Prova Escrita do Processo Seletivo nº 05/2022 para a vaga Ciências Exatas e da Terra / Matemática ou Engenharia / Engenharia Química - 12/12/2022

Número do RG do candidato(a): _____Nota: _____

QUESTÕES:

1) [Pontuação 1,5 cada item] Resolva as seguintes integrais:

$a)\ \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{y^4+1}$ $\qquad$ $b)\ \int_0^2 \int_x^2 2y^2 \operatorname{sen}(xy)dydx$

2) [Pontuação 2,0] Calcule a integral de linha $\oint xydy - y^2dx$ através do quadrado cortado do primeiro quadrante pelas retas x=1 e y=1.

3) [Pontuação 2,0] O sistema de Equações Diferenciais Ordinárias abaixo

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\frac{8}{5}x_1(t) + \frac{3}{10}x_2(t), \\ x_2'(t) = \frac{8}{5}x_1(t) - \frac{4}{5}x_2(t), \\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 12 \end{cases}$$

representa dois tanques de mistura conectados contendo água (em litros) e sal (em quilograma) no instante t (em minutos). Em que

$x_1(t) =$ quantidade de sal no Tanque 1 no instante t

$x_2(t) =$ quantidade de sal no Tanque 2 no instante t.

Encontre a quantidade de sal em cada tanque no instante de tempo t e determine a quantidade de sal nos tanques 1 e 2 no tempo após 5 minutos (sugestão: usar a teoria de autovalores e autovetores para $\boldsymbol{x}(t) = c_1e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1 + c_2e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_ne^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n$).

Pág. 01 de 05 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00056146/2022 e o código 4HN5V7L8.

4) [Pontuação 1,5] Encontre o conjunto solução do Sistema de Equações Lineares, tal que o determinante da matriz dos coeficientes não é zero:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

5) [Pontuação 1,5] Um desenhista projetou uma embalagem de achocolatado em um software, na forma de um paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{a} = 7\vec{i}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$, no entanto, esse software não calcula o volume do paralelepípedo. Calcule o volume dessa embalagem e represente geometricamente essa embalagem.

Pág. 02 de 05 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00056146/2022 e o código 4HN5V7L8.

Gabarito

Resolução

1)

a) Invertendo a ordem de integração, resulta

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{y^4+1} = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{dxdy}{y^4+1}$$

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{y^4+1} = \int_0^2 \frac{[x]_{x=0}^{x=y^3} dy}{y^4+1}$$

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{y^4+1} = \int_0^2 \frac{y^3 dy}{y^4+1}$$

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{y^4+1} = \frac{1}{4}\ln|y^4+1|_{y=0}^{y=2}$$

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{y^4+1} = \frac{1}{4}\ln(17)$$

b) Invertendo a ordem de integração, resulta

$$\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \operatorname{sen}(xy) dydx = \int_0^2 \int_0^y 2y^2 \operatorname{sen}(xy) dxdy$$

$$\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \operatorname{sen}(xy) dydx = \int_0^2 -2y[\cos(xy)]_{x=0}^{x=y} dy$$

$$\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \operatorname{sen}(xy) dydx = \int_0^2 (-2y\cos(y^2) + 2y) dy$$

$$\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \operatorname{sen}(xy) dydx = [-\operatorname{sen}(y^2) + y^2]_{y=0}^{y=2}$$

$$\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \operatorname{sen}(xy) dydx = -\operatorname{sen}(4) + 4$$

2) Através do Teorema de Green, obtemos a seguinte expressão:

$$\oint xydy - y^2dx = \int_0^1 \int_0^1 (y+2y) dxdy$$

$$\oint xydy - y^2dx = \int_0^1 \int_0^1 3y dxdy$$

$$\oint xydy - y^2dx = \int_0^1 [3xy]_{x=0}^{x=1}dy$$

$$\oint xydy - y^2dx = \int_0^1 3ydy$$

$$\oint xydy - y^2dx = \left[\frac{3}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$\oint xydy - y^2dx = \frac{3}{2}$$

3)

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\frac{8}{5}x_1(t) + \frac{3}{10}x_2(t), \\ x_2'(t) = \frac{8}{5}x_1(t) - \frac{4}{5}x_2(t), \\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 12 \end{cases}.$$

A matriz de coeficientes deste sistema é

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Usando os métodos das seções anteriores, podemos encontrar facilmente os autovalores dessa matriz. São eles: $\lambda_1 = -\frac{2}{5}$ e $\lambda_2 = -2$. Os autovetores associados são $\mathbf{v}_1 = (\frac{1}{4}, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (-\frac{3}{4}, 1)$.

Como temos dois autovetores linearmente independentes, segue que a matriz A é diagonalizável. Portanto, pelo Teorema 4, a solução geral do sistema de equações diferenciais $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ é

$$\mathbf{x} = c_1e^{-\frac{2}{5}t}\mathbf{v}_1 + c_2e^{-2t}\mathbf{v}_2,$$

ou equivalentemente,

$$x_1(t) = \frac{c_1}{4}e^{-\frac{2}{5}t} - \frac{3c_2}{4}e^{-2t}$$

$$x_2(t) = c_1e^{-\frac{2}{5}t} + c_2e^{-2t}.$$

Substituindo as condições iniciais $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 12$ nessas equações temos:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 12 \end{cases}$$

A solução desse sistema é $c_1 = 9$ e $c_2 = 3$, portanto a solução do PVI é

$$x_1(t) = \frac{9}{4}e^{-\frac{2}{5}t} - \frac{9}{4}e^{-2t}$$

$$x_2(t) = 9e^{-\frac{2}{5}t} + 3e^{-2t}.$$

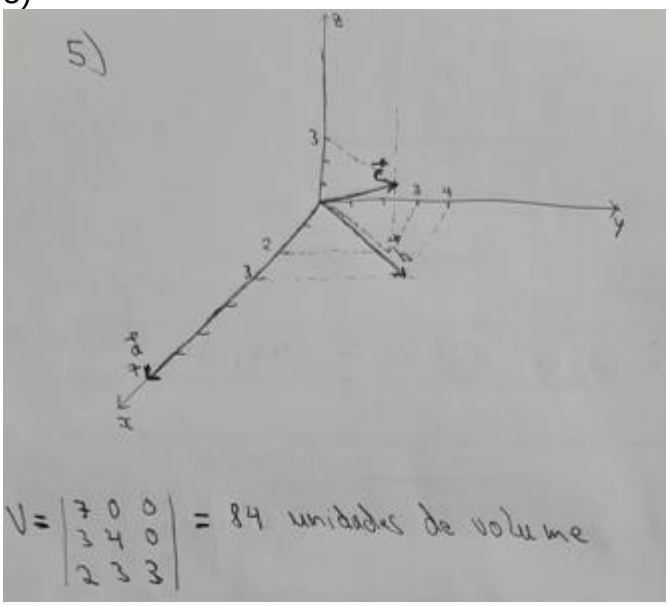
Para o t=5 minutos,

$$\boldsymbol{x}(5) = \begin{pmatrix} x_1(5) = \dfrac{9e^{-2} - 9e^{-10}}{4} \\ x_2(5) = 9e^{-2} + e^{-10} \end{pmatrix}$$

Pág. 04 de 05 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00056146/2022 e o código 4HN5V7L8.

4) Essa questão pode ser resolvida fazendo escalonamento por Gauss-Jordan ou usar o Teorema: Se o det(A)#0, então o sistema tem solução única, sendo um sistema homogêneo a solução é a trivial, isto é: A**x**=**0** e det(A)#0 => $A^{-1}A\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{0}$ => **Ix**=**0** => **x**=**0**=$(0, 0, 0, 0)^t$

5)



Pág. 05 de 05 - Documento assinado digitalmente. Para conferência, acesse o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo UDESC 00056146/2022 e o código 4HN5V7L8.

Assinaturas do documento

Código para verificação: **4HN5V7L8**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

DANIEL IUNES RAIMANN (CPF: 617.XXX.420-XX) em 12/12/2022 às 11:35:41
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:36:56 e válido até 30/03/2118 - 12:36:56.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwNTYxNDZfNTYyMzNfMjAyMl80SE41VjdMOA== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00056146/2022** e o código **4HN5V7L8** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.