MOVIMENTO RETILÍNEO

2

Um velocista normalmente acelera no primeiro terço de uma corrida e desacelera gradualmente no restante do percurso. É exato afirmar que um velocista está *acelerando* enquanto diminui a velocidade nos dois terços finais da corrida?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como descrever o movimento retilíneo em termos de velocidade média, velocidade instantânea, aceleração média e aceleração instantânea.
- Como interpretar gráficos de posição *versus* tempo, velocidade *versus* tempo e aceleração *versus* tempo para o movimento retilíneo.
- Como solucionar problemas relacionados ao movimento retilíneo com aceleração constante, incluindo questões de queda livre.
- Como analisar o movimento retilíneo em caso de aceleração não constante.

Qual distância um avião deve percorrer em uma pista antes de atingir a velocidade de decolagem? Quando você lança uma bola diretamente de baixo para cima, que altura ela atinge? Quando um copo escorrega de sua mão, de quanto tempo você dispõe para segurá-lo antes que ele atinja o solo? São estes os tipos de perguntas que você aprenderá a responder neste capítulo. Estamos iniciando o estudo da física com a *mecânica*, o estudo das relações entre movimento, massa e força. O objetivo deste e do próximo capítulo é o estudo da *cinética*, a parte da mecânica que trata do movimento. Mais tarde, estudaremos a *dinâmica*, a relação entre o movimento e suas causas.

Neste capítulo estudaremos o tipo mais simples de movimento: uma partícula se deslocando ao longo de uma linha reta. Para descrever esse movimento, introduziremos as grandezas físicas de *velocidade* e *aceleração*. Essas grandezas possuem definições simples na física; contudo, essas definições são mais precisas e um pouco diferentes das usadas na linguagem cotidiana. Uma observação importante nas definições de velocidade e de aceleração dadas por um físico é que essas grandezas são *vetores*. Como você aprendeu no Capítulo 1, isso significa que elas possuem módulo, direção e sentido. Neste capítulo estamos apenas interessados em descrever o movimento em uma linha reta, de modo que não necessitamos por enquanto do tratamento matemático completo dos vetores. Porém, no Capítulo 3, abordaremos o movimento em duas e em três dimensões, casos em que o uso de vetores é essencial.

Desenvolveremos equações simples para descrever o movimento no caso especialmente importante em que a aceleração permanece constante.

Um exemplo é a queda livre de um corpo. Também consideraremos casos nos quais a aceleração varia durante o movimento; para essa situação necessitamos do uso da integração para descrever o movimento. (Caso você ainda não tenha estudado integração, a Seção 2.6 é opcional.)

2.1 Deslocamento, tempo e velocidade média

Suponha que em uma corrida de carros uma competidora dirija seu carro em um trecho retilíneo (Figura 2.1). No estudo do movimento precisamos de um sistema de coordenadas. Escolhemos o eixo Ox para nosso sistema de coordenadas ao longo do trecho retilíneo, com a origem O

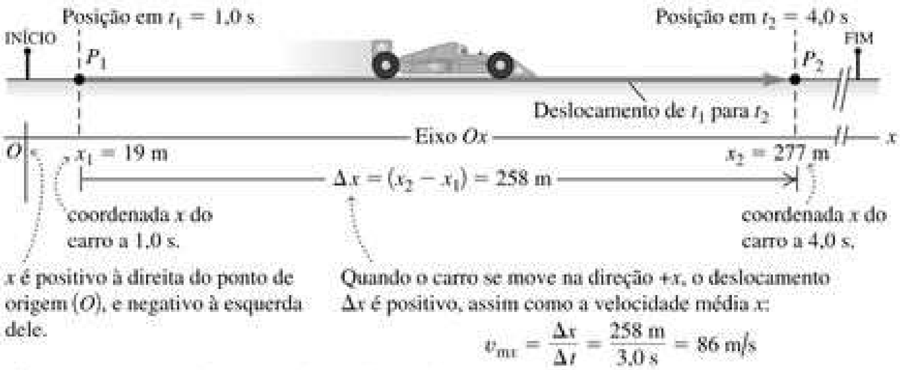


Figura 2.1 Posição de um carro de corrida em dois instantes de sua trajetória.

situada no início da linha reta. Descreveremos a posição do carro em função da posição de seu ponto representativo, como, por exemplo, sua extremidade dianteira. Ao fazer isso, o carro todo é representado por esse ponto, razão pela qual o consideramos uma **partícula**.

A posição da extremidade dianteira do carro, ou seja, a posição da partícula, é dada pela coordenada x, que varia com o tempo à medida que o carro se move. Um modo útil para a descrição do movimento do carro consiste em dizer como x varia em um intervalo de tempo. Suponha que 1,0 s depois do início do movimento a extremidade dianteira do carro esteja no ponto P_1, a 19 m da origem, e que 4,0 s depois do início do movimento esse ponto se desloque para P_2, a 277 m da origem. O *deslocamento* da partícula é um vetor que aponta de P_1 para P_2 (Seção 1.7). A Figura 2.1 mostra que esse vetor se posiciona ao longo do eixo Ox. O componente x do deslocamento é simplesmente a variação no valor de x, (277 m − 19 m) = 258 m, em um intervalo de tempo (4,0 s − 1,0 s) = 3,0 s. Definimos a **velocidade média** do carro nesse intervalo de tempo como uma grandeza *vetorial* cujo componente x é a variação de x dividida por esse intervalo de tempo: (258 m)/(3,0 s) = 86 m/s.

Em geral, a velocidade média depende do intervalo específico de tempo escolhido. Para um intervalo de tempo de 3,0 s *antes* do início da corrida, a velocidade média seria zero, porque o carro estaria em repouso na linha de partida e seu deslocamento seria nulo.

Vamos generalizar o conceito de velocidade média. Em um instante t_1, o carro se encontra no ponto P_1, cuja coordenada é x_1, e no instante t_2, ele se encontra no ponto P_2, cuja coordenada é x_2. O deslocamento do carro no intervalo de tempo entre t_1 e t_2 é o vetor que liga o ponto P_1 ao ponto P_2. O componente x do deslocamento do carro, designado como Δx, é simplesmente a variação da coordenada x:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{2.1}$$

O carro se move somente pelo eixo Ox, logo os componentes y e z do deslocamento são iguais a zero.

ATENÇÃO O significado de ΔX Note que Δx não é o produto de Δ vezes x; esse símbolo significa simplesmente 'variação da grandeza x'. Sempre usamos a letra grega maiúscula Δ (delta) para representar a *variação* de uma grandeza, calculada como a diferença entre o valor *final* e o valor *inicial* da grandeza — nunca o contrário. Analogamente, escrevemos o intervalo de tempo entre t_1 e t_2 como Δt e a variação na grandeza t: $\Delta t = t_2 - t_1$ (a diferença entre o valor final e o valor inicial).

O componente x da velocidade média, ou **velocidade média**, é o componente x do deslocamento, Δx, dividido pelo intervalo de tempo Δt durante o qual o deslocamento ocorre. Representaremos essa grandeza pelo símbolo v_{mx} (em que o 'm' subscrito significa valor médio e o 'x' subscrito indica que esse é o componente x):

$$v_{mx} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.2}$$

(velocidade média, movimento retilíneo)

Para o exemplo anterior, para o carro $x_1 = 19$ m, $x_2 = 277$ m, $t_1 = 1{,}0$ s e $t_2 = 4{,}0$ s, a Equação (2.2) fornece

$$v_{mx} = \frac{277 \text{ m} - 19 \text{ m}}{4{,}0 \text{ s} - 1{,}0 \text{ s}} = \frac{258 \text{ m}}{3{,}0 \text{ s}} = 86 \text{ m/s}$$

A velocidade média do carro de corrida é positiva. Isso significa que durante o intervalo de tempo a coordenada x cresce e o carro se move no sentido positivo do eixo Ox (da esquerda para a direita na Figura 2.1).

Quando a partícula se move no sentido *negativo* do eixo Ox durante o intervalo de tempo, sua velocidade média para esse intervalo de tempo é negativa. Por exemplo, suponha que uma caminhonete se mova da direita para a esquerda ao longo da pista (Figura 2.2). A caminhonete se encontra no ponto $x_1 = 277$ m em um instante $t_1 = 16{,}0$ s e em $x_2 = 19$ m no instante $t_2 = 25{,}0$ s. Logo, $\Delta x = (19 \text{ m} - 277 \text{ m}) = -258$ m e $\Delta t = (25{,}0 \text{ s} - 16{,}0 \text{ s}) = 9{,}0$ s. O componente x da velocidade média será $v_{mx} = \Delta x/\Delta t = (-258 \text{ m}) / (9{,}0 \text{ s}) = -29$ m/s.

Apresentamos algumas regras simples para a velocidade média. **Quando x é positivo e crescente ou negativo**

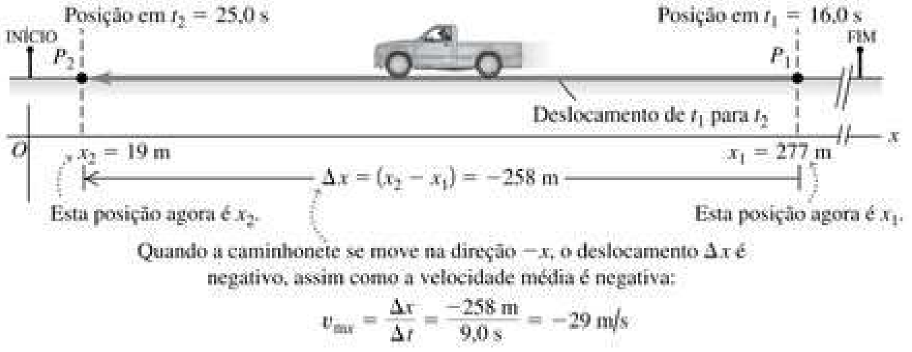


Figura 2.2 Posições de uma caminhonete em dois instantes durante seu movimento. Os pontos P_1 e P_2 referem-se agora ao deslocamento da caminhonete, de modo que eles são diferentes dos pontos da Figura 2.1.

e se tornar menos negativo, a partícula se move no sentido do eixo $+Ox$ e v_{mx} é positiva (Figura 2.1). **Quando x é positivo e decrescente ou negativo e se tornar mais negativo, a partícula se move no sentido do eixo $-Ox$ e v_{mx} é negativa** (Figura 2.2).

ATENÇÃO Escolha da direção positiva de x Você poderá ser tentado a concluir que a velocidade média positiva necessariamente implica um deslocamento para a direita como na Figura 2.1, e que a velocidade média negativa necessariamente implica um deslocamento para a esquerda como na Figura 2.2. Porém essas conclusões estão corretas *somente* quando o eixo Ox é orientado da esquerda para a direita, como foi escolhido nas figuras 2.1 e 2.2. Poderíamos também ter orientado o eixo Ox da direita para a esquerda, com origem no ponto final. Nesse caso, o carro de corrida teria uma velocidade média negativa e a caminhonete teria uma velocidade média positiva. Você deve escolher o sentido do eixo ao resolver quase todos os problemas. Uma vez feita essa escolha, *é necessário* considerar esse sentido ao interpretar os sinais de v_{mx} e de outras grandezas que descrevem o movimento!

No caso do movimento retilíneo, Δx em geral indica simplesmente o deslocamento e v_{mx}, a velocidade média. Contudo, lembre-se de que essas grandezas indicam simplesmente os componentes x de grandezas vetoriais que, nesse caso particular, possuem *apenas* componentes x. No Capítulo 3, o deslocamento, a velocidade e a aceleração serão considerados com dois ou três componentes.

A Figura 2.3 mostra um gráfico da posição do carro de corrida em função do tempo, ou seja, é um **gráfico *xt***. A curva dessa figura *não* representa a trajetória do carro no espaço; como indicado na Figura 2.1, essa trajetória é uma linha reta. Em vez da trajetória, o gráfico mostra as variações da posição do carro com o tempo. Os pontos designados por p_1 e p_2 correspondem aos pontos P_1 e P_2 da trajetória do carro. A linha reta $p_1 p_2$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujo lado vertical é $\Delta x = x_2 - x_1$ e cujo lado horizontal é $\Delta t = t_2 - t_1$. A velocidade média do carro $v_{mx} = \Delta x/\Delta t$ é a *inclinação* da linha reta $p_1 p_2$, ou seja, a razão entre o lado vertical Δx do triângulo retângulo e o lado horizontal Δt.

A velocidade média depende apenas do deslocamento $\Delta x = x_2 - x_1$, que ocorre durante o intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, e não nos detalhes ocorridos durante esse intervalo. Suponha que uma motocicleta ultrapasse o carro de corrida no ponto P_1 da Figura 2.1 no mesmo instante t_1 e a seguir diminua a velocidade para passar pelo ponto P_2 no mesmo instante t_2 do carro. Os dois veículos possuem o mesmo deslocamento no mesmo intervalo de tempo e, portanto, apresentam a mesma velocidade média.

Quando as distâncias são medidas em metros e os tempos em segundos, a velocidade média é dada em metros por segundo (m/s). Outras unidades de velocidade

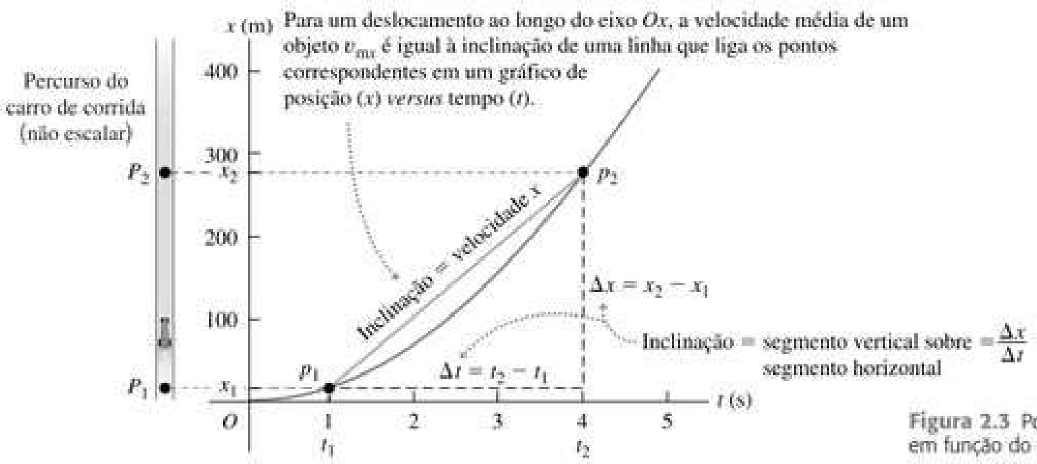


Figura 2.3 Posição de um carro de corrida em função do tempo.

são quilômetros por hora (km/h), pés por segundo (pés/s), milhas por hora (mi/h) e nós (1 nó = 1 milha náutica/h = 6080 pés/h). A Tabela 2.1 mostra algumas ordens de grandeza típicas de velocidades.

Tabela 2.1 Ordens de grandeza de algumas velocidades

O rastejar de uma cobra	10^{-3} m/s
Uma caminhada rápida	2 m/s
Homem mais veloz	11 m/s
Leopardo correndo	35 m/s
Carro mais veloz	341 m/s
Movimento aleatório de moléculas do ar	500 m/s
Avião mais veloz	1000 m/s
Satélite de comunicação em órbita	3000 m/s
Elétron na órbita de um átomo de hidrogênio	2×10^6 m/s
A luz deslocando-se no vácuo	3×10^8 m/s

Teste sua compreensão da Seção 2.1 Cada uma das seguintes viagens de automóvel leva uma hora. A direção $+x$ é do oeste para leste. (i) O automóvel A segue a 50 km para leste. (ii) O automóvel B segue a 50 km para oeste. (iii) O automóvel C segue a 60 km para leste, dá meia-volta e segue a 10 km para oeste. (iv) O automóvel D segue a 70 km para leste. (v) O automóvel E segue a 20 km para oeste, dá meia-volta e segue a 20 km para leste. (a) Classifique as cinco viagens por ordem de velocidade média, da mais positiva para a mais negativa. (b) Há viagens com a mesma velocidade média? (c) Há alguma viagem com velocidade média igual a zero? ❚

2.2 Velocidade instantânea

Às vezes, a velocidade média é tudo que precisamos para conhecer o movimento de uma partícula. Por exemplo, uma corrida em movimento retilíneo é realmente uma competição para se saber de quem é a velocidade média, v_{mx}, com o maior módulo. O prêmio vai para o competidor capaz de percorrer o deslocamento Δx do início ao fim no menor intervalo de tempo Δt (Figura 2.4).

Mas a velocidade média de uma partícula durante um intervalo de tempo não pode nos informar nem o módulo, nem o sentido do movimento em cada instante do intervalo de tempo. Para isso, é necessário definir a velocidade em um instante ou em um ponto específico ao longo da trajetória. Tal velocidade denomina-se **velocidade instantânea** e precisa ser definida cuidadosamente.

ATENÇÃO Qual é a duração de um instante? Note que a palavra 'instante' possui um significado físico diferente do seu significado na vida cotidiana. Você poderia usar a frase 'durou um breve instante' para designar um fato ocorrido em um curto intervalo de tempo. Contudo, em física, um instante não possui nenhuma duração; ele se refere a um único valor definido para o tempo.

Figura 2.4 O vencedor de uma competição de natação de 50 m é aquele que possui uma velocidade média cujo módulo é o maior de todos, ou seja, o nadador que percorrer a distância Δx de 50 m no menor intervalo de tempo Δt.

Para achar a velocidade instantânea do carro no ponto P_1 indicado na Figura 2.1, imaginamos que o ponto P_2 se aproxima continuamente do ponto P_1 e calculamos a velocidade média $v_{mx} = \Delta x/\Delta t$ nos deslocamentos e nos intervalos de tempo cada vez menores. Tanto Δx quanto Δt tornam-se muito pequenos, mas a razão entre eles não se torna necessariamente muito pequena. Em linguagem matemática, o limite de $\Delta x/\Delta t$ quando Δt tende a zero denomina-se **derivada** de x em relação a t e é escrito como dx/dt. *A velocidade instantânea é o limite da velocidade média quando o intervalo de tempo tende a zero; ela é igual à taxa de variação da posição com o tempo.* Usaremos o símbolo v_x, sem nenhum 'm' subscrito, para designar a velocidade instantânea ao longo do eixo Ox:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (2.3)$$

(velocidade instantânea, movimento retilíneo).

Sempre supomos que o intervalo de tempo Δt é positivo, de modo que v_x possui o mesmo sinal de Δx. Quando o sentido positivo do eixo Ox é orientado da esquerda para a direita, um valor positivo de v indica que x é crescente e que o movimento ocorre da esquerda para a direita; um valor negativo de v indica que x é decrescente e que o movimento ocorre da direita para a esquerda. Um corpo pode ter valores de v e de x positivo ou negativo; x indica onde o corpo se encontra, enquanto v nos informa como ele se move (Figura 2.5).

A velocidade instantânea, assim como a velocidade média, é uma grandeza vetorial. A Equação (2.3) define seu componente x. No movimento retilíneo, todos os demais componentes da velocidade instantânea são nulos e, neste caso, costumamos dizer que v é simplesmente a velocidade instantânea. (No Capítulo 3, abordaremos o caso geral em que a velocidade instantânea pode ter componentes x, y e z não nulos.) Quando empregamos a palavra 'velocidade', normalmente queremos dizer velocidade instantânea, e não velocidade média, a menos que haja alguma especificação diferente.

Figura 2.5 Mesmo quando se move para a frente, a velocidade instantânea deste ciclista pode ser negativa – caso ele se desloque em relação a um eixo orientado no sentido negativo do eixo Ox. Ao resolver um problema, a escolha de qual sentido é positivo depende exclusivamente de você.

Os termos 'vetor velocidade', 'velocidade' e 'velocidade escalar' são usados quase como sinônimos na linguagem cotidiana, mas na física estes termos possuem definições completamente diferentes. Usamos a expressão **velocidade escalar** para designar uma distância percorrida dividida pelo tempo, tanto no caso instantâneo quanto se considerando a média. Usamos o símbolo v sem *nenhum* subscrito para designar velocidade instantânea. Enquanto a *velocidade escalar* instantânea indica se o movimento é rápido ou lento, o *vetor velocidade* instantânea indica se o movimento é rápido ou lento *e* em qual direção e sentido ele ocorre. Por exemplo, suponha que duas partículas se movam na mesma direção, mas em sentidos contrários, uma com velocidade instantânea $v_x = 25$ m/s e a outra com $v_x = -25$ m/s. A velocidade escalar instantânea dessas partículas é a mesma, ou seja, 25 m/s. Como a velocidade escalar instantânea é o módulo do vetor velocidade instantânea, a velocidade escalar instantânea nunca pode ser negativa.

ATENÇÃO Velocidade escalar e velocidade média A velocidade escalar média *não* é igual ao módulo da velocidade média. Em 1994, Alexander Popov estabeleceu um recorde de velocidade na natação ao nadar 100,0 m em 46,74 s. A velocidade escalar média deste nadador foi (100,0 m/46,74 s) = 2,139 m/s. Porém, como ele nadou dois trechos de ida e volta em uma piscina de 50 m, seu vetor deslocamento total e o *vetor velocidade* média foram iguais a zero! Tanto a velocidade escalar média quanto a velocidade escalar instantânea são grandezas escalares, não vetoriais, visto que essas grandezas não informam nem a direção nem o sentido do movimento.

Exemplo 2.1

VELOCIDADE MÉDIA E VELOCIDADE INSTANTÂNEA Um leopardo africano está de tocaia a 20 m a leste de um jipe blindado de observação (Figura 2.6a). No instante $t = 0$, o leopardo começa a perseguir um antílope situado a 50 m a leste do observador. O leopardo corre ao longo de uma linha reta. A análise posterior de um vídeo mostra que durante os 2,0 s iniciais do ataque, a coordenada x do leopardo varia com o tempo de acordo com a equação $x = 20\text{ m} + (5{,}0\text{ m/s}^2)t^2$. a) Determine o deslocamento do leopardo durante o intervalo entre $t_1 = 1{,}0$ s e $t_2 = 2{,}0$ s. b) Ache a velocidade instantânea durante o mesmo intervalo de tempo. c) Ache a velocidade instantânea no tempo $t_1 = 1{,}0$ s, considerando $\Delta t = 0{,}1$ s, logo $\Delta t = 0{,}01$ s e, a seguir, $\Delta t = 0{,}001$ s. d) Deduza uma expressão geral para a velocidade instantânea em função do tempo e, a partir dela, calcule a velocidade para $t = 1{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: usamos as definições de deslocamento, velocidade média e velocidade instantânea. A aplicação das duas primeiras envolve álgebra; a última requer o uso de cálculo para se extrair uma derivativa.

PREPARAR: a Figura 2.6b mostra nosso desenho do movimento do leopardo. Para analisar esse problema, usamos a Equação (2.1) para deslocamento, a Equação (2.2) para velocidade média e a Equação (2.3) para velocidade instantânea.

EXECUTAR: a) No instante $t_1 = 1{,}0$ s, a posição x_1 do leopardo é

$$x_1 = 20\text{ m} + (5{,}0\text{ m/s}^2)(1{,}0\text{ s})^2 = 25\text{ m}$$

No instante $t_2 = 2{,}0$ s, sua posição x_2 é

$$x_2 = 20\text{ m} + (5{,}0\text{ m/s}^2)(2{,}0\text{ s})^2 = 40\text{ m}$$

O deslocamento durante esse intervalo é

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 40\text{ m} - 25\text{ m} = 15\text{ m}$$

b) A velocidade média durante esse intervalo de tempo é

$$v_{mx} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{40\text{ m} - 25\text{ m}}{2{,}0\text{ s} - 1{,}0\text{ s}} = \frac{15\text{ m}}{1{,}0\text{ s}} = 15\text{ m/s}$$

c) Para $\Delta t = 0{,}1$ s, o intervalo de tempo é de $t_1 = 1{,}0$ s a $t_2 = 1{,}1$ s. No instante t_2, a posição é

$$x_2 = 20\text{ m} + (5{,}0\text{ m/s}^2)(1{,}1\text{ s})^2 = 26{,}05\text{ m}$$

A velocidade média durante esse intervalo de tempo é

$$v_{mx} = \frac{26{,}05\text{ m} - 25\text{ m}}{1{,}1\text{ s} - 1{,}0\text{ s}} = 10{,}5\text{ m/s}$$

Convidamos você a seguir o mesmo raciocínio e refazer os cálculos para os intervalos $t = 0{,}01$ s e $t = 0{,}001$ s. Os resultados são 10,05 m/s e 10,005 m/s, respectivamente. À medida que Δt se torna menor, a velocidade média fica cada vez mais próxima do valor 10,0 m/s. Logo, concluímos que a velocidade instantânea para $t = 1{,}0$ s é igual a 10,0 m/s.

d) Achamos a velocidade instantânea em função do tempo ao derivar a expressão de x em relação a t. Para qualquer n, a derivada de t^n é dada por nt^{n-1}, de modo que a derivada de t^2 é $2t$. Logo,

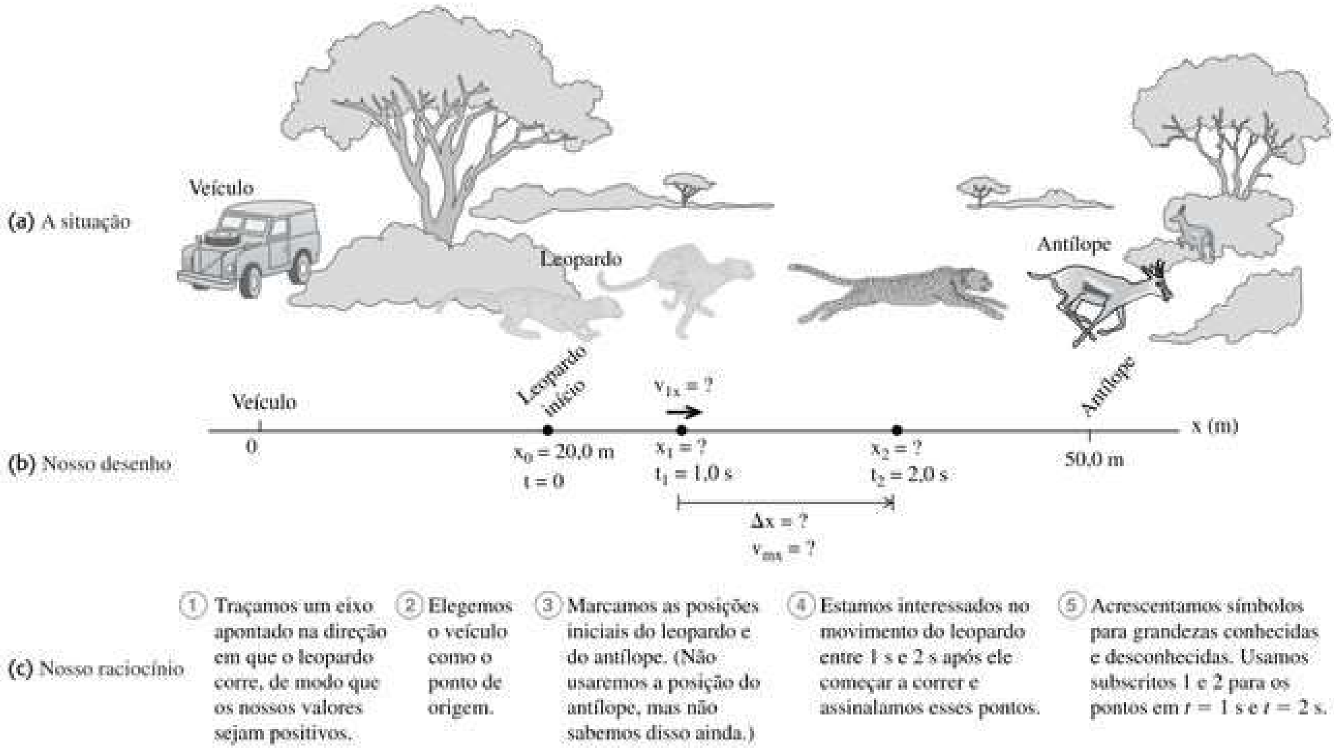


Figura 2.6 Leopardo atacando um antílope a partir de uma tocaia. Os animais não estão desenhados na mesma escala do eixo.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (5{,}0\ \text{m/s}^2)(2t) = (10\ \text{m/s}^2)t$$

No instante t = 1,0 s, v_x = 10 m/s, de acordo com o resultado obtido no item (c). No instante t = 2,0 s, v_x = 20 m/s.

AVALIAR: nossos resultados demonstram que o leopardo ganhou velocidade a partir de $t = 0$ (quando em repouso) para t = 1,0 s (v_x = 10 m/s) para t = 2,0 s (v_x = 20 m/s). Isso faz sentido; o leopardo percorreu apenas 5 m no intervalo $t = 0$ para t = 1,0 s, mas percorreu 15 m no intervalo t = 1,0 s para t = 2,0 s.

Cálculo da velocidade usando um gráfico *xt*

A velocidade de uma partícula também pode ser achada a partir de um gráfico da posição da partícula em função do tempo. Suponha que você deseja calcular a velocidade do carro de corrida no ponto P_1 indicado na Figura 2.1. Quando o ponto P_2 dessa figura se aproxima do ponto P_1, o ponto p_2 nos gráficos *xt* indicados nas figuras 2.7a e 2.7b se aproxima do ponto p_1 e a velocidade média é calculada em intervalos de tempo Δt cada vez menores. No limite $\Delta t \to 0$, indicado na Figura 2.7c, a inclinação da linha reta $p_1 p_2$ torna-se igual à inclinação da tangente da curva no ponto p_1. *Em um gráfico da posição da partícula em função do tempo no movimento retilíneo, a velocidade instantânea em qualquer ponto é igual à inclinação da tangente da curva nesse ponto.*

Quando a tangente é inclinada para cima e para a direita, como no gráfico *xt* da Figura 2.7c, sua inclinação e velocidade são positivas e o movimento ocorre no sentido positivo do eixo *Ox*. Quando a tangente é inclinada para baixo e para a direita, sua inclinação e velocidade são negativas e o movimento ocorre no sentido negativo do eixo *Ox*. Quando a tangente é horizontal, a inclinação é igual a zero e a velocidade é nula. A Figura 2.8 ilustra essas três possibilidades.

Note que a Figura 2.8 ilustra o movimento de uma partícula de dois modos. A Figura 2.8a mostra um gráfico *xt* e a Figura 2.8b mostra um exemplo de **diagrama do movimento**. Um diagrama do movimento indica a posição da partícula em diversos instantes do seu movimento (como se fosse um filme ou vídeo do movimento da partícula), bem como apresenta flechas para indicar as velocidades da partícula em cada instante. Tanto o gráfico *xt* quanto o diagrama do movimento são valiosas ferramentas para a compreensão do movimento. Você verificará que é conveniente usar ambos os recursos na solução de problemas que envolvem movimentos.

Teste sua compreensão da Seção 2.2 A Figura 2.9 é um gráfico *xt* do movimento de uma partícula. a) Classifique os valores da velocidade v_x da partícula nos pontos *P*, *Q*, *R* e *S*, do mais positivo para o mais negativo. b) Em quais pontos v_x é positiva? c) Em quais pontos v_x é negativa? d) Em quais pontos v_x é nula? e) Classifique os valores da velocidade escalar da partícula nos pontos *P*, *Q*, *R* e *S*, do mais rápido para o mais lento. ∎

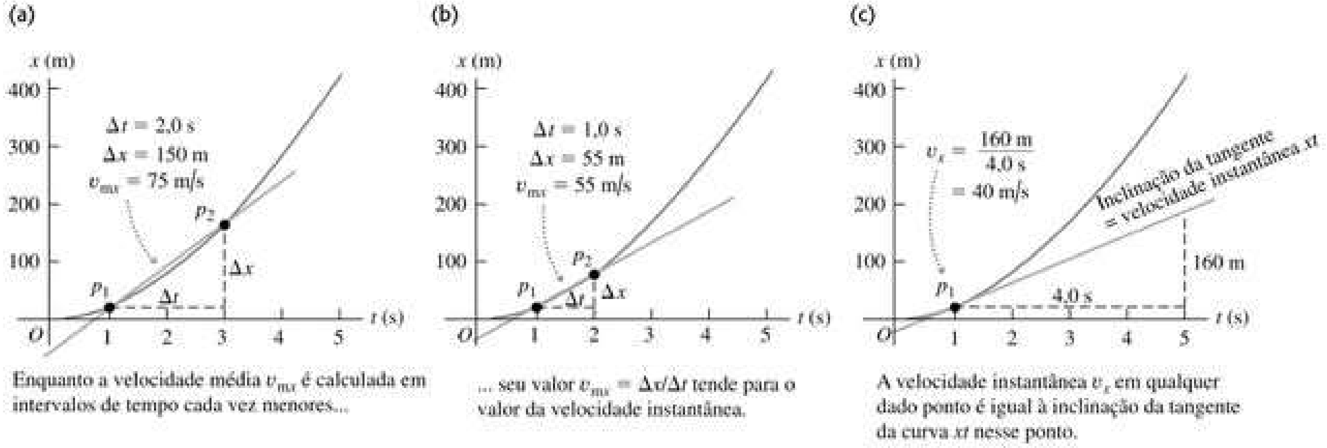


Figura 2.7 Usamos um gráfico xt para ir de (a) e (b), velocidade média, para (c), velocidade instantânea v_x. Em (c) achamos a inclinação da tangente para a curva xt, dividindo qualquer intervalo vertical (em unidades de distância) ao longo da tangente pelo intervalo horizontal correspondente (em unidades de tempo).

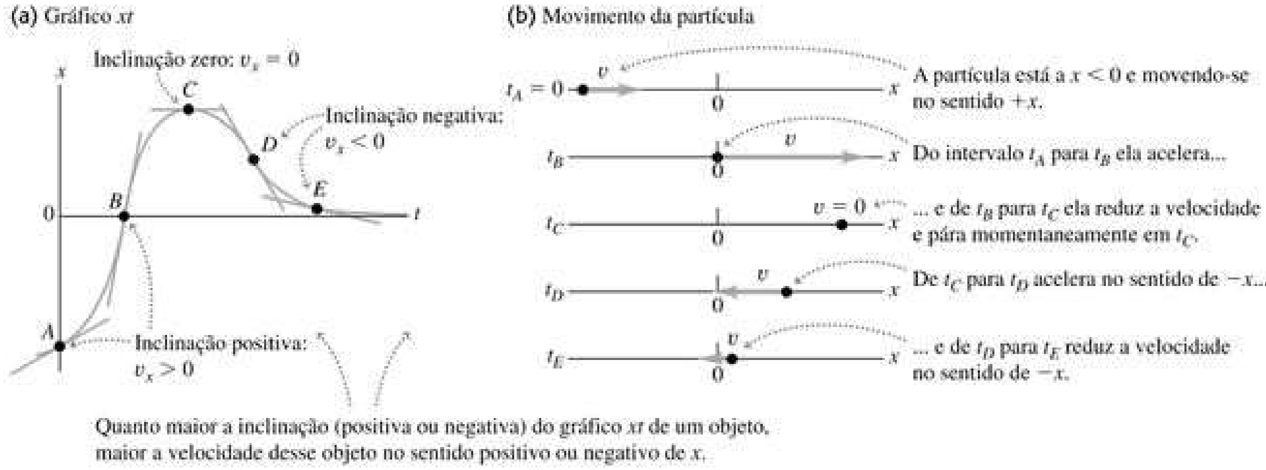


Figura 2.8 (a) Gráfico xt do movimento de uma certa partícula. A inclinação da tangente da curva em qualquer ponto fornece a velocidade nesse ponto. (b) Diagrama do movimento mostrando a posição e a velocidade da partícula em cada um dos cinco instantes indicados no gráfico xt.

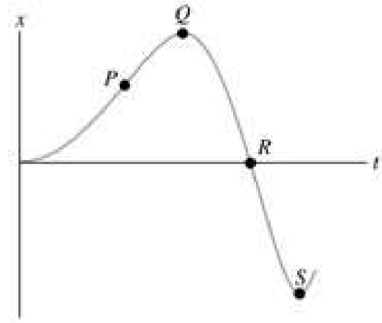


Figura 2.9 Gráfico xt para uma partícula.

2.3 Aceleração instantânea e aceleração média

Assim como a velocidade indica uma taxa de variação da posição com o tempo, a *aceleração* descreve uma taxa de variação da velocidade com o tempo. Como a velocidade, a aceleração também é uma grandeza vetorial. No movimento retilíneo, seu único componente diferente de zero está sobre o eixo ao longo do qual o movimento ocorre. Como veremos, a aceleração em um movimento retilíneo pode referir-se tanto ao aumento quanto à redução da velocidade.

Aceleração média

Vamos considerar novamente o movimento de uma partícula ao longo do eixo Ox. Suponha que em dado instante t_1 a partícula esteja em um ponto P_1 e possua um componente x da velocidade (instantânea) v_{1x}, e que em outro instante t_2 a partícula esteja em um ponto P_2 e possua um componente x da velocidade v_{2x}. Logo, a variação do componente x da velocidade é $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ em um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Definimos a **aceleração média** a_{mx} da partícula que se move de P_1 a P_2 como uma grandeza vetorial cujo componente x é dado pela razão entre Δv_x, a variação do componente x da velocidade e o intervalo de tempo Δt

$$a_{mx} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \tag{2.4}$$

(aceleração média, movimento retilíneo).

Para o movimento retilíneo ao longo do eixo Ox chamamos a_{mx} simplesmente de aceleração média. (No Capítulo 3, encontraremos outros componentes do vetor aceleração média.)

Quando a velocidade é expressa em metros por segundo e o tempo em segundos, a aceleração média é expressa em metros por segundo por segundo, ou (m/s)/s. Normalmente escrevemos isso como m/s^2 e lemos 'metro por segundo ao quadrado'.

ATENÇÃO Aceleração versus velocidade Tome cuidado para não confundir aceleração com velocidade! A velocidade indica como a posição de um corpo varia com o tempo; é um vetor cujo módulo indica a velocidade do deslocamento do corpo e sua direção e sentido mostram a direção e o sentido do movimento. A aceleração indica como a velocidade e a direção do movimento variam com o tempo. Pode ser útil lembrar-se da frase: 'a aceleração está para a velocidade assim como a velocidade está para a posição.' Pode também ser útil se imaginar movendo com o corpo em movimento. Quando o corpo acelera para a frente e ganha velocidade, você se sentirá empurrado para trás; quando ele acelera para trás e perde velocidade, você se sentirá empurrado para a frente. Quando a velocidade é constante e não há aceleração, você não terá nenhuma dessas sensações. (Explicaremos essas sensações no Capítulo 4.)

Exemplo 2.2

ACELERAÇÃO MÉDIA Uma astronauta saiu de um ônibus espacial em órbita no espaço para testar uma nova unidade de manobra pessoal. À medida que ela se move em linha reta, seu companheiro a bordo do ônibus espacial mede sua velocidade a cada intervalo de 2,0 s, começando em t = 1,0 s, do seguinte modo:

t	v_x	t	v_x
1,0 s	0,8 m/s	9,0 s	−0,4 m/s
3,0 s	1,2 m/s	11,0 s	−1,0 m/s
5,0 s	1,6 m/s	13,0 s	−1,6 m/s
7,0 s	1,2 m/s	15,0 s	−0,8 m/s

Calcule a aceleração média e verifique se a velocidade da astronauta aumenta ou diminui para cada um dos seguintes intervalos de tempo: a) t_1 = 1,0 s até t_2 = 3,0 s; b) t_1 = 5,0 s até t_2 = 7,0 s; c) t_1 = 9,0 s até t_2 = 11,0 s; d) t_1 = 13,0 s até t_2 = 15,0 s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: necessitaremos da definição de aceleração média a_{mx}. Para determinar as variações em velocidade, usaremos o conceito de que a velocidade v é o módulo da velocidade instantânea v_x.

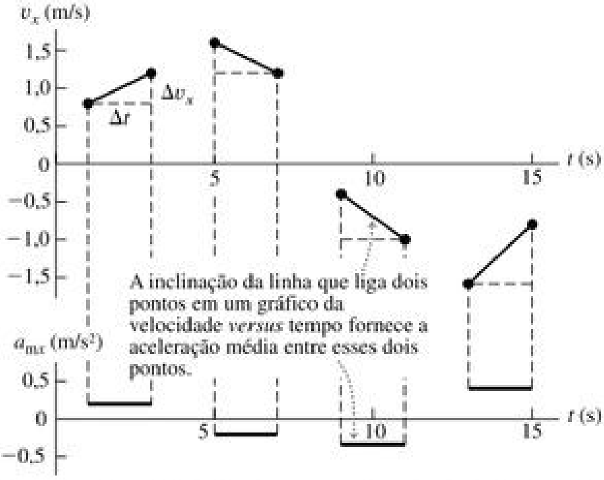


Figura 2.10 Nossos gráficos de velocidade *versus* tempo (parte superior) e aceleração média *versus* tempo (parte inferior) para a astronauta.

PREPARAR: a Figura 2.10 mostra os nossos gráficos. Usamos a Equação (2.4) para encontrar o valor de a_{mx} a partir da variação em *velocidade* para cada intervalo de tempo.

EXECUTAR: a parte superior da Figura 2.10 mostra um gráfico da velocidade em função do tempo. No gráfico v_{xt}, a inclinação da linha que une os pontos do início e do final de cada intervalo fornece a aceleração média $a_{mx} = \Delta v_x/\Delta t$ para cada intervalo. Os valores de a_{mx} são indicados no gráfico na parte inferior da Figura 2.10. Para cada intervalo de tempo, temos:

a) a_{mx} = (1,2 m/s − 0,8 m/s)/(3,0 s − 1,0 s) = 0,2 m/s^2. A velocidade escalar (o módulo da velocidade instantânea) aumenta de 0,8 m/s para 1,2 m/s.

b) a_{mx} = (1,2 m/s − 1,6 m/s)/(7,0 s − 5,0 s) = −0,2 m/s^2. A velocidade diminui de 1,6 m/s para 1,2 m/s.

c) a_{mx} = [−1,0 m/s − (−0,4 m/s)]/(11,0 s − 9,0 s) = −0,3 m/s^2. A velocidade aumenta de 0,4 m/s para 1,0 m/s.

d) a_{mx} = [−0,8 m/s − (−1,6 m/s)]/(15,0 s − 13,0 s) = 0,4 m/s^2. A velocidade diminui de 1,6 m/s para 0,8 m/s.

AVALIAR: nossos resultados demonstram que quando a aceleração média possui o *mesmo* sentido (mesmo sinal algébrico) da velocidade inicial, como nos intervalos a) e c), a astronauta acelera; quando possui sentido *contrário* (sinal algébrico contrário), como nos intervalos b) e d), a astronauta diminui a aceleração. Logo, a aceleração positiva implica velocidade crescente, quando a velocidade é positiva [intervalo a)], mas redução da velocidade, quando a velocidade é negativa [intervalo d)]. Da mesma forma, a aceleração negativa implica velocidade crescente, quando a velocidade é negativa [intervalo c)], mas velocidade decrescente, quando a velocidade é positiva [intervalo b)].

Aceleração instantânea

Podemos agora definir a **aceleração instantânea** seguindo o mesmo procedimento adotado quando definimos velocidade instantânea. Considere a situação: um piloto de um carro de corrida acaba de entrar na reta final

Figura 2.11 Um carro de corrida do Grande Prêmio na reta final.

do *Grand Prix* como ilustra a Figura 2.11. Para definir a aceleração instantânea no ponto P_1, imaginamos que o ponto P_2 da Figura 2.11 se aproxima continuamente do ponto P_1, de modo que a aceleração média seja calculada em intervalos de tempo cada vez menores. *A aceleração instantânea é o limite da aceleração média quando o intervalo de tempo tende a zero*. Na linguagem do cálculo diferencial, *a aceleração instantânea é igual à taxa de variação da velocidade com o tempo*. Logo:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \qquad (2.5)$$

(aceleração instantânea, movimento retilíneo).

Note que a_x na Equação (2.5) é de fato o componente x do vetor **aceleração instantânea**; no movimento retilíneo, todos os demais componentes deste vetor são iguais a zero. A partir de agora, quando usarmos o termo 'aceleração' estaremos designando a aceleração instantânea, não a aceleração média.

Exemplo 2.3

ACELERAÇÃO MÉDIA E ACELERAÇÃO INSTANTÂNEA Suponha que a velocidade v_x do carro na Figura 2.11 em qualquer instante t seja dada pela equação

$$v_x = 60\ \text{m/s} + (0{,}50\ \text{m/s}^3)t^2$$

a) Ache a variação da velocidade média do carro no intervalo de tempo entre $t_1 = 1{,}0$ s e $t_2 = 3{,}0$ s. b) Ache a aceleração média do carro nesse intervalo de tempo. c) Ache a aceleração instantânea do carro para $t_1 = 1{,}0$ s, considerando $\Delta t = 0{,}1$ s, $\Delta t = 0{,}01$ s e $\Delta t = 0{,}001$ s. d) Deduza uma expressão geral para a aceleração instantânea em função do tempo e, a partir dela, calcule a aceleração para $t = 1{,}0$ s e $t = 3{,}0$ s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo é análogo ao Exemplo 2.1 da Seção 2.2. (Este é um bom momento para revisar aquele exemplo.) Naquele caso, encontramos a velocidade média ao longo de intervalos cada vez mais curtos a partir da variação da posição e determinamos a velocidade instantânea pela diferenciação da posição como uma função do tempo. Neste caso, encontramos a aceleração *média* da variação na velocidade em um intervalo de tempo. Da mesma forma, encontramos a aceleração *instantânea* pela diferenciação da velocidade como uma função do tempo.

PREPARAR: usaremos a Equação (2.4) para aceleração média e a Equação (2.5) para aceleração instantânea.

EXECUTAR: a) inicialmente achamos a velocidade em cada instante substituindo cada valor de t na equação. Para $t_1 = 1{,}0$ s,

$$v_{1x} = 60\ \text{m/s} + (0{,}50\ \text{m/s}^3)(1{,}0\ \text{s})^2 = 60{,}5\ \text{m/s}$$

Para $t_2 = 3{,}0$ s,

$$v_{2x} = 60\ \text{m/s} + (0{,}50\ \text{m/s}^3)(3{,}0\ \text{s})^2 = 64{,}5\ \text{m/s}$$

A variação da velocidade Δv_x é dada por

$$\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} = 64{,}5\ \text{m/s} - 60{,}5\ \text{m/s} = 4{,}0\ \text{m/s}$$

O intervalo de tempo é de $\Delta t = 3{,}0\ \text{s} - 1{,}0\ \text{s} = 2{,}0$ s.

b) A aceleração média durante esse intervalo de tempo é

$$a_{mx} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{4{,}0\ \text{m/s}}{2{,}0\ \text{s}} = 2{,}0\ \text{m/s}^2$$

Durante o intervalo de tempo de $t_1 = 1{,}0$ s a $t_2 = 3{,}0$ s, a velocidade e a aceleração média possuem o mesmo sinal (nesse caso, positivo) e o carro acelera.

c) Quando $\Delta t = 0{,}1$ s, $t_2 = 1{,}1$ s e nós encontramos:

$$v_{2x} = 60\ \text{m/s} + (0{,}50\ \text{m/s}^3)(1{,}1\ \text{s})^2 = 60{,}605\ \text{m/s}$$

$$\Delta v_x = 0{,}105\ \text{m/s}$$

$$a_{mx} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{0{,}105\ \text{m/s}}{0{,}1\ \text{s}} = 1{,}05\ \text{m/s}^2$$

Convidamos você a seguir o mesmo raciocínio e refazer os cálculos para os intervalos $\Delta t = 0{,}01$ s e $\Delta t = 0{,}001$ s; os resultados são $a_{mx} = 1{,}005\ \text{m/s}^2$ e $a_{mx} = 1{,}0005\ \text{m/s}^2$, respectivamente. À medida que Δt se torna cada vez menor, a aceleração média fica cada vez mais próxima do valor $1{,}0\ \text{m/s}^2$. Logo, concluímos que a aceleração instantânea para $t = 1{,}0$ s é igual a $1{,}0\ \text{m/s}^2$.

d) A aceleração instantânea é $a_x = dv_x/dt$, a derivada de uma constante é igual a zero e a derivada de t^2 é $2t$. Usando estes valores, obtemos:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}[60\ \text{m/s} + (0{,}50\ \text{m/s}^3)t^2]$$

$$= (0{,}50\ \text{m/s}^3)(2t) = (1{,}0\ \text{m/s}^3)t$$

Para $t = 1{,}0$ s,

$$a_x = (1{,}0\ \text{m/s}^3)(1{,}0\ \text{s}) = 1{,}0\ \text{m/s}^2$$

Para $t = 3{,}0$ s,

$$a_x = (1{,}0\ \text{m/s}^3)(3{,}0\ \text{s}) = 3{,}0\ \text{m/s}^2$$

AVALIAR: note que nenhuma dessas acelerações possui valor igual ao da aceleração média obtida no item b). Isso porque a aceleração instantânea desse carro varia com o tempo. A taxa de variação da aceleração com o tempo é às vezes denominada 'solavanco'.

Cálculo da aceleração usando um gráfico v_xt ou um gráfico xt

Na Seção 2.2 interpretamos a velocidade média e a velocidade instantânea de uma partícula em termos da inclinação em um gráfico de posição em função do tempo.

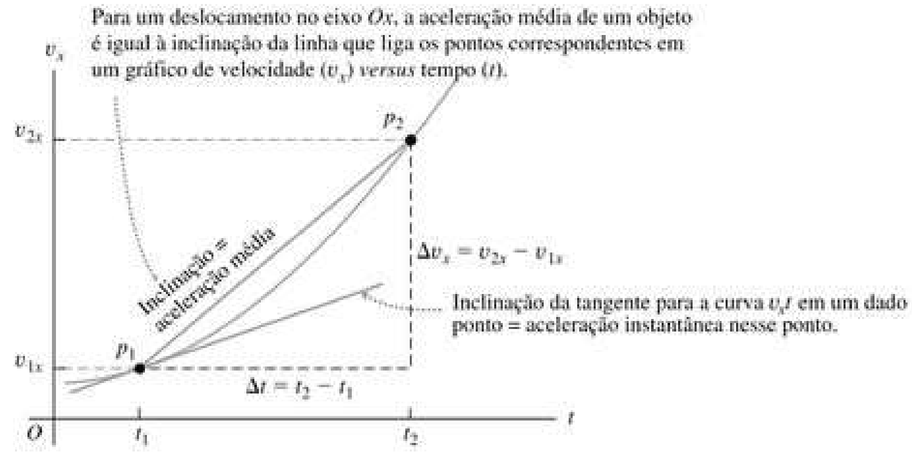


Figura 2.12 Gráfico $v_x t$ do movimento indicado na Figura 2.11.

Analogamente, podemos ter melhor noção dos conceitos de aceleração média e de aceleração instantânea usando um gráfico com a velocidade instantânea v_x no eixo vertical e o tempo t no eixo horizontal, ou seja, um **gráfico $v_x t$** (Figura 2.12). Os pontos nesse gráfico designados por p_1 e p_2 correspondem aos pontos P_1 e P_2 indicados na Figura 2.11. A aceleração média $a_{mx} = \Delta v_x / \Delta t$ durante esse intervalo é a inclinação da linha $p_1 p_2$. À medida que o ponto P_2 da Figura 2.11 se aproxima do ponto P_1, o ponto p_2 no gráfico $v_x t$ indicado na Figura 2.12 se aproxima do ponto p_1 e a inclinação da linha reta $p_1 p_2$ torna-se igual à inclinação da tangente da curva no ponto p_1. Portanto, *em um gráfico da velocidade em função do tempo, a aceleração instantânea em qualquer ponto é igual à inclinação da tangente da curva nesse ponto*. Na Figura 2.12, tangentes traçadas em diferentes pontos ao longo da curva possuem diferentes inclinações, de modo que a aceleração instantânea varia com o tempo.

ATENÇÃO Os sinais de aceleração e velocidade Note que o sinal algébrico da aceleração *não* é suficiente para informar a você se um corpo está em movimento acelerado ou retardado. Você deve comparar o sinal da velocidade com o sinal da aceleração. Quando v_x e a_x possuem o *mesmo* sinal, o movimento do corpo está sendo acelerado. Quando ambos forem positivos, o corpo estará se movendo no sentido positivo com uma velocidade crescente. Quando ambos forem negativos, o corpo estará se movendo no sentido negativo com uma velocidade que se torna cada vez mais negativa, e novamente a velocidade é crescente. Quando v_x e a_x possuem sinais *opostos*, o movimento do corpo é retardado. Quando v_x é positivo e a_x é negativo, o corpo se desloca no sentido positivo com velocidade decrescente; quando v_x é negativo e a_x é positivo, ele se desloca no sentido negativo com uma velocidade que se torna menos negativa, e novamente o movimento do corpo é retardado. A Figura 2.13 ilustra algumas dessas possibilidades.

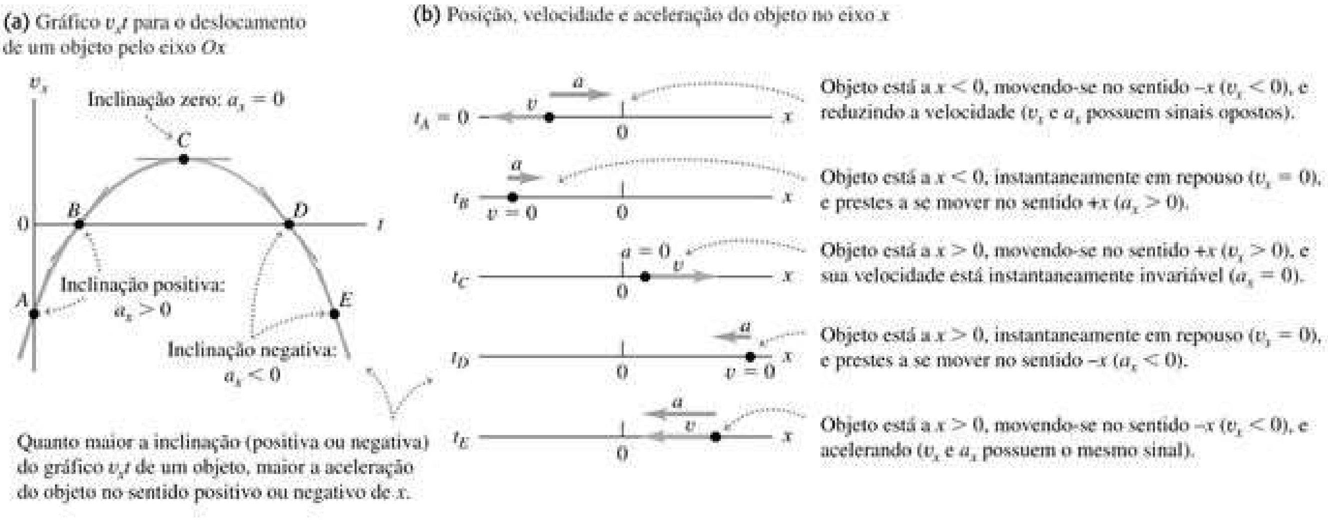


Figura 2.13 (a) Gráfico $v_x t$ do movimento de uma partícula diferente daquela mostrada na Figura 2.8. A inclinação da tangente em qualquer ponto é igual à aceleração do ponto considerado. (b) Diagrama do movimento mostrando a posição, a velocidade e a aceleração da partícula em cada um dos instantes indicados no gráfico $v_x t$. As posições estão de acordo com o gráfico $v_x t$; por exemplo, de t_A a t_B a velocidade é negativa, de modo que em t_B a partícula possui um valor de x mais negativo do que em t_A.

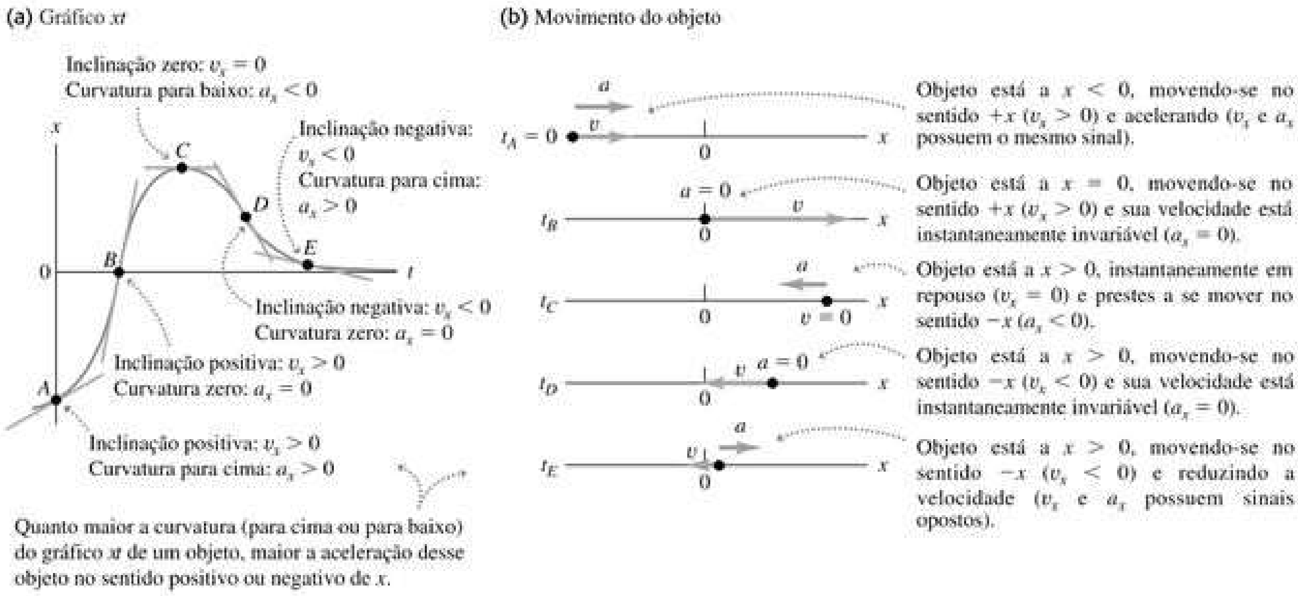


Figura 2.14 a) O mesmo gráfico *xt* indicado na Figura 2.8a. A velocidade é igual à inclinação do gráfico, e a aceleração é dada pela *concavidade* ou *curvatura* do gráfico. b) Diagrama do movimento mostrando a posição, a velocidade e a aceleração da partícula em cada um dos instantes indicados no gráfico *xt*.

O termo '*desaceleração*' é algumas vezes usado para designar diminuição de velocidade. Como isso pode corresponder a um valor de a_x positivo ou negativo, dependendo do sinal de v_x, evitamos esse termo.

Podemos também estudar a aceleração de uma partícula a partir do gráfico de sua *posição versus* tempo. Como $a_x = dv_x/dt$ e $v_x = dx/dt$, podemos escrever:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.6}$$

Ou seja, a_x é a derivada de segunda ordem de x em relação a t. A derivada de segunda ordem de qualquer função é relacionada com a *concavidade* ou *curvatura* do gráfico dessa função. Em um ponto no qual o gráfico *xt* seja côncavo para cima (encurvado para cima), a aceleração é positiva e v_x é crescente. Em um ponto no qual o gráfico *xt* seja côncavo para baixo (encurvado para baixo), a aceleração é negativa e v_x é decrescente. Em um ponto no qual o gráfico *xt* não possui nenhuma curvatura, como, por exemplo, em um ponto de inflexão, a aceleração é igual a zero e a velocidade é constante. Essas três possibilidades são indicadas na Figura 2.14.

Examinando a curvatura de um gráfico *xt* torna-se fácil determinar o *sinal* da aceleração. Essa técnica é menos útil para a determinação do módulo da aceleração, visto que a curvatura de um gráfico é difícil de ser determinada com exatidão.

Teste sua compreensão da Seção 2.3 Analise novamente o gráfico *xt* na Figura 2.9, ao final da Seção 2.2. a) Em quais dos pontos *P, Q, R* e *S* a aceleração a_x é positiva? b) Em quais dos pontos a aceleração é negativa? c) Em quais pontos a aceleração parece ser zero? d) Em cada ponto afirme se a velocidade está aumentando, diminuindo ou constante. ∎

2.4 Movimento com aceleração constante

O movimento acelerado mais simples é o movimento retilíneo com aceleração *constante*. Neste caso, a velocidade varia com a mesma taxa durante o movimento. É um caso especial, embora ocorra freqüentemente na natureza. Um corpo em queda livre possui uma aceleração constante quando os efeitos da resistência do ar são desprezados. O mesmo ocorre quando um corpo escorrega ao longo de um plano inclinado ou ao longo de uma superfície horizontal com atrito. Um movimento retilíneo com aceleração quase constante também ocorre em situações artificiais ou tecnológicas, como no caso do movimento de um caça a jato sendo lançado pela catapulta de um porta-aviões.

A Figura 2.15 é um diagrama do movimento que mostra a posição, a velocidade e a aceleração para uma partícula que se move com aceleração constante. Nas figuras 2.16 e 2.17 mostramos esse mesmo diagrama por meio de gráficos. Como a aceleração a é constante, o **gráfico *at*** (gráfico da aceleração *versus* o tempo) indicado na Figura 2.16 é uma linha horizontal. O gráfico da velocidade versus o tempo possui uma *inclinação* constante, e, portanto, o gráfico *vt* é uma linha reta (Figura 2.16). O gráfico da velocidade *versus* tempo, ou v_xt, tem *inclinação* constante porque a aceleração é constante, então seu gráfico é uma linha reta (Figura 2.17).

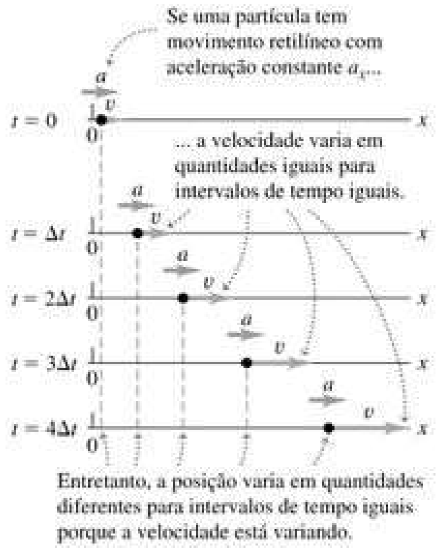


Figura 2.15 Diagrama do movimento para uma partícula que se move em linha reta na direção positiva de x com aceleração constante positiva a. A posição, a velocidade e a aceleração são indicadas em cinco intervalos de tempo iguais.

Quando a aceleração a_x é constante, a aceleração média a_{mx} para qualquer intervalo de tempo é a mesma que a_x. Assim é fácil deduzir equações para a posição x e para a velocidade v_x em função do tempo. Para encontrar uma expressão para v_x, primeiro substituímos a_{mx} na Equação (2.4) por a_x:

$$a_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} \tag{2.7}$$

Agora faça $t_1 = 0$ e suponha que t_2 seja um instante posterior arbitrário t. Usamos o símbolo v_{0x} para a velocidade no instante $t = 0$; a velocidade para qualquer instante t é v_x. Então, a Equação (2.7) torna-se:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} \quad \text{ou}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \tag{2.8}$$

(somente para aceleração constante)

Podemos interpretar essa equação do seguinte modo: a aceleração a_x é a taxa constante da variação da velocidade, isto é, a variação da velocidade por unidade de tempo. O termo $a_x t$ é o produto da variação da velocidade por unidade de tempo, a_x, multiplicada pelo tempo t. Portanto, indica a variação *total* da velocidade desde o instante inicial $t = 0$ até um instante posterior t. A velocidade v_x em qualquer instante t é igual à velocidade inicial v_{0x} (para $t = 0$) mais a variação da velocidade $a_x t$ (Figura 2.17).

Outra interpretação da Equação (2.8) é que a variação da velocidade $v_x - v_{0x}$ da partícula desde $t = 0$ até um instante posterior t é igual à *área* sob a curva entre esses limites em um gráfico $a_x t$. Na Figura 2.16, a área sob a curva no gráfico de aceleração *versus* o tempo é indicada pelo retângulo com altura a_x e comprimento t. A área desse

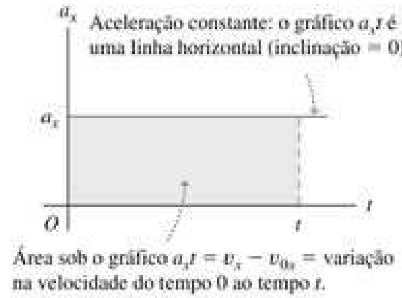


Figura 2.16 Gráfico da aceleração *versus* tempo (at) para uma partícula que se move em linha reta com aceleração constante positiva a_x.

retângulo é igual a $a_x t$, que pela Equação (2.8) é igual à variação da velocidade $v_x - v_{0x}$. Na Seção 2.6 verificamos que mesmo no caso em que a aceleração não seja constante, a variação da velocidade continua sendo dada pela área sob a curva em um gráfico $a_x t$, embora nesse caso a Equação (2.8) não seja válida.

A seguir queremos deduzir uma expressão para a posição x da partícula que se move com aceleração constante. Para isso usaremos duas diferentes expressões para a velocidade média v_{mx} da partícula desde $t = 0$ até um instante posterior t. A primeira expressão resulta da definição de v_{mx}, Equação (2.2), que permanece válida tanto no caso de aceleração constante quanto no caso de aceleração variável. Denominamos a posição no instante $t = 0$ de *posição inicial* e a representamos por x_0. Designamos simplesmente por x a posição em um instante posterior t. Para o intervalo de tempo $\Delta t = t - 0$ e para o deslocamento correspondente $\Delta x = x - x_0$, a Equação (2.2) fornece

$$v_{mx} = \frac{x - x_0}{t} \tag{2.9}$$

Podemos também deduzir uma segunda expressão para v_{mx} válida somente no caso de aceleração constante, de modo que o gráfico $v_x t$ seja uma linha reta (como na Figura 2.17) e a velocidade varie com uma taxa constante. Nesse caso, a velocidade média durante qualquer intervalo de tempo é simplesmente a média aritmética desde o início até o instante final. Para o intervalo de tempo de 0 a t,

$$v_{mx} = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \tag{2.10}$$

(somente para aceleração constante)

(Essa equação *não* vale quando a aceleração varia e o gráfico $v_x t$ é uma curva, como indica a Figura 2.13.) Sabemos também que no caso de aceleração constante, a velocidade v_x em qualquer instante t é dada pela Equação (2.8). Substituindo esta expressão por v_x na Equação (2.10), encontramos:

$$v_{mx} = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_{0x} + a_x t)$$
$$= v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t \tag{2.11}$$

(somente para aceleração constante)

Figura 2.17 Gráfico da velocidade *versus* tempo ($v_x t$) para uma partícula que se move em linha reta com aceleração constante positiva a_x. A velocidade inicial v_{0x} também é positiva neste caso.

Finalmente, igualando a Equação (2.9) com a Equação (2.11) e simplificando o resultado, obtemos:

$$v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t = \frac{x - x_0}{t} \qquad \text{ou}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{2.12}$$

(somente para aceleração constante).

Esta equação (2.12) mostra que, se para um instante inicial $t = 0$ a partícula está em uma posição x_0 e possui velocidade v_{0x}, sua nova posição em qualquer instante t é dada pela soma de três termos — a posição inicial x_0, mais a distância $v_{0x}t$ que ela percorreria caso a velocidade permanecesse constante, mais uma distância adicional $\frac{1}{2}a_x t^2$ produzida pela variação da velocidade.

Um gráfico da Equação (2.12), que é um gráfico xt para movimento com aceleração constante (Figura 2.18a), é sempre uma *parábola*. A Figura 2.18b mostra esse gráfico. A curva intercepta o eixo vertical (eixo Ox) em x_0, na posição $t = 0$. A inclinação da tangente em $t = 0$ é igual a v_{0x}, a velocidade inicial, e a inclinação da tangente para qualquer tempo t é igual à velocidade v_x em qualquer tempo. A inclinação e a velocidade são continuamente crescentes, de modo que a aceleração a_x é positiva; também se pode verificar isso porque o gráfico na Figura 2.18b é côncavo para cima (encurvado para cima). Se a_x é negativo, o gráfico xt é uma parábola que é côncava para baixo (encurvada para baixo).

Quando a aceleração é zero, o gráfico xt é uma linha reta; quando a aceleração é constante, o termo adicional $\frac{1}{2}a_x t^2$ na Equação (2.12) para x em função de t encurva o gráfico para formar uma parábola (Figura 2.19a). Podemos analisar o gráfico $v_x t$ da mesma forma. Quando a aceleração é zero, esse gráfico é uma linha horizontal (a velocidade é constante); acrescentando-se uma aceleração constante, temos uma inclinação para o gráfico $v_x t$ (Figura 2.19b).

Do mesmo modo que a velocidade é dada pela área sob um gráfico $a_x t$, o deslocamento — isto é, a variação da posição — é igual à área sob um gráfico $v_x t$. Ou seja, o deslocamento $x - x_0$ de uma partícula desde $t = 0$ até um instante posterior t é igual à área sob um gráfico $v_x t$ entre esses dois limites de tempo. Na Figura 2.17, a área sob o gráfico é composta pela soma da área do retângulo de lado vertical v_{0x} e lado horizontal t e com a área do triângulo retângulo com um lado vertical $a_x t$ e um lado horizontal t. A área do retângulo é $v_{0x}t$ e a área do triângulo é $\frac{1}{2}(a_x t)(t) = \frac{1}{2}a_x t^2$, de modo que a área total sob gráfico $v_x t$ é:

$$x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

de acordo com a Equação (2.12).

O deslocamento durante um dado intervalo de tempo pode ser sempre calculado pela área sob a curva $v_x t$. Isso é verdade mesmo quando a aceleração *não* é constante, embora para esses casos a Equação (2.12) não possa ser aplicada. (Isso será demonstrado na Seção 2.6.)

Podemos testar as equações (2.8) e (2.12) para verificar se elas estão coerentes com a hipótese da aceleração constante derivando a Equação (2.12). Encontramos

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} + a_x t$$

que é a Equação (2.8). Derivando mais uma vez, encontramos simplesmente

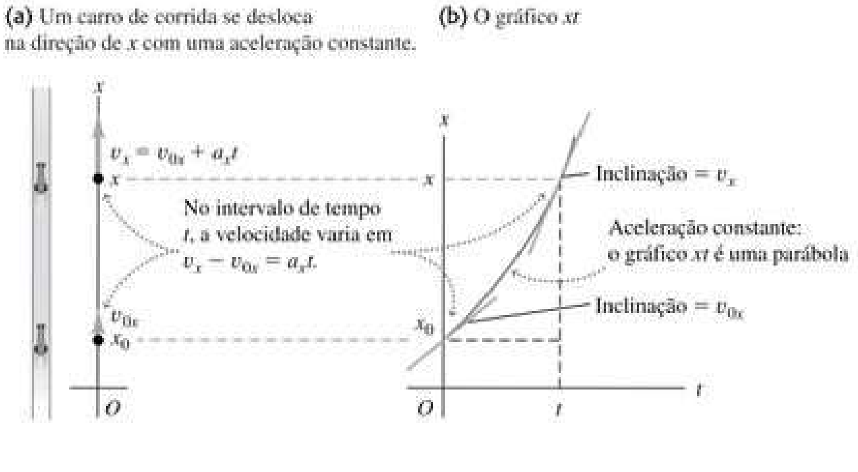
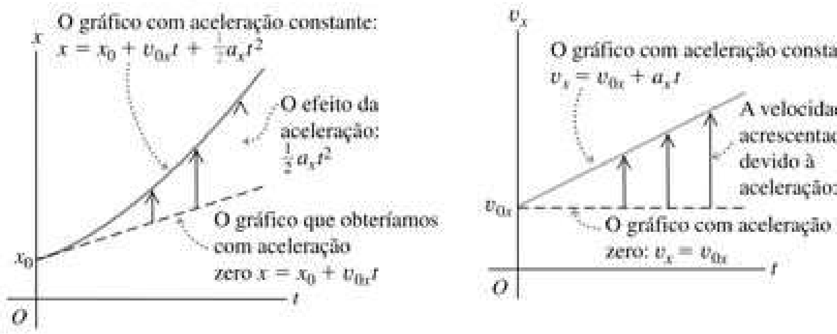


Figura 2.18 a) Movimento em linha reta com aceleração constante. b) Gráfico de posição *versus* tempo (xt) para esse movimento (o mesmo que o mostrado nas figuras 2.15, 2.16 e 2.17). Para esse movimento, a posição inicial x_0, a velocidade inicial v_{0x} e a aceleração a_x são todas positivas.

Figura 2.19 como uma aceleração constante afeta a) o gráfico xt e b) o gráfico $v_x t$ de um corpo.

(a) Um gráfico xt para um objeto que se move a uma aceleração constante positiva

(b) O gráfico $v_x t$ para o mesmo objeto



$$\frac{dv_x}{dt} = a_x$$

que concorda com a definição de aceleração instantânea.

Em muitos problemas, é conveniente usar uma equação que envolva a posição, a velocidade e a (constante) aceleração que não leve em conta o tempo. Para obtê-la, inicialmente explicitamos t na Equação (2.8); a seguir, a expressão obtida deve ser substituída na Equação (2.12) e simplificada:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

$$x = x_0 + v_{0x}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right) + \tfrac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2$$

Transferindo o termo x_0 para o membro esquerdo e multiplicando por $2a_x$:

$$2a_x(x - x_0) = 2v_{0x}v_x - 2v_{0x}^2 + v_x^2 - 2v_{0x}v_x + v_{0x}^2$$

Finalmente, ao simplificar obtemos

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \qquad (2.13)$$

(somente para aceleração constante).

Podemos obter uma outra equação útil igualando as duas expressões de v_{mx}, dadas pelas equações (2.9) e (2.10), e multiplicando os dois membros por t. Ao fazer isto, encontramos

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t \qquad (2.14)$$

(somente para aceleração constante).

Note que a Equação (2.14) não contém a aceleração a_x. Essa equação pode ser útil quando a_x possuir um valor constante, porém desconhecido.

As equações (2.8), (2.12), (2.13) e (2.14) são as *equações do movimento com aceleração constante*. Usando essas equações, podemos resolver *qualquer* problema que envolva o movimento retilíneo com aceleração constante.

Para o caso específico do movimento com aceleração constante esquematizado na Figura 2.15 e cujos gráficos são apresentados nas figuras 2.16, 2.17 e 2.18, os valores x_0, v_{0x} e a_x são todos positivos. Convidamos você a refazer essas figuras considerando um, dois ou três desses valores negativos.

Um caso especial de movimento com aceleração constante ocorre quando a aceleração é igual a *zero*. Nesse caso, a velocidade é constante e as equações do movimento tornam-se simplesmente

$$v_x = v_{0x} = \text{constante}$$
$$x = x_0 + v_x t$$

Estratégia para a solução de problemas 2.1

MOVIMENTO COM ACELERAÇÃO CONSTANTE

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: na maioria dos problemas de movimento retilíneo, você pode usar as equações de aceleração constante. Mas, eventualmente, você encontrará uma situação em que a aceleração *não é* constante. Nesse caso, necessitará de uma abordagem diferente (Seção 2.6).

PREPARAR *o problema* seguindo estes passos:

1. Primeiro você deve decidir a origem e a direção do eixo, assinalando qual é seu sentido positivo. Em geral, é mais simples colocar a partícula na origem para $t = 0$; então $x_0 = 0$. É sempre útil fazer um diagrama do movimento mostrando essas escolhas e algumas posições posteriores da partícula.
2. Lembre-se de que sua escolha do sentido positivo do eixo automaticamente determina o sentido positivo da velocidade e da aceleração. Se o eixo x for orientado para a direita da origem, então v_x e a_x também serão positivos quando tiverem esse sentido.
3. Reformule o problema em palavras e traduza essa descrição em símbolos e equações. *Quando* uma partícula atinge um dado ponto (ou seja, qual é o valor de t)? Onde está a partícula quando sua velocidade possui um valor específico (ou seja, qual é o valor de x quando o valor de v_x é especificado)? O exemplo 2.4 pergunta 'Onde está o motociclista quando sua velocidade é de 25 m/s?' Traduzindo em símbolos, a pergunta é 'Qual é o valor de x quando $v_x = 25$ m/s?'
4. Faça uma lista de grandezas tais como x, x_0, v_x, v_{0x}, a_x e t. Em geral, algumas delas serão conhecidas e outras desconhecidas. Escreva os valores das conhecidas e decida quais das

desconhecidas são incógnitas. Procure informações implícitas. Por exemplo, 'um carro pára em um semáforo' normalmente significa $v_{0x} = 0$.

EXECUTAR *a solução:* escolha uma dentre as equações (2.8), (2.12), (2.13) e (2.14) que contenha apenas uma das incógnitas. Usando somente símbolos, resolva a equação explicitando o valor da incógnita. Então substitua os valores conhecidos e calcule o valor da incógnita. Algumas vezes você terá de resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas.

AVALIAR *sua resposta:* faça uma análise rigorosa dos resultados para verificar se eles fazem sentido. Estão dentro dos limites de valores que você esperava?

Exemplo 2.4

CÁLCULOS ENVOLVENDO ACELERAÇÃO CONSTANTE Um motociclista se dirige para o leste ao longo de uma cidade do Estado de São Paulo e acelera a moto depois de passar pela placa que indica os limites da cidade (Figura 2.20). Sua aceleração é constante e igual a 4,0 m/s². No instante $t = 0$ ele está a 5,0 m a leste do sinal, movendo-se para leste a 15 m/s. a) Determine sua posição e velocidade para $t = 2{,}0$ s. b) Onde está o motociclista quando sua velocidade é de 25 m/s?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o enunciado do problema revela que a aceleração é constante, portanto podemos usar as equações de aceleração constante.

PREPARAR: escolhemos o sinal demarcador do limite da cidade como origem das coordenadas ($x = 0$) e orientamos o eixo $+Ox$ de oeste para leste (veja a Figura 2.20, que também funciona como um diagrama do movimento). No instante inicial $t = 0$, a posição inicial é $x_0 = 5{,}0$ m e a velocidade inicial é $v_{0x} = 15$ m/s. A aceleração constante é $a_x = 4{,}0$ m/s². As incógnitas na parte a) são a posição x e a velocidade v_x em um instante posterior $t = 2{,}0$ s; a incógnita na parte b) é o valor de x quando $v_x = 25$ m/s.

EXECUTAR: a) podemos determinar a posição x em $t = 2{,}0$ s usando a Equação (2.12), que fornece a posição x em função do tempo t:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ &= 5{,}0\ \text{m} + (15\ \text{m/s})(2{,}0\ \text{s}) + \frac{1}{2}(4{,}0\ \text{m/s}^2)(2{,}0\ \text{s})^2 \\ &= 43\ \text{m} \end{aligned}$$

Podemos achar a velocidade v_x no mesmo instante, usando a Equação (2.8), que fornece a velocidade v_x em função do tempo t:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ &= 15\ \text{m/s} + (4{,}0\ \text{m/s}^2)(2{,}0\ \text{s}) = 23\ \text{m/s} \end{aligned}$$

b) Queremos encontrar o valor de x para $v_x = 25$ m/s, mas não sabemos quando a motocicleta possui essa velocidade. Então usamos a Equação (2.13), que envolve x, v_x e a_x, mas não envolve t:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Explicitando x e substituindo os valores numéricos conhecidos, obtemos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} \\ &= 5{,}0\ \text{m} + \frac{(25\ \text{m/s})^2 - (15\ \text{m/s})^2}{2(4{,}0\ \text{m/s}^2)} \\ &= 55\ \text{m} \end{aligned}$$

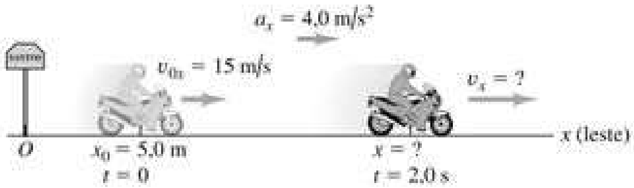


Figura 2.20 Motociclista deslocando-se com aceleração constante.

Como alternativa, podemos usar a Equação (2.8) para achar o tempo quando $v_x = 25$ m/s:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad \text{então}$$

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{25\ \text{m/s} - 15\ \text{m/s}}{4{,}0\ \text{m/s}^2} = 2{,}5\ \text{s}$$

Tendo obtido o tempo t, podemos encontrar x usando a Equação (2.12):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ &= 5{,}0\ \text{m} + (15\ \text{m/s})(2{,}5\ \text{s}) + \frac{1}{2}(4{,}0\ \text{m/s}^2)(2{,}5\ \text{s})^2 \\ &= 55\ \text{m} \end{aligned}$$

AVALIAR: esses resultados fazem sentido? De acordo com a solução da parte (a), o motociclista acelera de 15 m/s (cerca de 54 km/h) para 23 m/s (cerca de 83 km/h) em 2,0 s e percorre uma distância de 38 m. Trata-se de uma aceleração rápida, mas totalmente dentro da capacidade de uma motocicleta com alto desempenho.

Comparando nossos resultados na parte b) aos da parte a), podemos concluir que a motocicleta atinge uma velocidade $v_x = 25$ m/s em um instante posterior ao instante $t = 2{,}0$ s e após percorrer uma distância maior do que quando estava a $v_x = 23$ m/s. Esse resultado é plausível, já que a motocicleta possui aceleração positiva e, portanto, sua velocidade é crescente.

Exemplo 2.5

DOIS CORPOS COM ACELERAÇÕES DIFERENTES Um motorista dirige a uma velocidade constante de 15 m/s quando passa em frente a uma escola, onde a placa de limite de velocidade indica 10 m/s. Um policial que estava parado no local da placa acelera sua motocicleta e persegue o motorista com uma aceleração constante de 3,0 m/s² (Figura 2.21a). a) Qual o intervalo de tempo desde o início da perseguição até o momento em que o policial alcança o motorista? b) Qual é a velocidade do policial nesse instante? c) Que distância cada veículo percorreu até esse momento?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o policial e o motorista se movem com aceleração constante (que é igual a zero para o motorista), de modo que podemos usar as equações deduzidas anteriormente.

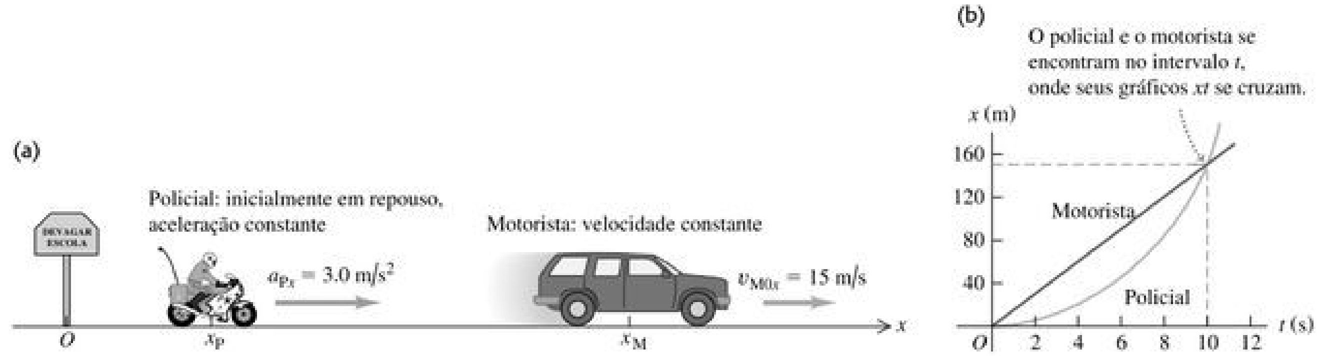


Figura 2.21 (a) Movimento com aceleração constante concomitante a um movimento com velocidade constante. (b) Gráfico de x em função de t para cada veículo.

PREPARAR: escolhemos o sentido positivo para a direita e a origem coincidindo com o sinal da escola, de modo que $x_0 = 0$ para ambos os veículos. Sejam x_P a posição do policial e x_M a posição do motorista em qualquer instante. As velocidades iniciais são $v_{M0x} = 15$ m/s para o motorista e $v_{P0x} = 0$ para o policial; as acelerações constantes são $a_{Mx} = 0$ para o motorista e $a_{Px} = 3{,}0$ m/s^2 para o policial. Nossa incógnita na parte (a) corresponde ao momento em que o policial alcança o motorista — ou seja, quando os dois veículos estão na mesma posição. Na parte (b) queremos calcular o módulo da velocidade v_{px} do policial no instante calculado em (a). Na parte (c) queremos calcular a posição de cada veículo nesse mesmo instante. Logo, usamos a Equação (2.12) (que relaciona a posição ao tempo) nas partes (a) e (c), e a Equação (2.8) (que relaciona a velocidade ao tempo) na parte (b).

EXECUTAR: a) Para calcular o tempo t no momento em que o motorista e o policial estão na mesma posição, aplicamos a Equação (2.12), $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$, para cada veículo:

$$x_M = 0 + v_{M0x}t + \frac{1}{2}(0)t^2 = v_{M0x}t$$
$$x_P = 0 + (0)t + \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

Como $x_M = x_P$ no instante t, igualamos as duas expressões anteriores e obtemos a seguinte solução para t:

$$v_{M0x}t = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$
$$t = 0 \qquad \text{ou} \qquad t = \frac{2v_{M0x}}{a_{Px}} = \frac{2(15 \text{ m/s})}{3{,}0 \text{ m/s}^2} = 10 \text{ s}$$

Existem *dois* instantes nos quais os dois veículos possuem o mesmo valor de x. O primeiro, $t = 0$, corresponde ao ponto em que o motorista passa pela placa onde o policial estava. O segundo, $t = 10$ s, corresponde ao momento em que o policial alcança o motorista.

b) Queremos o módulo da velocidade do policial v_{Px} no instante t encontrado na parte a). Sua velocidade em qualquer instante é dada pela Equação (2.8):

$$v_{Px} = v_{P0x} + a_{Px}t = 0 + (3{,}0 \text{ m/s}^2)t$$

Logo, quando $t = 10$ s, achamos $v_{Px} = 30$ m/s. No momento em que o policial alcança o motorista, sua velocidade é o dobro da do motorista.

c) Em 10 s, a distância percorrida pelo motorista é

$$x_M = v_{M0x}t = (15 \text{ m/s})(10 \text{ s}) = 150 \text{ m}$$

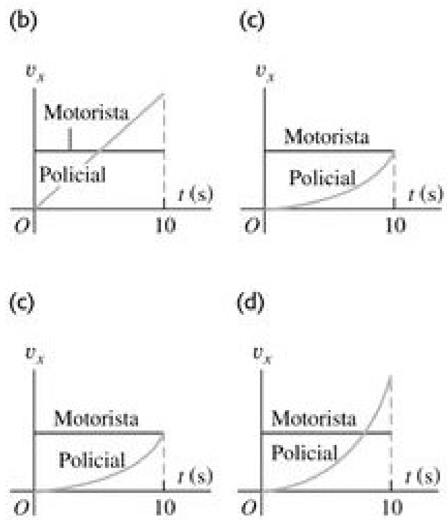
e a distância percorrida pelo policial é

$$x_P = \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}(3{,}0 \text{ m/s}^2)(10 \text{ s})^2 = 150 \text{ m}$$

Isso confirma que, no momento em que o policial alcança o motorista, eles percorreram distâncias iguais.

AVALIAR: a Figura 2.21b mostra gráficos de x *versus* t para ambos os veículos. Vemos novamente que existem dois instantes em que os veículos possuem a mesma coordenada (onde as curvas se cruzam). Em nenhum desses pontos eles possuem a mesma velocidade (ou seja, nos pontos onde as curvas se cruzam, elas possuem inclinações diferentes). Para $t = 0$, o policial está em repouso; para $t = 10$ s, a sua velocidade é o dobro da velocidade do motorista.

Teste sua compreensão da Seção 2.4 O Exemplo 2.5 mostra quatro gráficos $v_x t$ para dois veículos. Qual gráfico está correto?



2.5 Queda livre de corpos

O exemplo mais familiar de um movimento com aceleração (aproximadamente) constante é a queda livre de um corpo atraído pela força gravitacional da Terra. Tal movimento despertou a atenção de filósofos e cientistas desde tempos remotos. No século IV a.C., Aristóteles pensou (erroneamente) que objetos mais pesados caíam mais rapidamente do que objetos leves, com velocidades proporcionais aos respectivos pesos. Dezenove séculos mais tarde, Galileu (veja a Seção 1.1) afirmou que um corpo deveria cair com aceleração constante independentemente do seu peso.

Experiências demonstram que, quando os efeitos do ar podem ser desprezados, Galileu está correto; todos os corpos em um dado local caem com a mesma aceleração, independentemente das suas formas e dos seus respectivos pesos. Além disso, quando a distância da queda livre é pequena em comparação com o raio da Terra, e ignoramos os pequenos efeitos exercidos pela rotação da Terra, a aceleração é constante. O movimento ideal resultante de todos esses pressupostos denomina-se **queda livre**, embora ele inclua também a ascensão de um corpo. (No Capítulo 3 estenderemos a discussão da queda livre para incluir o movimento de projéteis, que possuem componentes do movimento na horizontal e na vertical.)

A Figura 2.22 é uma fotografia de múltipla exposição da queda livre de uma bola feita com auxílio de um estroboscópio luminoso que produz uma série de *flashes* com intervalos de tempo iguais. Para cada *flash* disparado, a imagem da bola fica gravada no filme neste instante. Como o intervalo entre dois *flashes* consecutivos é sempre o mesmo, a velocidade média da bola é proporcional à distância das imagens da bola correspondentes a dois *flashes* consecutivos. A distância crescente entre duas imagens consecutivas mostra que a velocidade está aumentando e que a bola acelera para baixo. Medidas cuidadosas mostram que a variação da velocidade é sempre a mesma entre os intervalos, de modo que a aceleração de uma bola em queda livre é constante.

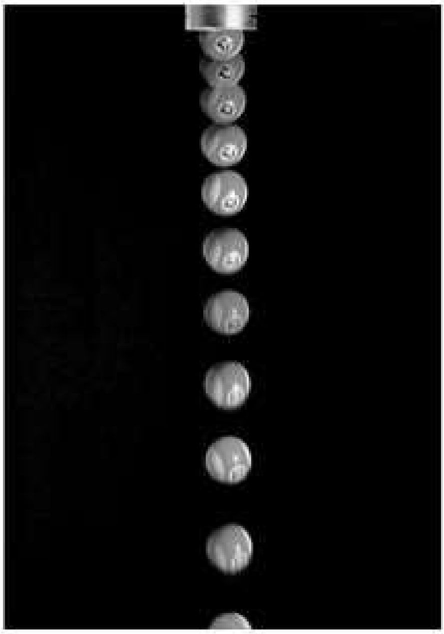


Figura 2.22 Fotografia de múltipla *exposição* de uma bola em queda livre.

A aceleração constante de um corpo em queda livre denomina-se **aceleração da gravidade**, e seu módulo é designado por g. Sempre usaremos o valor aproximado de g na superfície terrestre ou próximo a ela:

$$g = 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ cm/s}^2$$
(valor aproximado próximo à superfície terrestre)

O valor exato varia de um local para outro, de modo que normalmente fornecemos o valor de g na superfície terrestre com somente dois algarismos significativos. Como g é o módulo de uma grandeza vetorial, ele é sempre um número *positivo*. Na superfície da Lua, como a atração gravitacional é da Lua e não da Terra, $g = 1{,}6 \text{ m/s}^2$. Próximo à superfície do Sol, $g = 270 \text{ m/s}^2$.

Nos exemplos seguintes usaremos as equações do movimento com aceleração constante da Seção 2.4. Sugerimos que, antes de resolver esses exemplos, você leia novamente a Estratégia para a solução de problemas 2.1 dessa seção.

Exemplo 2.6

UMA MOEDA EM QUEDA LIVRE Uma moeda de 1 euro é largada da Torre de Pisa. Ela parte do repouso e se move em queda livre. Calcule sua posição e sua velocidade nos instantes 1,0 s, 2,0 s e 3,0 s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: 'queda livre' significa 'possuir uma aceleração constante devido à gravidade', portanto podemos usar as equações de aceleração constante para determinar nossas incógnitas.

PREPARAR: o lado direito da Figura 2.23 demonstra nosso diagrama do movimento para a moeda. Como o eixo é vertical, vamos chamá-lo de y em vez de x. Todos os valores de x das equações serão substituídos por y. Consideramos a origem O como o ponto inicial e escolhemos um eixo vertical orientado com sentido positivo de baixo para cima. A coordenada inicial y_0 e a velocidade inicial v_{0y} são iguais a zero. A aceleração está orientada para baixo (no sentido negativo do eixo Oy), de modo que $a_y = -g = -9{,}8 \text{ m/s}^2$. (Lembre-se de que, por definição, g é *sempre* positivo.) As incógnitas são y e v_y nos três instantes especificados. Para determiná-las, usamos as equações (2.8) e (2.12), substituindo-se x por y.

EXECUTAR: em um instante t após a moeda ser largada, sua posição e velocidade são:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}(-g)t^2 = (-4{,}9 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (-g)t = (-9{,}8 \text{ m/s}^2)t$$

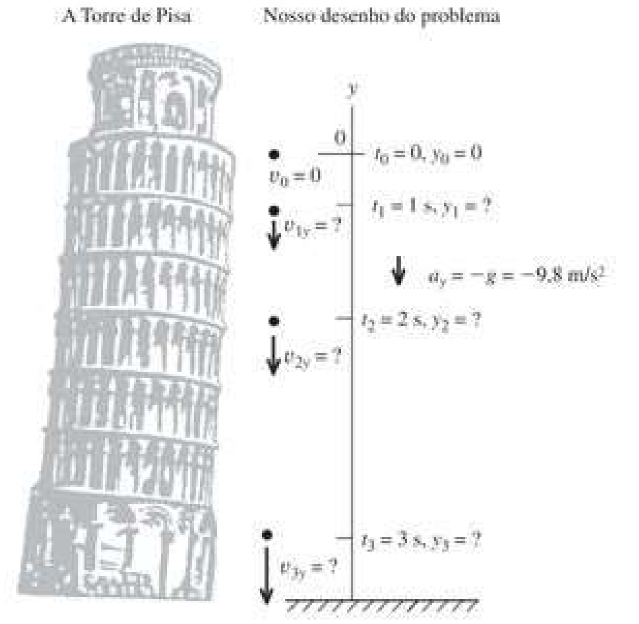


Figura 2.23 Uma moeda em queda livre a partir do repouso.

Quando t = 1,0 s, $y = (-4{,}9$ m/s$^2)(1{,}0$ s$)^2 = -4{,}9$ m e $v_y = (-9{,}8$ m/s$^2)$ (1,0 s) $= -9{,}8$ m/s; depois de 1 s, a moeda está a 4,9 m abaixo da origem (y é negativo) e possui uma velocidade orientada para baixo (v_y é negativa) com módulo igual a 9,8 m/s.

A posição e a velocidade nos instantes 2,0 s e 3,0 s são encontradas da mesma forma. Você poderia demonstrar que $y = -19{,}6$ m e $v_y = -19{,}6$ m/s em t = 2,0 s, e que $y = -44{,}1$ m e $v_y = -29{,}4$ m/s em t = 3,0 s?

AVALIAR: todas as respostas para v_y são negativas porque optamos por direcionar para cima o eixo Oy positivo. Mas poderíamos também ter escolhido a direção para baixo. Nesse caso, a aceleração teria sido $a_y = +g$ e todas as respostas para v_y seriam positivas. Qualquer escolha do eixo serve; apenas se certifique de explicitar sua escolha na solução e confirmar que a aceleração possui o sinal correto.

Exemplo 2.7

MOVIMENTO PARA CIMA E PARA BAIXO EM QUEDA LIVRE Você arremessa uma bola de baixo para cima do topo de um edifício alto. A bola deixa sua mão com velocidade de 15 m/s em um ponto que coincide com a extremidade superior do parapeito do edifício; a seguir ela passa a se mover em queda livre. Quando a bola volta, ela passa raspando pelo parapeito e continua a queda. No local do edifício, g = 9,8 m/s^2. Calcule a) a posição e a velocidade da bola 1,0 s e 4,0 s depois que ela deixa sua mão; b) a velocidade quando a bola está a 5,0 m acima do parapeito; c) a altura máxima atingida e o tempo que ela leva para atingir essa altura; e d) a aceleração da bola quando ela se encontra na altura máxima.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as palavras 'queda livre' no enunciado do problema significam que a aceleração é constante e se deve à gravidade. Nossas incógnitas são posição [nas partes a) e c)], velocidade [nas partes a) e b)] e aceleração [na parte d)].

PREPARAR: na Figura 2.24 (que também é um diagrama de movimento para a bola), a trajetória para baixo está ligeiramente deslocada para a direita para maior clareza. Tome a origem na extremidade superior do parapeito, no ponto onde a bola deixa sua mão e considere o sentido positivo como sendo de baixo para cima. A posição inicial y_0 é igual a zero, a velocidade inicial é $v_{0y} = +15{,}0$ m/s e a aceleração é $a_y = -g = -9{,}8$ m/s^2. Usaremos novamente as equações (2.12) e (2.8) para achar a posição e a velocidade em função do tempo. Na parte b), necessitamos encontrar a velocidade em uma certa *posição* em vez de um certo *instante*, por isso nessa parte usaremos a Equação (2.13).

EXECUTAR: a) A posição y e a velocidade v_y em qualquer instante t depois de a bola deixar sua mão são dadas pelas equações (2.8) e (2.12), substituindo-se x por y, portanto:

$$y = y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$
$$= (0) + (15{,}0\ \text{m/s})t + \frac{1}{2}(-9{,}80\ \text{m/s}^2)t^2$$
$$v_y = v_{0y} + a_yt = v_{0y} + (-g)t$$
$$= 15{,}0\ \text{m/s} + (-9{,}80\ \text{m/s}^2)t$$

Quando t = 1,0 s, essas equações fornecem

$$y = +10{,}1\ \text{m} \qquad v_y = +5{,}2\ \text{m/s}$$

A bola está a 10,1 m acima da origem (y é positivo) e se move de baixo para cima (v_y é positiva) com um módulo igual a 5,2 m/s. Esse valor é menor do que a velocidade inicial, já que a bola perde velocidade conforme ascende.

Quando t = 4,0 s, as equações para y e v_y em função de t fornecem

$$y = -18{,}4\ \text{m} \qquad v_y = -24{,}2\ \text{m/s}$$

A bola já passou pela altura máxima e está 18,4 m *abaixo* da origem (y é negativo). Ela possui uma velocidade *orientada de cima para baixo* (v_y é negativa), cujo módulo é igual a 24,2 m/s. A bola perde velocidade enquanto sobe e depois ganha velocidade enquanto desce; ela se move na velocidade inicial de 15,0 m/s enquanto se move de cima para baixo, passando pelo ponto de lançamento (a origem), e continua a ganhar velocidade enquanto desce abaixo desse ponto.

b) A velocidade v_y em qualquer posição y é dada pela Equação (2.13), substituindo-se x por y, portanto:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 + 2(-g)(y - 0)$$
$$= (15{,}0\ \text{m/s})^2 + 2(-9{,}80\ \text{m/s}^2)y$$

Quando a bola está 5,0 m acima da origem, y = + 5,0 m, logo

$$v_y^2 = (15{,}0\ \text{m/s})^2 + 2(-9{,}80\ \text{m/s}^2)(5{,}0\ \text{m}) = 127\ \text{m}^2/\text{s}^2$$
$$v_y = \pm 11{,}3\ \text{m/s}$$

Obtivemos *dois* valores de v_y, um positivo e outro negativo porque a bola passa duas vezes pelo ponto $y = +5{,}0$ m (Figura 2.24), uma vez durante a ascensão, quando v_y é positivo, e a outra durante a queda, quando v_y é negativo.

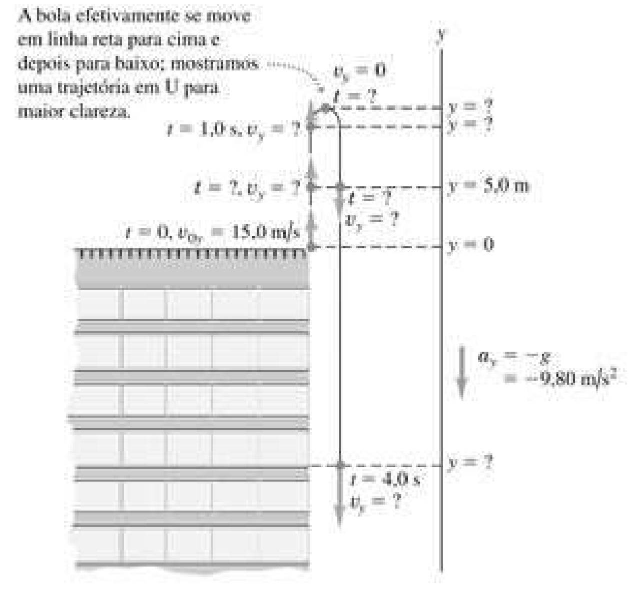


Figura 2.24 Posição e velocidade de uma bola lançada verticalmente de baixo para cima.

c) No exato instante em que ela atinge seu ponto mais elevado, $v_y = 0$. A altura máxima y_1 pode então ser calculada de dois modos. O primeiro modo consiste em usar a Equação (2.13) e substituir os valores $v_y = 0$, $y_0 = 0$ e $a_y = -g$:

$$0 = v_{0y}^2 + 2(-g)(y_1 - 0)$$

$$y_1 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(15{,}0\ \text{m/s})^2}{2(9{,}80\ \text{m/s}^2)} = +11{,}5\ \text{m}$$

O segundo modo consiste em achar o tempo para o qual $v_y = 0$ usando a Equação (2.8), $v_y = v_{0y} + a_y t$ e, a seguir, substituir esse valor de t na Equação (2.12) para obter a posição nesse instante. Pela Equação (2.8), o tempo t_1 para a bola atingir seu ponto mais elevado é dado por:

$$v_y = 0 = v_{0y} + (-g)t_1$$

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{15{,}0\ \text{m/s}}{9{,}80\ \text{m/s}^2} = 1{,}53\ \text{s}$$

Substituindo esse valor de t na Equação (2.12), encontramos

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = (0) + (15\ \text{m/s})(1{,}53\ \text{s})$$
$$+ \frac{1}{2}(-9{,}8\ \text{m/s}^2)(1{,}53\ \text{s})^2 = +11{,}5\ \text{m}$$

Note que pelo primeiro método da determinação da altura máxima não é necessário calcular o tempo antes.

ATENÇÃO Um erro conceitual de queda livre É um erro comum supor que no ponto da altura máxima a velocidade seja zero *e* a aceleração também seja zero. Caso isso fosse verdade, a bola ficaria suspensa nesse ponto para sempre! Para entender a razão, lembre-se de que a aceleração é a variação da velocidade. Caso a aceleração fosse nula no ponto mais elevado, a velocidade da bola não poderia variar e, uma vez que ela entrasse em repouso instantâneo, deveria permanecer em repouso eternamente.

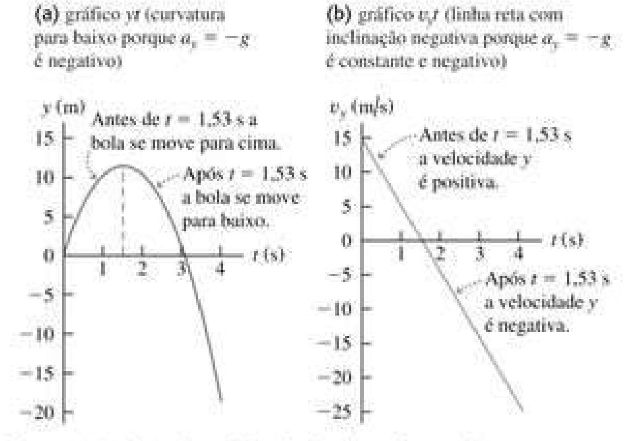


Figura 2.25 a) Posição e b) velocidade em função do tempo para uma bola lançada verticalmente de baixo para cima com velocidade inicial de 15 m/s.

No ponto mais elevado, a aceleração continua sendo $a_y = -g = -9{,}80$ m/s², o mesmo valor tanto na ascensão quanto na queda da bola. No ponto mais elevado, a bola pára instantaneamente, mas sua velocidade varia continuamente mudando valores positivos para zero e depois passando para valores negativos.

AVALIAR: uma forma útil de conferir qualquer problema de movimento é desenhar dois gráficos de posição e velocidade em função do tempo, como mostra a Figura 2.25. Como a aceleração é constante e negativa, o gráfico yt é uma parábola com curvatura orientada para baixo e o gráfico v_{yt} é uma linha reta com inclinação negativa.

Exemplo 2.8

DUAS SOLUÇÕES OU UMA? Calcule o instante para o qual a bola do Exemplo 2.7 está a 5,0 m abaixo do parapeito do edifício.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: novamente este é um problema de aceleração constante. A incógnita é o instante em que a bola está em uma determinada posição.

PREPARAR: escolhemos novamente o eixo Oy como na Figura 2.24, de modo que y_0, v_{0y} e $a_y = -g$ possuam os mesmos valores do Exemplo 2.7. A posição y em função do tempo t é novamente dada pela Equação (2.12):

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

Desejamos resolver essa equação calculando t quando $y = -5{,}0$ m. Visto que essa equação envolve t^2, é uma equação do *segundo grau* em t.

EXECUTAR: inicialmente reagrupamos os termos desta equação para ficar na forma padronizada de uma equação do segundo grau x, $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$$\left(\frac{1}{2}g\right)t^2 + (-v_{0y})t + (y - y_0) = At^2 + Bt + C = 0$$

logo, $A = g/2$, $B = -v_{0y}$ e $C = y - y_0$. Usando a fórmula da solução de uma equação do segundo grau (Apêndice B), verificamos que esta equação possui *duas* soluções:

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$$= \frac{-(-v_{0y}) \pm \sqrt{(-v_{0y})^2 - 4(g/2)(y - y_0)}}{2(g/2)}$$
$$= \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)}}{g}$$

Substituindo os valores $y_0 = 0$, $v_{0y} = +15{,}0$ m/s, $g = 9{,}80$ m/s^2 e $y = -5{,}0$ m, encontramos:

$$t = \frac{(15{,}0 \text{ m/s}) \pm \sqrt{(15{,}0 \text{ m/s})^2 - 2(9{,}80 \text{ m/s}^2)(-5{,}00 \text{ m} - 0)}}{9{,}80 \text{ m/s}^2}$$
$$t = +3{,}36 \text{ s} \qquad \text{ou} \qquad t = -0{,}30 \text{ s}$$

Para decidir qual dessas soluções é a correta, a pergunta crucial que devemos fazer é 'Estas soluções são razoáveis?' A segunda solução, $t = -0{,}30$ s não é aceitável; ela se refere a um tempo *anterior* ao lançamento da bola! A resposta correta é $t = +3{,}36$ s. A bola está a 5,0 m abaixo do parapeito, 3,36 s *depois* de ela ter sido lançada.

AVALIAR: de onde surgiu a 'solução' errada $t = -0{,}30$ s? Lembre-se de que a equação $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$ é fundamentada no princípio de que a aceleração é constante para *todos* os valores de t, sejam eles positivos, negativos ou nulos. Interpretando-a literalmente, essa equação nos mostra que a bola estaria se movendo para cima em queda livre desde tempos remotos; ela eventualmente passaria pela sua mão em $y = 0$, no instante especial que optamos por denominar $t = 0$ e depois continuaria em queda livre. Contudo, qualquer coisa que essa equação possa descrever antes de $t = 0$ é pura ficção, visto que a bola só começou a queda livre depois que ela saiu da sua mão no instante $t = 0$; a 'solução' $t = -0{,}30$ s é uma parte dessa ficção.

Convidamos você a repetir esses cálculos para achar os tempos para os quais a bola está a 5,0 m *acima* da origem ($y = +5{,}0$ m). As duas respostas são $t = +0{,}38$ s e $t = +2{,}68$ s; esses valores correspondem a valores positivos de t e ambos referem-se ao movimento real da bola depois que você a arremessou. O tempo menor corresponde ao instante em que ela passa pelo ponto $y = +5{,}0$ m no movimento de ascensão, e o tempo maior, ao instante em que ela passa por esse ponto durante a queda. [Compare esse resultado com a solução da parte b) do Exemplo 2.7.]

Você também deve obter as soluções para os tempos correspondentes a $y = +15{,}0$ m. Nesse caso, as duas soluções envolvem a raiz quadrada de um número negativo, de modo que *não* existe nenhuma solução real. Isso tem sentido; achamos na parte c) do Exemplo 2.7 que a altura máxima atingida é somente $y = +11{,}5$ m, de modo que a bola jamais poderia atingir uma altura $y = +15{,}0$ m. Embora uma equação do segundo grau, como a Equação (2.12), sempre possua duas soluções, em algumas situações uma delas ou as duas podem deixar de ser fisicamente possíveis.

Teste sua compreensão da Seção 2.5 Se você arremessa uma bola de baixo para cima com certa velocidade inicial, ela cai livremente e atinge uma altura máxima h em um instante t, após deixar sua mão. a) Se você jogar a bola para cima com o dobro da velocidade inicial, que nova altura máxima e bola atingirá? i) $h\sqrt{2}$; ii) $2h$; iii) $4h$; iv) $8h$; v) $16h$. b) Se você jogar a bola para cima com o dobro da velocidade inicial, quanto tempo levará para ela atingir a sua nova altura máxima? i) $t/2$; ii) $t/\sqrt{2}$; iii) t; iv) $t\sqrt{2}$; v) $2t$. ∎

2.6 *Velocidade e posição por integração

Esta seção opcional destina-se a estudantes que já tenham aprendido um pouco de cálculo integral. Na Seção 2.4 analisamos o caso especial do movimento retilíneo com aceleração constante. Quando a_x não é constante, como ocorre freqüentemente, as equações que foram deduzidas nessa seção não são mais válidas (Figura 2.26). Contudo, mesmo quando a_x varia com o tempo, ainda podemos usar a relação $v_x = dx/dt$ para achar a velocidade v_x em função do tempo quando a posição x da partícula for conhecida em função do tempo. E ainda podemos usar a relação $a_x = dv_x/dt$ para achar a aceleração a_x em função do tempo quando a velocidade v_x for conhecida em função do tempo.

Entretanto, em muitas situações, embora sabendo a aceleração em função do tempo, não conhecemos nem a posição nem a velocidade em função do tempo. Como determinar a posição e a velocidade a partir da aceleração em função do tempo $a_x(t)$? Esse problema pode ser ilustrado pela viagem de uma aeronave entre os Estados Unidos e a Europa (Figura 2.27). A tripulação da aeronave deve conhecer sua posição com precisão em todos os instantes, mas, sobre o oceano, em geral uma aeronave fica fora do alcance dos radiofaróis de terra ou do radar das torres de controle de tráfego aéreo. Para determinar a posição da aeronave, os pilotos usam um instrumento conhecido pela sigla INS (*inertial navigation system* = sistema de navegação inercial), que mede a aceleração da aeronave. A forma como isso é feito se parece muito com o modo pelo qual você sente as mudanças de aceleração de um automóvel quando viaja nele, mesmo estando de olhos fechados. (No Capítulo 4 discutiremos como seu corpo pode detectar a aceleração.) Conhecendo essa informação, juntamente com a posição inicial da aeronave (digamos, um dado portão no Aeroporto Internacional de Miami), o INS calcula e

Figura 2.26 Quando você pisa até o fundo no pedal do acelerador do seu carro, a aceleração resultante *não* é constante: quanto maior a velocidade do carro, mais lentamente ele ganha velocidade adicional. Para um carro comum, o tempo para acelerar de 50 km/h a 100 km/h é igual ao dobro do tempo necessário para acelerar de 0 a 50 km/h.

Figura 2.27 A posição e a velocidade de uma aeronave atravessando o Atlântico são obtidas integrando-se sua aceleração em relação ao tempo.

indica no mostrador para a tripulação a velocidade e a posição da aeronave em cada instante durante o vôo. (As aeronaves também usam o GPS — *Global Positioning System* — para navegação, de forma complementar ao INS e não em substituição a ele.) Nosso objetivo no restante desta seção é verificar como esses cálculos são feitos para o simples caso de um movimento retilíneo com uma aceleração que varia com o tempo.

Inicialmente apresentaremos um método gráfico. A Figura 2.28 mostra um gráfico de aceleração *versus* tempo para um corpo cuja aceleração não é constante. Podemos dividir o intervalo de tempo entre t_1 e t_2 em intervalos muito menores e designar por Δt cada um deles. Seja a_{mx} a aceleração média durante Δt. Pela Equação (2.4), a variação da velocidade Δv_x durante Δt é dada por

$$\Delta v_x = a_{mx}\,\Delta t$$

Graficamente, Δv_x é a área sombreada do retângulo que possui altura a_{mx} e largura Δt, ou seja, a área sob a curva entre a extremidade esquerda e a extremidade direita de Δt. A variação total da velocidade em qualquer intervalo de tempo (digamos, de t_1 a t_2) é a soma das variações de Δv_x de todos os pequenos intervalos. Logo, a variação total da velocidade é dada graficamente pela área *total* sob a curva a_xt delimitada entre t_1 até t_2. (Na Seção 2.4 mostramos que isso é verdade para o caso específico do movimento com aceleração constante.)

No limite em que todos os intervalos Δt tornam-se muito pequenos e muito numerosos, o valor de a_{mx} para o intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$ se aproxima da aceleração a_x no tempo t. Nesse limite, a área sob a curva a_xt é dada pela *integral* de a_x (que geralmente é função de t) de t_1 a t_2. Se v_{1x} for a velocidade do corpo no tempo t_1 e v_{2x} for a velocidade no tempo t_2, então

$$v_{2x} - v_{1x} = \int_{v_{1x}}^{v_{2x}} dv_x = \int_{t_1}^{t_2} a_x\,dt \qquad (2.15)$$

A variação da velocidade v_x é obtida pela integrada da aceleração a_x em relação ao tempo.

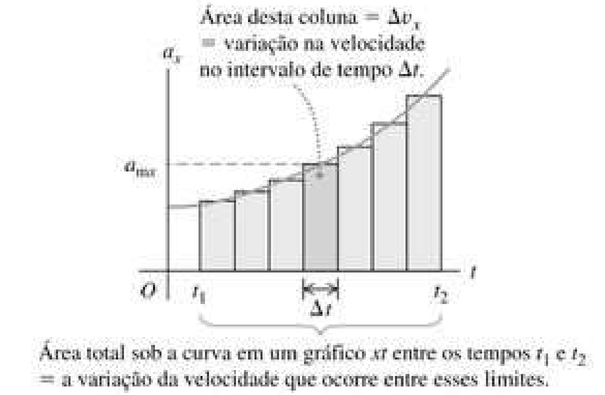


Figura 2.28 Um gráfico a_{xt} para um corpo cuja aceleração t não é constante.

Podemos fazer exatamente o mesmo procedimento com a curva da velocidade *versus* tempo, onde v é uma função arbitrária de t. Se x_1 for a posição do corpo no tempo t_1 e x_2 for a posição no tempo t_2, pela Equação (2.2) o deslocamento Δx durante um pequeno intervalo de tempo Δt será igual a $v_{mx}\,\Delta t$, onde v_{mx} é a velocidade média durante Δt. O deslocamento total $x_2 - x_1$ durante o intervalo $t_2 - t_1$ é dado por:

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt \qquad (2.16)$$

A variação da posição x — isto é, o deslocamento — é dada pela integral da velocidade v_x em relação ao tempo. Graficamente, o deslocamento durante o intervalo t_1 e t_2 é dado pela área sob a curva v_xt entre esses dois limites. [Este resultado é semelhante ao obtido na Seção 2.4 para o caso específico no qual v_x era dada pela Equação (2.8).]

Quando $t_1 = 0$ e t_2 for t em algum instante posterior, e quando x_0 e v_{0x} corresponderem, respectivamente, à posição e à velocidade, para $t = 0$, então podemos reescrever as equações (2.15) e (2.16) do seguinte modo:

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\,dt \qquad (2.17)$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,dt \qquad (2.18)$$

Aqui, x e v_x são, respectivamente, a posição e a velocidade para um tempo t. Conhecendo a aceleração a_x em função do tempo e a velocidade inicial v_{0x}, podemos usar a Equação (2.17) para achar a velocidade v_x em qualquer tempo; em outras palavras, podemos achar v_x em função do tempo. Conhecendo essa função e sabendo a posição inicial x_0, podemos usar a Equação (2.18) para achar a posição x em qualquer tempo.

Exemplo 2.9

MOVIMENTO COM ACELERAÇÃO VARIÁVEL Sueli está dirigindo um carro em um trecho retilíneo de uma estrada. No tempo $t = 0$, quando está se movendo a 10 m/s no sentido positivo do eixo Ox, ela passa por um poste de sinalização a uma distância $x = 50$ m. Sua aceleração em função do tempo é dada por:

$$a_x = 2{,}0\ \text{m/s}^2 - (0{,}10\ \text{m/s}^3)t$$

a) Deduza uma expressão para a posição e a velocidade em função do tempo. b) Qual é o instante em que sua velocidade atinge o valor máximo? c) Qual é a velocidade máxima? d) Onde está o carro quando a velocidade atinge seu valor máximo?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a aceleração é uma função do tempo, por isso não podemos usar as fórmulas de aceleração constante da Seção 2.4.

PREPARAR: usamos as equações (2.17) e (2.18) para determinar a velocidade e a posição em função do tempo. Quando obtivermos essas funções, poderemos responder a uma variedade de perguntas sobre o movimento.

EXECUTAR: a) No tempo $t = 0$, a posição de Sueli é $x_0 = 50$ m e sua velocidade é $v_{0x} = 10$ m/s. Como é dada a aceleração a_x em função do tempo, inicialmente usamos a Equação (2.17) para achar a velocidade v_x em função do tempo t. A integral de t^n é $\int t^n\,dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1}$, considerando $n \neq -1$, de modo que

$$v_x = 10\ \text{m/s} + \int_0^t [2{,}0\ \text{m/s}^2 - (0{,}10\ \text{m/s}^3)t]\,dt$$
$$= 10\ \text{m/s} + (2{,}0\ \text{m/s}^2)t - \frac{1}{2}(0{,}10\ \text{m/s}^3)t^2$$

A seguir, usamos a Equação (2.18) para achar x em função do tempo t:

$$x = 50\ \text{m} + \int_0^t \left[10\ \text{m/s} + (2{,}0\ \text{m/s}^2)t - \frac{1}{2}(0{,}10\ \text{m/s}^3)t^2\right] dt$$
$$= 50\ \text{m} + (10\ \text{m/s})t + \frac{1}{2}(2{,}0\ \text{m/s}^2)t^2 - \frac{1}{6}(0{,}10\ \text{m/s}^3)t^3$$

A Figura 2.29 mostra gráficos de a_x, v_x e x em função do tempo. Note que para qualquer tempo t a inclinação do gráfico v_xt fornece o valor de a_x e a inclinação do gráfico xt fornece o valor de v_x.

b) O valor máximo de v_x ocorre quando v pára de crescer e começa a decrescer. Para esse instante, $dv_x/dt = a_x = 0$. Igualando a zero a expressão de a_x, obtemos

$$0 = 2{,}0\ \text{m/s}^2 - (0{,}10\ \text{m/s}^3)t$$
$$t = \frac{2{,}0\ \text{m/s}^2}{0{,}10\ \text{m/s}^3} = 20\ \text{s}$$

c) Para achar a velocidade máxima, substituímos $t = 20$ s (quando a velocidade é máxima) na equação para v_x da parte a):

$$v_{\text{máx-}x} = 10\ \text{m/s} + (2{,}0\ \text{m/s}^2)(20\ \text{s}) - \frac{1}{2}(0{,}10\ \text{m/s}^3)(20\ \text{s})^2$$
$$= 30\ \text{m/s}$$

d) O valor máximo de v_x ocorre para $t = 20$ s. Obtemos a posição do carro (isto é, o valor de x) nesse instante substituindo $t = 20$ s na equação geral de x da parte a):

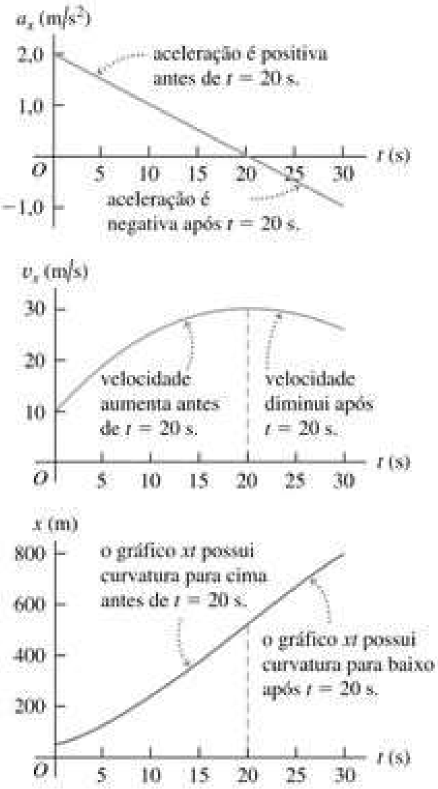


Figura 2.29 A posição, a velocidade e a aceleração do carro do Exemplo 2.9 em função do tempo. Você é capaz de mostrar que, se esse movimento continuasse, o carro pararia no instante $t = 44{,}5$ s?

$$x = 50\ \text{m} + (10\ \text{m/s})(20\ \text{s}) + \frac{1}{2}(2{,}0\ \text{m/s}^2)(20\ \text{s})^2$$
$$- \frac{1}{6}(0{,}10\ \text{m/s}^3)(20\ \text{s})^3$$
$$= 517\ \text{m}$$

AVALIAR: a Figura 2.29 nos ajuda a interpretar nossos resultados. O gráfico no topo dessa figura indica que a_x é positiva entre $t = 0$ e $t = 20$ s e negativa a partir daí. É nula em $t = 20$ s, o tempo no qual v_x atinge seu valor máximo (o ponto mais alto no gráfico do meio). O carro acelera até $t = 20$ s (porque v_x e a_x possuem o mesmo sinal) e passa a diminuir de velocidade depois de $t = 20$ s (porque v_x e a_x possuem sinais contrários).
Uma vez que o valor máximo de v_x ocorre para $t = 20$ s, o gráfico xt possui sua inclinação máxima nesse instante. Note que xt possui concavidade para cima (curvado para cima) de $t = 0$ até $t = 20$ s, quando a_x é positiva. O gráfico possui concavidade para baixo (curvado para baixo) após $t = 20$ s, quando a_x é negativa.

Exemplo 2.10

FÓRMULAS DO MOVIMENTO COM ACELERAÇÃO CONSTANTE OBTIDAS POR INTEGRAÇÃO Use as equações (2.17) e (2.18) para achar v_x e x em função do tempo no caso de um movimento com aceleração constante.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo serve para conferir as equações derivadas nesta seção. Se estiverem corretas, chegaremos às mesmas equações de aceleração constante derivadas na Seção 2.4, sem usar a integração.

PREPARAR: seguiremos as mesmas etapas do Exemplo 2.9. A única diferença é que a_x é constante.

EXECUTAR: pela Equação (2.17), a velocidade x é dada por

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\,dt = v_{0x} + a_x \int_0^t dt = v_{0x} + a_x t$$

Podemos colocar a_x para fora do sinal de integral porque é constante. Substituindo essa expressão para v_x na Equação (2.18), obtemos

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,dt = x_0 + \int_0^t (v_{0x} + a_x t)dt$$

Podemos colocar v_{0x} e a_x para fora do sinal de integral porque são constantes. Logo

$$x = x_0 + v_{0x}\int_0^t dt + a_x \int_0^t t\,dt = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

AVALIAR: nossos resultados são os mesmos das equações (2.8) e (2.12), que foram deduzidas na Seção 2.4, como já era esperado! Embora tenhamos desenvolvido as equações (2.17) e (2.18) para lidar com casos em que a aceleração depende do tempo, elas também podem ser aplicadas quando a aceleração é constante.

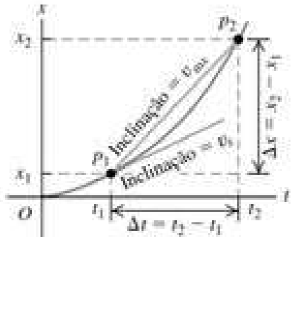
Teste sua compreensão da Seção 2.6 Se a aceleração a_x cresce com o tempo, o gráfico $v_x t$ será i) uma linha reta; ii) côncava para cima (encurvada para cima); iii) côncava para baixo (encurvada para baixo)? ❚

Resumo

Movimento retilíneo, velocidade média e velocidade instantânea: quando uma partícula se move em linha reta, descrevemos sua posição em relação à origem O especificando uma coordenada tal como x. A velocidade média da partícula v_{mx} em um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é igual ao seu deslocamento $\Delta x = x_2 - x_1$ dividido por Δt. A velocidade instantânea v_x em qualquer instante t é igual à velocidade média para o intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$ até o limite em que Δt seja zero. Da mesma forma, v_x é a derivativa da função posição em relação ao tempo. (Exemplo 2.1.)

$$v_{mx} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.2)$$

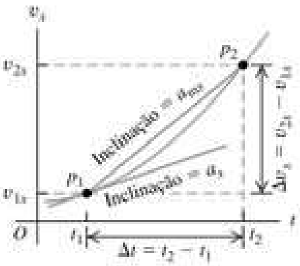
$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.3)$$



Aceleração média e instantânea: a aceleração média a_{mx} em um intervalo de tempo Δt é igual à variação em velocidade $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ no intervalo de tempo dividido por Δt. A aceleração instantânea a_x é o limite de a_{mx} conforme Δt tende a zero, ou a derivativa de v_x em relação a t. (Exemplos 2.2 e 2.3.)

$$a_{mx} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad (2.4)$$

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad (2.5)$$



Movimento retilíneo com aceleração constante: quando a aceleração é constante, quatro equações relacionam a posição x e a velocidade v_x, em qualquer instante t, à posição inicial x_0, à velocidade inicial v_{0x} (ambas medidas no instante $t = 0$) e à aceleração a_x. (exemplos 2.4 e 2.5.)

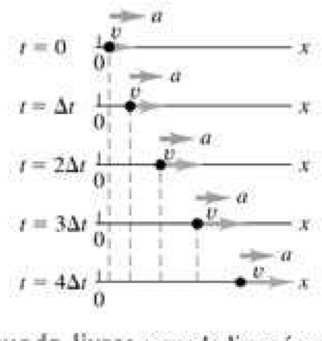
Aceleração constante somente:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad (2.8)$$

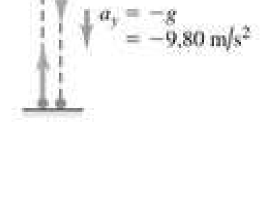
$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.12)$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad (2.13)$$

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t \quad (2.14)$$



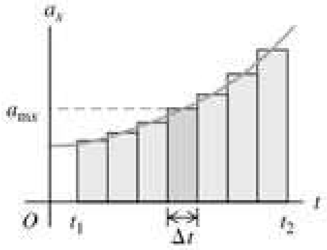
Corpos em queda livre: a queda livre é um caso particular de movimento com aceleração constante. O módulo da aceleração da gravidade é uma grandeza positiva, g. A aceleração de um corpo em queda livre é sempre orientada de cima para baixo. (exemplos 2.6 a 2.8.)



Movimento retilíneo com aceleração variada: quando a aceleração não é constante, mas é conhecida em função do tempo, podemos determinar a velocidade e a posição em função do tempo, integrando a função aceleração (exemplos 2.9 e 2.10.)

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x \, dt \qquad (2.17)$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x \, dt \qquad (2.18)$$



Principais termos

aceleração instantânea, 42
aceleração da gravidade, 51
aceleração média, 41
aceleração instantânea, 43
aceleração média, 41
derivada, 38
diagrama do movimento, 40
gráfico $a_x t$, 45
gráfico $v_x t$, 44
gráfico xt, 37
partícula, 36
queda livre, 51
velocidade escalar, 39
velocidade instantânea, 38
velocidade média, 36
velocidade instantânea, 38
velocidade média, 36

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Sim. A aceleração se refere a *qualquer* variação na velocidade, incluindo tanto o seu aumento quanto a sua redução.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

2.1 **Respostas para a): iv), i) e iii) (empate), v), ii); resposta para b): i) e iii); resposta para c): v)** Em a) a velocidade média é $v_{mx} = \Delta x / \Delta t$. Para todas as cinco viagens, Δt = 1h. Para cada uma das viagens, temos i) $\Delta x = +50$ km, $v_{mx} = +50$ km/h; ii) $\Delta x = -50$ km, $v_{mx} = -50$ km/h; iii) $\Delta x = 60$ km $-$ 10 km $= +50$ km, $v_{mx} = +50$ km/h; iv) $\Delta x = +70$ km, $v_{mx} = +70$ km/h; v) $\Delta x = -20$ km + 20 km = 0, $v_{mx} = 0$. Em b) ambos possuem $v_{mx} = +50$ km/h.

2.2 **Respostas: a) *P, Q e S* (empatadas), *R*;** a velocidade é **b)** positiva, quando a inclinação do gráfico xt é positiva (***P***); **c)** negativa, quando a inclinação é negativa (***R***); e **d)** zero, quando a inclinação é zero (**Q**) e (**S**); **e) R, P, Q e S (empatadas)**. A velocidade é maior quando a inclinação do gráfico xt é a máxima (seja positiva ou negativa) e zero, quando a inclinação é zero.

2.3 **Respostas: a)** S, onde o gráfico xt tem curvatura para cima; **b)** Q, onde o gráfico xt tem curvatura para baixo; **c)** ***P*** e ***R***, onde o gráfico xt não é encurvado nem para cima nem para baixo; **d)** em P, $v_x > 0$ e $a_x = 0$ (velocidade **não varia**); em Q, $v_x > 0$ e $a_x < 0$ (velocidade está **diminuindo**); em R, $v_x < 0$ e $a_x = 0$ (velocidade **não varia**); em S, $v_x < 0$ e $a_x > 0$ (velocidade está **diminuindo**).

2.4 **Resposta: b)** A aceleração do policial é constante, logo o seu gráfico $v_x t$ é uma linha reta, e a motocicleta do policial está se movendo mais rapidamente do que o carro do motorista, quando os dois veículos se encontram em t = 10 s.

2.5 **Respostas: a) iii)** Use a Equação (2.13) substituindo x por y e $a_y = g$, $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$. A altura inicial é $y_0 = 0$ e a velocidade na altura máxima $y = h$ é $v_y = 0$, portanto $0 = v_{0y}^2 - 2gh$ e $h = v_{0y}^2/2g$. Se a velocidade inicial é aumentada por um fator de 2, a altura máxima aumenta por um fator de $2^2 = 4$ e a bola vai à altura de $4h$. **b) v)** Use a Equação (2.8) substituindo x por y e $a_y = g$; $v_y = v_{0y} - gt$. Se a velocidade inicial é aumentada por um fator de 2, o tempo para se atingir a altura máxima aumenta por um fator de 2 e torna-se $2t$.

2.6 **Resposta: ii)** A aceleração a_x é igual à inclinação do gráfico v_x-t. Quando a_x está aumentando, a inclinação do gráfico $v_x t$ também aumenta e o gráfico tem curvatura para cima.

Questões para discussão

Q2.1 O velocímetro de um automóvel mede a velocidade escalar ou o vetor velocidade? Explique.

Q2.2 A Figura 2.30 mostra uma série de fotografias em alta velocidade de um inseto voando em linha reta, no sentido da esquerda para a direita (na direção positiva do eixo x). Quais dos gráficos na Figura 2.31 descreve de forma mais plausível o movimento desse inseto?

Figura 2.30 Questão Q2.2.

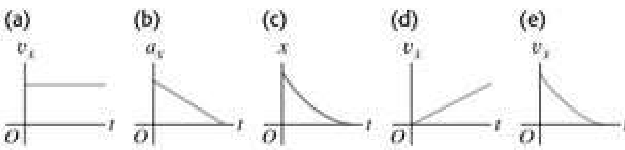


Figura 2.31 Questão Q2.2.

Q2.3 Um objeto com aceleração constante pode reverter a direção do seu percurso? *Duas vezes*? Em cada caso, explique seu raciocínio.

Q2.4 Em que condições uma velocidade média pode ser igual a uma velocidade instantânea?

Q2.5 É possível um objeto a) reduzir a velocidade enquanto o módulo da sua aceleração cresce? b) aumentar a velocidade enquanto sua aceleração é reduzida? Em cada caso, explique seu raciocínio.

Q2.6 Sob quais condições o módulo do vetor velocidade média é igual ao módulo da velocidade escalar?

Q2.7 Quando um Dodge Viper está no lava-rápido situado na Consolação, uma BMW Z3 está na Alameda Santos com a Paulista. Mais tarde, quando o Dodge chega à Alameda Santos com a Paulista, a BMW chega ao lava-rápido na Consolação. Como estão relacionadas as velocidades médias dos carros entre esses dois intervalos de tempo?

Q2.8 Um motorista em Curitiba foi submetido a julgamento por excesso de velocidade. A evidência contra o motorista foi o depoimento de um policial que notou que o carro do acusado estava emparelhado com um segundo carro que o ultrapassou. Conforme o policial, o segundo carro já havia ultrapassado o limite de velocidade. O motorista acusado se defendeu alegando que 'o segundo carro me ultrapassou, portanto eu não estava acelerando'. O juiz deu a sentença contra o motorista, alegando que, 'se dois carros estavam emparelhados, ambos estavam acelerando'. Se você fosse o advogado de defesa do motorista acusado, como contestaria?

Q2.9 É possível ter deslocamento nulo e velocidade média diferente de zero? E uma velocidade instantânea? Ilustre suas respostas usando um gráfico xt.

Q2.10 Pode existir uma aceleração nula e uma velocidade diferente de zero? Ilustre suas respostas usando um gráfico v_xt.

Q2.11 É possível ter uma velocidade nula e uma aceleração média diferente de zero? Velocidade nula e uma aceleração instantânea diferente de zero? Ilustre suas respostas usando um gráfico v_xt e exemplifique tal movimento.

Q2.12 Um automóvel está se deslocando de leste para oeste. Ele pode ter uma velocidade orientada para oeste e ao mesmo tempo uma aceleração orientada para leste? Em que circunstâncias?

Q2.13 A caminhonete da Figura 2.2 está em $x_1 = 277$ m para $t_1 = 16{,}0$ s e em $x_2 = 19$ m para $t_2 = 25{,}0$ s. a) Desenhe *dois* diferentes gráficos xt possíveis para o movimento da caminhonete. b) As duas velocidades médias v_{mx} durante os intervalos de tempo de t_1 até t_2 possuem o mesmo valor nos dois gráficos? Explique.

Q2.14 Em movimento com aceleração constante, a velocidade de uma partícula é igual à metade da soma da velocidade inicial com a velocidade final. Isto é verdade quando a aceleração *não* é constante? Explique.

Q2.15 Você lança uma bola de beisebol verticalmente para cima e ela atinge uma altura máxima maior do que sua altura. O módulo da aceleração é maior enquanto ela está sendo lançada ou logo depois que ela deixa a sua mão? Explique.

Q2.16 Prove as seguintes afirmações: a) Desprezando os efeitos do ar, quando você lança qualquer objeto verticalmente para cima, ele possui a mesma velocidade em seu ponto de lançamento tanto durante a ascensão quanto durante a queda. b) O tempo total da trajetória é igual ao dobro do tempo que o objeto leva para atingir sua altura máxima.

Q2.17 Uma torneira mal fechada libera uma gota a cada 1,0 s. Conforme essas gotas caem, a distância entre elas aumenta, diminui ou permanece a mesma? Prove.

Q2.18 A posição inicial e a velocidade inicial de um veículo são conhecidas e faz-se um registro da aceleração a cada instante. Pode a posição do veículo depois de certo tempo ser determinada a partir destes dados? Caso seja possível, explique como isto poderia ser feito.

Q2.19 Do topo de um edifício alto, você joga uma bola de baixo para cima com velocidade v_0 e outra bola de cima para baixo com velocidade v_0. a) Qual das bolas possui maior velocidade ao atingir o chão? b) Qual das bolas chega primeiro ao chão? c) Qual das bolas possui maior deslocamento ao atingir o chão? d) Qual das bolas percorreu a maior distância ao atingir o chão?

Q2.20 Uma bola que está em repouso é solta do alto de um edifício com altura h. Ao mesmo tempo, uma segunda bola é projetada verticalmente para cima a partir do nível do chão, de tal modo que possui velocidade zero quando atinge o topo do edifício. Quando uma bola passa pela outra, qual delas possui maior velocidade ou a velocidade delas é a mesma? Explique. Onde as duas bolas estarão quando ficarem lado a lado: na altura $h/2$ acima do chão, abaixo dessa altura ou acima dessa altura? Explique.

Exercícios

Seção 2.1 Deslocamento, tempo e velocidade média

2.1 Um foguete transportando um satélite é acelerado verticalmente a partir da superfície terrestre. Após 1,15 s de seu lançamento, o foguete atravessa o topo de sua plataforma de lançamento a 63 m acima do solo. Depois de 4,75 s adicionais ele se encontra a 1,0 km acima do solo. Calcule o módulo da velocidade média do foguete para a) O trecho do vôo correspondente ao intervalo de 4,75 s; b) Os primeiros 5,90 s do seu vôo.

2.2 Em uma experiência, um pombo-correio foi retirado de seu ninho, levado para um local a 5150 km do ninho e libertado. Ele retorna ao ninho depois de 13,5 dias. Tome a origem no ninho e estenda um eixo $+Ox$ até o ponto onde ele foi libertado. Qual a velocidade média do pombo-correio em m/s para: a) O vôo de retorno ao ninho? b) O trajeto todo, desde o momento em que ele é retirado do ninho até seu retorno?

2.3 De volta para casa. Normalmente, você faz uma viagem de carro de San Diego a Los Angeles com uma velocidade média de 105 km/h, em 2h20 min. Em uma tarde de sexta-feira, contudo, o trânsito está muito pesado e você percorre a mesma distância com uma velocidade média de 70 km/h. Calcule o tempo que você leva nesse percurso.

2.4 De um pilar até um poste. Começando em um pilar, você corre 200 m de oeste para leste (o sentido do eixo $+Ox$) com uma velocidade média de 5,0 m/s e, a seguir, corre 280 m de leste para oeste com uma velocidade média de 4,0 m/s até um poste. Calcule a) Sua velocidade escalar do pilar até o poste; b) O módulo do vetor velocidade média do pilar até o poste.

2.5 Dois corredores partem simultaneamente do mesmo ponto de uma pista circular de 200 m e correm em direções *opostas*. Um corre a uma velocidade constante de 6,20 m/s e o outro corre a uma velocidade constante de 5,50 m/s. Quando eles se cruzam pela primeira vez, a) Por quanto tempo estão correndo? b) Qual a distância percorrida por cada um deles?

2.6 Suponha que os dois corredores do Exercício 2.5 partem ao mesmo tempo, do mesmo ponto, mas correm na *mesma* direção. a) Quando o mais rápido ultrapassará o mais lento e a que distância do ponto de largada cada um estará? b) Quando o mais rápido ultrapassará o mais lento pela *segunda* vez e, nesse instante, a que distância cada um estará do ponto de largada?

2.7 Análise de um terremoto. Terremotos produzem vários tipos de ondas de vibração. As mais conhecidas são as ondas P (ou *primárias*) e as ondas S (ou *secundárias*). Na crosta terrestre as ondas P se propagam a aproximadamente 6,5 km/s, enquanto as ondas S, a aproximadamente 3,5 km/s. As velocidades reais variam de acordo com o tipo de material pelo qual atravessam. A defasagem no tempo de chegada dessas ondas a uma estação de registros sísmicos informa aos geólogos a que distância o terremoto ocorreu. Se a defasagem no tempo é de 33 s, a que distância da estação sísmica o terremoto ocorreu?

2.8 Um carro percorre um trecho retilíneo ao longo de uma estrada. Sua distância a um sinal de parada é uma função do tempo t dada por $x(t) = \alpha t^2 - \beta t^3$, onde $\alpha = 1{,}50\ \text{m/s}^2$ e $\beta = 0{,}0500\ \text{m/s}^3$. Calcule a velocidade média do carro para os seguintes intervalos de tempo: a) $t = 0$ até $t = 2{,}0$ s; b) $t = 0$ até $t = 4{,}0$ s; c) $t = 2{,}0$ s até $t = 4{,}0$ s.

Seção 2.2 Velocidade instantânea

2.9 Um carro pára em um semáforo. A seguir ele percorre um trecho retilíneo de modo que sua distância ao sinal é dada por $x(t) = bt^2 - ct^3$, onde $b = 2{,}40\ \text{m/s}^2$ e $c = 0{,}120\ \text{m/s}^3$. a) Calcule a velocidade média do carro para o intervalo de tempo $t = 0$ até $t = 10{,}0$ s. b) Calcule a velocidade instantânea do carro para i) $t = 0$; ii) $t = 5{,}0$ s; iii) $t = 10{,}0$ s. c) Quanto tempo após partir do repouso o carro retorna novamente ao repouso?

2.10 Uma professora de física sai de sua casa e se dirige a pé para o campus. Depois de 5 min começa a chover e ela retorna para casa. Sua distância da casa em função do tempo é indicada pelo gráfico da Figura 2.32. Em qual dos pontos indicados sua velocidade é: a) zero? b) constante e positiva? c) constante e negativa? d) crescente em módulo? e) decrescente em módulo?

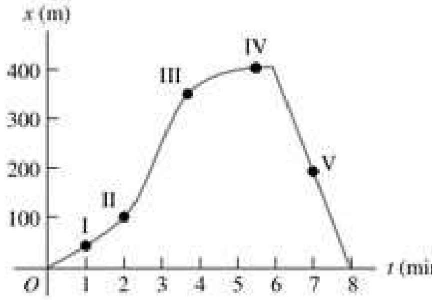


Figura 2.32 Exercício 2.10.

2.11 Uma bola se move em linha reta (eixo Ox). O gráfico na Figura 2.33 mostra a velocidade dessa bola em função do tempo. a) Qual é a velocidade escalar média e a velocidade média nos primeiros 3,0 s? b) Suponha que a bola se mova de tal modo que o gráfico após 2,0 s seja $-3{,}0$ m/s em vez de $+3{,}0$ m/s. Determine a velocidade escalar média e a velocidade média da bola nesse caso.

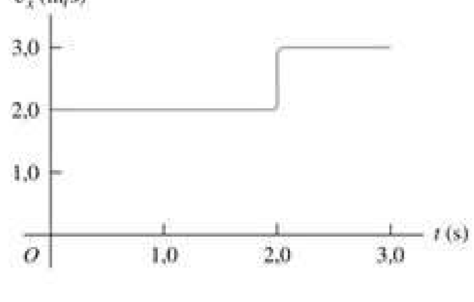


Figura 2.33 Exercício 2.11.

Seção 2.3 Aceleração instantânea e aceleração média

2.12 Em um teste de um novo modelo de automóvel da empresa Motores Incríveis, o velocímetro é calibrado para ler m/s em vez de km/h. A série de medidas a seguir foi registrada durante o teste ao longo de uma estrada retilínea muito longa:

Tempo (s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Velocidade (m/s)	0	0	2	6	10	16	19	22	22

a) Calcule a aceleração média durante cada intervalo de 2,0 s. A aceleração é constante? Ela é constante em algum trecho do teste? b) Faça um gráfico $v_x t$ dos dados tabelados usando escalas de 1 cm = 1 s no eixo horizontal e de 1 cm = 2 m/s no eixo vertical. Desenhe uma curva entre os pontos plotados. Medindo a inclinação dessa curva, calcule a aceleração instantânea para os tempos $t = 9$ s, $t = 13$ s e $t = 15$ s.

2.13 **O carro mais rápido (e mais caro)!** A tabela mostra dados de teste para o Bugatti Veyron, o carro mais veloz já fabricado. O carro se move em linha reta (eixo Ox).

Tempo (s)	0	2,1	20,0	53
Velocidade (m/s)	0	60	200	253

a) Desenhe um gráfico $v_x t$ da velocidade desse carro (em km/h). A aceleração é constante? b) Calcule a aceleração média (em m/s²) entre i) 0 e 2,1 s; ii) 2,1 s e 20,0 s; iii) 20,0 s e 53 s. Esses resultados são compatíveis com seu gráfico na parte a)? (Antes de você decidir comprar esse carro, talvez devesse saber que apenas 300 serão fabricados, consome todo o combustível em 12 minutos na velocidade máxima e custa US$ 1,25 milhão!)

2.14 A Figura 2.34 mostra a velocidade em função do tempo de um carro movido a energia solar. O motorista acelera a partir de um sinal de parada e se desloca durante 20 s com velocidade constante de 60 km/h, e a seguir pisa no freio e pára 40 s após sua partida do sinal. a) Calcule sua aceleração média para os seguintes intervalos de tempo: i) $t = 0$ até $t = 10$ s; ii) $t = 30$ s até $t = 40$ s; iii) $t = 10$ s até $t = 30$ s; iv) $t = 0$ até $t = 40$ s; b) Qual é a aceleração instantânea a $t = 20$ s e a $t = 35$ s?

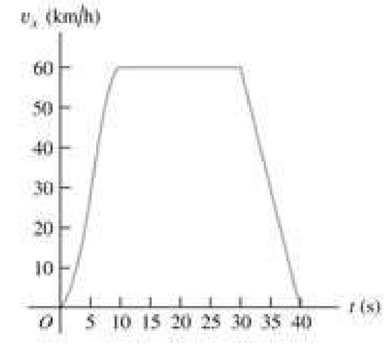


Figura 2.34 Exercício 2.14.

2.15 Uma tartaruga se arrasta em linha reta, à qual chamaremos de eixo Ox com a direção positiva para a direita. A equação para a posição da tartaruga em função do tempo é $x(t) = 50{,}0\ \text{cm} + (2{,}0\ \text{cm/s})t - (0{,}0625\ \text{cm/s}^2)t^2$. a) Determine a velocidade inicial, a posição inicial e a aceleração inicial da tartaruga. b) Em qual instante t a velocidade da tartaruga é zero? c) Quanto tempo do ponto inicial a tartaruga leva para retornar ao ponto de partida? d) Em qual instante t a tartaruga está a uma distância de 10,0 cm do ponto inicial? Qual é a velocidade (módulo e direção) da tartaruga em cada um desses instantes? e) Desenhe um gráfico de x *versus* t, v_x *versus* t e a_x *versus* t, para o intervalo de tempo $t = 0$ até $t = 40$ s.

2.16 Um astronauta saiu da Estação Espacial Internacional para testar um novo veículo espacial. Seu companheiro permanece a bordo e registra as seguintes variações de velocidade, cada uma ocorrendo em intervalos de 10 s. Determine o módulo, a direção e o sentido da aceleração média em cada intervalo. Suponha que o sentido positivo seja da esquerda para a direita. a) No início do intervalo o astronauta se move para a direita ao longo do eixo Ox com velocidade de 15,0 m/s e no final do intervalo ele se move para a direita com velocidade de 5,0 m/s. b) No início do intervalo o astronauta move-se a 5,0 m/s para a esquerda e no final move-se para a esquerda com velocidade de 15,0 m/s. c) No início do intervalo ele se move para a direita com velocidade de 15,0 m/s e no final move-se para a esquerda com velocidade de 15,0 m/s.

2.17 Aceleração automotiva. Com base em sua experiência de dirigir um automóvel, estime o módulo da aceleração média de um carro quando a) acelera em uma estrada do repouso até 65 mi/h e b) pisa forte no freio até uma parada repentina. c) Explique por que essa aceleração média poderia ser considerada positiva ou negativa.

2.18 A velocidade de um carro em função do tempo é dada por $v_x(t) = \alpha + \beta t^2$, onde $\alpha = 3{,}0\ \mathrm{m/s}$ e $\beta = 0{,}100\ \mathrm{m/s^3}$. a) Calcule a aceleração média do carro para o intervalo de tempo de $t = 0$ a $t = 5{,}0$ s. b) Calcule a aceleração instantânea para i) $t = 0$; ii) $t = 5{,}0$ s. c) Desenhe gráficos acurados $v_x t$ e $a_x t$ para o movimento do carro entre $t = 0$ e $t = 5{,}0$ s.

2.19 A Figura 2.35 mostra a coordenada de uma aranha que se desloca lentamente ao longo do eixo Ox. a) Faça um gráfico de sua velocidade e aceleração em função do tempo. b) Faça um diagrama do movimento (como o da Figura 2.13b ou o da Figura 2.14b) mostrando a posição, a velocidade e a aceleração da aranha para cinco tempos: $t = 2{,}5$ s, $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 30$ s e $t = 37{,}5$ s.

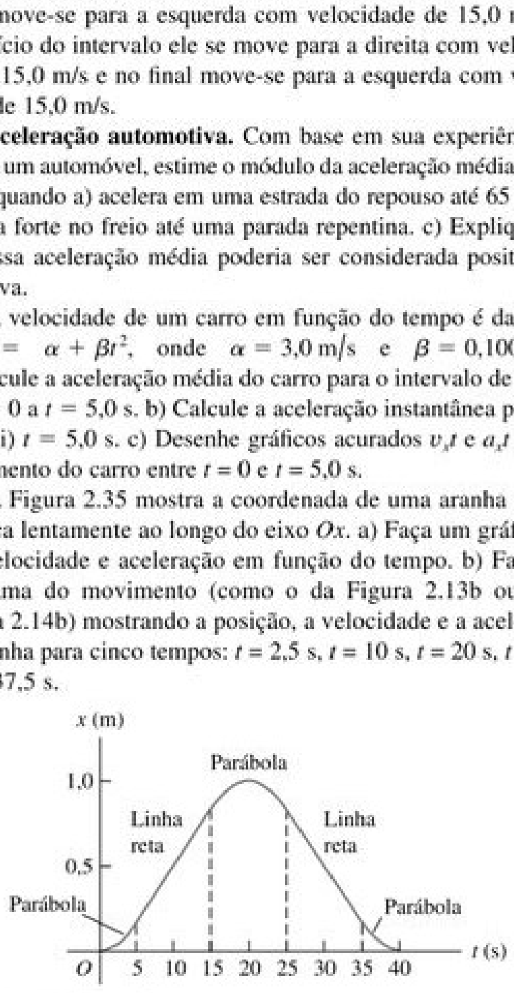


Figura 2.35 Exercício 2.19.

2.20 Um microprocessador controla a posição do pára-choque dianteiro de um carro usado em um teste. A posição é dada por $x(t) = 2{,}17\ \mathrm{m} + (4{,}80\ \mathrm{m/s^2})t^2 - (0{,}100\ \mathrm{m/s^6})t^6$. a) Determine sua posição e aceleração para os instantes em que o carro possui velocidade zero. b) Desenhe gráficos xt, $v_x t$ e $a_x t$ para o movimento do pára-choque entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s.

Seção 2.4 Movimento com aceleração constante

2.21 Um antílope que se move com aceleração constante leva 7,0 s para percorrer uma distância de 70,0 m entre dois pontos. Ao passar pelo segundo ponto, sua velocidade é de 15,0 m/s. a) Qual era sua velocidade quando passava pelo primeiro ponto? b) Qual era sua aceleração?

2.22 Ao ser lançado pela catapulta da plataforma de um porta-aviões, um caça a jato atinge a velocidade de decolagem de 270 km/h em uma distância aproximada de 90 m. Suponha aceleração constante. a) Calcule a aceleração do caça em $\mathrm{m/s^2}$. b) Calcule o tempo necessário para o caça atingir essa velocidade de decolagem.

2.23 Um arremesso rápido. O arremesso mais rápido já medido de uma bola de beisebol saiu da mão do arremessador a uma velocidade de 45,0 m/s. Se o arremessador estava em contato com a bola a uma distância de 1,50 m e produziu aceleração constante, a) qual aceleração ele deu à bola e b) quanto tempo ele levou para arremessá-la?

2.24 Um saque no tênis. No saque mais rápido já medido de tênis, a bola deixou a raquete a 73,14 m/s. O saque de uma bola de tênis normalmente está em contato com a raquete por 30,0 m/s e parte do repouso. Suponha que a aceleração seja constante. a) Qual foi a aceleração da bola nesse saque? b) Qual foi a distância percorrida pela bola durante o saque?

2.25 *Air bag* de automóvel. O corpo humano pode sobreviver a um trauma por acidente com aceleração negativa (parada súbita) quando o módulo de aceleração é menor do que 250 $\mathrm{m/s^2}$ (cerca de 25 g). Suponha que você sofra um acidente de automóvel com velocidade inicial de 105 km/h e seja amortecido por um *air bag* que infla automaticamente. Qual deve ser a distância que o *air bag* se deforma para que você consiga sobreviver?

2.26 Entrando na auto-estrada. Um carro está parado na rampa de acesso de uma auto-estrada, esperando uma diminuição do tráfego. O motorista se move a uma aceleração constante ao longo da rampa, para entrar na auto-estrada. O carro parte do repouso, move-se ao longo de uma linha reta e atinge uma velocidade de 20 m/s no final da rampa de 120 m de comprimento. a) Qual é a aceleração do carro? b) Quanto tempo ele leva para percorrer a rampa? c) O tráfego na auto-estrada se move com uma velocidade constante de 20 m/s. Qual é o deslocamento do tráfego enquanto o carro atravessa a rampa?

2.27 Lançamento de nave espacial. No lançamento, a nave espacial pesa 4,5 milhões de libras. Quando lançada a partir do repouso, leva 8,0 s para atingir 161 km/h e, ao final do primeiro minuto, sua velocidade é 1610 km/h. a) Qual é a aceleração média (em $\mathrm{m/s^2}$) da nave i) durante os primeiros 8,0 s e ii) entre 8,0 s e o final do primeiro minuto? b) Supondo que a aceleração seja constante, durante cada intervalo de tempo (mas não necessariamente a mesma em ambos os intervalos), que distância a nave viajou i) durante os primeiros 8,0 s e ii) durante o intervalo entre 8,0 s e 1,0 min?

2.28 De acordo com dados de testes recentes, um automóvel percorre 0,250 mi em 19,9 s, a partir do repouso. O mesmo carro, ao frear a 60,0 mi/h em um piso seco, pára a 146 p. Supondo uma aceleração constante em cada trecho do movimento, mas não necessariamente a mesma aceleração ao reduzir ou ao acelerar. a) Determine a aceleração desse carro quando aumenta a velocidade e quando freia. b) Se a aceleração é constante, a que velocidade (em mi/h) o carro deve estar se movendo após 0,250 mi de aceleração? A velocidade real medida é 70,0 mi/h; o que isso diz sobre o movimento? c) Quanto tempo esse carro leva para parar ao frear a 60,0 mi/h?

2.29 Um gato anda em uma linha reta, à qual chamaremos de eixo $0x$ com a direção positiva para a direita. Como um físico observador, você mede o movimento desse gato e desenha um gráfico da velocidade do felino em função do tempo (Figura 2.36). a) Determine a velocidade do gato a $t = 4{,}0$ s e a $t = 7{,}0$ s. b) Qual é a aceleração do gato a $t = 3{,}0$ s? A $t = 6{,}0$ s? A $t = 7{,}0$ s?

c) Qual é a distância percorrida pelo gato nos primeiros 4,5 s? De $t = 0$ até $t = 7{,}5$ s? d) Desenhe gráficos claros da aceleração e da posição do gato em função do tempo, supondo que ele partiu da origem.

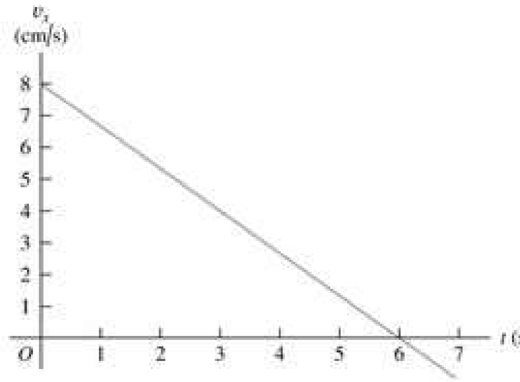


Figura 2.36 Exercício 2.29.

2.30 Para $t = 0$ um carro pára em um semáforo. Quando a luz fica verde, o carro começa a acelerar com uma taxa constante, elevando sua velocidade para 20 m/s, 8 s depois de a luz ficar verde. Ele se move com essa nova velocidade por uma distância de 60 m. A seguir, o motorista avista uma luz vermelha no cruzamento seguinte e começa a diminuir a velocidade com uma taxa constante. O carro pára no sinal vermelho a 180 m da posição para $t = 0$. a) Para o movimento do carro, desenhe gráficos acurados de xt, v_xt e a_xt. b) Faça um diagrama do movimento (como o da Figura 2.13b ou o da Figura 2.14b) mostrando a posição, a velocidade e a aceleração do carro.

2.31 O gráfico da Figura 2.37 mostra a velocidade da motocicleta de um policial em função do tempo. a) Calcule a aceleração instantânea para $t = 3$ s, $t = 7$ s e $t = 11$ s. b) Qual foi o deslocamento do policial nos 5 s iniciais? E nos 9 s iniciais? E nos 13 s iniciais?

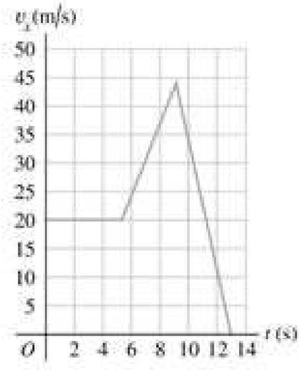


Figura 2.37 Exercício 2.31.

2.32 O gráfico da Figura 2.38 mostra a aceleração de um modelo de locomotiva que se move no eixo Ox. Faça um gráfico da velocidade e da posição sabendo que $x = 0$ e $v_x = 0$ para $t = 0$.

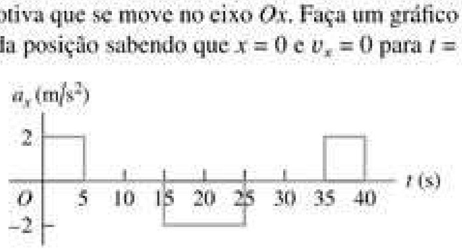


Figura 2.38 Exercício 2.32.

2.33 Uma espaçonave dirige-se em linha reta para a Base Lunar I, situada a uma distância de 384.000 km da Terra. Suponha que ela acelere 20,0 m/s^2 durante os primeiros 15,0 min da viagem e a seguir viaje com velocidade constante até os últimos 15,0 min, quando acelera a 20,0 m/s^2, atingindo o repouso exatamente quando toca a Lua. a) Qual foi a velocidade máxima atingida? b) Qual foi a fração do percurso total durante o qual ela viajou com velocidade constante? c) Qual foi o tempo total da viagem?

2.34 Um trem de metrô parte do repouso em uma estação e acelera com uma taxa constante de 1,60 m/s^2 durante 14,0 s. Ele viaja com velocidade constante durante 70,0 s e reduz a velocidade com uma taxa constante de 3,50 m/s^2 até parar na estação seguinte. Calcule a distância *total* percorrida.

2.35 Dois carros, A e B, movem-se no eixo Ox. O gráfico da Figura 2.39 mostra as posições de A e B em função do tempo. a) Faça um diagrama do movimento (como o da Figura 2.13b ou o da Figura 2.14b) mostrando a posição, a velocidade e a aceleração do carro para $t = 0$, $t = 1$ s e $t = 3$ s. b) Para que tempo(s), caso exista algum, A e B possuem a mesma posição? c) Faça um gráfico da velocidade *versus* tempo para A e B. d) Para que tempo(s), caso exista algum, A e B possuem a mesma velocidade? e) Para que tempo(s), caso exista algum, o carro B ultrapassa o carro A?

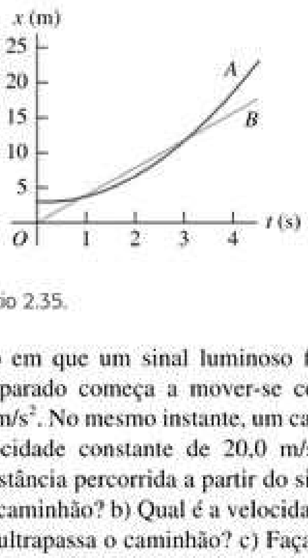


Figura 2.39 Exercício 2.35.

2.36 No momento em que um sinal luminoso fica verde, um carro que estava parado começa a mover-se com aceleração constante de 3,20 m/s^2. No mesmo instante, um caminhão que se desloca com velocidade constante de 20,0 m/s ultrapassa o carro. a) Qual a distância percorrida a partir do sinal para que o carro ultrapasse o caminhão? b) Qual é a velocidade do carro no momento em que ultrapassa o caminhão? c) Faça um gráfico xt dos movimentos desses dois veículos. Considere $x = 0$ o ponto de intersecção inicial. d) Faça um gráfico v_xt dos movimentos desses dois veículos.

2.37 Pouso em Marte. Em janeiro de 2004, a NASA pousou módulos de exploração em Marte. Parte da descida consistiu nas seguintes etapas:

Etapa A: a fricção com a atmosfera reduziu a velocidade de 19.300 km/h para 1600 km/h em 4,0 min.

Etapa B: um pára-quedas se abriu para reduzir a velocidade a 321 km/h em 94 s.

Etapa C: foguetes de retropropulsão foram acionados para reduzir a velocidade a zero em uma distância de 75 m.

Suponha que uma etapa sucedeu imediatamente a anterior e que a aceleração em cada etapa foi constante. a) Determine a aceleração do foguete (em m/s^2) por etapa. b) Qual a distância total (em km) percorrida pelo foguete nas etapas A, B e C?

Seção 2.5 Queda livre de corpos

2.38 Gotas de chuva. Se a resistência do ar sobre as gotas de chuva pudesse ser desprezada, poderíamos considerar essas gotas objetos em queda livre. a) As nuvens que dão origem a chuvas estão em alturas típicas de algumas centenas de metros acima do solo. Estime a velocidade de uma gota de chuva ao cair no solo, se ela pudesse ser considerada um corpo em queda livre. Forneça essa estimativa em m/s e km/h. b) Estime (pela sua experiência pessoal sobre chuva) a velocidade real de uma gota de chuva ao cair no solo. c) Com base nos resultados de a) e b), verifique se é uma boa aproximação desprezar a resistência do ar sobre as gotas de chuva. Explique.

2.39 a) Se uma pulga pode dar um salto e atingir uma altura de 0,440 m, qual seria sua velocidade inicial ao sair do solo? b) Durante quanto tempo ela permanece no ar?

2.40 Descida na Lua. Um módulo explorador da Lua está pousando na Base Lunar I (Figura 2.40). Ele desce lentamente sob a ação dos retropropulsores do motor de descida. O motor se separa do módulo quando ele se encontra a 5,0 m da superfície lunar e possui uma velocidade para baixo igual a 0,8 m/s. Ao se separar do motor, o módulo inicia uma queda livre. Qual é a velocidade do módulo no instante em que ele toca a superfície? A aceleração da gravidade na Lua é igual a 1,6 m/s^2.

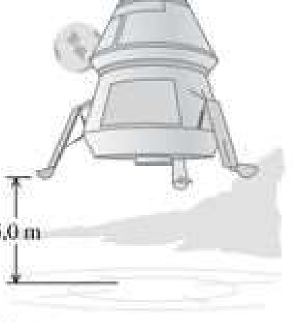


Figura 2.40 Exercício 2.40.

2.41 Um teste simples para o tempo de reação. Uma régua de medição é mantida verticalmente acima de sua mão com a extremidade inferior entre o polegar e o indicador. Ao ver a régua sendo largada, você a segura com esses dois dedos. Seu tempo de reação pode ser calculado pela distância percorrida pela régua, medida diretamente pela posição dos seus dedos na escala da régua. a) Deduza uma relação para seu tempo de reação em função da distância d. b) Calcule o tempo de reação supondo uma distância medida igual a 17,6 cm.

2.42 Um tijolo é largado (velocidade inicial nula) do alto de um edifício. Ele atinge o solo em 2,50 s. A resistência do ar pode ser desprezada, de modo que o tijolo está em queda livre. a) Qual é a altura do edifício? b) Qual é o módulo da velocidade quando ele atinge o solo? c) Faça gráficos $a_y t$, $v_y t$ e yt para o movimento do tijolo.

2.43 Falha no lançamento. Um foguete de 7.500 kg é lançado verticalmente da plataforma com uma aceleração constante no sentido de baixo para cima de 2,25 m/s^2 e não sente nenhuma resistência significativa do ar. Ao atingir uma altura de 525 m, seus motores falham repentinamente, de modo que a única força atuando sobre ele nesse momento é a gravidade. a) Qual é a altura máxima que esse foguete atingirá a partir da plataforma de lançamento? b) A partir da falha no motor, quanto tempo decorrerá antes que o foguete caia sobre a plataforma de lançamento e qual será sua velocidade instantes antes da queda? c) Faça gráficos $a_y t$, $v_y t$ e yt do movimento do foguete, do instante do lançamento até o instante da queda.

2.44 Um balonista de ar quente que se desloca verticalmente para cima com velocidade constante de módulo igual a 5,0 m/s deixa cair um saco de areia no momento em que ele está a uma distância de 40,0 m acima do solo (Figura 2.41). Após ser largado, o saco de areia, passa a se mover em queda livre. a) Calcule a posição e a velocidade do saco de areia 0,250 s e 1,0 s depois de ser largado. b) Calcule o tempo que o saco de areia leva para atingir o solo desde o momento em que ele foi lançado. c) Qual é a velocidade do saco de areia quando ele atinge o solo? d) Qual é a altura máxima em relação ao solo atingida pelo saco de areia? e) Faça gráficos $a_y t$, $v_y t$ e yt para o movimento do saco de areia.

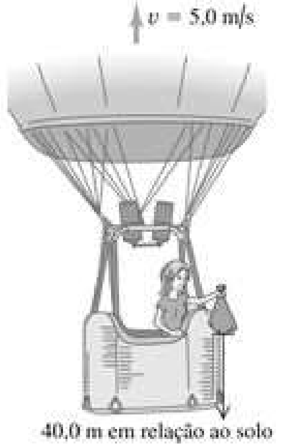


Figura 2.41 Exercício 2.44.

2.45 Um estudante no topo de um edifício joga uma bola com água verticalmente para baixo. A bola deixa a mão do estudante com uma velocidade de 6,0 m/s. A resistência do ar pode ser ignorada e a bola considerada em queda livre após o lançamento. a) Calcule sua velocidade depois de 2,0 s de queda. b) Qual a distância percorrida nesses 2,0 s? c) Qual o módulo da velocidade quando a bola caiu 10,0 m? d) Faça gráficos $a_y t$, $v_y t$ e yt para o movimento.

2.46 Um ovo é atirado verticalmente de baixo para cima de um ponto próximo da cornija na extremidade superior de um edifício alto. Ele passa rente da cornija em seu movimento para baixo, atingindo um ponto a 50,0 m abaixo da cornija 5,0 s após deixar a mão do lançador. Despreze a resistência do ar. a) Calcule a velocidade inicial do ovo. b) Qual a altura máxima atingida acima do ponto inicial do lançamento? c) Qual o módulo da velocidade nessa altura máxima? d) Qual o módulo e o sentido da aceleração nessa altura máxima? e) Faça gráficos de $a_y t$, $v_y t$ e yt para o movimento do ovo.

2.47 O *Sonic Wind (Vento Sônico) No. 2* é uma espécie de trenó movido por um foguete, usado para investigar os efeitos fisiológicos de acelerações elevadas. Ele se desloca em uma pista retilínea com 1070 m de comprimento. Partindo do repouso, pode atingir uma velocidade de 224 m/s em 0,900 s. a) Calcule a aceleração em m/s^2, supondo que ela seja constante. b) Qual a razão entre essa aceleração e a aceleração de um corpo em queda livre (g)?

c) Qual a distância percorrida em 0,900 s? d) Um artigo publicado por uma revista afirma que, no final de uma corrida, a velocidade desse trenó diminui de 283 m/s até zero em 1,40 s e que durante este intervalo de tempo a aceleração é maior que 40 g. Esses valores são coerentes?

2.48 Uma pedra grande é expelida verticalmente de baixo para cima por um vulcão com velocidade inicial de 40,0 m/s. Despreze a resistência do ar. a) Qual é o tempo que a pedra leva, após o lançamento, para que sua velocidade seja de 20,0 m/s de baixo para cima? b) Qual o tempo que a pedra leva, após o lançamento, para que sua velocidade seja de 20,0 m/s de cima para baixo? c) Quando o deslocamento da pedra é igual a zero? d) Quando a velocidade da pedra é igual a zero? e) Qual o módulo e o sentido da aceleração enquanto a pedra i) Está se movendo de baixo para cima? ii) Está se movendo de cima para baixo? iii) Está no ponto mais elevado da sua trajetória? f) Faça gráficos $a_y t$, $v_y t$ e yt para o movimento.

2.49 Uma rocha de 15 kg cai de uma posição de repouso na Terra e atinge o solo em 1,75 s. Quando cai da mesma altura no satélite de Saturno, Enceladus, ela atinge o solo em 18,6 s. Qual é a aceleração da gravidade em Enceladus?

*Seção 2.6 Velocidade e posição por integração

*2.50 A aceleração de um ônibus é dada por $a_x(t) = \alpha t$, onde $\alpha = 1{,}2\ \text{m/s}^3$. a) Se a velocidade do ônibus para $t = 1{,}0$ s é igual a 5,0 m/s, qual é sua velocidade para $t = 2{,}0$ s? b) Se a posição do ônibus para $t = 1{,}0$ s é igual a 6,0 m, qual sua posição para $t = 2{,}0$ s? c) Faça gráficos at, vt e xt para esse movimento.

*2.51 A aceleração de uma motocicleta é dada por $a_x(t) = At - Bt^2$ onde $A = 1{,}5\ \text{m/s}^3$ e $B = 0{,}120\ \text{m/s}^4$. A motocicleta está em repouso na origem no instante $t = 0$. a) Calcule sua velocidade e posição em função do tempo. b) Calcule a velocidade máxima que ela pode atingir.

*2.52 **O salto voador de uma pulga.** A Figura 2.42 mostra o gráfico de dados coletados de uma pulga saltitante de 210-μg em um filme de alta velocidade (3500 quadros/segundo). Essa pulga tinha aproximadamente 2 mm de comprimento e saltou a um ângulo de decolagem quase vertical. Use o gráfico para responder a estas perguntas. a) A aceleração da pulga pode chegar a zero? Se sim, quando? Justifique sua resposta. b) Determine a altura máxima que a pulga atingiu nos primeiros 2,5 ms. c) Determine a aceleração da pulga a 0,5 ms, 1,0 ms e 1,5 ms. d) Determine a altura da pulga a 0,5 ms, 1,0 ms e 1,5 ms.

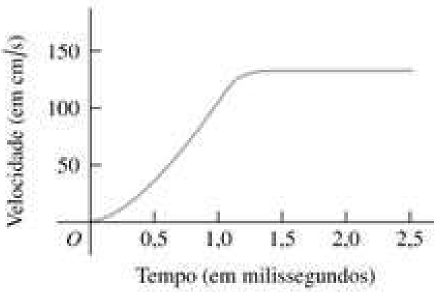


Figura 2.42 Exercício 2.52.

*2.53 O gráfico na Figura 2.43 descreve a aceleração em função do tempo para uma pedra que rola colina abaixo, a partir de uma posição de repouso. a) Determine a variação na velocidade da pedra, entre $t = 2{,}5$ s e $t = 7{,}5$ s. b) Faça um gráfico da velocidade da pedra em função do tempo.

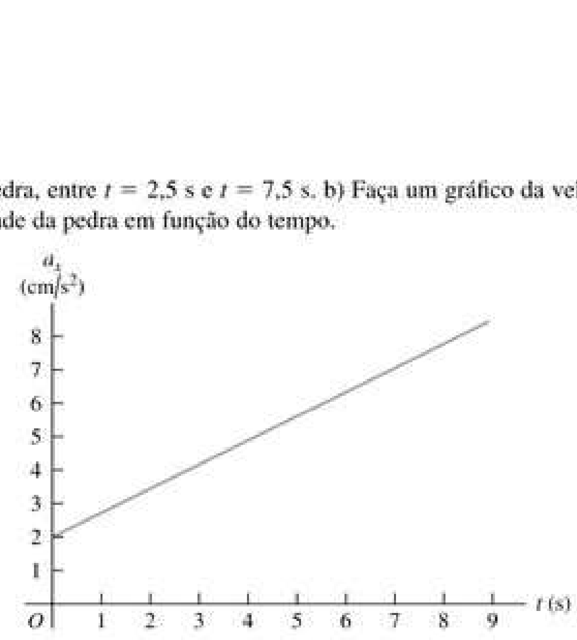


Figura 2.43 Exercício 2.53.

Problemas

2.54 Em uma competição de bicicletas com percurso de 30 km, você percorre os primeiros 15 km com uma velocidade média de 12 km/h. Qual deve ser sua velocidade escalar média nos 15 km restantes para que sua velocidade escalar média no percurso total de 30 km seja de a) 6 km/h? b) 18 km/h? c) Dada a referida velocidade média para os primeiros 15 km, você poderia ou não atingir uma velocidade escalar média de 24 km/h no percurso total de 30 km? Explique.

2.55 A posição de uma partícula entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s é dada por $x(t) = (3{,}0\ \text{m/s}^3)t^3 - (10{,}0\ \text{m/s}^2)t^2 + (9{,}0\ \text{m/s})t$. a) Faça gráficos de xt, $v_x t$ e $a_x t$ para essa partícula. b) Para que tempo(s) entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s a partícula está em repouso? O resultado obtido por você está de acordo com o gráfico vt da parte (a)? c) Para qual tempo calculado na parte (b) a aceleração da partícula é positiva ou negativa? Mostre que em cada caso podemos obter a mesma resposta pelo gráfico $v_x t$ ou pela função $a_x(t)$. d) Para que tempo(s) entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s a velocidade da partícula não varia instantaneamente? Localize esse ponto nos gráficos $a_x t$ e $v_x t$ da parte (a). e) Qual a maior distância entre a partícula e a origem ($x = 0$) no intervalo entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s? f) Para que tempo(s) entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s a partícula está *aumentando de velocidade* com a maior taxa? Para que tempo(s) entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s a partícula está *diminuindo de velocidade* com a maior taxa? Localize esses pontos nos gráficos $a_x t$ e $v_x t$ da parte (a).

2.56 **Gincana.** Em uma gincana, cada concorrente corre 25,0 m transportando um ovo equilibrado em uma colher, dá a volta e retorna ao ponto de partida. Edite corre os primeiros 25,0 m em 20,0 s. Quando volta, ela se sente mais segura e leva apenas 15,0 s. Qual o módulo do vetor velocidade média para a) Os primeiros 25,0 m? b) A viagem de volta? c) Qual o módulo do vetor velocidade média no percurso todo quando ela volta ao ponto de partida? d) Qual é a velocidade escalar média no percurso todo quando ela volta ao ponto de partida?

2.57 Daniel dirige na Estrada I-80 em Seward, no Estado de Nebraska, e segue por um trecho retilíneo de leste para oeste com uma velocidade média com módulo igual a 88 km/h. Depois de percorrer 76 km, ele atinge a saída de Aurora (Figura 2.44). Percebendo que foi longe demais, ele retorna 34 km de oeste para leste até a saída para York com uma velocidade média com módulo igual a 72 km/h. Para a viagem total desde Seward até a saída de York, qual é a) Sua velocidade escalar média? B) O módulo do vetor velocidade média?

2.58 **Tráfego em uma auto-estrada.** De acordo com um artigo da revista *Scientific American* (maio de 1990), circulam normalmente em uma auto-estrada americana cerca de 2400 veículos por hora em cada pista, com velocidade de 96 km/h para um tráfego considerado regular. Depois desse limite o fluxo do tráfego começa a ficar 'turbulento' (com acelerações e paradas). a) Se cada veículo possui comprimento aproximadamente igual a 4,6 m, qual é o espaçamento médio entre os veículos para a densidade do tráfego mencionado? b) Um sistema automático para evitar colisões que opera com sinais de radar ou sonar, e que pode acelerar ou parar um veículo quando necessário, poderia reduzir sensivelmente a distância entre os veículos. Supondo uma distância de 9,2 m (igual a dois comprimentos de carro), quantos veículos por hora poderiam circular em cada pista, com velocidade de 96 km/h?

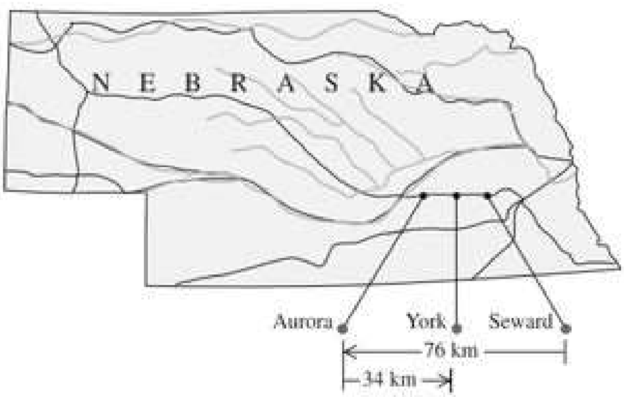


Figura 2.44 Exercício 2.57.

2.59 Um velocista pode acelerar até sua velocidade máxima em 4,0 s. Ele então mantém esta velocidade durante o trajeto restante em uma competição de 100 m, terminando a corrida com um tempo total de 9,1 s. a) Qual a aceleração média do velocista durante os 4,0 s iniciais? b) Qual sua aceleração média durante os últimos 5,1 s? c) Qual sua aceleração média durante a corrida toda? d) Explique por que sua resposta do item (c) não é a média das respostas (a) e (b).

2.60 Um trenó está em repouso no alto de uma montanha e escorrega para baixo com aceleração constante. Em um dado instante está a 14,4 m de distância do topo; 2,0 s mais tarde ele está a 25,6 m de distância do topo; 2,0 s mais tarde está a 40,0 m de distância do topo e 2,0 s mais tarde está a 57,6 m de distância do topo. a) Qual o módulo da velocidade média do trenó durante cada um dos intervalos de 2,0 s depois de passar pelo ponto a 14,4 m de distância do topo? b) Qual a aceleração do trenó? c) Qual a velocidade escalar do trenó quando ele passa pelo ponto a 14,4 m de distância do topo? d) Quanto tempo ele leva para ir do topo até o ponto a 14,4 m de distância do topo? e) Qual a distância percorrida pelo trenó durante o primeiro segundo depois de passar pelo ponto a 14,4 m de distância do topo?

2.61 Uma gazela está correndo em linha reta (o eixo x). O gráfico na Figura 2.45 mostra a velocidade desse animal em função do tempo. Nos primeiros 12,0 s, determine a) A distância total percorrida e b) O deslocamento da gazela. c) Faça um gráfico $a_x t$ demonstrando a aceleração desse animal em função do tempo para os primeiros 12,0 s.

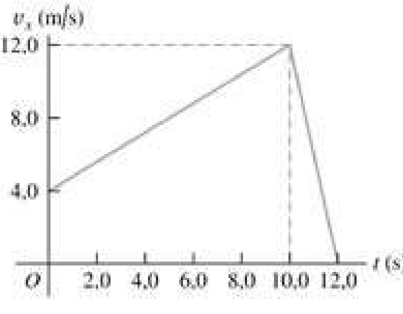


Figura 2.45 Exercício 2.61.

2.62 No ar ou no vácuo, a luz viaja a uma velocidade constante de $3{,}0 \times 10^8$ m/s. Para responder a algumas das seguintes perguntas, se necessário, consulte os dados astronômicos no Apêndice F. a) Um ano-luz é definido como a distância percorrida pela luz em um ano. Use essa informação para determinar quantos metros há em 1 ano-luz. b) Qual distância em metros a luz viaja em 1 nanossegundo? c) Quando um brilho solar ocorre no nosso Sol, em quanto tempo após sua ocorrência é possível observá-lo? d) Ao lançar raios *laser* de um refletor instalado na lua pelos astronautas da Apollo, os astrônomos podem fazer medições exatas da distância entre a Terra e a Lua. Quanto tempo após ser enviado, um desses raios laser (simplesmente um raio de luz) leva para retornar à Terra? c) A sonda *Voyager*, que passou por Netuno em agosto de 1989, estava a cerca de 3,0 bilhões de milhas da Terra naquela época. Fotografias e outras informações foram enviadas para a Terra através de ondas de rádio, que viajam à velocidade da luz. Quanto tempo essas ondas levaram para chegar à Terra a partir da *Voyager*?

2.63 Use as informações no Apêndice F para responder a estas perguntas. a) Qual é a velocidade das Ilhas Galápagos, localizadas na linha do Equador, em função do giro da Terra sobre o seu próprio eixo? b) Qual é a velocidade da Terra em função da sua rotação em torno do Sol? c) Se a luz seguisse a curvatura da Terra (o que não ocorre), quantas vezes um raio de luz circundaria a linha do Equador em um segundo?

2.64 Uma bola rígida, que se move em linha reta (o eixo x), bate em uma parede e repentinamente ricocheteia por um breve instante. O gráfico $v_x t$ na Figura 2.46 mostra a velocidade dessa bola em função do tempo. Nos primeiros 20,0 s desse movimento, determine a) A distância total percorrida pela bola e b) Seu deslocamento. c) Faça um gráfico $a_x t$ para esse movimento da bola. d) O gráfico apresentado é realmente vertical a 5,0 s? Explique.

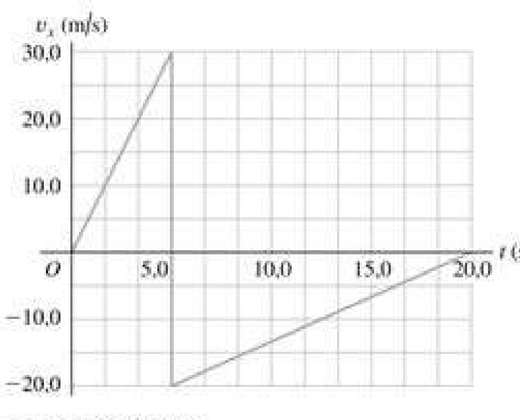


Figura 2.46 Exercício 2.64.

2.65 Uma bola deixa a posição de repouso e rola colina abaixo com aceleração uniforme, percorrendo 150 m no decorrer do segundo intervalo de 5,0 s do seu movimento. Qual a distância percorrida no primeiro intervalo de 5,0 s do movimento?

2.66 Colisão. O maquinista de um trem de passageiros que viaja com velocidade $v_P = 25{,}0$ m/s avista um trem de carga cuja traseira se encontra a 200,0 m de distância da frente do trem de passageiros (Figura 2.47). O trem de carga se desloca no mesmo sentido do trem de passageiros com velocidade $v_c = 15{,}0$ m/s. O maquinista imediatamente aciona o freio, produzindo uma aceleração constante igual a $-0{,}100$ m/s^2, enquanto o trem de carga continua com a mesma velocidade. Considere $x = 0$ como o local onde se encontra a frente do trem de passageiros quando o freio é acionado. a) As vacas das vizinhanças assistirão a uma colisão? b) Caso a resposta anterior seja positiva, em que ponto ocorrerá a colisão? c) Faça um gráfico simples mostrando a posição da frente do trem de passageiros e a traseira do trem de carga.

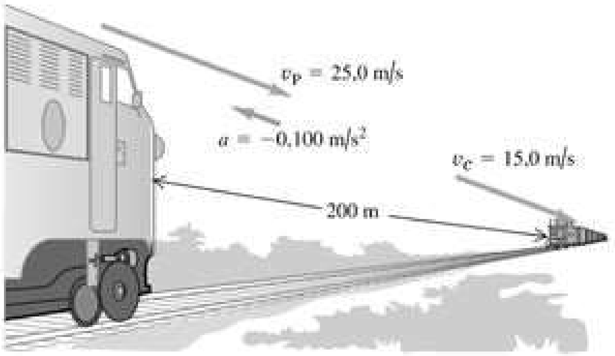


Figura 2.47 Exercício 2.66.

2.67 Uma barata grande pode desenvolver uma velocidade igual a 1,50 m/s em intervalos de tempo curtos. Suponha que, ao acender a lâmpada do quarto de um hotel à beira da estrada, você aviste uma barata que se move com velocidade de 1,50 m/s na mesma direção e sentido que você. Se você está a 0,90 m atrás da barata com velocidade de 0,80 m/s, qual deve ser sua aceleração mínima para que você alcance a barata antes que ela se esconda embaixo de um móvel situado a 1,20 m da posição inicial dela?

2.68 Dois carros estão a 200 m de distância entre si e um se move em direção ao outro a uma velocidade constante de 10 m/s. Da capota de um deles, um vigoroso gafanhoto pula entre os carros (que pernas fortes ele tem!) com uma velocidade horizontal constante de 15 m/s em relação ao solo. O inseto pula no instante em que pousa, ou seja, não se demora sobre qualquer dos carros. Qual a distância total percorrida pelo gafanhoto antes que os carros colidam?

2.69 Um automóvel e um caminhão partem do repouso no mesmo instante, estando o automóvel uma certa distância atrás do caminhão. O caminhão possui aceleração constante de 2,10 m/s^2 e o automóvel de 3,40 m/s^2. O automóvel ultrapassa o caminhão depois que o caminhão se deslocou 40,0 m. a) Qual o tempo necessário para que o automóvel ultrapasse o caminhão? b) Qual era a distância inicial do automóvel em relação ao caminhão? c) Qual a velocidade desses veículos quando eles estão lado a lado? d) Em um único diagrama, desenhe a posição de cada veículo em função do tempo. Considere $x = 0$ como a posição inicial do caminhão.

2.70 Dois motoristas malucos dirigem de encontro um ao outro. No instante $t = 0$, a distância entre os dois carros é D, o carro 1 está em repouso e o carro 2 se move da direita para a esquerda com velocidade v_0. O carro 1 começa a acelerar a partir de $t = 0$ com aceleração constante a_x. O carro 2 continua a se mover com velocidade constante. a) Em que instante ocorrerá a colisão? b) Ache a velocidade do carro 1 imediatamente antes de colidir com o carro 2. c) Faça diagramas xt e v_xt para o carro 1 e para o carro 2. Desenhe curvas para cada veículo usando o mesmo eixo.

2.71 Uma bolinha de gude é solta da borda de uma tigela em formato de meia-lua, com diâmetro de 50,0 cm, rola para baixo e depois para cima, até a borda oposta, em 10,0 s. Determine a) A velocidade escalar média e b) A média do vetor velocidade da bolinha de gude.

2.72 Você já deve ter percebido que a velocidade do seu carro não continua a aumentar, mesmo que você mantenha o pé pisando no acelerador. Isso se dá devido à resistência do ar e à fricção entre as partes em movimento do carro. A Figura 2.48 mostra um gráfico v_xt qualitativo para um carro típico, que parte do repouso na origem e se move em linha reta (eixo x). Faça gráficos qualitativos a_xt e xt para esse carro.

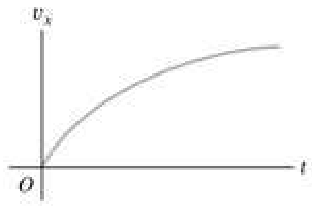


Figura 2.48 Exercício 2.72.

2.73 Ultrapassagem. O motorista de um carro deseja ultrapassar um caminhão que se desloca com velocidade constante de 20,0 m/s (aproximadamente 45 min/h). Inicialmente, o carro também se desloca com velocidade de 20,0 m/s e seu pára-choque dianteiro está 24,0 m atrás do pára-choque traseiro do caminhão. O motorista acelera com taxa constante de 0,600 m/s^2, a seguir volta para a pista do caminhão, quando a traseira de seu carro está a 26,0 m da frente do caminhão. Ele possui comprimento de 4,5 m e o comprimento do caminhão é igual a 21,0 m. a) Qual o tempo necessário para o carro ultrapassar o caminhão? b) Qual a distância percorrida pelo carro nesse intervalo de tempo? c) Qual é a velocidade final do carro?

***2.74** A velocidade de um objeto é dada por $v_x(t) = \alpha - \beta t^2$, onde $\alpha = 4{,}0$ m/s e $\beta = 2{,}0$ m/s^3. Para $t = 0$, o objeto está em $x = 0$. a) Calcule a posição e a aceleração do objeto em função do tempo. b) Qual a distância *positiva máxima* entre o objeto e a origem?

***2.75** A aceleração de uma partícula é dada por $a_x(t) = -2{,}0$ m/s^2 + (3,0 m/s^3)t. a) Calcule a velocidade inicial v_{0x} de modo que a partícula tenha a mesma coordenada x para $t = 0$ s e $t = 4$ s. b) Qual seria sua velocidade para $t = 4{,}0$ s?

2.76 Tiro ao ovo. Você está sobre o telhado do prédio da Física, 46 m acima do solo (Figura 2.49). Seu professor de física, que possui 1,80 m de altura, está caminhando próximo do edifício com uma velocidade constante de 1,20 m/s. Se você deseja jogar um ovo na cabeça dele, em que ponto ele deve estar quando você largar o ovo? Suponha que o ovo esteja em queda livre.

Figura 2.49 Exercício 2.76.

2.77 Um vulcão na Terra pode ejetar rochas verticalmente a uma altura máxima H. a) A que altura (em termos de H) essas rochas chegariam, se um vulcão em Marte as expelisse com a mesma velocidade inicial? A aceleração da gravidade em Marte é de 3,71 m/s^2, e a resistência do ar pode ser desprezada em ambos os planetas. b) se as rochas ficam suspensas no ar por um intervalo de tempo T, por quanto tempo (em termos de T) elas permanecerão no ar em Marte?

2.78 Uma malabarista joga bolas ao ar enquanto realiza outras atividades. Em um ato, ela joga uma bola verticalmente para cima e, enquanto a bola está no ar, ela corre até uma mesa a 5,50 m de distância, a uma velocidade escalar constante de 2,50 m/s, e retorna bem a tempo de apanhar a bola em queda. a) Qual é a velocidade inicial mínima com que ela deve jogar a bola para cima de modo a realizar esse feito? b) A que altura da sua posição inicial está a bola quando a malabarista chega à mesa?

2.79 Os visitantes de um parque de diversões observam uma mergulhadora saltar de uma plataforma situada a uma altura de 21,3 m de uma piscina. De acordo com o apresentador, a mergulhadora entra na água com velocidade de 25 m/s. Despreze a resistência do ar. a) A afirmação do apresentador está correta? b) É possível a mergulhadora pular diretamente da prancha, em movimento ascendente, de modo que, passando pela prancha já em movimento descendente, ela entre na água a 25,0 m/s? Em caso afirmativo, qual deveria ser sua velocidade inicial para cima? Essa velocidade inicial seria fisicamente atingível?

2.80 Um vaso de flores cai do peitoril de uma janela e passa pela janela de baixo. Despreze a resistência do ar. Ele leva 0,420 s para passar por essa janela, cuja altura é igual a 1,90 m. Qual é a distância entre o topo dessa janela e o peitoril de onde o vaso caiu?

2.81 Alguns rifles podem disparar uma bala com a velocidade escalar de 965 m/s enquanto ela passa pelo cano da arma. Se o cano da arma tem 70,0 cm de comprimento e se a bala acelera de forma uniforme dentro dele a partir do repouso, a) qual é a aceleração (em g) da bala no cano da arma e b) qual é tempo (em m/s) que ela para percorrer o cano? c) Se, quando esse rifle é disparado verticalmente, a bala atinge uma altura máxima H, qual é a altura máxima (em termos de H) para um rifle novo que produza a metade da velocidade no cano desta?

2.82 **Um foguete de múltiplos estágios.** No primeiro estágio de um foguete de dois estágios, ele é lançado de uma plataforma a partir do repouso, mas com uma aceleração constante de 3,50 m/s^2, no sentido de baixo para cima. Em 25,0 s após o lançamento, o foguete aciona o segundo estágio, que repentinamente aumenta a sua velocidade para 132,5 m/s, no sentido de baixo para cima. Mas essa arrancada consome todo o combustível, e a única força a atuar sobre o foguete passa a ser a gravidade. A resistência ao ar pode ser desprezada. a) Determine a altura máxima atingida pelo foguete de dois estágios, acima da plataforma. b) Quanto tempo após o acionamento do segundo estágio o foguete levará para cair de volta na plataforma? c) Com que velocidade o foguete estará se movendo assim que atingir a plataforma de lançamento?

2.83 **Atenção abaixo.** Sérgio arremessa uma esfera de chumbo de 7 kg de baixo para cima, aplicando-lhe um impulso que a acelera a partir do repouso até 45,0 m/s^2 para um deslocamento vertical de 64,0 cm. Ela sai da sua mão a 2,20 m acima do solo. Despreze a resistência do ar. a) Qual a velocidade da esfera imediatamente após sair da sua mão? b) Qual a altura máxima atingida pela esfera? c) Qual o tempo de que ele dispõe para sair da vertical antes que a esfera volte até a altura da sua cabeça, situada a 1,83 m acima do solo?

2.84 Uma professora de física faz uma demonstração ao ar livre e, estando em repouso, repentinamente cai da beira de um penhasco alto e ao mesmo tempo grita 'Socorro!'. Após 3,0 s da queda, ela ouve o eco do seu grito, que vem do fundo do vale abaixo dela. A velocidade do som é 340 m/s. a) Qual é a altura do penhasco? B) Desprezando-se a resistência do ar, a qual velocidade ela estará se movendo quando atingir o solo? (A velocidade real será menor, devido à resistência do ar.)

2.85 **Malabarismo.** Um malabarista se apresenta em uma sala cujo teto está a 3,0 m do nível de suas mãos. Ele joga uma bola para cima, de modo que ela chega ao teto. a) Qual é a velocidade inicial da bola? b) Qual é o tempo necessário para a bola atingir o teto? No instante em que a primeira bola está no teto, o malabarista joga a segunda bola para cima com dois terços da velocidade inicial da primeira. c) Quanto tempo depois que a segunda bola é lançada, as duas bolas se cruzam? d) A que distância das mãos do malabarista elas se cruzam?

2.86 Um helicóptero transportando o Dr. Evil decola com uma velocidade constante e ascendente de 5,0 m/s^2. O agente secreto Austin Powers pula a bordo assim que o helicóptero deixa o solo. Após os dois lutarem por 10,0 s, Powers desliga o motor e salta do helicóptero. Suponha que o helicóptero esteja em queda livre após o motor ser desligado e ignore os efeitos da resistência do ar. a) Qual é a altura máxima sobre o solo que o helicóptero atinge? b) Powers aciona um dispositivo a jato que carrega às costas 7,0 s após deixar o hecóptero e depois se mantém a uma aceleração constante descendente com módulo 2,0 m/s^2. A que distância do solo está Powers quando o helicóptero se espatifa no solo?

2.87 **Altura do edifício.** O Homem Aranha salta do topo de um edifício alto. Ele cai em queda livre, a partir do repouso até o solo, por uma distância de h. Ele cai uma distância de $h/4$ no último 1,0 s da sua queda. Qual é a altura h do prédio?

2.88 **Altura do penhasco.** Você está escalando um penhasco quando de repente se vê envolto pela névoa. Para saber a altura em que está, você joga uma pedra do alto e 10,0 s depois ouve o som dela atingindo o solo, ao pé do rochedo. a) Desprezando-se a resistência do ar, a que altura está o penhasco, considerando que a velocidade do som é 330 m/s? b) Suponha que você tenha ignorado o tempo que leva para o som chegar até você. Nesse caso, você teria superestimado ou subestimado a altura do penhasco? Explique seu raciocínio.

2.89 **Lata em queda.** Um pintor está em pé em um andaime que é içado a uma velocidade escalar constante. Na subida, ele acidentalmente derruba uma lata de tinta do andaime e ela despenca 15,0 m até o chão. Você está observando a cena e mede com o seu cronômetro que leva 3,25 s para a lata atingir o solo. Despreze a resistência do ar. a) Qual é a velocidade escalar da lata quando ela chega ao solo? b) Outro pintor está parado no peitoril com as mãos 4,0 m acima do ponto da queda da lata. Ele tem reflexos rápidos e, se a lata passar por ele, poderá apanhá-la. Existe essa chance?

2.90 Desejando testar a lei da gravidade, um estudante pula de um arranha-céu com altura de 180 m e, munido de um cronômetro, inicia sua queda livre (com velocidade inicial nula). Cinco segundos mais tarde, o Super-Homem entra em cena e mergulha do alto do edifício para salvá-lo. O Super-Homem salta do teto com uma velocidade inicial v_0, produzida por um impulso de cima para baixo com suas pernas de aço. A seguir ele cai com uma aceleração igual à de qualquer corpo em queda livre. a) Qual deve ser o valor de v_0 para que o Super-Homem possa segurar o estudante imediatamente antes de ele se chocar com o solo? b) Usando o mesmo gráfico, desenhe a posição do Super-Homem e do estudante em função do tempo. Considere a velocidade inicial do Super-Homem calculada no item (a). c) Se a altura do arranha-céu for menor do que um certo limite, nem mesmo o Super-Homem será capaz de salvar o estudante. Qual é essa altura mínima?

2.91 Durante os lançamentos, é comum os foguetes descartarem peças desnecessárias. Um certo foguete parte do repouso da plataforma de lançamento e acelera de baixo para cima a constantes 3,30 m/s^2. Quando está 235 m acima da plataforma, ele descarta um tubo usado de combustível, simplesmente desconectando-o. Uma vez desconectado, a única força que atua sobre o tubo é a gravidade (a resistência do ar pode ser desprezada). a) A que altura estará o foguete, quando o tudo atingir a plataforma, supondo que o foguete não mude sua aceleração? b) Qual é a distância total percorrida pelo tubo entre a soltura e a queda na plataforma?

2.92 Uma bola é lançada do solo diretamente de baixo para cima com velocidade v_0. No mesmo instante, outra bola é largada do repouso a uma altura H, diretamente acima do ponto onde a primeira bola foi lançada para cima. Despreze a resistência do ar. a) Calcule o instante em que as duas bolas colidem. b) Ache o valor de H em termos de v_0 e g, de modo que no momento da colisão a primeira bola atinja sua altura máxima.

2.93 Dois carros, A e B, se deslocam ao longo de uma linha reta. A distância de A ao ponto inicial é dada em função do tempo por $x_A(t) = \alpha t + \beta t^2$, com $\alpha = 2{,}60$ m/s e $\beta = 1{,}2$ m/s^2. A distância de B ao ponto inicial é dada em função do tempo por $x_B(t) = \gamma t^2 - \delta t^3$, onde $\gamma = 2{,}80$ m/s^2 e $\delta = 0{,}20$ m/s^3. a) Qual carro está na frente logo que eles saem do ponto inicial? b) Em que instante(s) os carros estão no mesmo ponto? c) Em que instante(s) a distância entre os carros A e B não aumenta nem diminui? d) Em que instante(s) os carros A e B possuem a mesma aceleração?

2.94 A queda da maçã de uma macieira pode ser considerada uma queda livre. A maçã está inicialmente a uma altura H acima do topo de um gramado espesso, o qual é constituído por camadas de grama de espessura h. Quando a maçã penetra na grama, ela diminui sua velocidade com uma taxa constante e atinge o solo com velocidade igual a zero. a) Ache a velocidade da maçã imediatamente antes de ela penetrar na grama. b) Ache a aceleração da maçã enquanto ela penetra na grama. c) Faça gráficos yt, v_yt e a_yt para o movimento da maçã.

Problemas desafiadores

2.95 **Pegando o ônibus.** Uma estudante está se deslocando com sua velocidade máxima de 5,0 m/s para pegar um ônibus parado no ponto. Quando a estudante está a uma distância de 40,0 m do ônibus, ele começa a se mover com aceleração constante igual a 0,170 m/s^2. a) Durante quanto tempo e por qual distância a estudante deve correr para que alcance o ônibus? b) Quando a estudante alcança o ônibus, qual é a velocidade do ônibus? c) Faça um gráfico de xt para a estudante e para o ônibus. Considere $x = 0$ como a posição inicial da estudante. d) As equações usadas para calcular o tempo na parte (a) possuem uma segunda solução que corresponde a um tempo posterior para o qual a estudante e o ônibus estão na mesma posição, caso continuem com seus movimentos especificados. Explique o significado desta segunda solução. Qual a velocidade do ônibus neste ponto? e) Caso sua velocidade máxima fosse igual a 3,5 m/s ela poderia alcançar o ônibus? f) Qual seria sua velocidade *mínima* para que ela pudesse alcançar o ônibus? Neste caso, quanto tempo e qual seria a distância percorrida para que a estudante pudesse alcançar o ônibus?

2.96 Estando inicialmente agachado, um atleta dá um salto vertical para atingir a altura máxima possível. Os melhores atletas permanecem cerca de 1,0 s no ar (o 'tempo de suspensão' no ar). Considere o atleta como uma partícula e denomine de $y_{máx}$ sua altura máxima acima do solo. Despreze a resistência do ar. Para explicar por que ele parece estar suspenso no ar, calcule a razão entre o tempo que ele leva para atingir a altura $y_{máx}/2$ e o tempo que ele leva para atingir a altura. Você pode ignorar a resistência do ar.

2.97 Uma bola é atirada de baixo para cima do canto superior do telhado de um edifício. Uma segunda bola é largada do mesmo ponto 1,00 s mais tarde. Despreze a resistência do ar. a) Sabendo que a altura do edifício é igual a 20,0 m, qual deve ser a velocidade inicial da primeira bola para que ambas atinjam o solo no mesmo instante? Em um mesmo gráfico, desenhe a posição de cada bola em função do tempo medido a partir do lançamento da primeira bola. Considere a mesma situação, mas agora suponha que seja conhecida a velocidade inicial v_0 da primeira bola e que a altura h do edifício seja uma incógnita. b) Qual deve ser a altura do edifício para que ambas atinjam o solo no mesmo instante para os seguintes valores de v_0: i) 6,0 m/s; ii) 9,5 m/s? c) Quando v_0 for superior a certo valor máximo $v_{máx}$, não existirá nenhum valor de h que satisfaça a condição de as bolas atingirem o solo no mesmo instante. O valor $v_{máx}$ possui uma interpretação física simples. Qual é ela? d) Quando v_0 for inferior a certo valor mínimo $v_{mín}$, não existirá nenhum valor de h que satisfaça a condição de as bolas atingirem o solo no mesmo instante. O valor $v_{mín}$ também possui uma interpretação física simples. Qual é ela?

2.98 Um excursionista atento vê uma pedra cair do alto de um morro vizinho e nota que ela leva 1,30 s para rolar a última terça parte da sua trajetória até o solo. Despreze a resistência do ar. a) Qual é a altura do morro em metros? b) Se na parte (a) você obtiver duas soluções de uma equação do segundo grau e usar apenas uma na resposta, o que representará a outra solução?