear desses vetores com coeficientes de $\mathbf{x}$, ou seja,

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n \tag{1}$$

Assim, um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m equações em n incógnitas pode ser escrito como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b} \tag{2}$$

do que podemos concluir que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente se, e só se, $\mathbf{b}$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores coluna de A. Isso fornece o seguinte teorema.

TEOREMA 4.7.1 *Um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de equações lineares é consistente se, e só se, $\mathbf{b}$ está no espaço coluna de A.*

TEOREMA 4.8.4 Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) *A é invertível.*
(b) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.*
(c) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*
(d) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*
(e) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.*
(f) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.*
(g) $\det(A) \neq 0$.
(h) *Os vetores coluna de A são linearmente independentes.*
(i) *Os vetores linha de A são linearmente independentes.*
(j) *Os vetores coluna de A geram R^n.*
(k) *Os vetores linha de A geram R^n.*
(l) *Os vetores coluna de A formam uma base de R^n.*
(m) *Os vetores linha de A formam uma base de R^n.*
(n) *A tem posto n.*
(o) *A tem nulidade 0.*

*O padrão de resposta deve estar fundamentado nas bibliografias exigidas pelo Edital, para evitar problemas o professor deverá citar o capítulo/pagína do livro utilizado.

Membros da Banca:

Avaliador 1: Thiane Pereira Poncetta Coliboro	**Avaliador 2: Eduardo Müller dos Santos**
Avaliador 3: Marcus Vinícius Canhoto Alves	**Presidente da Banca: Thiane Pereira Poncetta Coliboro**

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

PROCESSO SELETIVO 05/2022
Área de Conhecimento: MATEMÁTICA
PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

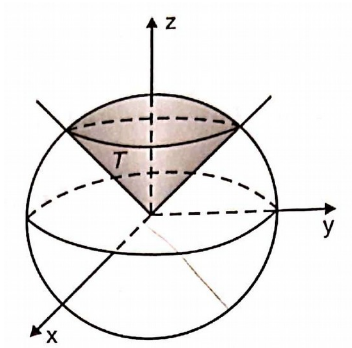
Questão 02) Considere a integral $I = \iiint_T z\,dx\,dy\,dz$, onde T é a região delimitada superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Calcule a integral I usando coordenadas cilíndricas.

(b) Calcule a integral I usando coordenadas esféricas.

Gabarito 02) Conforme seção 8.6 do livro "GONÇALVES, Mírian Buss; FLEMMING, Diva Marília. Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície. 2. ed. rev. e ampl. São Paulo: Pearson/Prentice-Hall, 2007. 435 p."

Na figura abaixo podemos visualizar a região T.



(a) Em coordenadas cilíndricas, temos:

$$T = \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{8} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ r \le z \le \sqrt{16 - r^2} \end{cases}$$

$$I = \iiint_T z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}}\int_r^{\sqrt{16-r^2}} z\,r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} \frac{z^2}{2}\Big|_{z=r}^{z=\sqrt{16-r^2}} r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} \left(\frac{16-r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} 8r - r^3\,dr\,d\theta = 32\pi.$$

(b) Em coordenadas esféricas, temos:

Em coordenadas esféricas, a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ tem equação $\rho = 4$, e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ tem equação $\phi = \frac{\pi}{4}$.

Assim, observando a Figura 8.22, vemos que, em coordenadas esféricas, a região T pode ser descrita como

$$T': \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Portanto,

$$I = \iiint_{T'} \rho \cos \phi \, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^4 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, \rho^3 \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 64 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= 64 \int_0^{2\pi} \left. \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$= 32\pi.$$

*O padrão de resposta deve estar fundamentado nas bibliografias exigidas pelo Edital, para evitar problemas o professor deverá citar o capítulo/pagína do livro utilizado.

Membros da Banca:

Avaliador 1: Thiane Pereira Poncetta Coliboro

Avaliador 2: Eduardo Müller dos Santos

Avaliador 3: Marcus Vinícius Canhoto Alves

Presidente da Banca: Thiane Pereira Poncetta Coliboro

PROCESSO SELETIVO 05/2022
Área de Conhecimento: MATEMÁTICA
PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

Questão 03) Com relação a equações diferenciais:

(a) Cite as possíveis classificações de uma equação diferencial, de acordo com o *tipo* e a *ordem*;

(b) Escreva a definição de *solução de uma equação diferencial ordinária*;

(c) Resolva a equação diferencial $y' - ay = 0$ citando o método usado. Essa equação diferencial pode ser resolvida de alguma outra forma? Explique.

(d) Resolva a equação diferencial $y' - 3y = 6$.

(e) Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y'' - 10y' + 25y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Gabarito 03) Conforme seções 1.1, 2.3 e 4.3 do livro "ZILL, Dennis G. Equações diferenciais com aplicações em modelagem. 3. São Paulo Cengage Learning, 2016."

(a)

CLASSIFICAÇÃO POR TIPO

Se uma equação diferencial contiver somente derivadas ordinárias de uma ou mais funções não conhecidas com relação a uma única variável independente, ela será chamada de **equação diferencial ordinária (EDO)**. Uma equação envolvendo derivadas parciais de uma ou várias funções de duas ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial parcial (EDP)**. Nosso primeiro exemplo ilustra cada tipo de equação diferencial.

CLASSIFICAÇÃO POR ORDEM

A **ordem de uma equação diferencial** (EDO ou EDP) é a ordem da maior derivada na equação. Por exemplo,

$$\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{\text{segunda ordem}} + 5\underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}_{\text{primeira ordem}} - 4y = e^x$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

(b)

DEFINIÇÃO 1.1.2 Solução de uma EDO

Toda função ϕ, definida em um intervalo I que tem pelo menos n derivadas contínuas em I, as quais quando substituídas em uma equação diferencial ordinária de ordem n reduzem a equação a uma identidade, é denominada uma **solução** da equação diferencial no intervalo.

(c)

A equação $y' - ay = 0$ é separável e linear, logo pode ser resolvida de pelo menos duas maneiras.

Resolva $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$.

SOLUÇÃO

Essa equação linear pode ser resolvida por separação de variáveis. Alternativamente, uma vez que a equação diferencial já está na forma padrão (2), identificamos que $P(x) = -3$ e, portanto, o fator integrante é $e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$. Multiplicamos então a equação dada por esse fator e observamos que

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 0 \quad \text{é o mesmo que} \quad \frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = 0.$$

Integrando a última equação

$$\int \frac{d}{dx}[e^{-3xy}]dx = \int 0dx$$

produz-se $e^{-3x}y = c$ ou $y = ce^{3x}$, $-\infty < x < \infty$.

(d)

SOLUÇÃO

Esta equaçao linear, como a do Exemplo 1, também está na forma padrão com $P(x) = -3$. Assim, o fator de integração é novamente e^{-3x}. Dessa vez multiplicando a equaçao dada por este fator teremos

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 6e^{-3x} \quad \text{e ainda} \quad \frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = 6e^{-3x}.$$

Integrando a última equação,

$$\int \frac{d}{dx}[e^{-3x}y]dx = 6\int e^{-3x}dx \quad \text{fornece} \quad e^{-3x}y = -6\left(\frac{e^{-3x}}{3}\right) + c,$$

ou $y = -2 + ce^{3x}$, $-\infty < x < \infty$. ∎

(e)

$m^2 - 10m + 25 = 0$ possui raízes $m_1 = m_2 = 5$. Então $y(x) = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x}$. Usando as informações do PVI obtemos $c_1 = 2$ e $c_2 = -10$. Daí, $y(x) = 2e^{5x} - 10xe^{5x}$.

*O padrão de resposta deve estar fundamentado nas bibliografias exigidas pelo Edital, para evitar problemas o professor deverá citar o capítulo/pagína do livro utilizado.

Membros da Banca:

Avaliador 1: Thiane Pereira Poncetta Coliboro

Avaliador 2: Eduardo Müller dos Santos

Avaliador 3: Marcus Vinícius Canhoto Alves

Presidente da Banca: Thiane Pereira Poncetta Coliboro

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

PROCESSO SELETIVO 05/2022
Área de Conhecimento: MATEMÁTICA
PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

Questão 04) Antônio e Zeca, durante seus estudos, se depararam com o seguinte problema de Cálculo Numérico: "*Um automóvel percorreu 100 km numa rodovia que liga duas cidades e gastou, neste trajeto, 1 hora e vinte minutos. Usando a tabela a seguir que fornece o tempo gasto e a distância percorrida em alguns pontos entre as duas cidades, determine aproximadamente a distância percorrida após 40 minutos, usando uma função linear.*"

Tempo (min)	*15*	*30*	*45*	*60*	*80*
Distância (km)	*22*	*30*	*50*	*72*	*100*

Antônio resolveu o problema usando um ajuste linear e Zeca usou interpolação linear.

Explicando todos os passos de forma didática, resolva o problema usando as duas abordagens.

Gabarito 04) Teoria sobre interpolação e ajuste de funções conforme livro "BURIAN, Reinaldo; LIMA, Antonio Carlos de; HETEM JUNIOR, Annibal. Cálculo numérico. Rio de Janeiro: LTC, 2007.".

Gabarito 04) Usando ajuste linear $\tilde{f}(x) = a_0 + a_1 x$, definimos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 30 \\ 1 & 45 \\ 1 & 60 \\ 1 & 80 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} 22 \\ 30 \\ 50 \\ 72 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Montando as equações normais para determinar os coeficientes $a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$ de $\tilde{f}$ temos:

$$A^T A a = A^t y \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 230 \\ 230 & 13150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 274 \\ 15800 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2,4047 \\ 1,2436 \end{bmatrix}$, $\tilde{f}(x) = -2,4047 + 1,2436x$ e $\tilde{f}(40) \approx 47,3393$ km.

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Usando interpolação linear, tomamos os pontos $P_1 = (30,\ 30)$ e $P_2 = (45,\ 50)$, uma vez que $40 \in (30,\ 45)$. Assim, para determinar a função interpoladora $\tilde{f}(x) = a_0 + a_1 x$, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} 30 = a_0 + a_1 \cdot 30 \\ 50 = a_0 + a_1 \cdot 45 \end{cases}.$$

cuja solução é $a_0 = -10$ e $a_1 = \dfrac{4}{3}$.

Portanto, a função interpoladora é $\tilde{f}(x) = -10 + \dfrac{4}{3}x$ e $f(40) \approx 43,3320$.

*O padrão de resposta deve estar fundamentado nas bibliografias exigidas pelo Edital, para evitar problemas o professor deverá citar o capítulo/pagína do livro utilizado.

Membros da Banca:

Avaliador 1: Thiane Pereira Poncetta Coliboro

Avaliador 2: Eduardo Müller dos Santos

Avaliador 3: Marcus Vinícius Canhoto Alves

Presidente da Banca: Thiane Pereira Poncetta Coliboro

PROCESSO SELETIVO 05/2022
Área de Conhecimento: MATEMÁTICA
PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

Questão 05) Em certa fábrica, três máquinas, A, B e C, fabricam, respectivamente, 30%, 25% e 45% da produção diária. As respectivas taxas de produtos defeituosos são de 1%, $1,5\%$ e 2%. Da produção de certo dia, retirou-se ao acaso um produto, constatando-se que era defeituoso. Determine a probabilidade de que esse produto defeituoso tenha sido fabricado:

(a) pela máquina A.

(b) pela máquina B.

(c) pela máquina C.

Resolva deixando explícito os resultados da Teoria da Probabilidade usados na resolução.

Gabarito 05) Conforme exemplo resolvido 4.10.5 do livro "MARTINS, Gilberto de Andrade; DOMINGUES, Osmar. Estatística geral e aplicada. 4.ed. São Paulo: Atlas, 2011.".

Sejam:

A = {produto fabricado pela máquina A}
B = {produto fabricado pela máquina B}
C = {produto fabricado pela máquina C}
D = {produto defeituoso}

Então:

$P(A) = 0{,}30$; $P(B) = 0{,}25$; $P(C) = 0{,}45$; (probabilidades *a priori*)
$P(D/A) = 0{,}01$; $P(D/B) = 0{,}015$; $P(D/C) = 0{,}02$.

Logo:

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)}$$

$$P(A/D) = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}01}{(0{,}30 \cdot 0{,}01) + (0{,}25 \cdot 0{,}015) + (0{,}45 \cdot 0{,}02)} = 0{,}19$$

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = 0{,}238$$

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = 0{,}572$$

Respostas: A probabilidade de o produto defeituoso ter sido fabricado pela máquina A é 0,190 ou 19%; pela máquina B: 23,8%, e pela máquina C: 57,2%.

*O padrão de resposta deve estar fundamentado nas bibliografias exigidas pelo Edital, para evitar problemas o professor deverá citar o capítulo/pagína do livro utilizado.

Membros da Banca:

Avaliador 1: Thiane Pereira Poncetta Coliboro **Avaliador 2: Eduardo Müller dos Santos**

Avaliador 3: Marcus Vinícius Canhoto Alves **Presidente da Banca: Thiane P. P. Coliboro**

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Assinaturas do documento

Código para verificação: **1JQ27I5K**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

THIANE PEREIRA PONCETTA COLIBORO (CPF: 047.XXX.979-XX) em 12/12/2022 às 09:34:10
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:34:16 e válido até 30/03/2118 - 12:34:16.
(Assinatura do sistema)

"MARCUS VINÍCIUS CANHOTO ALVES" em 12/12/2022 às 09:38:35
Emitido por: "SGP-e", emitido em 13/07/2018 - 14:40:07 e válido até 13/07/2118 - 14:40:07.
(Assinatura do sistema)

EDUARDO MÜLLER DOS SANTOS (CPF: 051.XXX.829-XX) em 12/12/2022 às 10:29:44
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:48:13 e válido até 30/03/2118 - 12:48:13.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwNTYxMDJfNTYxODlfMjAyMl8xSlEyN0k1Sw== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00056102/2022** e o código **1JQ27I5K** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.