UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA

PROCESSO SELETIVO 01/2024
Área de Conhecimento: MATEMÁTICA
PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

Questão 01) Considere duas funções $y = g(u)$ e $u = f(x)$ deriváveis.

(a) Discuta quando é possível calcular a composição $(g \circ f)(x)$ e como pode ser calculada a derivada dessa composição.

Observação: Explique sua resposta, mas não é necessário demonstrar o resultado usando a definição de derivada.

(b) Calcule a derivada de $y = e^{x\cos(2x)}$, explicando didaticamente cada passo.

(c) Seja $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto (a, b). Suponhamos que $f(x)$ admita uma função inversa $x = f^{-1}(y)$. Considere que f e f^{-1} são deriváveis. Determine uma fórmula para calcular a derivada da função inversa f^{-1}.

Observação: Explique sua resposta, mas não é necessário demonstrar o resultado usando a definição de derivada.

Gabarito 01)

Tópico da ementa: Derivada.

Referência:

1. FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. Cálculo A: funções, limite, derivação e integração. 6.ed. rev. e ampl. São Paulo: Prentice-Hall do Brasil, c2007.
2. STEWART, James. Cálculo. Volumes 1. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

(a) Seção 4.13 da Referência 1 ou 3.4 da Referência 2.

O candidato deve relacionar a imagem de f com o domínio da g, e enunciar a Regra da Cadeia.

4.13 Derivada de Função Composta

Consideremos duas funções deriváveis f e g onde $y = g(u)$ e $u = f(x)$.

Para todo x tal que $f(x)$ está no domínio de g, podemos escrever $y = g(u) = g[f(x)]$, isto é, podemos considerar a função composta $(g_0 f)(x)$.

Por exemplo, uma função tal como $y = (x^2 + 5x + 2)^7$ pode ser vista como a composta das funções $y = u^7 = g(u)$ e $u = x^2 + 5x + 2 = f(x)$.

A seguir apresentamos a regra da cadeia, que nos dá a derivada da função composta $g_0 f$ em termos das derivadas de f e g.

4.13.1 Proposição (Regra da cadeia) Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$ e as derivadas dy/du e du/dx existem, então a função composta $y = g[f(x)]$ tem derivada que é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ou } y'(x) = g'(u) \cdot f'(x).$$

(b) Usando a regra da cadeia e a regra da derivada do produto:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \left(e^{x\cos(2x)}\right)' \\
&= e^{x\cos(2x)} \cdot (x\cos(2x))' \\
&= e^{x\cos(2x)} \cdot (1 \cdot \cos(2x) + x \cdot (-\operatorname{sen}(2x) \cdot 2)) \\
&= e^{x\cos(2x)} \cdot (\cos(2x) - 2x\operatorname{sen}(2x))
\end{aligned}$$

(c) Seção 4.14 da Referência 1 ou 3.5 da Referência 2 (Exercício 77).

O candidato deve usar a Regra da Cadeira e a equação $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para mostrar que

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

*O padrão de resposta deve estar fundamentado nas bibliografias exigidas pelo Edital, para evitar problemas o professor deverá citar o capítulo/pagína do livro utilizado.

Membros da Banca:

Avaliador 1: Thiane Pereira Poncetta Coliboro	**Avaliador 2: Michael Renê Mix Visintainer**
Avaliador 3: Eduardo Müller dos Santos	**Presidente da Banca: Thiane Pereira Poncetta Coliboro**

PROCESSO SELETIVO 01/2024
Área de Conhecimento: MATEMÁTICA
PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

Questão 02)

(a) Discuta como é possível usar as derivadas de uma função $y = f(x)$ para determinar os pontos de máximo e mínimo (relativos) dessa função.

(b) Encontrar a, b, c e d tal que a função $f(x) = 2ax^3 + bx^2 - cx + d$ tenha pontos críticos em $x = 0$ e $x = 1$. Se $a > 0$, qual deles é ponto de máximo, qual deles é ponto de mínimo?

Gabarito 02)

Tópico da ementa: Aplicações da derivada.
Referência: FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. Cálculo A: funções, limite, derivação e integração. 6.ed. rev. e ampl. São Paulo: Prentice-Hall do Brasil, c2007.

(a) Seções de 5.4 a 5.9 da Referência, em especial, Proposição 5.4.4 e Teoremas 5.7.1, 5.7.3.

(b) Exercício 12, seção 5.10 da Referência.

$$f(x) = 2ax^3 + bx^2 - cx + d$$
$$f'(x) = 6ax^2 + 2bx - c$$

$$6ax^2 + 2bx - c = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1$$

Substituindo $x = 0$, vem

$$-c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

Substituindo $x = 1$, vem

$$6a + 2b - c = 0 \quad \Rightarrow \quad 6a + 2b = 0$$
$$3a + b = 0$$
$$3a = -b$$
$$a = \frac{-b}{3}$$

$$f''(x) = 12ax + 2b$$
$$f''(0) = 2b$$
$$f''(1) = 12a + 2b$$

Ainda podemos ter:

$$\begin{cases} d = \text{qualquer real} \\ \text{c} = 0 \\ \text{a} = \text{qualquer real} \\ \text{b} = \text{-3a} \end{cases}$$

$$\text{Então se a} > 0: \; f''(0) = 2b = 2\,(-3a) = -6a$$

$$f''(1) = 12a + 2\,(-3a)$$

$$= 12a - 6a = 6a$$

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \text{ é ponto de máximo e } 1 \text{ é ponto de mínimo}.$$

*O padrão de resposta deve estar fundamentado nas bibliografias exigidas pelo Edital, para evitar problemas o professor deverá citar o capítulo/pagína do livro utilizado.

Membros da Banca:

Avaliador 1: Thiane Pereira Poncetta Coliboro

Avaliador 2: Michael Renê Mix Visintainer

Avaliador 3: Eduardo Müller dos Santos

Presidente da Banca: Thiane Pereira Poncetta Coliboro

PROCESSO SELETIVO 01/2024
Área de Conhecimento: MATEMÁTICA
PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

Questão 03) Considere a função $y = \ln(1-x)$.

(a) Determine o domínio da função;

(b) Explique e esboce o gráfico da função;

(c) Calcule $\int \ln(1-x)\,dx$, explicando didaticamente cada passo;

(d) Calcule $\int_{-2}^{0} \ln(1-x)\,dx$ e interprete geometricamente o resultado.

Observação: Use $\ln(2) \approx 0,7$ e $\ln(3) \approx 1,1$, se necessário.

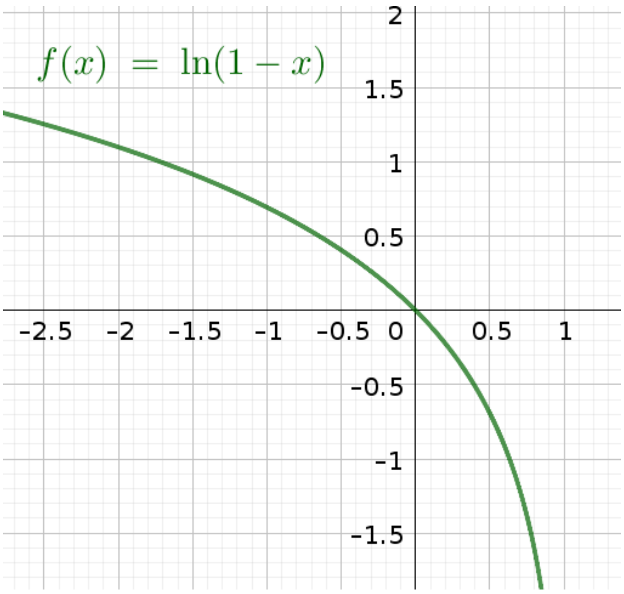
Gabarito 03)

Tópico da ementa: Funções. Técnicas de integração. Integral definida.

Referência: FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. Cálculo A: funções, limite, derivação e integração. 6.ed. rev. e ampl. São Paulo: Prentice-Hall do Brasil, c2007.

(a) $Dom(y) = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x < 1\}$

(b) Baseado no gráfico de $y = \ln(x)$ é possível esboçar o gráfico de $y = \ln(1-x)$.



(c) Exercício 2, seção 6.6 da Referência 1

$$\int \ln(1-x)dx$$

$$u = \ln(1-x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{-1}{1-x}dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$I = \ln(1-x)x - \int x\frac{-1}{1-x}dx$$

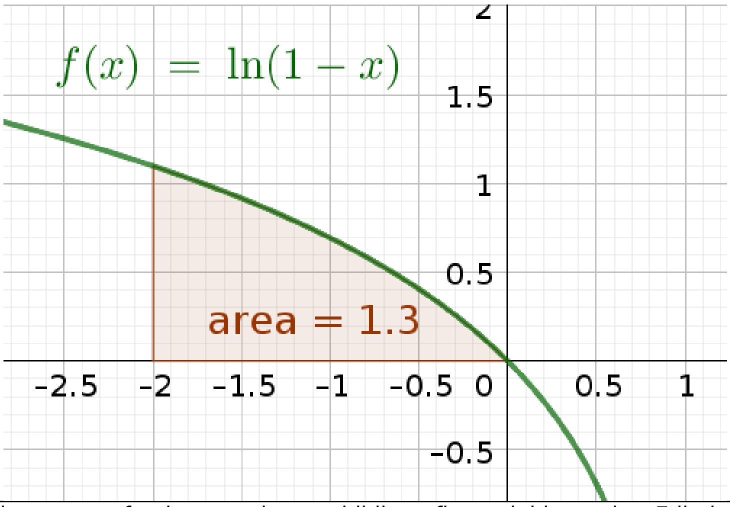
$$I = x\ln(1-x) + \int\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)dx$$

$$I = x\ln(1-x) - x - \ln(1-x) + c$$

$$I = (x-1)\ln(1-x) - x + c$$

(d)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0} \ln(1-x)\,dx &= (x-1)\ln(1-x) - x\Big|_{-2}^{0} \\ &= [(-1)\ln(1)] - [(-3)\ln(3) + 2] \\ &= 3\ln(3) - 2 \\ &\approx 3,3 - 2 \\ &\approx 1,3\end{aligned}$$



*O padrão de resposta deve estar fundamentado nas bibliografias exigidas pelo Edital, para evitar problemas o professor deverá citar o capítulo/pagína do livro utilizado.

Membros da Banca:

____

Avaliador 1: Thiane Pereira Poncetta Coliboro

____

Avaliador 2: Michael Renê Mix Visintainer

____

Avaliador 3: Eduardo Müller dos Santos

____

Presidente da Banca: Thiane Pereira Poncetta Coliboro

PROCESSO SELETIVO 01/2024
Área de Conhecimento: MATEMÁTICA
PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

Questão 04)

(a) Explique o que são *operações elementares com as linhas* de uma matriz e como essas operações podem ser usadas para resolver um sistema de equações lineares $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$.

(b) Resolva o sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$ pelo método descrito no item (a).

(c) Dado um sistema linear $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$, discuta a relação entre o determinante da matriz A, o subespaço gerado pelas colunas de A e a solução (ou não) do sistema linear $Ax = b$.

Gabarito 04)

Tópico da ementa: Determinantes e Sistemas de Equação Lineares

Referência: ANTON, Howard; RORRES, Chris. Álgebra linear com aplicações. 10.ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 788 p.

(a) Seção 1.1 da Referência.

O método básico de resolver um sistema de equações lineares é efetuar operações algébricas no sistema que não alterem seu conjunto de soluções e que produzam uma sucessão de sistemas cada vez mais simples, até alcançar um ponto em que se possa decidir se o sistema é consistente e, se for, quais são suas soluções. As operações típicas são as seguintes.

1. Multiplicar uma equação inteira por uma constante não nula.
2. Trocar duas equações entre si.
3. Somar uma constante vezes uma equação a uma outra equação.

Como as linhas (horizontais) de uma matriz aumentada correspondem às equações no sistema associado, essas três operações correspondem às seguintes operações nas linhas da matriz aumentada.

1. Multiplicar uma linha inteira por uma constante não nula.
2. Trocar duas linhas entre si.
3. Somar uma constante vezes uma linha a uma outra linha.

Essas operações são denominadas ***operações elementares com linhas*** de uma matriz.

No exemplo seguinte, ilustramos como usar as operações elementares com as linhas de uma matriz aumentada para resolver sistemas de equações lineares em três incógnitas.

(b) Seção 1.1 da Referência.

▶ EXEMPLO 6 Usando operações elementares com linhas

Na coluna da esquerda, resolvemos um sistema de equações lineares operando nas equações do sistema e, na coluna da direita, resolvemos o mesmo sistema operando nas linhas da matriz aumentada.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Somamos -2 vezes a primeira equação à segunda para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Somamos -2 vezes a primeira linha à segunda para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Somamos -3 vezes a primeira equação à terceira para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Somamos -3 vezes a primeira linha à terceira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a segunda equação por $\frac{1}{2}$ para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Multiplicamos a segunda linha por $\frac{1}{2}$ para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Somamos -3 vezes a segunda equação à terceira para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Somamos -3 vezes a segunda linha à terceira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a terceira equação por -2 para obter

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Multiplicamos a terceira linha por -2 para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Somamos -1 vez a segunda equação à primeira para obter

$$\begin{aligned} x \qquad + \tfrac{11}{2}z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Somamos -1 vez a segunda linha à primeira para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Somamos $-\frac{11}{2}$ vezes a terceira equação à primeira e $\frac{7}{2}$ vezes a terceira equação à segunda para obter

$$\begin{aligned} x \qquad &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Somamos $-\frac{11}{2}$ vezes a terceira linha à primeira e $\frac{7}{2}$ vezes a terceira equação à segunda para obter

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A solução $x = 1, y = 2, z = 3$ é, agora, evidente. ◀

Acima, o sistema é resolvido pelo Método de Gauss-Jordan

O candidato também poderia transformar o sistema inicial em um sistema triangular equivalente, por exemplo, $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ -\frac{1}{2}z = -\frac{3}{2} \end{cases}$, e resolver por retrosubstituição (Método da Eliminação de Gauss)

(c) Seções 2.3, 4.7 e 4.8 da Referência.

Seja $S = \text{ger}\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ é o subespaço gerado pelas colunas de A, então:

- Se $\det(A) \neq 0$ então $S = \mathbb{R}^n$ e o sistema é possível/compatível/consistente e determinado.
- Se $\det(A) = 0$ então $S \subsetneq \mathbb{R}^n$ e o sistema é possível/compatível e indeterminado ou impossível/incompatível, dependendo do lado direito b. A saber:
  - Se $b \in S$ então o sistema é possível/compatível/consistente e indeterminado.
  - Se $b \notin S$ então o sistema é impossível/incompatível/inconsistente.

TEOREMA 2.3.3 *Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se,* det(A) $\neq$ *0.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Segue da Fórmula (10) da Seção 1.3 que se $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ denotam os vetores coluna de A, então o produto $A\mathbf{x}$ pode ser expresso como uma combinação linear desses vetores com coeficientes de $\mathbf{x}$, ou seja,

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n \tag{1}$$

Assim, um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m equações em n incógnitas pode ser escrito como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b} \tag{2}$$

do que podemos concluir que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente se, e só se, $\mathbf{b}$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores coluna de A. Isso fornece o seguinte teorema.

TEOREMA 4.7.1 *Um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de equações lineares é consistente se, e só se, $\mathbf{b}$ está no espaço coluna de A.*

TEOREMA 4.8.4 Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(*a*) *A é invertível.*

(*b*) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *tem somente a solução trivial.*

(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*

(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*

(*e*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é consistente com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho $n \times 1$.*

(*f*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem exatamente uma solução com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho $n \times 1$.*

(*g*) $\det(A) \neq 0$.

(*h*) *Os vetores coluna de A são linearmente independentes.*

(*i*) *Os vetores linha de A são linearmente independentes.*

(*j*) *Os vetores coluna de A geram R^n.*

(*k*) *Os vetores linha de A geram R^n.*

*O padrão de resposta deve estar fundamentado nas bibliografias exigidas pelo Edital, para evitar problemas o professor deverá citar o capítulo/pagína do livro utilizado.

Membros da Banca:

Avaliador 1: Thiane Pereira Poncetta Coliboro

Avaliador 2: Michael Renê Mix Visintainer

Avaliador 3: Eduardo Müller dos Santos

Presidente da Banca: Thiane Pereira Poncetta Coliboro

Assinaturas do documento

Código para verificação: **41N1M7WB**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

MICHAEL RENÊ MIX VISINTAINER em 05/02/2024 às 14:07:04
Emitido por: "SGP-e", emitido em 03/04/2023 - 13:38:34 e válido até 03/04/2123 - 13:38:34.
(Assinatura do sistema)

EDUARDO MÜLLER DOS SANTOS (CPF: 051.XXX.829-XX) em 05/02/2024 às 14:08:59
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:48:13 e válido até 30/03/2118 - 12:48:13.
(Assinatura do sistema)

THIANE PEREIRA PONCETTA COLIBORO (CPF: 047.XXX.979-XX) em 05/02/2024 às 15:51:14
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:34:16 e válido até 30/03/2118 - 12:34:16.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwMDE3MTRfMTcxNV8yMDI0XzQxTjFNN1dC ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00001714/2024** e o código **41N1M7WB** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.