MOVIMENTO EM DUAS OU TRÊS DIMENSÕES

3

Quando um carro faz uma curva a uma velocidade constante, ele está acelerando? Em caso afirmativo, em qual direção ele está acelerando?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como representar a posição de um corpo em duas ou três dimensões, usando vetores.
- Como determinar a velocidade do vetor de um corpo a partir do que se sabe sobre sua trajetória.
- Como achar a aceleração vetorial de um corpo e por que um corpo tem essa aceleração, mesmo que sua velocidade escalar seja constante.
- Como interpretar os componentes da aceleração de um corpo paralelo e ortogonal à sua trajetória.
- Como descrever a trajetória em curva percorrida por um projétil.
- Os principais conceitos sobre o movimento em uma trajetória curva, seja com velocidade escalar constante, seja com variação na velocidade escalar.
- Como relacionar o vetor velocidade de um corpo em movimento do ponto de vista de dois referenciais distintos.

Quando um jogador de futebol chuta uma bola, o que determina onde a bola vai parar? Como você descreve o movimento do carro de uma montanha-russa ao longo de uma curva ou o vôo de uma águia circulando sobre um campo aberto? Uma bola lançada horizontalmente de uma janela leva o mesmo tempo para atingir o solo que uma bola simplesmente largada do mesmo ponto?

Não podemos responder a essas questões usando as técnicas do Capítulo 2, onde consideramos partículas se movendo somente ao longo de uma linha reta. Em vez disso, é necessário estender a descrição do movimento para duas e três dimensões. Continuaremos a usar as grandezas vetoriais de deslocamento, velocidade e aceleração, porém não vamos mais considerar movimentos ao longo de uma linha reta. Verificaremos que muitos movimentos importantes ocorrem somente em duas dimensões, ou seja, estão contidos em um *plano*. Para esses movimentos necessitamos de duas coordenadas e dois componentes para a velocidade e para a aceleração.

Será necessário também considerar como o movimento de uma partícula é descrito por observadores que possuem movimentos relativos entre si. O conceito de *velocidade relativa* desempenhará um papel importante posteriormente neste livro, quando estudarmos as colisões, explorarmos os fenômenos eletromagnéticos e introduzirmos a teoria da relatividade especial de Einstein.

Este capítulo une a linguagem vetorial que aprendemos no Capítulo 1 com a linguagem cinemática do Capítulo 2. Como antes, estamos interessados em descrever o movimento, e não em analisar suas causas. Porém, a linguagem que você aprenderá aqui será uma ferramenta essencial para capítulos posteriores, quando estudarmos a relação entre força e movimento.

3.1 Vetor posição e vetor velocidade

Para descrever o *movimento* de uma partícula no espaço, necessitamos inicialmente estar aptos a descrever a *posição* da partícula. Considere uma partícula que esteja em um ponto P em dado instante. O **vetor posição** $\vec{r}$ da partícula nesse instante é um vetor que vai da origem do sistema de coordenadas até o ponto P (Figura 3.1).

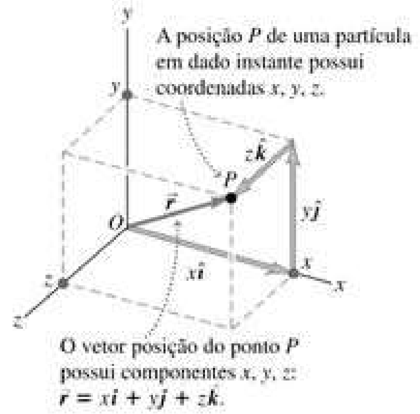


Figura 3.1 O vetor posição $\vec{r}$ da origem até o ponto P possui componentes x, y e z. A trajetória que a partícula segue através do espaço é, em geral, uma curva (Figura 3.2).

As coordenadas cartesianas x, y e z do ponto P são os componentes x, y e z do vetor $\vec{r}$. Usando os vetores unitários introduzidos na Seção 1.9, podemos escrever

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \qquad \text{(vetor posição)} \tag{3.1}$$

Durante um intervalo de tempo Δt, a partícula se move de um ponto P_1, onde o vetor posição é $\vec{r}_1$, até um ponto P_2, onde o vetor posição é $\vec{r}_2$. A variação da posição (o deslocamento) durante esse intervalo de tempo é $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$. Definimos a **velocidade média** $\vec{v}_m$ do mesmo modo que fizemos no Capítulo 2 para um movimento retilíneo: deslocamento dividido pelo intervalo de tempo:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad \text{(vetor velocidade média)} \tag{3.2}$$

Note que *dividir* um vetor por um escalar é um caso particular de *multiplicar* o vetor por um escalar, como descrito na Seção 1.7; a velocidade média $\vec{v}_m$ é igual ao vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$ multiplicado por $1/\Delta t$, o inverso do intervalo de tempo. Note também que o componente x da equação (3.2) é $v_{mx} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \Delta x/\Delta t$. É exatamente a Equação (2.2), a expressão para a velocidade média que encontramos na Seção 2.1 para o movimento unidimensional.

Agora, definimos a **velocidade instantânea** tal como no Capítulo 2: como o limite da velocidade média quando o intervalo de tempo tende a zero, sendo igual à taxa de variação do vetor posição com o tempo. A diferença fundamental é que agora a posição $\vec{r}$ e a velocidade instantânea $\vec{v}$ são vetores:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3.3}$$
(vetor velocidade instantânea)

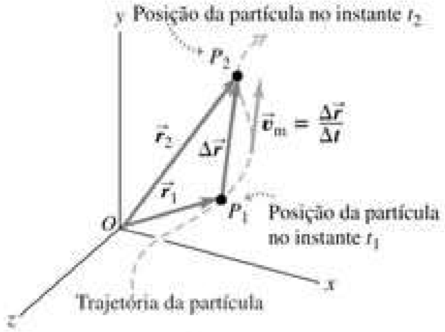


Figura 3.2 A velocidade média $\vec{v}_m$ entre os pontos P_1 e P_2 possui a mesma direção e o mesmo sentido do vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$.

O *módulo* do vetor $\vec{v}$ em qualquer instante é a *velocidade escalar* v da partícula no referido instante. A *direção* e o *sentido* de $\vec{v}$ em qualquer instante é a mesma direção e sentido em que ela se move no referido instante.

Note que quando $\Delta t \to 0$, o ponto P_1 da Figura 3.2 fica cada vez mais próximo do ponto P_2. Nesse limite, o vetor $\Delta\vec{r}$ torna-se tangente à curva. A direção e sentido do vetor $\Delta\vec{r}$ nesse limite é também igual à direção e sentido da velocidade instantânea $\vec{v}$. Isto leva a uma conclusão importante: *o vetor velocidade instantânea é tangente à trajetória em cada um dos seus pontos* (Figura 3.3).

Normalmente é mais fácil calcular o vetor velocidade instantânea usando componentes. Durante qualquer deslocamento de $\Delta\vec{r}$, as variações Δx, Δy e Δz das três coordenadas da partícula são os *componentes* de $\Delta\vec{r}$. Daí se conclui que os componentes v_x, v_y e v_z da velocidade instantânea $\vec{v}$ são simplesmente as derivadas das coordenadas x, y e z em relação ao tempo. Ou seja:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{3.4}$$
(componentes da velocidade instantânea)

O componente x de $\vec{v}$ é $v_x = dx/dt$, que é igual à Equação (2.3) — a expressão da velocidade instantânea para o movimento retilíneo que obtivemos na Seção 2.2. Logo, a Equação (3.4) é uma extensão direta do conceito de velocidade instantânea para o movimento em três dimensões.

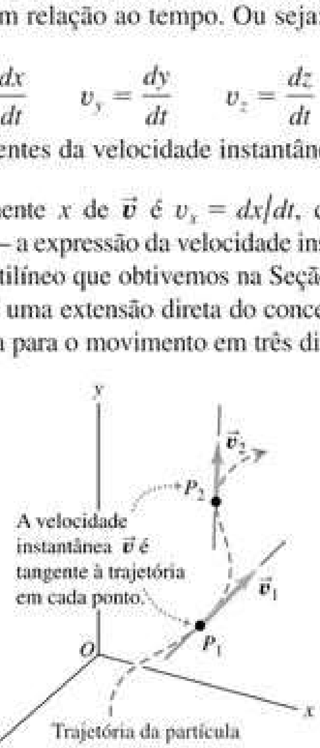


Figura 3.3 Os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são velocidades instantâneas nos pontos P_1 e P_2 mostrados na Figura 3.2.

Podemos também obter esse resultado derivando a Equação (3.1). Os vetores unitários $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ possuem módulo, direção e sentido constantes, logo suas derivadas são nulas, e encontramos

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \tag{3.5}$$

Isso mostra novamente que os componentes de $\vec{v}$ são dx/dt, dy/dt e dz/dt.

O módulo do vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ — isto é, a velocidade escalar — é dado em termos dos componentes v_x, v_y e v_z pelo teorema de Pitágoras

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{3.6}$$

A Figura 3.4 mostra a situação quando a partícula se move no plano *xy*. Nesse caso, *z* e v_z são nulos. Então, a velocidade escalar (o módulo do vetor $\vec{v}$) é:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

e a direção da velocidade instantânea $\vec{v}$ é dada pelo ângulo α indicado nessa figura. Vemos que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.7}$$

(Usamos sempre letras gregas para designar ângulos. Usamos α para indicar a direção do vetor velocidade instantânea para não confundir com a direção θ do vetor *posição* da partícula.)

O vetor velocidade instantânea geralmente é mais útil do que o vetor velocidade média. A partir de agora, sempre que mencionamos a palavra 'velocidade', queremos nos referir ao vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ (em vez do vetor velocidade média). Normalmente, não se costuma dizer que $\vec{v}$ é um vetor; cabe a você lembrar-se de que velocidade é uma grandeza vetorial que possui módulo, direção e sentido.

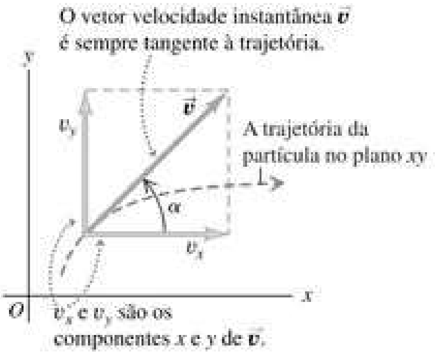


Figura 3.4 Os dois componentes da velocidade para um movimento no plano *xy*.

Exemplo 3.1

CÁLCULO DA VELOCIDADE INSTANTÂNEA E DA VELOCIDADE MÉDIA Um veículo robótico está explorando a superfície de Marte. O módulo de aterrissagem é a origem do sistema de coordenadas e a superfície do planeta é o plano *xy*. O veículo, que será representado por um ponto, possui componentes *x* e *y* que variam com o tempo de acordo com

$$x = 2{,}0\ \text{m} - (0{,}25\ \text{m/s}^2)t^2$$
$$y = (1{,}0\ \text{m/s})t + (0{,}025\ \text{m/s}^3)t^3$$

a) Calcule as coordenadas do veículo e sua distância do módulo de aterrissagem no instante $t = 2{,}0$ s. b) Calcule o vetor deslocamento e o vetor velocidade média no intervalo de tempo entre $t = 0{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s. c) Deduza uma expressão geral para o vetor velocidade instantânea do veículo. Expresse a velocidade instantânea em $t = 2{,}0$ s, usando componentes e também em termos do módulo, direção e sentido.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema se refere ao movimento em duas dimensões — ou seja, em um plano. Logo, devemos usar as expressões dos *vetores* deslocamento, velocidade média e velocidade instantânea obtidos nesta seção. (As expressões mais simples das seções 2.1 e 2.2 não envolvem vetores; elas se aplicam somente ao movimento ao longo de uma linha reta.)

PREPARAR: a Figura 3.5 mostra a trajetória do veículo robótico. Usaremos a Equação (3.1) para a posição $\vec{r}$, a expressão $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ para o deslocamento, a Equação (3.2) para a velocidade média e as equações (3.5) e (3.6) para a velocidade e sua direção e sentido. As incógnitas são enunciadas no problema.

EXECUTAR: a) No instante $t = 2{,}0$ s, as coordenadas do carro são

$$x = 2{,}0\ \text{m} - (0{,}25\ \text{m/s}^2)(2{,}0\ \text{s})^2 = 1{,}0\ \text{m}$$
$$y = (1{,}0\ \text{m/s})(2{,}0\ \text{s}) + (0{,}025\ \text{m/s}^3)(2{,}0\ \text{s})^3 = 2{,}2\ \text{m}$$

A distância entre o veículo e a origem nesse instante é

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1{,}0\ \text{m})^2 + (2{,}2\ \text{m})^2} = 2{,}4\ \text{m}$$

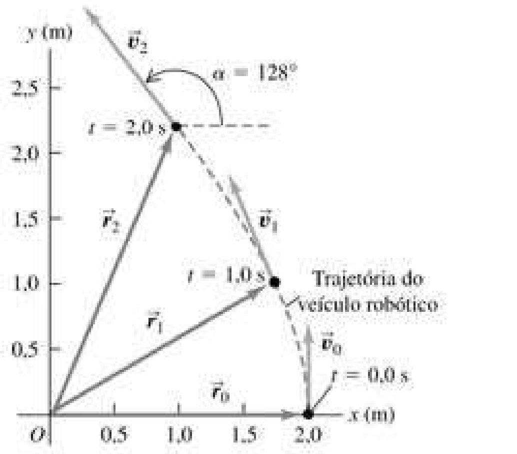


Figura 3.5 Para $t = 0$, o vetor posição do veículo robótico é $\vec{r}_0$ e o vetor velocidade instantânea é $\vec{v}_0$. Analogamente, $\vec{r}_1$ e $\vec{v}_1$ são os vetores para $t = 1{,}0$ s; $\vec{r}_2$ e $\vec{v}_2$ são os vetores para $t = 2{,}0$ s.

b) Para achar o deslocamento e a velocidade média, escrevemos o vetor posição $\vec{r}$ em função do tempo t. Pela Equação (3.1), temos

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}\\ &= [2{,}0\ \text{m} - (0{,}25\ \text{m/s}^2)t^2]\hat{\imath}\\ &\quad + [(1{,}0\ \text{m/s})t + (0{,}025\ \text{m/s}^3)t^3]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Para $t = 0{,}0$ s o vetor posição $\vec{r}_0$ é

$$\vec{r}_0 = (2{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (0{,}0\ \text{m})\hat{\jmath}$$

De acordo com a parte a), achamos para $t = 2{,}0$ s a seguinte expressão para o vetor posição $\vec{r}_2$

$$\vec{r}_2 = (1{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (2{,}2\ \text{m})\hat{\jmath}$$

Portanto, o deslocamento entre $t = 0{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s é

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 &= (1{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (2{,}2\ \text{m})\hat{\jmath} - (2{,}0\ \text{m})\hat{\imath}\\ &= (-1{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (2{,}2\ \text{m})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Durante esse intervalo de tempo, o veículo se desloca 1,0 m no sentido negativo do eixo Ox e 2,2 m no sentido positivo do eixo Oy. A velocidade média no intervalo de tempo entre $t = 0{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s é o deslocamento dividido pelo intervalo de tempo (Equação 3.2):

$$\begin{aligned}\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} &= \frac{(-1{,}0\ \text{m})\hat{\imath} + (2{,}2\ \text{m})\hat{\jmath}}{2{,}0\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s}}\\ &= (-0{,}50\ \text{m/s})\hat{\imath} + (1{,}1\ \text{m/s})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Os componentes dessa velocidade média são

$$v_{mx} = -0{,}50\ \text{m/s} \qquad v_{my} = 1{,}1\ \text{m/s}$$

c) De acordo com a Equação (3.4), os componentes da velocidade instantânea são as derivadas das coordenadas em relação ao tempo:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt} = (-0{,}25\ \text{m/s}^2)(2t)\\ v_y &= \frac{dy}{dt} = 1{,}0\ \text{m/s} + (0{,}025\ \text{m/s}^3)(3t^2)\end{aligned}$$

Podemos então escrever o vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ como

$$\begin{aligned}\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} &= (-0{,}50\ \text{m/s}^2)t\hat{\imath}\\ &\quad + [1{,}0\ \text{m/s} + (0{,}075\ \text{m/s}^3)t^2]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Para $t = 2{,}0$ s os componentes da velocidade instantânea são

$$\begin{aligned}v_x &= (-0{,}50\ \text{m/s}^2)(2{,}0\ \text{s}) = -1{,}0\ \text{m/s}\\ v_y &= 1{,}0\ \text{m/s} + (0{,}075\ \text{m/s}^3)(2{,}0\ \text{s})^2 = 1{,}3\ \text{m/s}\end{aligned}$$

O módulo da velocidade instantânea (isto é, a velocidade escalar) para $t = 2{,}0$ s é

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-1{,}0\ \text{m/s})^2 + (1{,}3\ \text{m/s})^2}\\ &= 1{,}6\ \text{m/s}\end{aligned}$$

Sua direção $\vec{v}$ em relação ao eixo positivo Ox é dada pelo ângulo α, onde, pela Equação (3.7),

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1{,}3\ \text{m/s}}{-1{,}0\ \text{m/s}} = -1{,}3 \qquad \text{então} \qquad \alpha = 128°$$

A sua calculadora informará que a função inversa da tangente de $-1{,}3$ é $-52°$. Porém, como aprendemos na Seção 1.8, você deve examinar o gráfico do vetor para decidir sua direção e seu sentido. A Figura 3.5 mostra que a resposta correta para α é $-52° + 180° = 128°$.

AVALIAR: compare os componentes da velocidade *média* que encontramos no item b) para o intervalo entre $t = 0{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s ($v_{mx} = -0{,}50$ m/s, $v_{my} = 1{,}1$ m/s) com os componentes de velocidade *instantânea* no instante $t = 2{,}0$ s que encontramos na parte c) ($v_x = -1{,}0$ m/s, $v_y = 1{,}3$ m/s). A comparação revela que, assim como no caso de uma dimensão, o vetor velocidade média $\vec{v}_m$ em dado intervalo de tempo, em geral, é *diferente* do vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ no fim do mesmo intervalo de tempo (Exemplo 2.1).

Convidamos você a calcular a posição, o vetor velocidade instantânea, a velocidade escalar, a direção e o sentido do movimento para $t = 0{,}0$ s e para $t = 1{,}0$ s. O vetor posição $\vec{r}$ e o vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ para $t = 0{,}0$ s, $t = 1{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s estão indicados na Figura 3.5. Note que o vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ é tangente à trajetória em cada ponto. O módulo de $\vec{v}$ cresce à medida que o veículo se move, indicando que sua velocidade escalar é crescente.

Teste sua compreensão da Seção 3.1 Em qual dessas situações o vetor velocidade média $\vec{v}_m$ em dado intervalo de tempo *seria* igual à velocidade instantânea $\vec{v}$ no final do intervalo? i) um corpo se movendo ao longo de uma trajetória curva a uma velocidade escalar constante; ii) um corpo se movendo ao longo de uma trajetória curva com velocidade escalar crescente; iii) um corpo se movendo ao longo de uma linha reta a uma velocidade escalar constante; iv) um corpo se movendo ao longo de uma linha reta a uma velocidade escalar crescente. ▌

3.2 Vetor aceleração

Vamos agora considerar o vetor *aceleração* de uma partícula que se move no espaço. Analogamente ao caso do movimento retilíneo, a aceleração indica como a velocidade de uma partícula está variando. Porém, como estamos tratando a velocidade como um vetor, a aceleração descreverá variações do módulo da velocidade (isto é, da velocidade escalar) *e* variações da direção da velocidade (isto é, da direção e do sentido do movimento no espaço).

Na Figura 3.6a, um carro (tratado como uma partícula) está se movendo ao longo de uma trajetória curva. Os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ representam, respectivamente, o vetor velocidade instantânea da partícula no instante t_1 quando ela está no ponto P_1 e o vetor velocidade instantânea da partícula no instante t_2 quando ela está no ponto P_2. As duas velocidades podem possuir módulos e direções diferentes. No intervalo de tempo entre t_1 e t_2, *a variação vetorial da velocidade* é $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$ (Figura 3.6b). Definimos o vetor **aceleração média** $\vec{a}_m$ da partícula nesse intervalo de tempo como a variação vetorial da velocidade dividida pelo intervalo de tempo $t_2 - t_1 = \Delta t$:

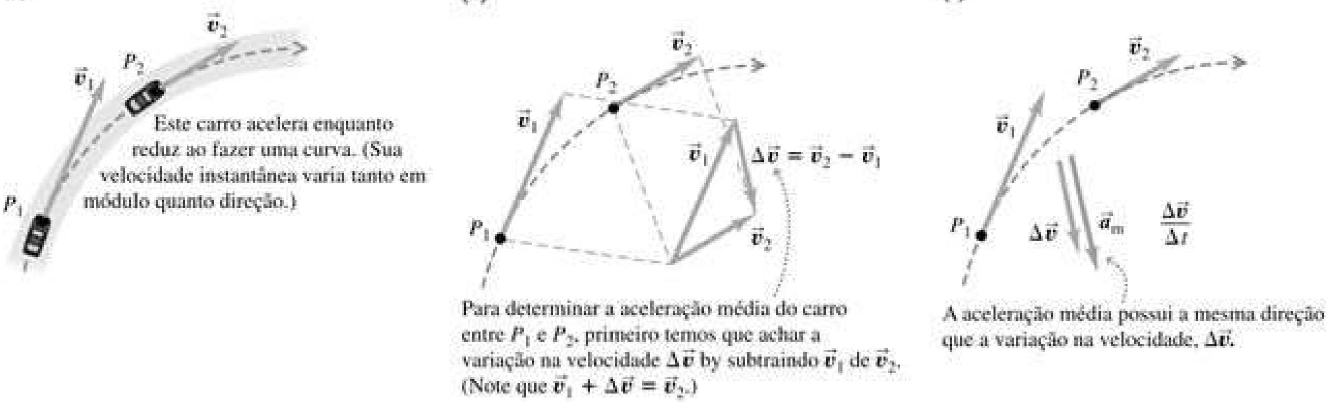


Figura 3.6 (a) Um carro se move ao longo de uma estrada em curva entre os pontos P_1 e P_2. (b) Obtemos $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ por subtração de vetores. (c) O vetor $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$ representa a aceleração média entre P_1 e P_2.

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{3.8}$$

(vetor aceleração média)

A aceleração média é uma grandeza *vetorial* que possui a mesma direção e sentido do vetor $\Delta\vec{v}$ (Figura 3.6c). Observe que $\vec{v}_2$ é a soma vetorial de $\vec{v}_1$ com a variação $\Delta\vec{v}$ (Figura 3.6b). O componente x da Equação (3.8) é $a_{mx} = (v_{2x} - v_{1x})/(t_2 - t_1) = \Delta v_x/\Delta t$, que é exatamente a Equação (2.4) para a aceleração média no movimento retilíneo.

Como no Capítulo 2, definimos a **aceleração instantânea** $\vec{a}$ no ponto P_1 como o limite da aceleração média quando o ponto P_2 se aproxima do ponto P_1 e $\Delta\vec{v}$ e Δt tendem a zero simultaneamente. A aceleração instantânea também é igual à taxa de variação da velocidade instantânea com o tempo. Como não estamos nos restringindo ao movimento retilíneo, a aceleração instantânea é agora uma grandeza vetorial (Figura 3.7):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3.9}$$

(vetor aceleração instantânea)

Conforme vimos, o vetor velocidade $\vec{v}$ é tangente à trajetória da partícula. Porém, as construções indicadas nas figuras 3.6c e 3.7 mostram que o vetor aceleração instantânea $\vec{a}$ de uma partícula em movimento sempre aponta para o lado côncavo de uma trajetória curva — ou seja, para o lado interno de qualquer volta que a partícula esteja fazendo.

ATENÇÃO Qualquer partícula que segue uma trajetória curva está acelerando Quando uma partícula se move ao longo de uma trajetória curva, sua aceleração é sempre diferente de zero, mesmo quando sua velocidade escalar for constante. Essa conclusão pode parecer contrária à nossa intuição, porém, ela é contrária apenas ao uso cotidiano da palavra 'aceleração' no sentido de aumento de velocidade. A definição mais precisa da Equação (3.9) mostra que pode existir aceleração diferente de zero quando houver qualquer variação do vetor velocidade, incluindo apenas variação da direção desse vetor, sem variação da velocidade escalar ou, então, variação simultânea da direção e da velocidade escalar.

Para se convencer de que uma partícula possui aceleração diferente de zero quando ela descreve uma trajetória curva com velocidade constante, lembre-se do que sente quando está viajando em um carro. Quando o carro acelera, você tende a se mover no interior dele em um sentido *contrário* ao da aceleração do carro. (Explicaremos a razão desse comportamento no Capítulo 4.) Logo, você tende a ser empurrado para a traseira do carro, quando ele acelera para frente (aumenta de velocidade), e para a frente

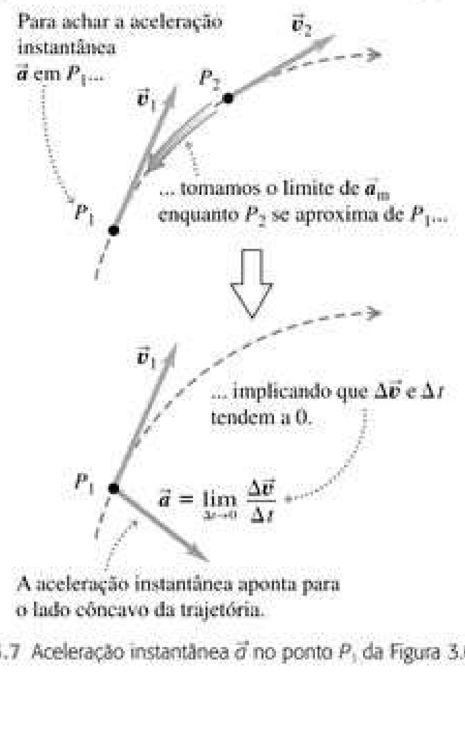


Figura 3.7 Aceleração instantânea $\vec{a}$ no ponto P_1 da Figura 3.6.

Figura 3.8 Quando o arqueiro dispara a flecha, ela acelera tanto para a frente quanto para trás. Logo, o seu vetor aceleração possui tanto um componente horizontal (a_x) quanto um componente vertical (a_y).

do carro quando ele acelera para trás (diminui de velocidade). Quando o carro faz uma curva em uma estrada plana, você tende a ser empurrado para fora da curva; portanto, o carro possui uma aceleração para dentro da curva.

Normalmente, estamos interessados no vetor aceleração instantânea, e não na aceleração média. A partir de agora, quando mencionamos a palavra 'aceleração', estaremos nos referindo ao vetor aceleração instantânea $\vec{a}$.

Cada componente do vetor aceleração é dado pela derivada do respectivo componente do vetor velocidade:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{3.10}$$

(componentes da aceleração instantânea)

Em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} \tag{3.11}$$

O componente x das equações (3.10) e (3.11), $a_x = dv_x/dt$, é a expressão da Seção 2.3 para a aceleração instantânea em uma dimensão, Equação (2.5). A Figura 3.8 apresenta o exemplo de um vetor aceleração que possui ambos os componentes x e y.

Como cada componente da velocidade é dado pela derivada da respectiva coordenada da posição, podemos escrever os componentes a_x, a_y e a_z do vetor aceleração $\vec{a}$ como

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{3.12}$$

e o vetor aceleração $\vec{a}$ do seguinte modo

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \tag{3.13}$$

Exemplo 3.2

CÁLCULO DA ACELERAÇÃO INSTANTÂNEA E DA ACELERAÇÃO MÉDIA Vamos analisar novamente os movimentos do veículo robótico mencionado no Exemplo 3.1. Os componentes da velocidade instantânea em função do tempo t são:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0{,}25\ \text{m/s}^2)(2t)$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1{,}0\ \text{m/s} + (0{,}025\ \text{m/s}^3)(3t^2)$$

e o vetor velocidade é

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (-0{,}50\ \text{m/s}^2)t\hat{\imath} + [1{,}0\ \text{m/s} + (0{,}075\ \text{m/s}^3)t^2]\hat{\jmath}$$

a) Calcule os componentes do vetor aceleração média no intervalo de tempo entre $t = 0{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s. b) Ache a aceleração instantânea para $t = 2{,}0$ s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo usa as relações vetoriais entre velocidade, aceleração média e aceleração instantânea.

PREPARAR: na parte a) Usamos a Equação (3.8); para calcularmos os componentes do vetor aceleração média, necessitamos dos componentes da velocidade no início e no final do intervalo de tempo. Na parte b) Determinamos os componentes da aceleração instantânea em qualquer instante t, tomando as derivativas de tempo dos componentes de velocidade, como na Equação (3.10).

EXECUTAR: a) Substituindo-se $t = 0{,}0$ s ou $t = 2{,}0$ s nas expressões de v_x e v_y, achamos que no início do intervalo ($t = 0{,}0$ s) os componentes da velocidade instantânea são

$$v_x = 0{,}0\ \text{m/s} \qquad v_y = 1{,}0\ \text{m/s}$$

e ao final do intervalo ($t = 2{,}0$ s), os componentes são

$$v_x = -1{,}0\ \text{m/s} \qquad v_y = 1{,}3\ \text{m/s}$$

(Os valores em $t = 2{,}0$ s são os mesmos que os encontrados no Exemplo 3.1.)

$$a_{mx} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-1{,}0\ \text{m/s} - 0{,}0\ \text{m/s}}{2{,}0\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s}} = -0{,}5\ \text{m/s}^2$$

$$a_{my} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{1{,}3\ \text{m/s} - 1{,}0\ \text{m/s}}{2{,}0\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s}} = 0{,}15\ \text{m/s}^2$$

b) Pela Equação (3.10), achamos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0{,}50\ \text{m/s}^2 \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = (0{,}075\ \text{m/s}^3)(2t)$$

Podemos escrever o vetor aceleração instantânea $\vec{a}$ como

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = (-0{,}50\ \text{m/s}^2)\hat{\imath} + (0{,}15\ \text{m/s}^3)t\hat{\jmath}$$

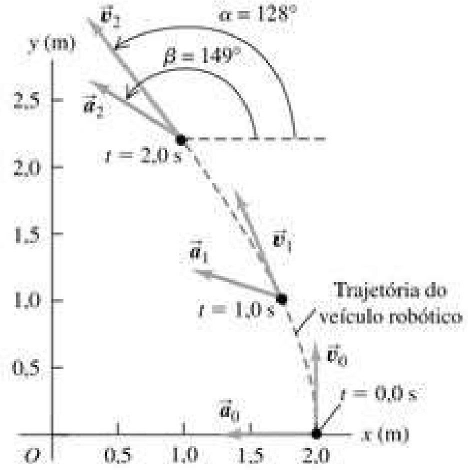


Figura 3.9 Trajetória do veículo robótico mostrando a velocidade e a aceleração para $t = 0,0$ s ($\vec{v}_0$ e $\vec{a}_0$), $t = 1,0$ s ($\vec{v}_1$ e $\vec{a}_1$) e $t = 2,0$ s ($\vec{v}_2$ e $\vec{a}_2$).

Para $t = 2,0$ s, os componentes da aceleração instantânea são

$$a_x = -0{,}50 \text{ m/s}^2 \qquad a_y = (0{,}15 \text{ m/s}^3)(2{,}0 \text{ s}) = 0{,}30 \text{ m/s}^2$$

O vetor de aceleração nesse instante é

$$\vec{a} = (-0{,}50 \text{ m/s}^2)\hat{\imath} + (0{,}30 \text{ m/s}^2)\hat{\jmath}$$

O módulo da aceleração nesse instante é

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$
$$= \sqrt{(-0{,}50 \text{ m/s}^2)^2 + (0{,}30 \text{ m/s}^2)^2} = 0{,}58 \text{ m/s}^2$$

A direção de $\vec{a}$ em relação ao sentido positivo do eixo Ox é dada pelo ângulo β, onde

$$\text{tg}\beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{0{,}30 \text{ m/s}^2}{-0{,}50 \text{ m/s}^2} = -0{,}60$$
$$\beta = 180° - 31° = 149°$$

AVALIAR: convidamos você a determinar a aceleração instantânea para $t = 0,0$ s e para $t = 1,0$ s. A trajetória do veículo e os vetores velocidade e aceleração para $t = 0,0$ s, $t = 1,0$ s e $t = 2,0$ s são indicados na Figura 3.9. Note que a direção do vetor $\vec{v}$ é *diferente* da direção do vetor $\vec{a}$ em todos os pontos indicados. O vetor velocidade $\vec{v}$ é tangente à trajetória em cada ponto, e o vetor aceleração $\vec{a}$ aponta para o lado côncavo da trajetória.

Os componentes perpendiculares e paralelos da aceleração

O vetor aceleração $\vec{a}$ para uma partícula pode descrever variações na velocidade escalar dessa partícula, a direção do seu movimento ou ambos. É útil observar que o componente de aceleração paralelo à trajetória de uma partícula — ou seja, paralelo à velocidade — informa sobre as variações na *velocidade escalar* da partícula, enquanto o componente de aceleração *perpendicular* à trajetória — e, portanto, perpendicular à velocidade — informa sobre as variações na *direção do movimento* da partícula. A Figura 3.10 mostra esses componentes, que são indicados com os

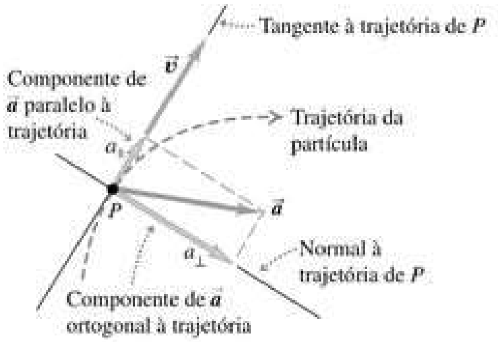


Figura 3.10 A aceleração pode ser decomposta no componente $a_\parallel$ paralelo à trajetória (e à velocidade) e no componente $a_\perp$ ortogonal à trajetória (ou seja, ao longo da normal à trajetória).

símbolos $a_\parallel$ e $a_\perp$. Para entender por que os componentes paralelo e perpendicular de $\vec{a}$ possuem essas propriedades, vamos considerar dois casos especiais.

Na Figura 3.11a, o vetor aceleração é *paralelo* ao vetor velocidade $\vec{v}_1$, portanto $\vec{a}$ possui apenas um componente paralelo $a_\parallel$ (ou seja, $a_\perp = 0$). A variação de $\Delta\vec{v}$ durante um pequeno intervalo de tempo Δt é o vetor Δv que é paralelo ao vetor $\vec{a}$ e, portanto, na mesma direção que $\vec{v}_1$. A velocidade $\vec{v}_2$ no final do intervalo Δt, dada por $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$, é um vetor paralelo a $\vec{v}_1$ possuindo, porém, módulo maior. Em outras palavras, durante o intervalo de tempo Δt a partícula da Figura 3.11a se moveu em linha reta com velocidade crescente.

Na Figura 3.11b a aceleração é *perpendicular* ao vetor velocidade, portanto $\vec{a}$ possui apenas um componente perpendicular $a_\perp$ (ou seja, $a_\parallel = 0$). A variação da velocidade durante um pequeno intervalo de tempo Δt é o vetor $\Delta\vec{v}$ aproximadamente perpendicular a $\vec{v}_1$. Novamente, $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$, porém, neste caso, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ possuem direções diferentes. Quando o intervalo de tempo Δt tende a zero, o ângulo ϕ na figura também tende a zero e $\Delta\vec{v}$ torna-se perpendicular a *ambos* os vetores, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, os quais

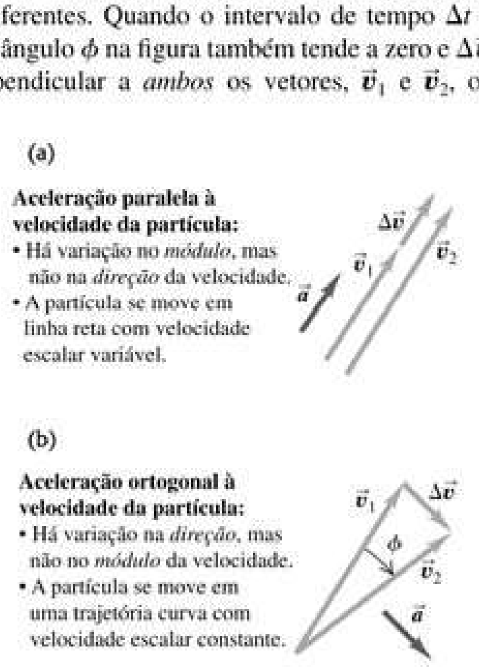


Figura 3.11 O efeito da aceleração direcionada (a) em paralelo e (b) ortogonal à velocidade de uma partícula.

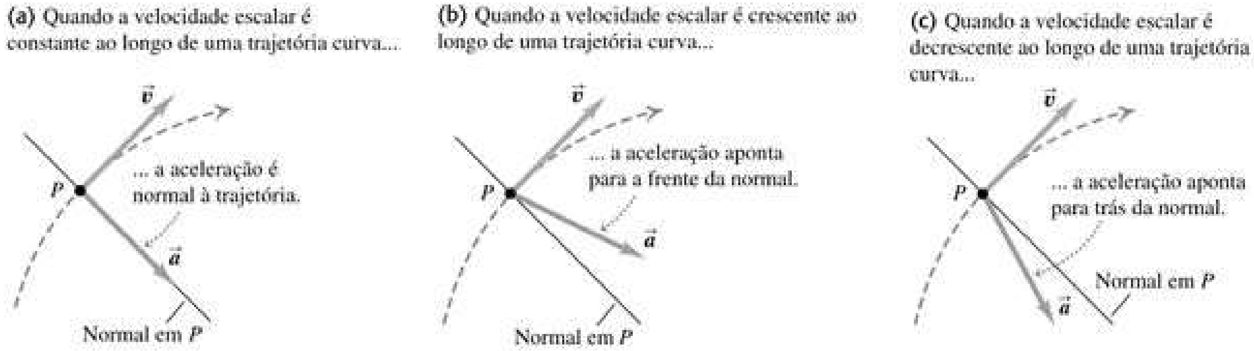


Figura 3.12 Vetores da velocidade e aceleração para uma partícula que atravessa um ponto P em uma trajetória curva com (a) velocidade escalar constante, (b) velocidade escalar crescente e (c) velocidade escalar decrescente.

possuem o mesmo módulo. Em outras palavras, a velocidade escalar permanece constante, porém a trajetória da partícula torna-se curva.

Na maioria dos casos, a aceleração $\vec{a}$ possui *ambos* os componentes, o paralelo e o perpendicular à velocidade $\vec{v}$, como na Figura 3.10. Então a velocidade escalar da partícula sofrerá variação (descrita pelo componente paralelo $a_\parallel$) *e* a direção do seu movimento sofrerá variação (descrita pelo componente perpendicular $a_\perp$), de modo que ela seguirá uma trajetória curva.

A Figura 3.12 mostra uma partícula descrevendo uma trajetória curva em três situações diferentes: velocidade escalar constante, velocidade escalar crescente e velocidade escalar decrescente. Quando a velocidade escalar é constante, $\vec{a}$ é perpendicular, ou *normal* à $\vec{v}$ e à trajetória e aponta para o lado côncavo da curva (Figura 3.12a). Quando a velocidade escalar é crescente, ainda existe um componente perpendicular de $\vec{a}$, porém existe também um componente paralelo que possui a mesma direção de $\vec{v}$ (Figura 3.12b). Então, $\vec{a}$ aponta para a frente da normal à trajetória. (Este foi o caso do Exemplo 3.2.) Quando a velocidade escalar é decrescente, o componente paralelo possui direção oposta à direção de $\vec{v}$, e $\vec{a}$ aponta para trás da normal à trajetória (Figura 3.12c). Usaremos essas idéias na Seção 3.4, quando estudarmos o caso especial do movimento circular.

Exemplo 3.3

CÁLCULO DOS COMPONENTES PARALELO E PERPENDICULAR DA ACELERAÇÃO Para o veículo robótico mencionado nos exemplos 3.1 e 3.2, ache os componentes paralelos e perpendiculares da aceleração em $t = 2{,}0$ s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: queremos encontrar os componentes do vetor aceleração $\vec{a}$ que são paralelos e perpendiculares ao vetor velocidade $\vec{v}$.

PREPARAR: achamos as direções de $\vec{a}$ e $\vec{v}$ nos exemplos 3.2 e 3.1, respectivamente. Isso nos permitirá encontrar o ângulo entre os dois vetores e, portanto, os componentes de $\vec{a}$.

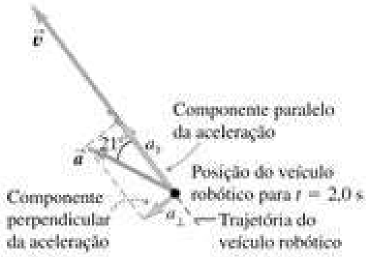


Figura 3.13 Os componentes paralelo e perpendicular da aceleração do veículo robótico em $t = 2{,}0$ s.

EXECUTAR: no Exemplo 3.2, achamos que para $t = 2{,}0$ s, a partícula tem aceleração de módulo 0,58 m/s² em um ângulo de 149° em relação ao sentido positivo do eixo *Ox*. Conforme o Exemplo 3.1, nesse mesmo instante o vetor velocidade forma um ângulo de 128° em relação ao sentido positivo do eixo *Ox*. Assim, a Figura 3.9 mostra que o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{v}$ é $149° - 128° = 21°$ (Figura 3.13). Os componentes paralelo e perpendicular da aceleração são

$$a_\parallel = a\cos 21° = (0{,}58\ \text{m/s}^2)\cos 21° = 0{,}54\ \text{m/s}^2$$
$$a_\perp = a\,\text{sen}\,21° = (0{,}58\ \text{m/s}^2)\,\text{sen}\,21° = 0{,}21\ \text{m/s}^2$$

AVALIAR: o componente paralelo $a_\parallel$ possui a mesma direção de $\vec{v}$, indicando que velocidade escalar é crescente nesse ponto 1; o valor de $a_\parallel = 0{,}54$ m/s² indica que a velocidade escalar é estimada em 0,54 m/s por segundo. Como o componente perpendicular $a_\perp$ não é nulo, concluímos que a trajetória do veículo é curva neste ponto; em outras palvras, o veículo está fazendo uma volta.

Exemplo conceitual 3.4

ACELERAÇÃO DE UMA ESQUIADORA Uma esquiadora se move ao longo de uma rampa para esqui conforme indicado na Figura 3.14a. A rampa é retilínea do ponto *A* ao ponto *C* e encurvada a partir do ponto *C*. A esquiadora ganha velocidade quando ela desce do ponto *A* ao ponto *E*, onde sua velocidade adquire seu valor máximo. Sua velocidade passa a diminuir depois que ela passa do ponto *E*. Desenhe a direção do vetor aceleração nos pontos *B*, *D*, *E* e *F*.

SOLUÇÃO

A Figura 3.14b demonstra nossa solução. No ponto B, a esquiadora se move em linha reta com velocidade crescente; logo, sua aceleração aponta de cima para baixo, na mesma direção e sentido da sua velocidade.

No ponto D, a esquiadora se move ao longo de uma trajetória curva, logo, sua aceleração possui um componente perpendicular à trajetória. Existe também um componente na direção do seu movimento, porque ela ainda está ganhando velocidade quando passa por esse ponto. Portanto, o vetor aceleração aponta para a *frente* da normal à sua trajetória no ponto D.

A velocidade escalar da esquiadora não varia instantaneamente no ponto E; sua velocidade adquire o valor máximo nesse ponto, de modo que sua derivada é igual a zero. Portanto, não existe nenhum componente paralelo de $\vec{a}$, e a aceleração é perpendicular ao seu movimento.

Finalmente, no ponto F, a aceleração possui um componente perpendicular (porque sua trajetória é curva nesse ponto) e um componente paralelo com sentido *oposto* ao sentido do seu movimento (porque sua velocidade está diminuindo). Portanto, o vetor aceleração aponta para *trás* da normal à sua trajetória.

Na próxima seção examinaremos a aceleração da esquiadora quando ela saltar da rampa.

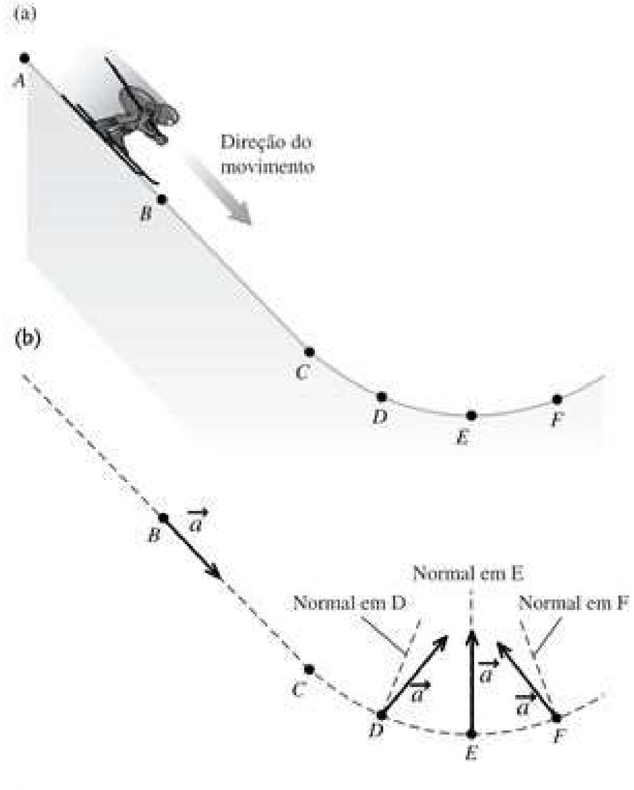


Figura 3.14 (a) A trajetória da esquiadora. (b) Nossa solução.

Teste sua compreensão da Seção 3.2 Um trenó passa pelo topo de uma colina coberta de neve. Sua velocidade diminui ao subir pela encosta da colina e aumenta ao descer pelo outro lado. Qual dos vetores (de 1 a 9) na figura demonstra corretamente a direção da aceleração do trenó no topo da colina? (A alternativa 9 corresponde a uma aceleração igual a zero.) ❚

3.3 Movimento de um projétil

Um **projétil** é qualquer corpo lançado com uma velocidade inicial e que segue uma trajetória determinada exclusivamente pela aceleração da gravidade e pela resistência do ar. Uma bola de beisebol batida, uma bola de futebol chutada, um pacote largado de um avião e uma bala atirada por uma arma de fogo são exemplos de projéteis. A curva descrita pelo projétil é a sua trajetória.

A fim de analisarmos esse tipo comum de movimento, começaremos com um modelo idealizado, representando o projétil como uma partícula com aceleração (devida à gravidade) constante em módulo, direção e sentido. Vamos desprezar os efeitos de resistência do ar e a curvatura e rotação da Terra. Como todo modelo, este possui algumas limitações. A curvatura da Terra tem de ser considerada no movimento de um míssil de longo alcance e a resistência do ar é de importância fundamental para o movimento de um pára-quedista. Contudo, podemos aprender muito da análise deste modelo simplificado. No restante deste capítulo, a frase 'movimento de um projétil' implica que desprezamos os efeitos de resistência do ar. No Capítulo 5 veremos o que ocorre quando não podemos desprezar os efeitos da resistência do ar.

Notamos inicialmente que o movimento de um projétil está sempre confinado em um plano vertical determinado pela direção da velocidade inicial (Figura 3.15). Isso ocorre porque a aceleração da gravidade é sempre vertical; a gravidade não pode produzir um movimento lateral do projétil. Logo, o movimento de um projétil ocorre em *duas dimensões*. O plano do movimento será considerado o plano de coordenadas xy, sendo o eixo Ox horizontal e o eixo Oy vertical e orientado de baixo para cima.

A chave para analisar o movimento de um projétil é tratar as coordenadas x e y separadamente. O componente x da aceleração é igual a zero, e o componente y é constante e igual a $-g$. (Lembre-se de que, por definição, g é sempre positivo; com a nossa escolha do sentido do eixo, a_y é negativo.) Dessa forma, *podemos considerar o movimento de um projétil como a combinação de um movimento horizontal com velocidade constante e um movimento vertical com aceleração constante*. A Figura 3.16 mostra dois projéteis com diferentes movimentos no eixo Ox, mas idênticos movimentos no eixo Oy;

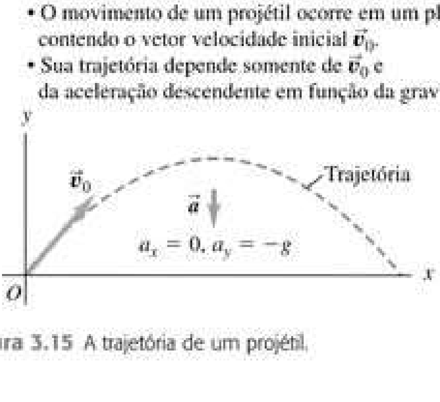


Figura 3.15 A trajetória de um projétil.

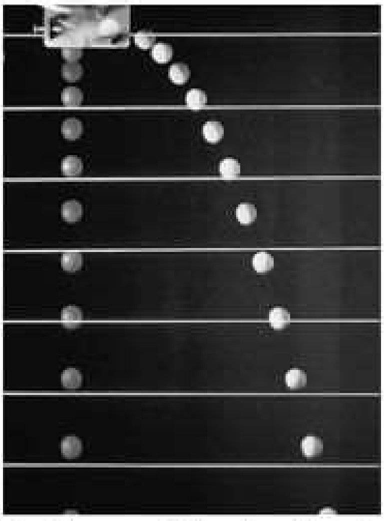


Figura 3.16 A bola da esquerda é largada verticalmente sem velocidade inicial. Simultaneamente, a bola da direita é lançada horizontalmente do mesmo ponto; imagens sucessivas desta fotografia estroboscópica são registradas em intervalos de tempo iguais. Para cada intervalo de tempo, as duas bolas possuem os mesmos componentes y da posição, da velocidade e da aceleração, embora os componentes x da posição e da velocidade sejam diferentes.

um corresponde ao movimento de uma bola largada sem velocidade inicial e o outro foi lançado horizontalmente do mesmo ponto, porém ambos caem verticalmente à mesma distância em intervalos de tempo iguais.

Assim podemos expressar todas as relações vetoriais para a posição, velocidade e aceleração usando equações separadas para os componentes horizontais e perpendiculares. O movimento efetivo do projétil é a superposição desses movimentos separados. Os componentes de $\vec{a}$ são

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g \tag{3.14}$$

(movimento de um projétil, sem resistência do ar)

Uma vez que os componentes x e y da aceleração são constantes, podemos usar as equações (2.8), (2.12), (2.13) e (2.14) diretamente. Por exemplo, suponha que no instante $t = 0$ a partícula esteja em repouso no ponto (x_0, y_0) e que nesse instante sua velocidade inicial possua componentes v_{0x} e v_{0y}. Os componentes da aceleração são $a_x = 0$ e $a_y = -g$. Considerando inicialmente o movimento no eixo Ox e substituindo a_x por 0 nas equações (2.8) e (2.12), achamos

$$v_x = v_{0x} \tag{3.15}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \tag{3.16}$$

Para o movimento no eixo Oy, substituindo y por x, v_y por v_x, v_{0y} por v_{0x} e a_y por $-g$ para a_x, achamos

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{3.17}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.18}$$

Normalmente é mais simples considerar a posição inicial ($t = 0$) como a origem; nesse caso $x_0 = y_0 = 0$. Este ponto poderia ser, por exemplo, a posição da mão quando lançamos uma bola ou a posição de uma bala de munição quando ela deixa o cano da arma.

A Figura 3.17 mostra a trajetória de um projétil que começa na origem (ou a atravessa) em dado instante $t = 0$. Os componentes da posição, da velocidade e da aceleração são indicados para intervalos de tempo iguais. O componente x da aceleração é igual a zero, portanto v_x é constante. O componente y da aceleração é constante e não nulo, de modo que v_y varia em quantidades iguais durante intervalos de tempo iguais, exatamente como se o projétil fosse lançado verticalmente com a mesma velocidade inicial y. No ponto mais elevado da sua trajetória, $v_y = 0$.

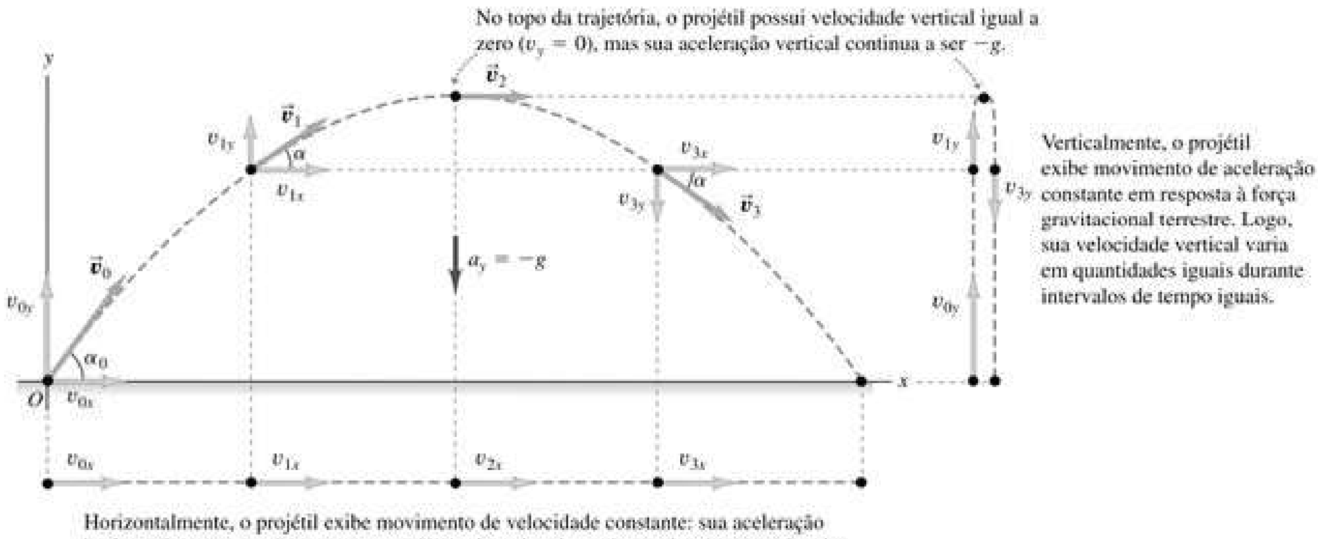


Figura 3.17 Se desprezarmos a resistência do ar, a trajetória de um projétil é uma combinação do movimento horizontal com a velocidade constante e do movimento vertical com a aceleração constante.

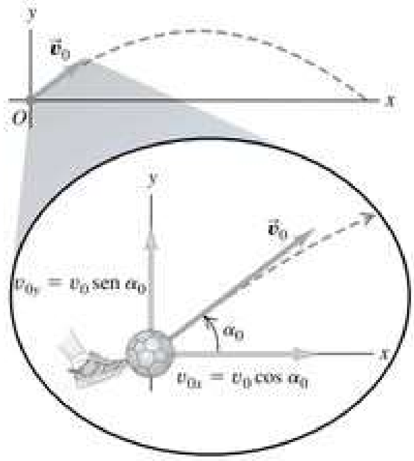


Figura 3.18 Os componentes de velocidade inicial v_{0x} e v_{0y} de um projétil (tal como um bola de futebol chutada) se relacionam com a velocidade escalar inicial v_0 e o ângulo inicial α_0).

Podemos também representar a velocidade inicial $\vec{v}_0$ por seu módulo v_0 (a velocidade escalar inicial) e seu ângulo α_0 com o sentido positivo do eixo Ox (Figura 3.18). Em termos dessas grandezas, os componentes v_{0x} e v_{0y} da velocidade inicial são:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \tag{3.19}$$

Usando este resultado nas relações indicadas pela Equação (3.15) até a Equação (3.18) e fazendo $x_0 = y_0 = 0$, obtemos

$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t \tag{3.20}$$
(movimento de um projétil)

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.21}$$
(movimento de um projétil)

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \tag{3.22}$$
(movimento de um projétil)

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 - gt \tag{3.23}$$
(movimento de um projétil)

Essas equações descrevem a posição e a velocidade de um projétil na Figura 3.17 em qualquer instante t.

Dessas equações podemos extrair muitas informações. Por exemplo, em qualquer instante, a distância r entre o projétil e a origem (o módulo do vetor posição $\vec{r}$) é dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.24}$$

A velocidade escalar do projétil (o módulo de sua velocidade) em qualquer instante é dada por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{3.25}$$

A *direção e o sentido* da velocidade em termos do ângulo α que ela faz com o sentido positivo do eixo Ox (Figura 3.17) são dados por

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.26}$$

O vetor velocidade $\vec{v}$ em cada ponto é tangente à trajetória no referido ponto.

Podemos deduzir a equação da forma da trajetória em termos de x e de y eliminando t. Pelas equações (3.20) e (3.21), que supõem $x_0 = y_0 = 0$, encontramos

$$y = (\operatorname{tg}\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2 \tag{3.27}$$

Não se preocupe com os detalhes desta equação; o ponto importante é sua forma geral. As grandezas v_0, tg α_0, cos α_0 e g são constantes, de modo que essa equação tem a forma:

$$y = bx - cx^2$$

onde b e c são constantes. Trata-se da equação de uma *parábola*. A trajetória do movimento de um projétil, com nosso modelo simplificado, é sempre uma parábola (Figura 3.19).

(a) Imagens sucessivas da bola são separadas por intervalos de tempo iguais.

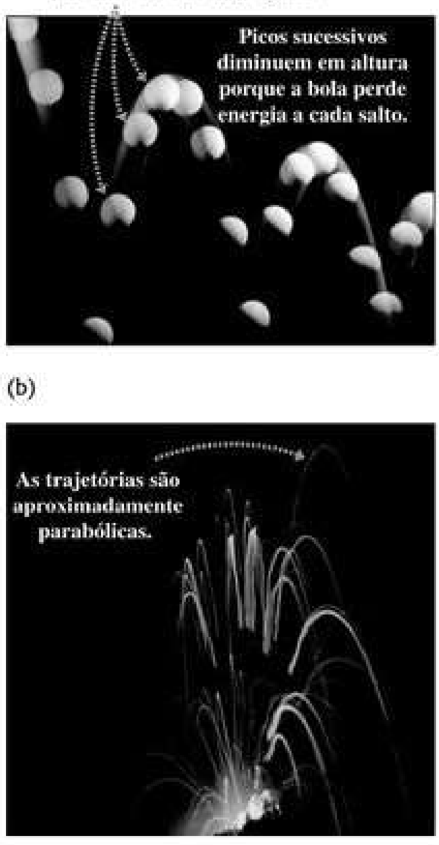


Figura 3.19 As trajetórias aproximadamente parabólicas de a) uma bola que quica e b) bolhas de rocha derretida que são ejetadas por um vulcão.

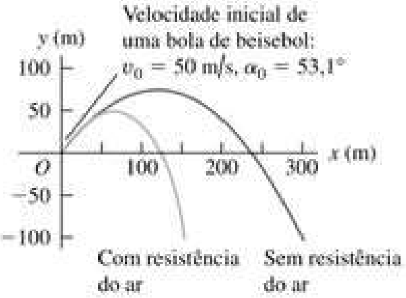


Figura 3.20 A resistência do ar tem um efeito amplo no movimento de uma bola de beisebol. Nesta simulação deixamos uma bola de beisebol cair de um ponto bastante alto e outra foi arremessada (por exemplo, a bola de beisebol poderia ter sido arremessada de um penhasco.)

Quando a resistência do ar *não* pode ser desprezada sempre e tem que ser incluída, calcular a trajetória torna-se mais complicada; os efeitos da resistência do ar dependem da velocidade, de modo que a aceleração deixa de ser constante. A Figura 3.20 mostra duas simulações de computador para a trajetória de uma bola de beisebol: uma sem resistência do ar e outra considerando uma resistência do ar proporcional ao quadrado da velocidade da bola de beisebol. Vemos que a resistência do ar possui um grande efeito; ocorre diminuição do alcance e da altura máxima, e a trajetória deixa de ser uma parábola. (Se analisarmos atentamente a Figura 3.19b, notaremos que as trajetórias das bolhas vulcânicas desviam-se de forma similar a um formato parabólico.)

Exemplo conceitual 3.5

ACELERAÇÃO DE UMA ESQUIADORA, CONTINUAÇÃO
Vamos retomar o Exemplo Conceitual 3.4, da esquiadora. Qual é a aceleração dela nos pontos *G*, *H* e *I* na Figura 3.21a *após* ela saltar da rampa? Despreze a resistência do ar.

SOLUÇÃO

A Figura 3.21b mostra nossa resposta. A aceleração da esquiadora varia de um ponto a outro, enquanto ela está sobre a rampa. Mas, assim que deixa a rampa, ela se torna um projétil. Logo, nos pontos *G*, *H* e *I*, e de fato em *todos* os pontos após ela saltar da rampa, a aceleração é orientada de cima para baixo e possui módulo g. Por mais complicada que seja a aceleração de uma partícula antes de ela se tornar um projétil, sua aceleração como projétil é dada por $a_x = 0$, $a_y = -g$.

Estratégia para a solução de problemas 3.1

MOVIMENTO DE UM PROJÉTIL
NOTA: as estratégias recomendadas nas seções 2.4 e 2.5 para problemas de aceleração constante em movimento retilíneo também são úteis aqui.

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*: o principal conceito a se lembrar é que, durante o movimento do projétil, a aceleração é descendente e possui um módulo g constante. Vale observar que as equações de movimento de um projétil não se aplicam ao arremessar uma bola, porque o arremesso sofre ação tanto da mão do arremessador quanto da gravidade. Essas equações se aplicam somente após a bola deixar a mão do arremessador.

PREPARAR *o problema* usando os seguintes passos:
1. Defina seu sistema de coordenadas e faça um desenho mostrando os eixos. Em geral, é mais simples colocar a origem na posição inicial do projétil ($t = 0$), posição em que um corpo inicialmente se torna um projétil (tal como onde uma bola deixa a mão do arremessador), com o eixo Ox horizontal e o eixo Oy vertical e orientado de baixo para cima. Nesse caso, os componentes da aceleração (constante) são $a_x = 0$ e $a_y = -g$, e a posição inicial é $x_0 = 0$, $y_0 = 0$
2. Faça uma lista com as grandezas conhecidas e as desconhecidas. Em alguns problemas, os componentes (ou o módulo, a direção e o sentido) da velocidade inicial são fornecidos, e você poderá usar o conjunto de relações da Equação (3.20) à Equação (3.23) para achar a posição e os componentes da velocidade em qualquer outro instante. (Algumas outras equações fornecidas na Seção 3.3 também podem ser úteis.) Certifique-se de ter tantas equações quantas forem as incógnitas a serem resolvidas.
3. Normalmente é útil formular o problema em palavras e posteriormente traduzi-lo em símbolos. Por exemplo, *quando* uma

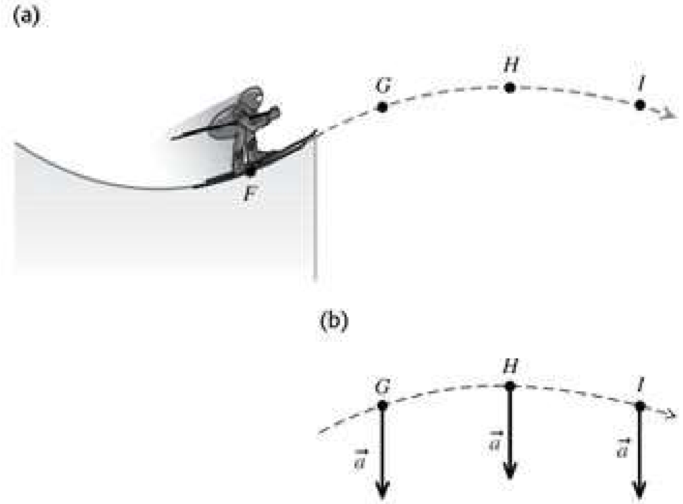


Figura 3.21 (a) A trajetória da esquiadora durante o salto. (b) Nossa solução.

partícula atinge um dado ponto? (Ou seja, qual é o valor de t?) *Onde* está a partícula quando possui um dado valor da velocidade? (Ou seja, qual é o valor de x e de y quando os valores de v_x ou v_y forem especificados?) Como no ponto mais elevado de sua trajetória $v_y = 0$, a pergunta 'Quando o projétil atinge o ponto mais elevado de sua trajetória?' se traduz como 'Qual é o valor de t quando $v_y = 0$?' Da mesma forma, 'Quando o projétil retorna à sua elevação inicial?' se traduz como 'Qual é o valor de t quando $y = y_0$?'

EXECUTAR *a solução:* use as equações (3.20) até (3.23) para achar as incógnitas. Resista à tentação de segmentar a trajetória e analisar cada segmento separadamente. Não é necessário recomeçar quando o projétil atinge seu ponto máximo! É quase sempre mais fácil usar os mesmos eixos e escala de tempo por todo o problema. Use o valor $g = 9{,}8$ m/s^2.

AVALIAR *sua resposta:* como sempre, analise seus resultados para verificar se fazem sentido e se os valores numéricos parecem razoáveis.

Exemplo 3.6

UM CORPO PROJETADO HORIZONTALMENTE Um motociclista maluco se projeta para fora da borda de um penhasco. No ponto exato da borda, sua velocidade é horizontal e possui módulo igual a 9,0 ms. Ache a posição do motociclista, a distância da borda do penhasco e a velocidade depois de 0,50 s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: assim que o motociclista deixa o penhasco, ele está em movimento de projétil. Sua velocidade na borda do penhasco é, portanto, sua velocidade inicial.

PREPARAR: a Figura 3.22 mostra nosso desenho. Colocamos a origem de nosso sistema de coordenadas na borda do penhasco, onde o motociclista inicialmente se torna um projétil; assim, $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. A velocidade inicial é puramente horizontal (ou seja, $\alpha_0 = 0$), assim, as velocidades iniciais dos componentes são $v_{0x} = v_0\cos\alpha_0 = 9{,}0$ m/s e $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 = 0$. Para achar a posição do motociclista no instante $t = 0{,}50$ s, usamos as equações (3.20) e (3.21), que dão x e y em função do tempo. Então determinamos a distância a partir da origem usando a Equação (3.24). Finalmente, usamos as equações (3.22) e (3.23) para encontrar os componentes de velocidade v_x e v_y em $t = 0{,}50$ s.

EXECUTAR: onde está a motocicleta em $t = 0{,}50$ s? A partir das equações (3.20) e (3.21), as coordenadas x e y são

$$x = v_{0x}t = (9{,}0\text{ m/s})(0{,}50\text{ s}) = 4{,}5\text{ m}$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}(9{,}8\text{ m/s}^2)(0{,}50\text{ s})^2 = -1{,}2\text{ m}$$

O valor negativo de y mostra que neste instante o motociclista está abaixo de seu ponto de partida.

Qual é a distância do motociclista de seu ponto de partida neste instante? Da Equação (3.24),

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4{,}5\text{ m})^2 + (-1{,}2\text{ m})^2} = 4{,}7\text{ m}$$

Qual é a velocidade em $t = 0{,}50$ s? Pelas equações (3.22) e (3.23), os componentes da velocidade neste instante são:

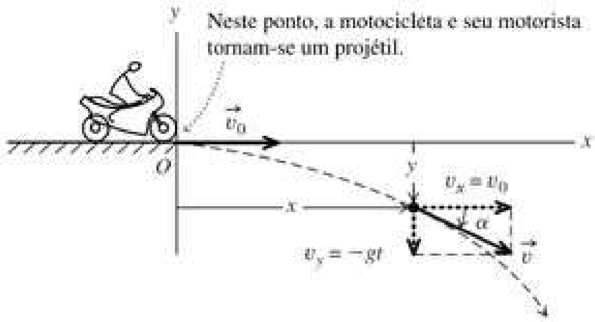


Figura 3.22 Nosso desenho para esse problema.

$$v_x = v_{0x} = 9{,}0\text{ m/s}$$
$$v_y = -gt = (-9{,}8\text{ m/s}^2)(0{,}50\text{ s}) = -4{,}9\text{ m/s}$$

A motocicleta tem a mesma velocidade horizontal v_x de quando deixou o penhasco em $t = 0$, além de ter uma velocidade vertical v_y (negativa) para baixo. Se usarmos vetores unitários, a velocidade em $t = 0{,}50$ s será

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (9{,}0\text{ m/s})\hat{\imath} + (-4{,}9\text{ m/s})\hat{\jmath}$$

Também podemos expressar a velocidade em termos de módulo, direção e sentido. Pela Equação (3.25), a velocidade (módulo da velocidade) neste instante será

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$= \sqrt{(9{,}0\text{ m/s})^2 + (-4{,}9\text{ m/s})^2} = 10{,}2\text{ m/s}$$

Pela Equação (3.26), o ângulo α do vetor velocidade será

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-4{,}9\text{ m/s}}{9{,}0\text{ m/s}}\right) = -29°$$

Neste instante a velocidade é 29° abaixo da horizontal.

AVALIAR: como demonstrado na Figura 3.17, o aspecto horizontal do movimento não varia em função da gravidade; a motocicleta continua a se mover horizontalmente a 9,0 m/s, cobrindo 4,5 m em 0,50 s. Inicialmente, a motocicleta possui velocidade vertical zero e por isso cai verticalmente, como um corpo solto a partir do repouso, e desce uma distância de $\frac{1}{2}gt^2 = 1{,}2$ m em 0,50 s.

Exemplo 3.7

ALCANCE E ALTURA DE UM PROJÉTIL I: UMA BOLA DE BEISEBOL Uma bola de beisebol deixa o bastão do batedor com uma velocidade inicial de $v_0 = 37{,}0$ m/s com um ângulo inicial de $\alpha_0 = 53{,}1°$ em um local onde $g = 9{,}80$ m/s^2. a) Ache a posição da bola e o módulo, a direção e o sentido de sua velocidade para $t = 2{,}0$ s. b) Calcule o tempo que a bola leva para atingir a altura máxima de sua trajetória e ache a altura h desse ponto. c) Ache o *alcance horizontal R*, ou seja, a distância entre o ponto inicial e o ponto onde a bola atinge o solo.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: conforme mostramos na Figura 3.20, a resistência do ar para o movimento de uma bola de beisebol não pode ser desprezada. Contudo, para simplificar, vamos ignorar a resistência do ar neste exemplo e usar as equações de movimento de um projétil.

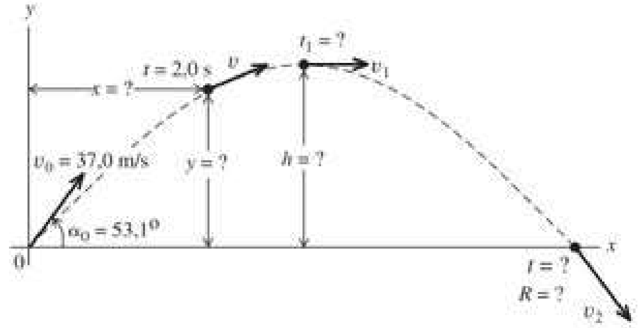


Figura 3.23 Nossa visualização deste problema.

PREPARAR: a Figura 3.23 mostra nosso desenho. Usamos o mesmo sistema de coordenadas da Figura 3.17 ou 3.18, de modo que podemos aplicar as equações (3.20) até (3.23), sem quaisquer modificações. Nossas incógnitas são 1) a posição e a velocidade da bola 2,0 s após ela deixar o bastão, 2) o tempo decorrido após deixar o bastão, quando a bola está na sua altura máxima — ou seja, quando $v_y = 0$ — e a coordenada y nesse instante e 3) a coordenada x nesse instante em que a coordenada y é igual ao valor inicial y_0.

A bola de beisebol é batida cerca de um metro acima do solo, mas desprezamos essa distância e supomos que o movimento inicia-se no nível do solo ($y_0 = 0$). A velocidade inicial da bola é

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = (37{,}0 \text{ m/s})\cos 53{,}1° = 22{,}2 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 = (37{,}0 \text{ m/s})\operatorname{sen} 53{,}1° = 29{,}6 \text{ m/s}$$

EXECUTAR: a) queremos achar x, y, v_x e v_y no instante $t = 2{,}0$ s. Pelas equações (3.20) e (3.23),

$$x = v_{0x}t = (22{,}2 \text{ m/s})(2{,}0 \text{ s}) = 44{,}4 \text{ m}$$
$$\begin{aligned} y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= (29{,}6 \text{ m/s})(2{,}0 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9{,}80 \text{ m/s}^2)(2{,}0 \text{ s})^2 \\ &= 39{,}6 \text{ m} \end{aligned}$$
$$v_x = v_{0x} = 22{,}2 \text{ m/s}$$
$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt = 29{,}6 \text{ m/s} - (9{,}80 \text{ m/s}^2)(2{,}0 \text{ s}) \\ &= 10{,}0 \text{ m/s} \end{aligned}$$

O componente y da velocidade é positivo, o que significa que a bola ainda está em movimento ascendente nesse instante (Figura 3.23). O módulo e a direção da velocidade podem ser determinados pelas equações (3.25) e (3.26):

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(22{,}2 \text{ m/s})^2 + (10{,}0 \text{ m/s})^2} \\ &= 24{,}3 \text{ m/s} \end{aligned}$$
$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{10{,}0 \text{ m/s}}{22{,}2 \text{ m/s}}\right) = \operatorname{arctg} 0{,}450 = 24{,}2°$$

A direção da velocidade (ou seja, a direção do movimento) é 24,2° acima da horizontal.

b) No ponto mais alto, a velocidade vertical v_y é zero. Quando isso ocorre? Designamos o tempo como t_1; logo

$$v_y = v_{0y} - gt_1 = 0$$
$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{29{,}6 \text{ m/s}}{9{,}80 \text{ m/s}^2} = 3{,}02 \text{ s}$$

A altura h nesse instante é o valor de y quando $t = t_1 = 3{,}02$ s:

$$\begin{aligned} h &= v_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \\ &= (29{,}6 \text{ m/s})(3{,}02 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9{,}80 \text{ m/s}^2)(3{,}02 \text{ s})^2 \\ &= 44{,}7 \text{ m} \end{aligned}$$

c) Encontraremos o alcance horizontal em duas etapas. Inicialmente, *quando* a bola atinge o solo? Isso ocorre quando $y = 0$. Chame esse instante de t_2; então

$$y = 0 = v_{0y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = t_2\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt_2\right)$$

Trata-se de uma equação do segundo grau em t_2. As duas raízes são

$$t_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2(29{,}6 \text{ m/s})}{9{,}80 \text{ m/s}^2} = 6{,}04 \text{ s}$$

Existem dois instantes para os quais $y = 0$; $t_2 = 0$ corresponde ao instante em que a bola *deixa* o solo e $t_2 = 2v_{0y}/g = 6{,}04$ s é o instante em que a bola retorna ao solo. Isso é exatamente igual ao dobro do tempo que ela leva para atingir a altura máxima, visto que o tempo de subida é igual ao tempo de descida. Isso é *sempre* verdade quando o ponto inicial e o ponto final da trajetória estão no mesmo nível e a resistência do ar pode ser desprezada. O alcance horizontal R é o valor de x quando a bola retorna ao solo, isto é, para $t = 6{,}04$ s:

$$R = v_{0x}t_2 = (22{,}2 \text{ m/s})(6{,}04 \text{ s}) = 134 \text{ m}$$

O componente vertical da velocidade quando a bola atinge o solo é

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt_2 = 29{,}6 \text{ m/s} - (9{,}80 \text{ m/s}^2)(6{,}04 \text{ s}) \\ &= -29{,}6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Ou seja, v_y possui o mesmo módulo da velocidade inicial v_{0y}, porém em sentido contrário (de cima para baixo). Como v_x é constante, o ângulo $\alpha = -53{,}1°$ (abaixo da horizontal) é igual e de sinal contrário ao ângulo inicial $\alpha_0 = 53{,}1°$.

AVALIAR: é sempre recomendável conferir os resultados, obtendo-os de outra forma. Por exemplo, podemos verificar nossa resposta para a altura máxima na parte b) aplicando a fórmula da aceleração constante da Equação (2.13) para o movimento y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

No ponto máximo, $v_y = 0$ e $y = h$. Substituindo esses valores, juntamente com $y_0 = 0$, encontramos

$$0 = v_{0y}^2 - 2gh$$
$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(29{,}6 \text{ m/s})^2}{2(9{,}80 \text{ m/s}^2)} = 44{,}7 \text{ m}$$

que é a mesma altura obtida na parte b).

É interessante notar que $h = 44{,}7$ m na parte b) é comparável aos 52,4 m de altura sobre o campo existente no topo do Hubert H. Humphrey Metrodome, em Minneapolis, e que o alcance horizontal $R = 134$ m na parte c) é maior que a distância de 99,7 m da '*home plate*' até o muro ao lado direito no Safeco Field, em Seattle. (A altura da bola quando ela cruza o muro é mais do que suficiente para validá-la como uma *home run*.)

Na vida real, uma bola de beisebol com a velocidade escalar inicial e o ângulo usados aqui não vai subir tão alto nem ir tão longe quanto os nossos cálculos. (Se assim fosse, as *home runs* seriam bem mais comuns e o beisebol seria um esporte bem menos interessante.) A razão é que a resistência do ar, a qual desprezamos neste exemplo, é efetivamente um fator importante nas velocidades escalares típicas de arremessos e tacadas da bola (Figura 3.20).

Exemplo 3.8

ALCANCE E ALTURA DE UM PROJÉTIL II: ALTURA MÁXIMA, ALCANCE MÁXIMO Para um projétil lançado com velocidade inicial v_0 e formando um ângulo α_0 (entre 0° e 90°), deduza expressões gerais para a altura máxima h e para o alcance horizontal R (Figura 3.23). Para um dado v_0, qual valor de α_0 fornece altura máxima? Qual valor fornece o alcance máximo?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: trata-se praticamente do mesmo exercício das partes b) e c) do Exemplo 3.7. A diferença é que procuramos expressões gerais para h e R. Também procuramos os valores de α_0 que forneçam os valores máximos de h e R.

PREPARAR: na solução do item b) do Exemplo 3.7, descobrimos que o projétil alcança o ponto alto da trajetória (de modo que $v_y = 0$) no instante $t_1 = v_{0y}/g$, e no item c) do mesmo exemplo descobrimos que o projétil retornou à altura inicial (de modo que $y = y_0$) no instante $t_2 = 2v_{0y}/g$. (Como vimos no Exemplo 3.7, $t_2 = 2t_1$.) Para determinar a altura h no ponto alto da trajetória, usamos a Equação (3.21) para achar a coordenada y em t_1. Para determinar R, substituímos t_2 na Equação (3.20) para achar a coordenada x em t_2. Expressaremos nossas respostas em termos da velocidade de lançamento v_0 e do ângulo de lançamento α_0, usando a Equação (3.19).

EXECUTAR: da Equação (3.19), $v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0$ e $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0$. Logo, podemos escrever o instante t_1, quando $v_y = 0$, como:

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}$$

A seguir, pela Equação (3.21), a altura nesse instante é

$$h = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}\right)^2$$
$$= \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0}{2g}$$

Para uma dada velocidade de lançamento v_0, vemos que o maior valor de h ocorre quando $\operatorname{sen}\alpha_0 = 1$ e $\alpha_0 = 90°$, ou seja, quando o projétil é lançado diretamente de baixo para cima. Isso é o que deveríamos esperar. Se ele fosse lançado horizontalmente, como no Exemplo 3.6, $\alpha_0 = 0$ e sua altura máxima seria zero!

O instante t_2, quando o projétil retorna ao solo, é

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}$$

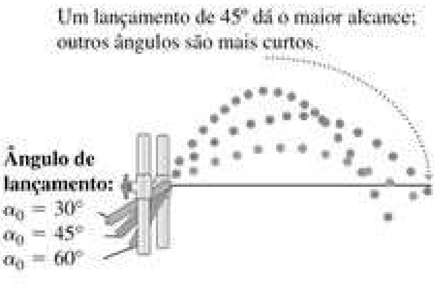


Figura 3.24 Um ângulo de lançamento de 45° fornece o alcance horizontal máximo. O alcance é mais curto com ângulos de lançamento de 30° e 60°.

O alcance horizontal R é o valor de x para o segundo instante. Pela Equação (3.20),

$$R = (v_0 \cos\alpha_0)t_2 = (v_0 \cos\alpha_0)\frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}$$

Podemos agora usar a identidade trigonométrica $2 \operatorname{sen}\alpha_0 \cos\alpha_0 = \operatorname{sen}2\alpha_0$ para reescrever a relação anterior como,

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}2\alpha_0}{g}$$

O valor máximo ocorre quando $\operatorname{sen}2\alpha_0$ é igual a 1, ou seja, $2\alpha_0 = 90°$, logo $\alpha_0 = 45°$. Esse ângulo fornece o alcance máximo para uma dada velocidade inicial.

AVALIAR: a Figura 3.24 é fundamentada na superposição de três fotos de trajetórias obtidas pelo disparo de uma espingarda de mola para ângulos de lançamento de 30°, 45° e 60°. A velocidade inicial v_0 é aproximadamente a mesma nos três casos. Os alcances horizontais são aproximadamente iguais para os ângulos de 30° e 60°, e para o ângulo de 45° o alcance é o maior de todos. Você é capaz de provar que para o mesmo v_0 o alcance para um ângulo α_0 é igual ao alcance para um ângulo $90° - \alpha_0$?

ATENÇÃO Altura e alcance de um projétil Não recomendamos a memorização das fórmulas anteriores para h e para R. Elas se aplicam apenas nas circunstâncias especiais que foram descritas. Em particular, a expressão de R vale *somente* quando o ponto de lançamento e o ponto de retorno ao solo estão no mesmo nível. Existem muitos problemas no final deste capítulo para os quais as referidas fórmulas *não* se aplicam.

Exemplo 3.9

ALTURAS INICIAIS E FINAIS DIFERENTES Você lança uma bola de sua janela a 8,0 m acima do solo. Quando a bola deixa sua mão, ela se move a 10,0 m/s formando um ângulo de 20° abaixo da horizontal. A que distância horizontal de sua janela a bola atinge o solo? Despreze a resistência do ar.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: em nossos cálculos do alcance horizontal nos exemplos 3.7 e 3.8, tentamos encontrar a coordenada horizontal de um projétil, quando ele está a um dado valor de y. A diferença neste caso é que esse valor de y *não* é igual à coordenada y inicial.

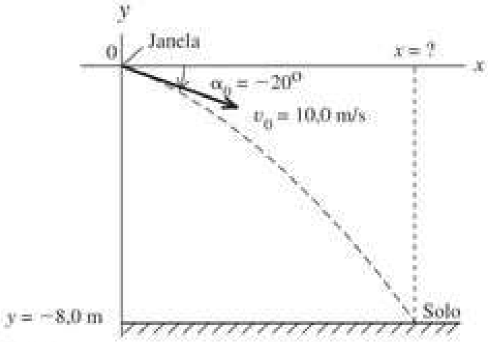


Figura 3.25 Nossa representação gráfica desse problema.

PREPARAR: novamente tomamos o eixo Ox como horizontal e o eixo Oy como orientado de baixo para cima e colocamos a origem das coordenadas no ponto em que a bola deixa a sua mão (Figura 3.25). Temos $v_0 = 10{,}0$ m/s e $\alpha_0 = -20°$; o ângulo é negativo porque a velocidade inicial está abaixo da horizontal. Nossa incógnita é o valor de x no ponto em que a bola atinge o solo – ou seja, quando $y = -8{,}0$ m. Como as alturas inicial e final da bola são diferentes, não podemos simplesmente usar a expressão para o alcance horizontal encontrado no Exemplo 3.8. Em vez disso, primeiro usamos a Equação (3.21) para determinar o tempo t, quando a bola atinge $y = -8{,}0$ m, e depois calculamos o valor de x nesse instante usando a Equação (3.20).

EXECUTAR: para determinar t, reescrevemos a Equação (3.21) na forma padronizada de uma equação do segundo grau em t:

$$\frac{1}{2}gt^2 - (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t + y = 0$$

As raízes dessa equação são:

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \pm \sqrt{(-v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)^2 - 4\left(\frac{1}{2}g\right)y}}{2\left(\frac{1}{2}g\right)}$$

$$= \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0 - 2gy}}{g}$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{l}(10{,}0\ \text{m/s})\operatorname{sen}(-20°)\\ \pm\sqrt{(10{,}0\ \text{m/s})^2\operatorname{sen}^2(-20°) - 2(9{,}80\ \text{m/s}^2)(-8{,}0\ \text{m})}\end{array}\right]}{9{,}80\ \text{m/s}^2}$$

$$= -1{,}7\ \text{s} \qquad \text{ou} \qquad 0{,}98\ \text{s}$$

Podemos descartar a raiz negativa, visto que ela se refere a um instante anterior a bola deixar sua mão. A raiz positiva indica que a bola leva 0,98 s para atingir o solo. Pela Equação (3.20), a coordenada x da bola nesse instante é:

$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t = (10{,}0\ \text{m/s})[\cos(-20°)](0{,}98\ \text{s})$$
$$= 9{,}2\ \text{m}$$

A bola atinge o solo a uma distância horizontal de 9,2 m da sua janela.

AVALIAR: a raiz $t = -1{,}7$ s é exemplo de uma solução 'fictícia' para uma equação em segundo grau. Reveja o Exemplo 2.8 na Seção 2.5, onde abordamos isso.

A escolha da origem determinou as alturas inicial e final em $y_0 = 0$ e $y = -8{,}0$ m. É possível usar as equações (3.16) e (3.18) para mostrar que você obtém as mesmas respostas para t e x, se escolher como origem o ponto do solo diretamente abaixo do ponto em que a bola deixa sua mão?

Exemplo 3.10

O GUARDA DO ZOOLÓGICO E O MACACO Um macaco escapa do jardim zoológico e se refugia em uma árvore. O guarda do zoológico tenta em vão fazê-lo descer e atira um dardo tranqüilizante na direção do macaco (Figura 3.26). O esperto animal larga o galho no mesmo instante em que o dardo é disparado. Mostre que o dardo *invariavelmente* atinge o macaco, qualquer que seja a velocidade com que o dardo sai da boca da arma (desde que seja suficiente para o dardo chegar ao macaco antes de ele atingir o solo).

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: neste exemplo, temos *dois* corpos em movimento de projétil: o dardo do tranqüilizante e o macaco. Ambos possuem posição inicial e velocidade inicial diferentes, mas assumem o movimento de um projétil no mesmo instante. Para demonstrar que o dardo atinge o macaco, temos que provar que, em algum instante, o macaco e o dardo possuem a mesma coordenada x e a mesma coordenada y.

PREPARAR: fazemos a escolha usual das direções de x e y e colocamos a origem das coordenadas na saída da boca da arma com o dardo tranqüilizante (Figura 3.26). Primeiro usaremos a Equação (3.20) para encontrar o instante t em que as coordenadas x_{macaco} e x_{dardo} (x_M e x_D, respectivamente) são as mesmas. Depois usaremos a Equação (3.21) para verificar se y_{macaco} e y_{dardo} (y_M e y_D, respectivamente) também são iguais nesse instante; se forem, o dardo atingirá o macaco.

EXECUTAR: o macaco cai verticalmente para baixo, de modo que *sempre* $x_M = d$. Para o dardo, usando a Equação (3.20): $x_D = (v_0 \cos\alpha_0)t$. Quando essas coordenadas x são iguais, $d = (v_0 \cos\alpha_0)t$ ou:

$$t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha_0}$$

Para mostrar que o dardo realmente atinge o macaco, deve ser verdadeiro que $y_M = y_D$ nesse instante. O macaco está em queda livre em uma dimensão; sua posição em qualquer instante é dada pela Equação (2.12), fazendo-se as mudanças de símbolos necessárias. A Figura 3.26 mostra que a altura inicial do macaco é $d \operatorname{tg}\alpha_0$ (o lado oposto ao ângulo α_0 de um triângulo retângulo cujo lado adjacente é d), logo

$$y_{\text{macaco}} = d \operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Para o dardo, usamos a Equação (3.21):

$$y_{\text{dardo}} = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Logo, observamos que, se $d \operatorname{tg}\alpha_0 = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t$ no instante em que as duas coordenadas x são iguais, então $y_M = y_D$, e temos um golpe. Para provar que isso ocorre substituímos t por $d/(v_0 \cos\alpha_0)$ no instante em que $x_M = x_D$. Com certeza, encontraremos que:

$$(v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)\frac{d}{v_0 \cos\alpha_0} = d \operatorname{tg}\alpha_0$$

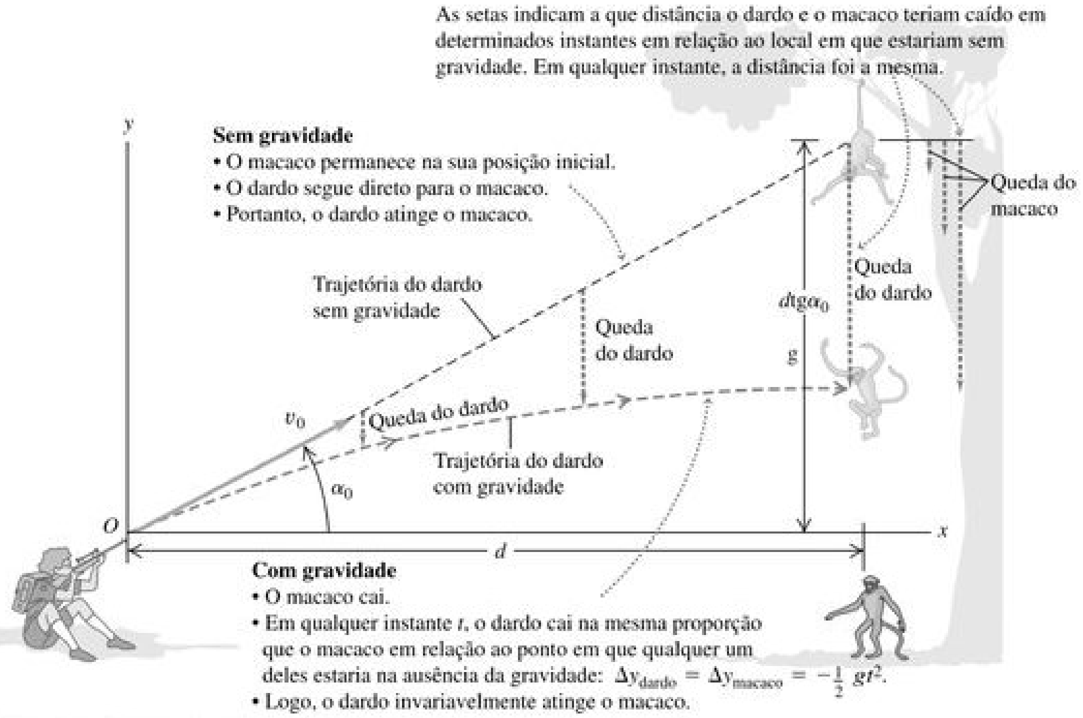
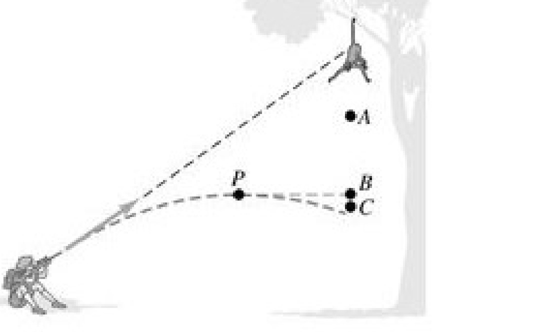


Figura 3.26 O dardo tranqüilizante atinge o macaco em queda.

AVALIAR: provamos que no instante em que as coordenadas x são iguais, as coordenadas y também são iguais; logo, um dardo apontado para a posição inicial do macaco sempre o atingirá, qualquer que seja o valor de v_0. Esse resultado também não depende do valor de g, a aceleração da gravidade. Se não houvesse gravidade ($g = 0$), o macaco ficaria em repouso e o dardo seguiria uma trajetória retilínea para atingi-lo. Com a gravidade, ambos 'caem' a mesma distância $\left(\frac{1}{2}gt^2\right)$ abaixo da posição correspondente a $g = 0$ e, ainda assim, o dardo atinge o macaco (Figura 3.26).

Teste sua compreensão da Seção 3.3 No Exemplo 3.10, suponha que o dardo de tranqüilizante possua uma velocidade relativamente baixa ao ser disparado, de modo que atinge uma altura máxima em um ponto P antes de atingir o macaco, como mostra a figura. Quando o dardo está na posição P, o macaco estará i) no ponto A (acima de P), ii) no ponto B (na mesma altura de P) ou iii) no ponto C (abaixo de P)? Despreze a resistência do ar.



3.4 Movimento circular

Quando uma partícula se move ao longo de uma trajetória curva, a direção de sua velocidade varia. Como vimos na Seção 3.2, isso significa que a partícula *deve* possuir um componente de aceleração perpendicular à trajetória, mesmo quando a velocidade escalar for constante (Figura 3.11b). Nesta seção calcularemos a aceleração para este importante caso especial de movimento circular.

Movimento circular uniforme

Quando uma partícula se move ao longo de uma circunferência com *velocidade escalar constante*, dizemos que ela descreve um **movimento circular uniforme**. Um carro percorrendo uma curva de raio constante com velocidade constante, um satélite movendo-se em uma órbita circular e um patinador descrevendo uma circunferência em uma pista de gelo com velocidade constante são exemplos de movimento circular uniforme (Figura 3.27; compare à Figura 3.12). Não existe nenhum componente da aceleração paralelo (tangente) à trajetória; caso houvesse, a velocidade escalar seria variável. O vetor da aceleração é perpendicular (normal) à trajetória, que produz variação da direção da velocidade, é relacionado de forma simples com a velocidade da partícula e o raio do círculo. Nosso próximo objetivo é deduzir essa relação.

A Figura 3.28a mostra a trajetória de uma partícula que se move com velocidade constante ao longo de uma circunferência de raio R com centro em O. A partícula se

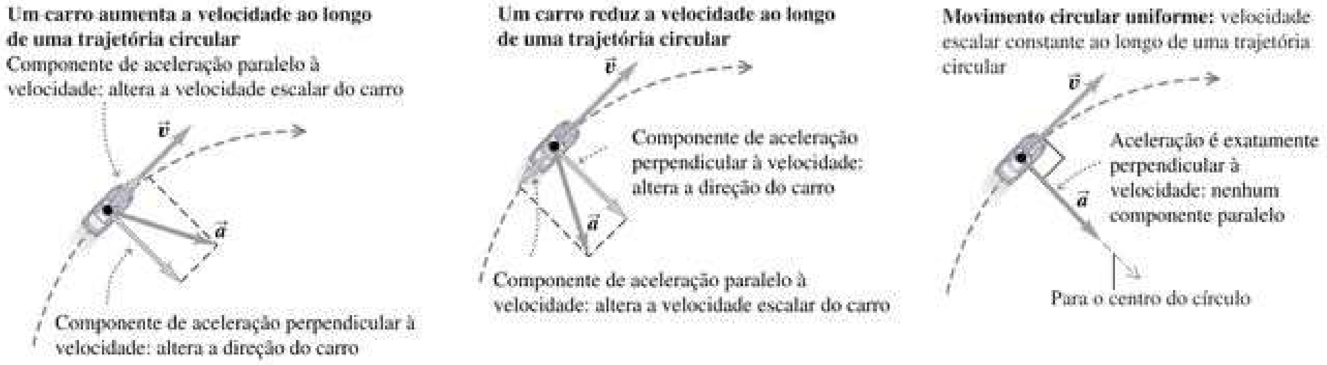


Figura 3.27 Um carro em movimento circular uniforme. A velocidade escalar é constante e a aceleração é orientada para o centro da trajetória circular.

move de P_1 a P_2 em um intervalo de tempo Δt. A variação do vetor velocidade $\Delta\vec{v}$ durante esse intervalo de tempo é indicada na Figura 3.28b.

Os ângulos designados por $\Delta\phi$ nas figuras 3.28a e 3.28b são iguais porque $\vec{v}_1$ é perpendicular à linha OP_1 e $\vec{v}_2$ é perpendicular à linha OP_2. Portanto, os triângulos nas figuras 3.28a e 3.28b são *semelhantes*. As razões entre lados correspondentes são iguais, logo

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \qquad \text{ou} \qquad |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R}\Delta s$$

O módulo a_m da aceleração média durante o intervalo de tempo Δt é, portanto:

$$a_m = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

O módulo a da aceleração *instantânea* $\vec{a}$ no ponto P_1 é o limite dessa expressão quando o ponto P_2 tende a se superpor ao ponto P_1:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Porém, o limite $\Delta s/\Delta t$ é a velocidade escalar v_1 no ponto P_1. Mas P_1 pode ser qualquer ponto da trajetória, de modo que podemos retirar o índice inferior e designar por v a velocidade escalar em qualquer ponto. Logo

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \qquad (3.28)$$

(movimento circular uniforme)

Introduzimos um índice inferior 'rad' para lembrar que a direção da aceleração instantânea em cada ponto da trajetória é sempre orientada radialmente para dentro do círculo, em direção ao seu centro. Como a velocidade escalar é constante, a aceleração é sempre perpendicular ao vetor velocidade instantânea. Isso é indicado na Figura 3.28c; compare-a com a Figura 3.27.

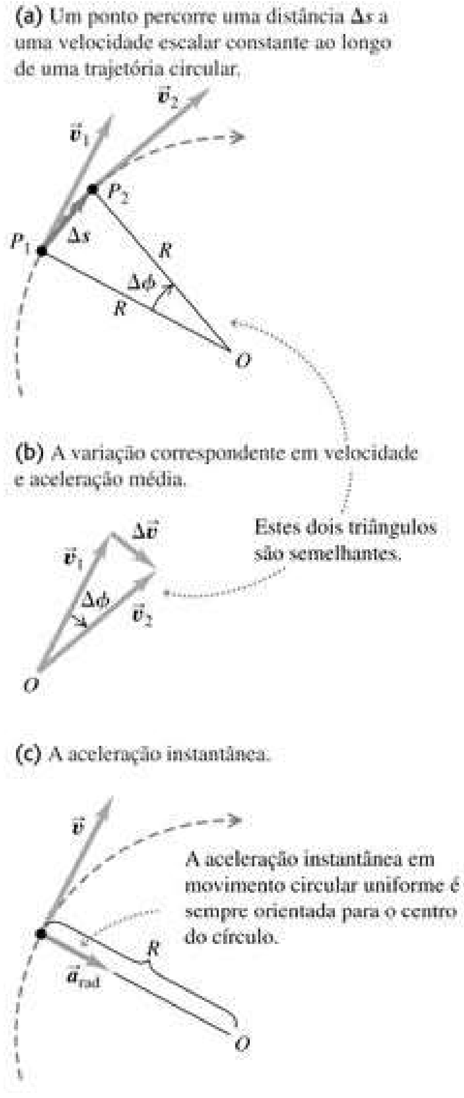
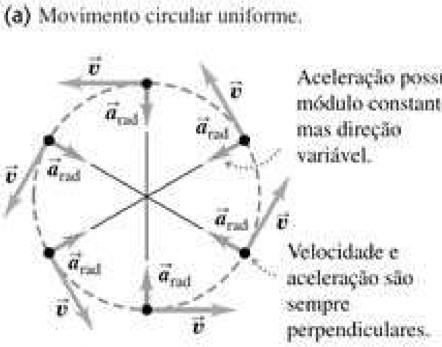


Figura 3.28 Ache a variação da velocidade $\Delta\vec{v}$, a aceleração média $\vec{a}_m$ e a aceleração instantânea $\vec{a}_{rad}$ para uma partícula que se move em círculo a uma velocidade constante.

Concluímos que, *no movimento circular uniforme, o módulo da aceleração instantânea é igual ao quadrado da velocidade escalar v dividido pelo raio R do círculo. Sua*



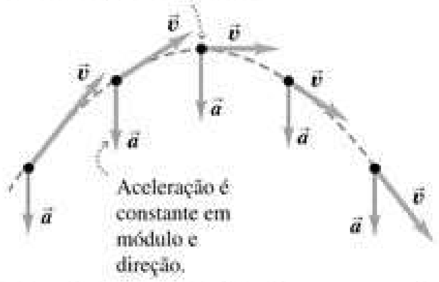


Figura 3.29 Aceleração e velocidade (a) para uma partícula em movimento circular uniforme e (b) para um projétil sem nenhuma resistência do ar.

direção é perpendicular a $\vec{v}$ e aponta para dentro do círculo ao longo do raio.

Como a aceleração é sempre orientada para dentro do círculo, ela é também chamada de **aceleração centrípeta**. A palavra '*centrípeta*' deriva do grego e significa 'que se dirige para o centro'. A Figura 3.29a mostra o vetor velocidade e o vetor aceleração em diversos pontos da trajetória de uma partícula que se move com velocidade constante em um círculo.

ATENÇÃO Movimento circular uniforme *versus* movimento de um projétil A aceleração em movimento circular uniforme possui semelhanças com a aceleração do movimento de um projétil, desprezando-se a resistência do ar, mas também há importantes diferenças. Tanto no movimento circular uniforme (Figura 3.29a) quanto no movimento de um projétil (Figura 3.29b), o *módulo* da aceleração é o mesmo em qualquer instante. Entretanto, no movimento circular uniforme a *direção* de $\vec{a}$ varia continuamente, de modo que sempre está orientada para o centro do círculo. (No topo do círculo, a aceleração aponta para baixo; no fundo do círculo, a aceleração aponta para cima.) No movimento de um projétil, por outro lado, a direção de $\vec{a}$ permanece a mesma em qualquer instante.

Podemos também expressar o módulo da aceleração em um movimento circular uniforme em termos do **período** T do movimento, o tempo que a partícula leva para fazer uma revolução (uma volta completa em torno do círculo). Em um intervalo de tempo T, a partícula se desloca a uma distância igual ao comprimento da circunferência $2\pi R$, de modo que sua velocidade escalar é:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \tag{3.29}$$

Quando substituímos esse resultado na Equação (3.28), obtemos a expressão alternativa:

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \tag{3.30}$$

(movimento circular uniforme)

Exemplo 3.11

ACELERAÇÃO CENTRÍPETA EM UMA ESTRADA CURVA O carro esportivo Aston Martin V8 Vantage possui 'aceleração lateral' de $0{,}96g$, o que equivale a $(0{,}96)\,(9{,}8\ \text{m/s}^2) = 9{,}4\ \text{m/s}^2$. Isso representa a aceleração centrípeta máxima sem que o carro deslize para fora de uma trajetória circular. Se o carro se desloca a uma velocidade constante de 40 m/s (89 mi/h ou cerca de 144 km/h), qual é o raio mínimo da curva que ele pode aceitar? (Suponha que a curva não possua inclinação lateral.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como o carro está se movendo a uma velocidade escalar constante ao longo de uma curva que é um segmento de um círculo, podemos aplicar as noções do movimento circular uniforme.

PREPARAR: usamos a Equação (3.28) para determinar a incógnita R (o raio da curva) em termos de uma dada aceleração centrípeta a_{rad} e velocidade escalar v.

EXECUTAR: foram fornecidas a_{rad} e v; logo, usando a Equação (3.28) para R:

$$R = \frac{v^2}{a_{rad}} = \frac{(40\ \text{m/s})^2}{9{,}4\ \text{m/s}^2} = 170\ \text{m}\ (560\ \text{pés})$$

AVALIAR: nosso resultado demonstra que o raio R requerido da curva é proporcional ao *quadrado* da velocidade escalar. Logo, mesmo uma pequena redução nessa velocidade pode tornar R substancialmente menor. Por exemplo, uma redução de 20% em v (de 40 m/s para 32 m/s) provoca uma redução de 36% em R (de 170 m para 109 m).

Quando a curva possui inclinação lateral, o raio pode ser menor, conforme veremos no Capítulo 5.

Exemplo 3.12

ACELERAÇÃO CENTRÍPETA EM UM PARQUE DE DIVERSÕES Em um brinquedo de um parque de diversões, os passageiros viajam com velocidade constante em um círculo de raio 5,0 m. Eles fazem uma volta completa no círculo em 4,0 s. Qual é a aceleração deles?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a velocidade é constante, de modo que se trata de um problema envolvendo um movimento circular uniforme.

PREPARAR: podemos usar a Equação (3.30) para calcular a aceleração, pois são dados $R = 5{,}0$ m e o período $T = 4{,}0$ s. Como alternativa, podemos calcular primeiro a velocidade v pela Equação (3.29) e depois acharmos a aceleração pela Equação (3.28).

EXECUTAR: pela Equação (3.30), temos:

$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2(5{,}0\ \text{m})}{(4{,}0\ \text{s})^2} = 12\ \text{m/s}^2$$

Vamos conferir essa resposta usando a Equação (3.28), após calcular a velocidade v. Pela Equação (3.29), a velocidade escalar é igual ao comprimento da circunferência dividido pelo período

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(5{,}0\ \text{m})}{4{,}0\ \text{s}} = 7{,}9\ \text{m/s}$$

A aceleração centrípeta é, então:

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} = \frac{(7{,}9\ \text{m/s})^2}{5{,}0\ \text{m}} = 12\ \text{m/s}^2$$

Felizmente, obtemos o mesmo resultado para a_{rad}, com ambas as abordagens.

AVALIAR: como no Exemplo 3.11, a direção de $\vec{a}$ aponta sempre para o centro do círculo. O módulo de $\vec{a}$ é maior do que g, a aceleração da gravidade, de modo que este brinquedo não é destinado a quem sofre do coração. (Algumas montanhas-russas submetem seus passageiros a acelerações de até 4 g.)

Movimento circular não uniforme

Consideramos nesta seção que a velocidade escalar da partícula permanecia constante durante o movimento. Quando esta velocidade varia, a partícula descreve um **movimento circular não uniforme**. Um exemplo é o movimento do carro de uma montanha-russa, que diminui de velocidade quando sobe e aumenta de velocidade quando desce em torno de uma volta vertical. Em um movimento circular não uniforme, a Equação (3.28) ainda fornece a componente *radial* da aceleração, $a_{\text{rad}} = v^2/R$, que é sempre *perpendicular* à velocidade instantânea e aponta para o centro do círculo. Porém, como a velocidade escalar v da partícula possui diversos valores em diferentes pontos da trajetória, o valor de a_{rad} não é constante. A aceleração radial (centrípeta) assume o valor máximo no ponto da circunferência para o qual a velocidade escalar possui seu valor máximo.

Em um movimento circular não uniforme existe também um componente da aceleração à velocidade instantânea. Trata-se do componente $a_{\parallel}$ mencionado na Seção 3.2, que será agora designado por a_{tg} para enfatizar que ele é *tangente* à circunferência. Pela discussão no final da Seção 3.2, vemos que o componente tangencial da aceleração a_{tg} é dado pela taxa de variação da *velocidade escalar*. Logo

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \quad \text{e} \quad a_{\text{tg}} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \qquad (3.31)$$

(movimento circular não uniforme)

O vetor aceleração de uma partícula que se desloca em um círculo com velocidade escalar variável é dado pela soma vetorial do componente tangencial da aceleração com o componente radial da aceleração. O componente tangencial da aceleração possui direção paralela à direção do vetor velocidade, com o mesmo sentido deste vetor, quando a velocidade escalar aumenta, e sentido contrário quando a velocidade escalar diminui (Figura 3.30).

No movimento circular *uniforme* não existe componente tangencial da aceleração, mas o componente radial é dado pelo módulo de $d\vec{v}/dt$.

ATENÇÃO Movimento circular uniforme *versus* não uniforme Note que estas duas grandezas:

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad \text{e} \quad \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|$$

não são semelhantes. A primeira grandeza, igual à aceleração tangencial, é a razão da variação da velocidade escalar; corresponde a zero sempre que uma partícula se move com velocidade escalar constante, mesmo que sua direção de movimento varie (tal como no movimento circular *uniforme*). A segunda é o módulo da aceleração do vetor; corresponde a zero somente quando o *vetor* aceleração da partícula é zero — ou seja, quando a partícula se move em linha reta com velocidade escalar constante. No movimento circular *uniforme*, $|d\vec{v}/dt| = a_{\text{rad}} = v^2/r$; no movimento circular *não uniforme*, também há um componente tangencial de aceleração, de modo que $|d\vec{v}/dt| = \sqrt{a_{\text{rad}}^2 + a_{\text{tg}}^2}$.

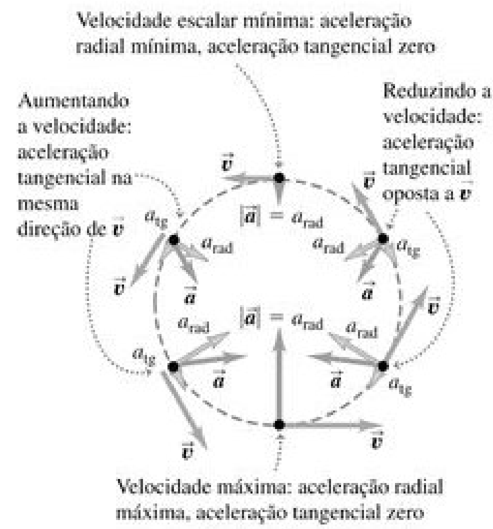


Figura 3.30 Partícula movendo-se em um círculo vertical, como um carro de uma montanha-russa, com velocidade variável.

Teste sua compreensão da Seção 3.4 Suponha que a partícula na Figura 3.30 possua na parte de baixo do círculo uma aceleração quatro vezes maior do que no topo do círculo. Se comparado à sua velocidade escalar no topo do círculo, sua velocidade escalar na parte de baixo do círculo é i) $\sqrt{2}$ vezes maior; ii) 2 vezes maior; iii) $2\sqrt{2}$ vezes maior; iv) 4 vezes maior; ou v) 16 vezes maior. ▮

3.5 Velocidade relativa

Certamente você já deve ter observado que um carro que se desloca para a frente parece deslocar-se para trás quando você o ultrapassa. Em geral, quando dois observadores medem a velocidade de um objeto que se move, eles obtêm resultados diferentes se um observador se move em relação ao outro. A velocidade medida por um dos observadores denomina-se **velocidade relativa** ao observador considerado ou simplesmente velocidade relativa. A Figura 3.31 mostra uma situação em que a compreensão da velocidade relativa é extremamente importante.

Inicialmente, estudaremos a velocidade relativa ao longo de uma linha reta e depois generalizaremos para a velocidade relativa em um plano.

Velocidade relativa em uma dimensão

Uma mulher caminha com velocidade de 1,0 m/s no interior de um trem que se move com velocidade de 3,0 m/s (Figura 3.32a). Qual é a velocidade da mulher? Trata-se de uma questão bastante simples, mas que não possui uma resposta única. Em relação a um passageiro sentado no trem, ela se move a 1,0 m/s. Uma pessoa parada em uma bicicleta ao lado do trem vê a mulher deslocar-se com velocidade 1,0 m/s + 3,0 m/s = 4,0 m/s. Um observador em outro trem movendo-se em sentido oposto daria ainda outra resposta. É necessário especificar a velocidade *relativa* a um observador particular. A velocidade relativa da mulher

Figura 3.31 Os pilotos de uma exibição aérea enfrentam um problema complicado de movimento relativo. Eles devem considerar a velocidade relativa do ar sobre as asas (para que a força de sustentação atinja valores apropriados), a velocidade relativa entre os aviões (para evitar colisões) e a velocidade relativa em relação ao público (para que eles possam ser vistos).

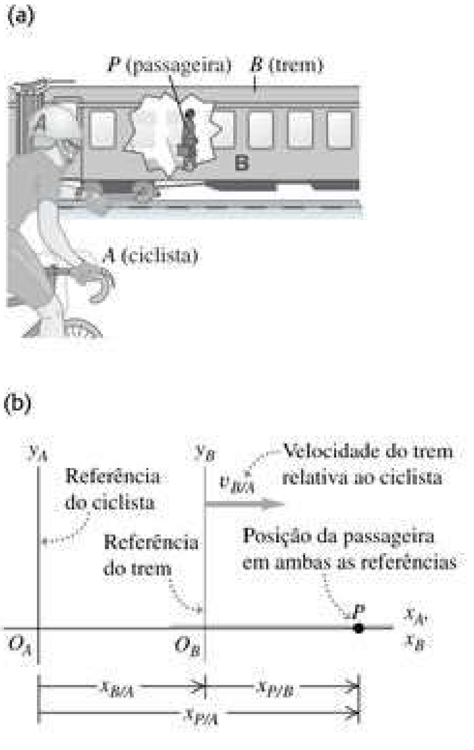


Figura 3.32 (a) A mulher caminhando no interior do trem. (b) A posição da mulher relativa ao sistema de referência do ciclista e ao sistema de referência do trem.

em relação ao trem é 1,0 m/s, sua velocidade relativa ao ciclista é 4,0 m/s e assim por diante. Cada observador equipado com uma régua e um cronômetro em princípio constitui um **sistema de referência**. Logo, um sistema de referência é um sistema de coordenadas acrescido de uma escala de tempo.

Vamos designar por A o sistema de referência do ciclista e por B o sistema de referência do trem. Para um movimento retilíneo, a posição de um ponto P em relação ao sistema de referência A é dada pela distância $x_{P/A}$ (posição de P em relação à A), e a posição em relação ao sistema de referência B é dada pela distância $x_{P/B}$ (Figura 3.32b). A distância entre a origem de A e a origem de B (posição de B em relação à A) é $x_{B/A}$. Podemos ver pela Figura 3.32b que

$$x_{P/A} = x_{P/B} + x_{B/A} \tag{3.32}$$

Isto nos informa que a distância total entre a origem de A e o ponto P é a distância entre a origem de B e o ponto P somado à distância entre a origem de A e a origem de B.

A velocidade relativa de P em relação à A, designada por $v_{P/A\text{-}x}$, é a derivada de $x_{P/A}$ em relação ao tempo. As demais velocidades são obtidas de modo análogo. Logo, derivando a Equação (3.32), obtemos a seguinte relação entre as várias velocidades:

$$\frac{dx_{P/A}}{dt} = \frac{dx_{P/B}}{dt} + \frac{dx_{B/A}}{dt} \qquad \text{ou}$$

$$v_{P/Ax} = v_{P/Bx} + v_{B/Ax} \tag{3.33}$$

(velocidade relativa ao longo de uma linha reta)

Voltando ao caso da mulher caminhando no trem na Figura 3.32, A é o sistema de referência do ciclista, B é o sistema de referência do trem e o ponto P representa a mulher. Usando a notação anterior, temos

$$v_{P/Bx} = +1{,}0\ \mathrm{m/s} \qquad v_{B/Ax} = +3{,}0\ \mathrm{m/s}$$

Pela Equação (3.33), a velocidade da mulher $v_{P/A}$ relativa ao ciclista é dada por

$$v_{P/Ax} = +1{,}0\ \mathrm{m/s} + 3{,}0\ \mathrm{m/s} = +4{,}0\ \mathrm{m/s}$$

como já sabíamos.

Neste exemplo, as duas velocidades são orientadas da esquerda para a direita, e implicitamente adotamos esse sentido como positivo. Caso a mulher caminhasse para a *esquerda* em relação ao trem, então $v_{P/Bx} = -1{,}0$ m/s, e sua velocidade relativa ao ciclista seria $v_{P/Ax} = -1{,}0$ m/s + 3,0 m/s = +2,0 m/s. A soma indicada na Equação (3.33) deve ser encarada sempre como uma soma algébrica, e qualquer termo pode ser negativo.

Quando a mulher olha para fora da janela, o ciclista parado no solo parece se mover para trás; podemos designar a velocidade relativa do ciclista em relação à mulher por $v_{A/Px}$. É claro que ela é igual e contrária a $v_{P/Ax}$. Em geral, quando A e B são dois pontos ou sistemas de referência quaisquer:

$$v_{A/Bx} = -v_{B/Ax} \tag{3.34}$$

Estratégia para a solução de problemas 3.2

VELOCIDADE RELATIVA

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* quando você se deparar com a frase 'velocidade relativa a' ou 'velocidade em relação a', é provável que os conceitos de velocidade relativa sejam aplicáveis.

PREPARAR *o problema:* classifique cada sistema de referência do problema. Cada corpo em movimento possui o seu próprio sistema de referência; além disso, você quase sempre terá que incluir o sistema de referência da superfície terrestre. (Enunciados tais como 'O carro está viajando rumo ao norte a 90 km/h' implicitamente se referem à velocidade do carro relativa à superfície terrestre.) Use as classificações para identificar a incógnita. Por exemplo, se você quer determinar a velocidade x de um carro (C) em relação a um ônibus (B), sua incógnita é $v_{C/Bx}$.

EXECUTAR *a solução:* solucione a incógnita usando a Equação (3.33). (Se as velocidades não estão orientadas na mesma direção, será preciso usar a forma vetorial dessa equação, derivada posteriormente nesta seção.) É importante observar a ordem dos índices inferiores duplos na Equação (3.33): $v_{A/Bx}$ sempre denota 'velocidade x de A relativa a B'. Esses índices obedecem a um interessante tipo de álgebra, conforme mostra a Equação (3.33). Encarando os índices como frações, a fração do lado esquerdo seria o *produto* das frações do lado direito: $P/A = (P/B)(B/A)$. Trata-se de uma regra útil que você pode usar quando aplicar a Equação (3.33) a qualquer número de sistemas de referência. Por exemplo, se houver três diferentes sistemas de referência A, B e C, podemos escrever imediatamente:

$$v_{P/Ax} = v_{P/Cx} + v_{C/Bx} + v_{B/Ax}$$

AVALIAR *sua resposta:* esteja alerta para sinais negativos extraviados na sua resposta. Se a incógnita é a velocidade x de um carro relativa à de um ônibus ($v_{C/Bx}$), tome cuidado para não se confundir e calcular acidentalmente a velocidade x do *ônibus* relativa à do *carro* ($v_{B/Cx}$). Se cometer esse erro, poderá desfazê-lo usando a Equação (3.34).

Exemplo 3.13

VELOCIDADE RELATIVA EM UMA ESTRADA RETILÍNEA

Você está dirigindo do sul para o norte por uma estrada retilínea de duas pistas com velocidade constante de 88 km/h. Um caminhão se aproxima de você em sentido contrário com velocidade constante de 104 km/h (na outra pista, felizmente). a) Qual a velocidade do caminhão em relação a você? b) Qual sua velocidade em relação ao caminhão? c) Como as velocidades relativas variam depois que o caminhão cruzar com você?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo se refere a velocidades relativas ao longo de uma linha reta.

PREPARAR: considere V como sendo você, C o caminhão e T a superfície da Terra, e tome o sentido Sul-Norte como positivo (Figura 3.33). Então, a sua velocidade em relação à Terra é $v_{V/Tx} = +88$ km/h. O caminhão se aproxima de você, logo ele está se movendo do norte para o sul, fornecendo $v_{C/Tx} = -104$ km/h. A incógnita na parte a) é $v_{C/Vx}$; a incógnita na parte b) é $v_{V/Cx}$. Acharemos ambas as incógnitas usando a Equação (3.33) para velocidade relativa.

EXECUTAR: a) para determinar $v_{C/Vx}$, primeiro escrevemos a Equação (3.33) para os três sistemas de referência V, C e T e depois rearranjamos como:

$$v_{C/Tx} = v_{C/Vx} + v_{V/Tx}$$
$$v_{C/Vx} = v_{C/Tx} - v_{V/Tx}$$
$$= -104\ \mathrm{km/h} - 88\ \mathrm{km/h} = -192\ \mathrm{km/h}$$

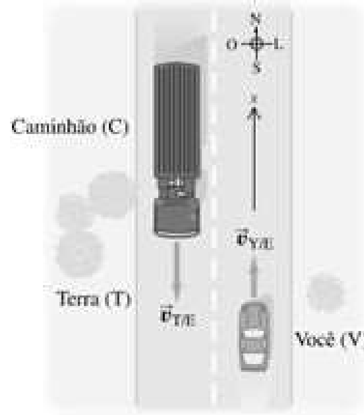


Figura 3.33 Sistemas de referência para você e para o caminhão.

O caminhão se desloca a 192 km/h no sentido Norte-Sul em relação a você.

b) Pela Equação (3.34),

$$v_{V/Cx} = -v_{C/Vx} = -(-192\ \text{km/h}) = +192\ \text{km/h}$$

Você se desloca a 192 km/h no sentido Sul-Norte em relação ao caminhão.

c) As velocidades relativas não variam de forma alguma depois que o caminhão cruzar com você. As posições relativas entre os corpos não importam no cálculo da velocidade relativa. A velocidade relativa do caminhão em relação a você continua sendo de 192 km/h no sentido Norte-Sul, mas agora ele se afasta de você em vez de se aproximar.

AVALIAR: para conferir sua resposta na parte b), tente usar a Equação (3.33) diretamente na forma $v_{V/Cx} = v_{V/Tx} + v_{T/Cx}$. (Lembre-se de que a velocidade x da Terra em relação ao caminhão é o oposto da velocidade x do caminho em relação à Terra: $v_{T/Cx} = -v_{C/Tx}$.) Você obtém o mesmo resultado?

Velocidade relativa em duas ou três dimensões

Podemos estender o conceito de velocidade relativa para incluir movimento em um plano ou no espaço mediante o uso da regra da soma vetorial para as velocidades. Suponha que a mulher na Figura 3.32a, em vez de se mover ao longo do eixo do trem, esteja se movendo lateralmente dentro do trem, com velocidade de 1,0 m/s (Figura 3.34a). Podemos descrever a posição da mulher P em relação a dois sistemas de referência: o sistema A para o observador parado em solo e B para o trem em movimento. Porém, em vez da coordenada x, usamos o vetor posição $\vec{r}$ porque agora o problema envolve duas dimensões. Então, conforme mostra a Figura 3.34b,

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A} \qquad (3.35)$$

Analogamente ao método usado antes, derivamos essa equação para obter uma relação entre as diversas velocidades relativas; a velocidade de P relativa a A é dada por $\vec{v}_{P/A} = d\vec{r}_{P/A}/dt$ e assim por diante para as outras velocidades. Obtemos

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \qquad (3.36)$$

(velocidade relativa no espaço)

A Equação (3.36) é conhecida como a *transformação de velocidade de Galileu*, que relaciona a velocidade de um corpo P em relação ao sistema de referência A e sua velocidade em relação ao sistema de referência B ($\vec{v}_{P/A}$ e $\vec{v}_{P/B}$, respectivamente) com a velocidade do sistema de referência B em relação ao sistema de referência A ($\vec{v}_{B/A}$). Quando todas as três velocidades relativas são paralelas à mesma linha reta, então a Equação (3.36) se reduz à Equação (3.33) para os componentes da velocidade ao longo dessa linha.

Se a velocidade relativa do trem em relação ao solo possui módulo $v_{B/A} = 3{,}0$ m/s e a velocidade relativa da mulher em relação ao trem possui módulo $v_{P/B} = 1{,}0$ m/s, então seu vetor velocidade relativa $\vec{v}_{P/A}$ em relação ao solo é obtido conforme indicado na Figura 3.34c. O teorema de Pitágoras fornece

$$v_{P/A} = \sqrt{(3{,}0\ \text{m/s})^2 + (1{,}0\ \text{m/s})^2} = \sqrt{10\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 3{,}2\ \text{m/s}$$

Também podemos observar nesse diagrama que a *direção* do vetor velocidade relativa da mulher em relação ao solo faz um ângulo ϕ com o vetor velocidade relativa do trem $\vec{v}_{B/A}$, onde

$$\text{tg}\,\phi = \frac{v_{P/B}}{v_{B/A}} = \frac{1{,}0\ \text{m/s}}{3{,}0\ \text{m/s}} \qquad \text{e} \qquad \phi = 18^\circ$$

Como no caso de um movimento retilíneo, temos a seguinte regra geral válida em *qualquer* caso em que A e B são dois pontos ou sistemas de referência,

$$\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A} \qquad (3.37)$$

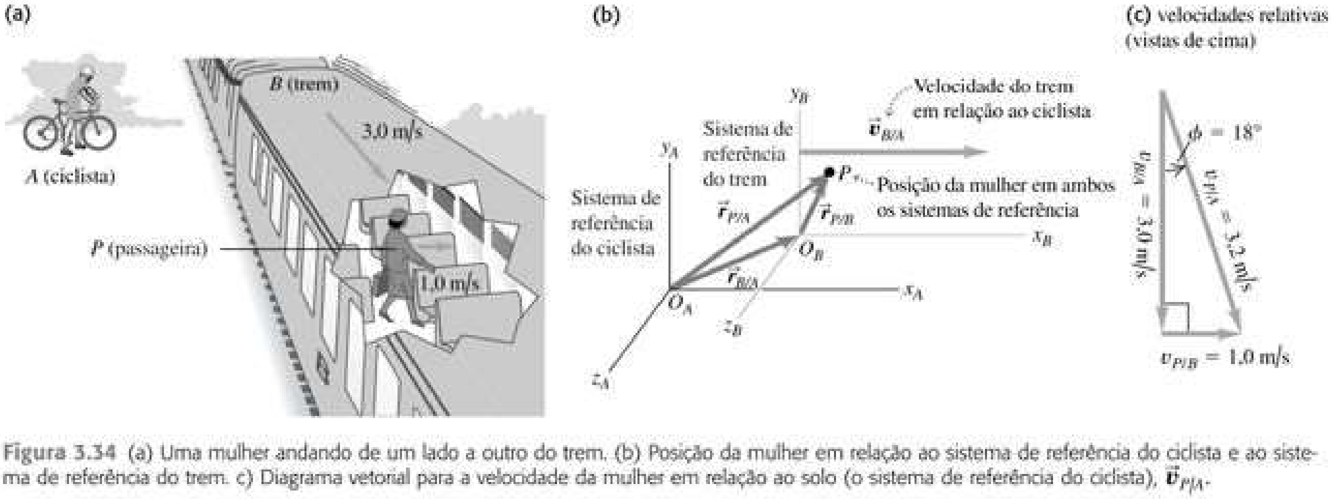


Figura 3.34 (a) Uma mulher andando de um lado a outro do trem. (b) Posição da mulher em relação ao sistema de referência do ciclista e ao sistema de referência do trem. c) Diagrama vetorial para a velocidade da mulher em relação ao solo (o sistema de referência do ciclista), $\vec{v}_{P/A}$.

A velocidade relativa da mulher em relação ao trem é igual e contrária à velocidade relativa do trem em relação à mulher e assim por diante.

No início do século XX, Albert Einstein demonstrou na sua especial teoria da relatividade que a composição das velocidades relativas, dada pela Equação (3.36), deve ser modificada quando a velocidade escalar se aproxima da velocidade da luz, designada por c. Ocorre que, se a passageira na Figura 3.32a pudesse andar na direção do eixo do trem a $0{,}30c$ e o trem se movesse a $0{,}90c$, então sua velocidade escalar relativa ao solo não seria $1{,}20c$, mas $0{,}94c$; nada pode se mover mais rapidamente do que a luz! Retomaremos a teoria da relatividade no Capítulo 37.

Exemplo 3.14

VOANDO COM VENTO ORTOGONAL A bússola de um avião mostra que ele se desloca do sul para o norte, e seu indicador de velocidade do ar mostra que ele está se movendo no ar com velocidade igual a 240 km/h. Se existe um vento de 100 km/h de oeste para leste, qual é a velocidade do avião em relação à Terra?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema envolve as velocidades em duas dimensões (sentido Norte e sentido Leste), de modo que se trata de um problema sobre velocidade relativa usando vetores.

PREPARAR: encontraremos o módulo e a direção da velocidade do avião (P) em relação ao ar (A). Encontaremos também o módulo e a direção da velocidade do vento, que é a velocidade do ar (A) em relação à Terra (T).

$$\vec{v}_{P/A} = 240 \text{ km/h} \qquad \text{sul para norte}$$
$$\vec{v}_{A/T} = 100 \text{ km/h} \qquad \text{leste para leste}$$

Nossas variáveis-alvo são o módulo e direção da velocidade do avião (P) em relação à Terra (T), $\vec{v}_{P/T}$. Nós as encontraremos utilizando a Equação (3.36).

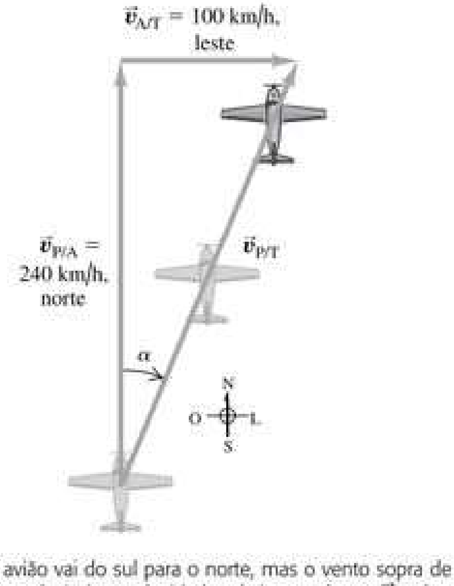


Figura 3.35 O avião vai do sul para o norte, mas o vento sopra de oeste para leste, produzindo a velocidade relativa resultante $\vec{v}_{P/T}$ do avião em relação à Terra.

EXECUTAR: usando a Equação (3.36), temos:

$$\vec{v}_{P/T} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/T}$$

As três velocidades relativas e a relação entre elas são indicadas na Figura 3.35. As incógnitas são o módulo da velocidade escalar $v_{P/T}$ e o ângulo α. Pelo diagrama, achamos

$$v_{P/T} = \sqrt{(240 \text{ km/h})^2 + (100 \text{ km/h})^2} = 260 \text{ km/h}$$
$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{100 \text{ km/h}}{240 \text{ km/h}}\right) = 23° \text{ L de N}$$

AVALIAR: o vento aumenta a velocidade do avião em relação à Terra, mas em compensação faz o avião sair de sua rota.

Exemplo 3.15

CORREÇÃO EM RELAÇÃO AO VENTO ORTOGONAL No Exemplo 3.14, em que direção o piloto deve inclinar o avião para que ele siga de sul para o norte? Qual seria, então, sua velocidade em relação à Terra? (Suponha que a velocidade do avião em relação ao ar seja a mesma do Exemplo 3.14.)

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como o Exemplo 3.14, este é um problema sobre velocidade relativa com vetores.

PREPARAR: a Figura 3.36 ilustra a situação. Os vetores são dispostos de acordo com a equação de velocidade relativa do vetor, na Equação (3.36):

$$\vec{v}_{P/T} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/T}$$

Conforme a Figura 3.36, o piloto aponta o bico do avião de modo a formar um ângulo β em relação ao vento e assim compensar o vento ortogonal. Esse ângulo, que informa a direção do vetor $\vec{v}_{P/A}$ (a velocidade do avião em relação ao ar), é uma das nossas incógnitas. A outra incógnita é a velocidade escalar do avião sobre o solo, que é o módulo do vetor $\vec{v}_{P/T}$ (a velocidade do avião em relação à Terra). As grandezas conhecidas e desconhecidas são:

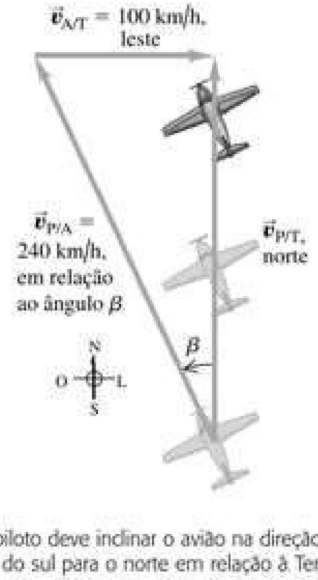


Figura 3.36 O piloto deve inclinar o avião na direção do vetor $\vec{v}_{P/A}$ para que ele siga do sul para o norte em relação à Terra.

$\vec{v}_{P/T}$ = módulo desconhecido sul para norte

$\vec{v}_{P/A}$ = 240 km/h direção desconhecida

$\vec{v}_{A/T}$ = 100 km/h oeste para leste

Podemos resolver as incógnitas desconhecidas usando a Figura 3.36 e a trigonometria.

EXECUTAR: a partir do diagrama, a velocidade $v_{P/T}$ e o ângulo β são dados por

$$v_{P/T} = \sqrt{(240\ \text{km/h})^2 - (100\ \text{km/h})^2} = 218\ \text{km/h}^2$$

$$\beta = \text{arcsen}\left(\frac{100\ \text{km/h}}{240\ \text{km/h}}\right) = 25°$$

O piloto deve inclinar o avião em 25° oeste e sua velocidade em relação ao solo é de 218 km/h.

AVALIAR: note que tanto neste exemplo quanto no anterior precisamos determinar duas incógnitas. A diferença é que, no Exemplo 3.14, a direção e o módulo se referiam ao *mesmo* vetor $(\vec{v}_{P/T})$, enquanto neste exemplo, eles se referem a vetores *diferentes* $(\vec{v}_{P/T}$ e $\vec{v}_{P/A})$.

Não é de se surpreender que um vento contrário reduza a velocidade de um avião em relação ao solo. Este exemplo demonstra que um *vento ortogonal* também reduz a velocidade de um avião — um infortúnio no dia-a-dia da aeronáutica.

Teste sua compreensão da Seção 3.5 Suponha que o bico de um avião esteja direcionado para leste e que o avião possua uma velocidade do ar de 150 km/h. Devido ao vento, o avião se move para *norte* em relação ao solo e sua velocidade escalar relativa à Terra é 150 km/h. Qual é a velocidade do ar relativa à Terra? i) 150 km/h do leste para oeste; ii) 150 km/h do sul para norte; iii) 150 km/h do sudeste para noroeste; iv) 212 km/h do leste para oeste; v) 212 km/h do sul para norte; vi) 212 km/h do sudeste para noroeste; vii) não há ocorrência possível de um vento com velocidade tal que possa causar isso. ❚

Resumo

Vetores de posição, velocidade e aceleração: o vetor posição $\vec{r}$ é um vetor que vai da origem do sistema de coordenadas a um ponto P do espaço, cujas coordenadas cartesianas são x, y e z.

O vetor velocidade média $\vec{v}_m$ durante um intervalo de tempo Δt é o deslocamento $\Delta\vec{r}$ (a variação do vetor posição $\vec{r}$) dividido por Δt. O vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ é a derivada do tempo de $\vec{r}$, e seus componentes são as derivadas de tempo x, y e z. A velocidade escalar instantânea é o módulo de $\vec{v}$. A velocidade $\vec{v}$ de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula (Exemplo 3.1).

O vetor aceleração média $\vec{a}_m$ durante um intervalo de tempo Δt é a variação da velocidade $\Delta\vec{v}$ dividido por Δt. O vetor aceleração instantânea $\vec{a}$ é a derivada de tempo de $\vec{v}$, e seus componentes são *as derivadas de tempo de* v_x, v_y *e* v_z (Exemplo 3.2).

O componente de aceleração paralelo à direção da velocidade instantânea afeta a velocidade, enquanto o componente de $\vec{a}$ perpendicular a $\vec{v}$ afeta a direção do movimento (exemplos 3.3 e 3.4).

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \tag{3.1}$$

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{3.2}$$

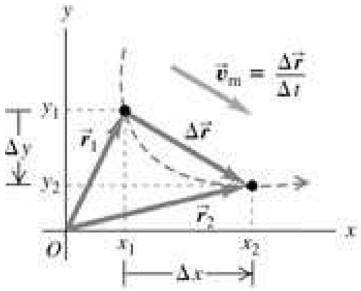
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3.3}$$

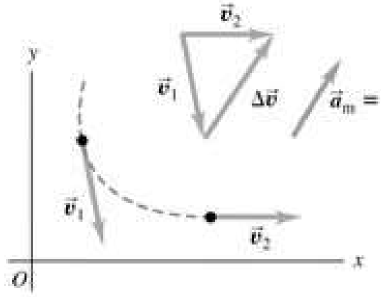
$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{3.4}$$

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{3.8}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3.9}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{3.10}$$





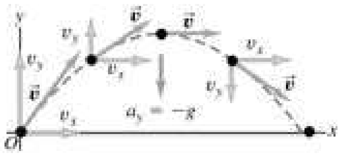
Movimento de um projétil: no movimento de um projétil, desprezada a resistência do ar, $a_x = 0$ e $a_y = -g$. As coordenadas e os componentes da velocidade em função do tempo são simples funções de tempo, e o formato da trajetória é sempre uma parábola. Geralmente definimos a origem na posição inicial do projétil (exemplos 3.5 a 3.10).

$$x = (v_0\cos\alpha_0)t \tag{3.20}$$

$$y = (v_0\text{sen}\,\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.21}$$

$$v_x = v_0\cos\alpha_0 \tag{3.22}$$

$$v_y = v_0\text{sen}\,\alpha_0 - gt \tag{3.23}$$

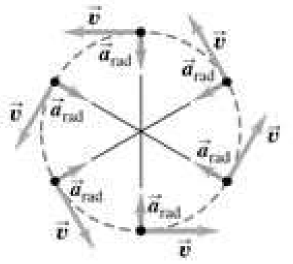


Movimento circular uniforme e não uniforme: quando uma partícula se move ao longo de um círculo de raio R com velocidade escalar v constante (movimento circular uniforme), ela possui aceleração dirigida $\vec{a}$ para o centro do círculo e perpendicular ao vetor $\vec{v}$. O módulo a_{rad} da aceleração pode ser expressa em termos de v e R ou em termos de R e o período T (o tempo de uma revolução), onde $v = 2\pi R/T$. (exemplos 3.11 e 3.12).

Quando a velocidade escalar não for constante (movimento circular não uniforme), ainda existirá um componente radial de $\vec{a}$ dado pela Equação (3.28) ou (3.30), mas existirá também um componente paralelo (tangencial) à trajetória. Esse componente é igual à taxa de variação da velocidade escalar, dv/dt.

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \tag{3.28}$$

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \tag{3.30}$$



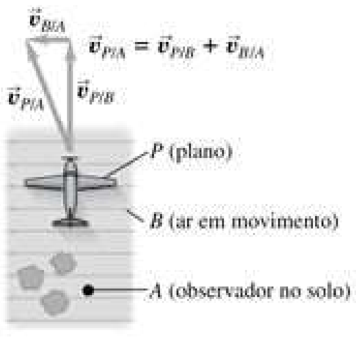
Velocidade relativa: quando um corpo P se move em relação a outro corpo (ou sistema de referência) B, e B se move em relação à A, designamos a velocidade de P relativa a B por $\vec{v}_{P/B}$, a velocidade de P relativa à A por $\vec{v}_{P/A}$ e a velocidade de B relativa a A por $\vec{v}_{B/A}$. Quando essas velocidades estão ao longo da mesma linha, seus componentes ao longo dessa linha estão relacionados pela Equação (3.33). Genericamente, essas velocidades estão relacionadas pela Equação (3.36) (exemplos 3.13 a 3.15).

$$v_{P/Ax} = v_{P/Bx} + v_{B/Ax} \tag{3.33}$$

(velocidade relativa ao longo da linha)

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \tag{3.36}$$

(velocidade relativa no espaço)



Principais termos

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Um carro que faz uma curva a uma velocidade escalar constante possui aceleração orientada para o interior da curva (Seção 3.2, principalmente Figura 3.12a)

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

3.1 **Resposta: iii)** Se a velocidade instantânea $\vec{v}$ é constante por um intervalo de tempo, seu valor em qualquer ponto (incluindo o final do intervalo) é o mesmo que a velocidade média $\vec{v}_m$ no intervalo. Em i) e ii), a direção de $\vec{v}$ no final do intervalo é tangente à trajetória nesse ponto, enquanto a direção de $\vec{v}_m$ aponta desde o início da trajetória até o final dela (na direção do deslocamento líquido). Em iv) $\vec{v}$ e $\vec{v}_m$ são ambos orientados ao longo da linha reta, mas $\vec{v}$ possui módulo maior, porque a velocidade escalar é crescente.

3.2 **Resposta: vetor 7.** No ponto alto da trajetória do trenó, a velocidade escalar é mínima. Nesse ponto, a velocidade não está nem crescendo nem diminuindo, e o componente paralelo da aceleração (ou seja, o componente horizontal) é zero. A aceleração possui somente um componente perpendicular orientado para o interior da trajetória curva do trenó. Em outras palavras, a aceleração é orientada para baixo.

3.3 **Resposta: i)** Na ausência de gravidade ($g = 0$), o macaco não cairia e o dardo seguiria uma trajetória retilínea (demonstrada como uma linha tracejada). O efeito da gravidade consiste em fazer o macaco e o dardo percorrerem a mesma distância em queda, $\frac{1}{2}gt^2$ abaixo das suas posições $g = 0$. O ponto A está na mesma distância abaixo da posição inicial do macaco que o ponto P em relação à linha tracejada, logo o ponto A é onde encontraremos o macaco no instante em questão.

3.4 **Resposta: ii)** Tanto no topo quanto na parte de baixo do círculo, a aceleração é puramente radial e é dada pela Equação (3.28). O raio R é o mesmo em ambos os pontos; logo, a diferença em aceleração deve-se puramente às diferenças na velocidade escalar. Como a_{rad} é proporcional ao quadrado de v, a velocidade escalar deve ser duas vezes maior na parte de baixo do círculo do que no topo.

3.5 **Resposta: vi)** O efeito do vento consiste em cancelar o movimento do avião na direção leste e dar-lhe um movimento em direção ao norte. Logo, a velocidade do ar relativa ao solo (a velocidade do vento) deve ter um componente de 150 km/h para oeste e um componente de 150 km/h para o norte. A combinação deles é um vetor de módulo $\sqrt{(150\ \text{km/h})^2 + (150\ \text{km/h})^2} = 212\ \text{km/h}$ que aponta para noroeste.

Questões para discussão

Q3.1 Um pêndulo simples (um corpo oscilando na extremidade de um fio) descreve um arco de círculo em cada oscilação. Qual é a direção e o sentido da aceleração nas extremidades da oscilação? E no ponto médio? Explique como você obteve cada resposta.

Q3.2 Refaça a Figura 3.11a supondo $\vec{a}$ antiparalelo a $\vec{v}_1$. A partícula se move em linha reta? O que ocorre com a velocidade escalar?

Q3.3 Desprezando a resistência do ar, um projétil se move em uma trajetória parabólica. Existe algum ponto em que $\vec{a}$ é paralelo a $\vec{v}$? Perpendicular a $\vec{v}$? Explique.

Q3.4 Quando um rifle é disparado contra um alvo distante, a direção do cano não coincide com a do alvo. Por que não coincide? O ângulo da correção depende da distância do alvo?

Q3.5 No mesmo instante em que a bala sai horizontalmente do cano de uma arma, você larga um corpo da mesma altura do cano. Desprezando a resistência do ar, qual dos dois chegará primeiro ao solo? Explique.

Q3.6 Um pacote é largado de um avião que voa em uma mesma altitude com velocidade constante. Desprezando a resistência do ar, qual seria a trajetória do pacote observada pelo piloto? E a trajetória observada por uma pessoa no solo?

Q3.7 Desenhe os seis gráficos para os componentes x e y da posição, da velocidade e da aceleração em função do tempo para movimento de um projétil com $x_0 = y_0 = 0$ e $0 < \alpha_0 < 90°$.

Q3.8 Um objeto é lançado de baixo para cima e não sofre resistência do ar. Como é possível que ele tenha aceleração quando pára de se mover no seu ponto mais alto?

Q3.9 Supondo que uma rã possa pular sempre com a mesma velocidade inicial em qualquer direção que ela pule (para a frente ou diretamente de baixo para cima), como a altura máxima que ela pode atingir se relaciona com o alcance horizontal máximo $R_{\text{máx}} = v_0^2/g$?

Q3.10 Um projétil é disparado de baixo para cima, a um ângulo θ acima da horizontal com velocidade escalar inicial v_0. Na sua altura máxima, determine seu vetor de velocidade, sua velocidade escalar e seu vetor de aceleração.

Q3.11 Em um movimento circular uniforme, qual é a velocidade *média* e a aceleração *média* para uma revolução? Explique.

Q3.12 Em um movimento circular uniforme, como varia a aceleração quando a velocidade cresce de um fator igual a 3? Quando o raio decresce de um fator igual a 2?

Q3.13 Em um movimento circular uniforme, a aceleração é perpendicular à velocidade em cada instante, embora ambas mudem de direção continuamente. Isso continua válido, quando o movimento não é uniforme — ou seja, quando a velocidade escalar não é constante?

Q3.14 As gotas da chuva vistas através do vidro lateral de um carro em movimento caem em uma direção diagonal, mesmo sem a ação do vento. Por quê? A explicação é a mesma ou diferente para a diagonal que se vê no pára-brisa?

Q3.15 No caso de uma chuva forte, o que determina a melhor posição do guarda-chuva?

Q3.16 Você está na margem oeste de um rio cujas águas se escoam do sul para o norte com velocidade de 1,2 m/s. Sua velocidade de nado em relação à água é igual a 1,5 m/s e o rio possui 60 m de largura. Qual é a trajetória em relação ao solo para você atravessar o rio no menor intervalo de tempo possível? Explique seu raciocínio.

Q3.17 Quando você deixa um objeto cair de uma certa altura, ele leva um tempo T para atingir o solo, desprezando-se a resistência do ar. Se você o deixasse cair de uma altura três vezes maior, quanto tempo (em termos de T) levaria para o objeto chegar ao solo?

Q3.18 Uma pedra é atirada no ar a um ângulo sobre a horizontal e sofre uma resistência desprezível do ar. Qual gráfico na Figura 3.37 descreve da melhor forma a *velocidade escalar* v da pedra em função do tempo t, enquanto ela está suspensa no ar?

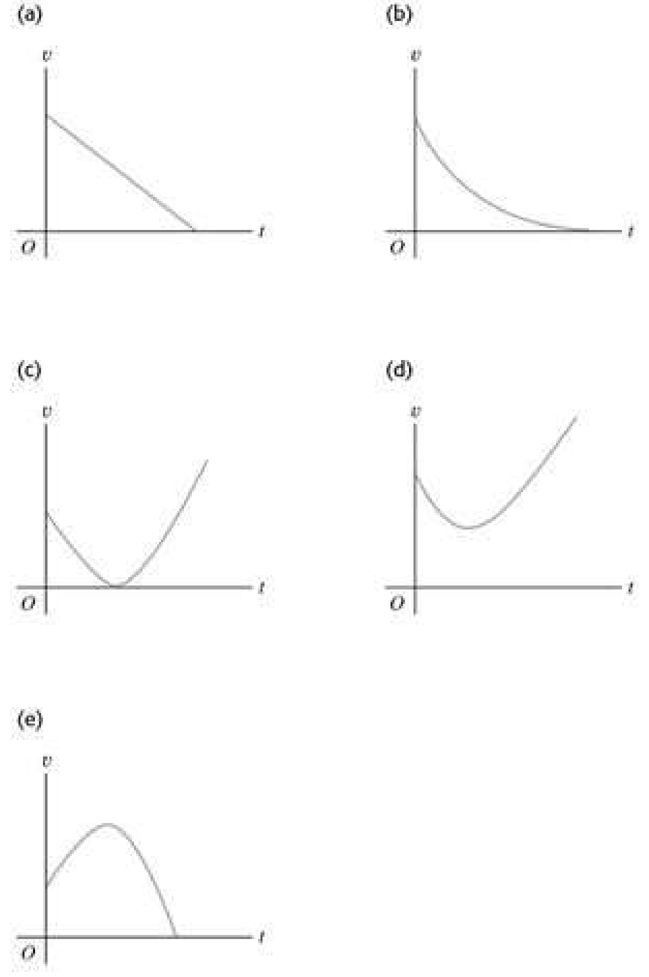


Figura 3.37 Questão Q3.18.

Exercícios

Seção 3.1 Vetor posição e vetor velocidade

3.1 Um esquilo possui coordenadas x e y (1,1 m e 3,4 m) para $t_1 = 0$ e coordenadas (5,3 m e – 0,5 m) para $t_2 = 3{,}0$ s. Para esse intervalo de tempo, calcule a) os componentes da velocidade média; b) o módulo e direção da velocidade média.

3.2 Um rinoceronte está na origem do sistema de coordenadas para $t_1 = 0$. Para o intervalo de tempo entre $t_1 = 0$ e $t_2 = 12{,}0$ s, sua velocidade média possui componente $x = -3{,}8$ m/s e componente $y = 4{,}9$ m/s. Para $t_2 = 12{,}0$ s, a) quais são as coordenadas x e y do rinoceronte? b) qual é a distância entre a origem e o rinoceronte?

3.3 Um projetista de páginas da Internet cria uma animação na qual um ponto da tela do computador possui posição $\vec{r} = [4{,}0\ \text{cm} + (2{,}5\ \text{cm/s}^2)t^2]\hat{\imath} + (5{,}0\ \text{cm/s})t\hat{\jmath}$. a) Ache o módulo, a direção e o sentido da velocidade média do ponto para o intervalo entre $t_1 = 0$ e $t_2 = 2{,}0$ s. b) Ache o módulo, a direção e o sentido da velocidade instantânea para $t_1 = 0$ e $t_2 = 2{,}0$ s. c) Faça um desenho da trajetória do ponto no intervalo entre $t_1 = 0$ e $t_2 = 2{,}0$ s e mostre as velocidades calculadas em (b).

3.4 Se $\vec{r} = bt^2\hat{\imath} + ct^3\hat{\jmath}$, onde b e c são constantes positivas, quando o vetor velocidade faz um ângulo de 45,0° com os eixos Ox e Oy?

Seção 3.2 Vetor aceleração

3.5 Um avião a jato está voando a uma altura constante. No instante $t_1 = 0$, os componentes da velocidade são $v_x = 90$ m/s, $v_y = 110$ m/s. No instante $t_2 = 30{,}0$ s, os componentes são $v_x = -170$ m/s, $v_y = 40$ m/s. a) Faça um esboço do vetor velocidade para t_1 e para t_2. Qual a diferença entre esses vetores? Para esse intervalo de tempo, calcule b) os componentes da aceleração média, c) o módulo, a direção e o sentido da aceleração média.

3.6 A velocidade de um cachorro correndo em um campo aberto possui componentes $v_x = 2{,}6$ m/s, $v_y = -1{,}8$ m/s para $t_1 = 10{,}0$ s. Para o intervalo de tempo entre $t_1 = 10{,}0$ s e $t_2 = 20{,}0$ s, a aceleração média do cachorro possui módulo igual a 0,45 m/s², formando um ângulo de 31,0°, medido considerando-se uma rotação do eixo $+Ox$ para o eixo $+Oy$. Para $t_2 = 20{,}0$ s, a) quais são os componentes x e y da velocidade do cachorro? b) Ache o módulo, a direção e o sentido da velocidade do cachorro. c) Faça um desenho mostrando o vetor velocidade para t_1 e para t_2. Qual é a diferença entre esses vetores?

3.7 Um pássaro voando em um plano xy possui coordenadas $x(t) = \alpha t$ e $y(t) = 3{,}0\ \text{m} - \beta t^2$ onde $\alpha = 2{,}4$ m/s e $\beta = 1{,}2$ m/s². a) Faça um esboço da trajetória do pássaro entre $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s. b) Ache o vetor velocidade e o vetor aceleração do pássaro em função do tempo. c) Ache o módulo, a direção e o sentido do vetor velocidade e do vetor aceleração do pássaro para $t = 2{,}0$ s. d) Faça um esboço do vetor velocidade e do vetor aceleração do pássaro para $t = 2{,}0$ s. Nesse instante, a velocidade escalar do pássaro está aumentando, diminuindo ou é constante? O pássaro está fazendo uma volta? Em caso positivo, em que sentido?

3.8 Uma partícula segue uma trajetória indicada na Figura 3.38. Entre os pontos B e D, a trajetória é uma linha reta. Desenhe o vetor aceleração em A, C e E para os casos em que a) a partícula se move com velocidade escalar constante; b) a partícula se move com velocidade escalar que cresce uniformemente; c) a partícula se move com velocidade escalar que decresce uniformemente.

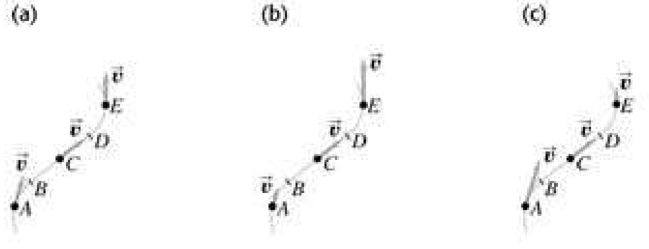


Figura 3.38 Exercício 3.8.

Seção 3.3 Movimento de um projétil

3.9 Um livro de física escorrega horizontalmente para fora do topo de uma mesa com velocidade de 1,10 m/s. Ele colide com o solo em 0,350 s. Desprezando a resistência do ar, ache a) a altura do topo da mesa até o solo; b) a distância horizontal entre a extremidade da mesa e o ponto onde ele colidiu com o solo; c) os componentes da velocidade do livro e o módulo, a direção e o sentido da velocidade imediatamente antes de o livro atingir o solo; d) faça diagramas xt, yt, v_xt e v_yt para o movimento.

3.10 Um helicóptero militar em missão de treinamento voa horizontalmente com velocidade de 60,0 m/s e acidentalmente deixa cair uma bomba (felizmente não ativa) de uma altura de 300 m. Despreze a resistência do ar. a) Quanto tempo a bomba leva para atingir o solo? b) Qual a distância horizontal percorrida pela bomba durante a queda? c) Ache os componentes da velocidade na direção horizontal e na vertical imediatamente antes de a bomba atingir o solo. d) Faça diagramas xt, yt, v_xt e v_yt para o movimento da bomba. e) Mantida constante a velocidade do helicóptero, onde estaria ele no momento em que a bomba atingisse o solo?

3.11 Dois grilos, Chirpy e Milada, saltam do topo de um rochedo íngreme. Chirpy simplesmente se deixa cair e chega ao solo em 3,50 s, enquanto Milada salta horizontalmente com velocidade inicial de 95,0 cm/s. A que distância da base do rochedo Milada vai atingir o chão?

3.12 Uma ousada nadadora salta correndo 510 N e horizontalmente de um rochedo para um mergulho, conforme a Figura 3.39. Qual deve ser sua velocidade mínima quando salta do topo do rochedo, de modo que ela consiga ultrapassar uma saliência no pé do rochedo, com largura de 1,75 m e 9,0 m abaixo do topo?

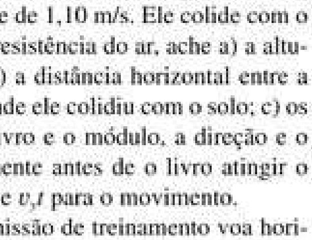


Figura 3.39 Exercício 3.12.

3.13 **Saltando o rio I.** Durante uma tempestade, um carro chega onde deveria haver uma ponte, mas o motorista a encontra destruída, levada pelas águas. Como precisa chegar ao outro lado, o motorista decide tentar saltar sobre o rio com o carro. O lado da estrada em que o carro está fica 21,3 m acima do rio, enquanto o lado oposto está apenas 1,8 m acima do rio. O rio é uma torrente de águas turbulentas com largura de 61,0 m. a) A que velocidade o carro deve estar se movendo no momento em que deixa a estrada para cruzar sobre o rio e aterrissar em segurança na margem oposta? b) Qual é a velocidade escalar do carro pouco antes de aterrissar do outro lado?

3.14 Uma bola de gude rola horizontalmente com velocidade escalar v_0 e cai do topo de uma plataforma de 2,75 m de altura, sem sofrer nenhuma resistência significativa do ar. No nível do solo, a 2,0 m da base da plataforma, há um buraco escancarado (Figura 3.40). Para qual alcance da velocidade de v_0 a bola de gude aterrissará no buraco?

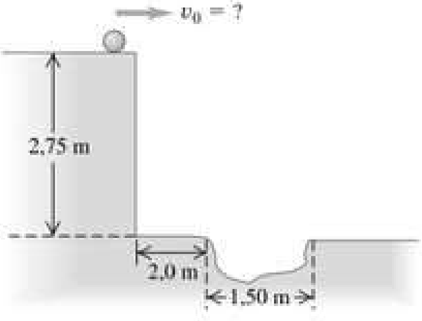


Figura 3.40 Exercício 3.14.

3.15 No interior de uma nave espacial em repouso sobre a superfície terrestre, uma bola rola pelo topo de uma mesa horizontal e cai no chão a uma distância D do pé da mesa. Essa nave agora aterrissa no inexplorado Planeta X. O comandante, Capitão Curioso, rola a mesma bola pela mesma mesa e com a mesma velocidade escalar inicial como ocorreu na superfície terrestre e descobre que ela cai no chão a uma distância de 2,76D do pé da mesa. Qual é a aceleração da gravidade no Planeta X?

3.16 Pelé chuta uma bola de futebol com velocidade inicial tal que o componente vertical é igual a 16,0 m/s e o componente horizontal é igual a 20,0 m/s. Despreze a resistência do ar. a) Quanto tempo a bola leva para atingir a altura máxima de sua trajetória? b) Qual a altura desse ponto? c) Quanto tempo a bola leva (desde o momento do chute inicial) até o instante em que ela retorna ao mesmo nível inicial? Qual é a relação entre esse tempo e o calculado no item (a)? d) Que distância horizontal ela percorreu durante esse tempo? e) Faça diagramas xt, yt, v_xt e v_yt para o movimento.

3.17 No nível do solo, uma bomba é disparada com velocidade inicial de 80,0 m/s, a 60° sobre a horizontal e sem sofrer resistência significativa do ar. a) Ache os componentes horizontal e vertical da velocidade inicial da bomba. b) Quanto tempo ela leva para atingir seu ponto mais alto? c) Ache sua altura máxima sobre o solo. d) A que distância do seu ponto de disparo a bomba aterrissa? e) No seu ponto mais alto, ache os componentes horizontal e vertical da sua aceleração e velocidade.

3.18 Uma pistola de sinalização atira uma bala luminosa com velocidade inicial (velocidade na saída do cano) igual a 125 m/s e a 55° acima da horizontal. Despreze a resistência do ar. Calcule a altura máxima da bala luminosa e sua distância desde o ponto de disparo até o ponto de aterrissagem, caso seja disparada a) no nível das planícies de uma região como Brasília e b) de uma região plana da Lua, onde $g = 1{,}6$ m/s^2.

3.19 Mark McGwire bate uma bola de beisebol de forma que ela abandona o bastão com velocidade de 30,0 m/s formando um ângulo de 36,9° acima da horizontal. Despreze a resistência do ar. a) Ache os *dois* instantes para os quais a altura da bola está a 10,0 m acima do nível inicial. b) Calcule o componente vertical e o componente horizontal da velocidade da bola em cada um dos dois tempos calculados no item (a). c) Determine o módulo, a direção e o sentido da velocidade da bola quando ela retorna ao nível inicial.

3.20 Um taco golpeia uma bola de golfe em uma pequena elevação acima do solo com uma velocidade de 12,0 m/s e um ângulo inicial de 51,0° acima da horizontal. A bola atinge o campo 2,08 s após a tacada. Despreze a resistência do ar. a) Quais são os componentes da aceleração da bola durante o vôo? b) Quais são os componentes da velocidade da bola no início e no final de sua trajetória? c) Qual é a distância horizontal percorrida pela bola? d) Por que a expressão de R obtida no Exemplo 3.8 *não* pode ser usada para dar a resposta correta do item (c)? e) Qual era a altura da bola no momento em que ela saiu do taco? f) Faça diagramas xt, yt, v_xt e v_yt para o movimento.

3.21 Ganhe o prêmio. Em um parque de diversões você pode ganhar uma girafa inflável, se conseguir encaixar uma moeda de 25 centavos em um prato pequeno. O prato está sobre uma prateleira acima do ponto em que a moeda deixa sua mão, a uma distância horizontal de 2,1 m deste ponto (Figura 3.41). Se você lança a moeda com velocidade de 6,4 m/s formando um ângulo de 60° acima da horizontal, a moeda se encaixa no prato. Despreze a resistência do ar. a) Qual a altura da prateleira em relação ao nível da sua mão? b) Qual é o componente vertical da velocidade da moeda imediatamente antes de a moeda pousar no prato?

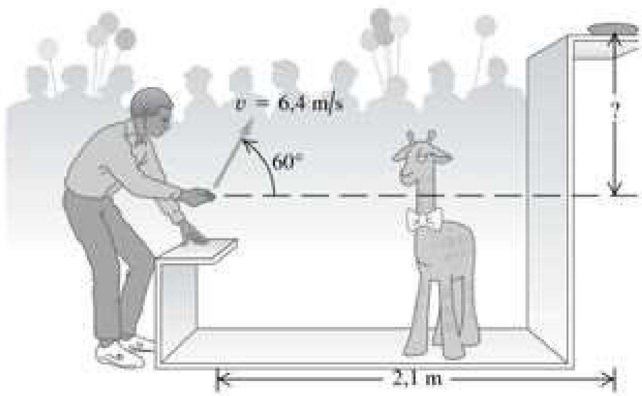


Figura 3.41 Exercício 3.21.

3.22 Suponha que o ângulo inicial α_0 da Figura 3.26 seja 42,0° e que d seja igual a 3,0 m. Onde o dardo e o macaco se encontrarão, se a velocidade inicial do dardo for a) 12,0 m/s? b) 8,0 m/s? c) O que ocorreria se a velocidade inicial do dardo fosse 4,0 m/s? Faça um esboço da trajetória em cada caso.

3.23 Um homem está parado no alto de um edifício de 15,0 m de altura e atira uma pedra com velocidade de módulo de 30,0 m/s formando um ângulo inicial de 33,0° acima da horizontal. Despreze a resistência do ar. Calcule a) a altura máxima acima do telhado atingida pela pedra; b) o módulo da velocidade da pedra imediatamente antes de ela atingir o solo; c) a distância horizontal entre a base do edifício e o ponto onde ela atinge o solo. d) Faça diagramas xt, yt, v_xt e v_yt para o movimento.

3.24 Bombeiros estão lançando um jato de água em um prédio em chamas, usando uma mangueira de alta pressão que dispara água a uma velocidade escalar de 25,0 m/s. Quando sai da mangueira, a água passa a adquirir o movimento de um projétil. Os bombeiros ajustam o ângulo de elevação α da mangueira até a água levar 3,0 s para atingir o prédio a 45,0 m de distância. Despreze a resistência do ar e suponha que o final da mangueira está ao nível do solo. a) Ache o ângulo de elevação α. b) Ache a velocidade escalar e a aceleração da água no ponto mais alto de sua trajetória. c) A que altura do chão a água atinge o prédio e qual sua velocidade pouco antes de atingir o prédio?

3.25 Um balão de 124 kg carregando um cesto de 22 kg está descendo a uma velocidade constante de 20,0 m/s. Uma pedra de 1,0 kg é atirada do cesto em uma trajetória perpendicular a do balão que desce, com velocidade inicial de 15,0 m/s, medida em relação a uma pessoa em repouso no cesto. Essa pessoa vê a pedra atingir o solo 6,0 s após ser atirada. Suponha que o balão continue sua descida com a mesma velocidade escalar constante de 20,0 m/s. a) Qual a altura do balão quando a pedra foi atirada? b) Qual a altura do balão quando a pedra atinge o solo? c) No instante em que a pedra atinge o solo, a que distância está do cesto? d) No instante em que a pedra vai atingir o solo, determine seus componentes horizontal e vertical medidos por um observador i) em repouso no cesto e ii) em repouso no solo.

3.26 Um canhão, localizado a 60,0 m da base de um rochedo vertical, lança uma bomba de 15 kg, a 45° sobre a horizontal e em direção ao rochedo. a) Qual deve ser a velocidade mínima na boca do canhão para que a bomba passe sobre o topo do rochedo? b) O solo no topo do rochedo é plano, com uma elevação constante de 25,0 m acima do canhão. Sob as condições de (a), a que distância da borda do rochedo a bomba aterrissa?

3.27 Um avião voa a uma velocidade de 90,0 m/s, a um ângulo de 23,0° acima da horizontal. Quando está a 114 m diretamente sobre um cachorro parado no nível do solo, uma mala cai do compartimento de bagagens. A que distância do cachorro a mala vai cair? Despreze a resistência do ar.

Seção 3.4 Movimento circular

3.28 Em seu primeiro dia de trabalho em uma fábrica de eletrodomésticos, você é solicitado a informar o que é necessário fazer para que a centrifugadora de uma máquina de lavar triplique sua aceleração centrípeta. Você impressiona sua chefe respondendo imediatamente. O que você diz a ela?

3.29 A Terra possui um raio igual a 6.380 km e faz um giro completo em 24 horas. a) Qual é a aceleração radial de um objeto no equador da Terra? Dê sua resposta em m/s^2 e como uma fração de g. b) Se a_{rad} no equador fosse maior do que g, os objetos seriam ejetados da Terra e voariam para o espaço. (Veremos a razão disso no Capítulo 5.) Qual deveria ser o período mínimo de rotação da Terra para que isso ocorresse?

3.30 Um modelo de rotor de helicóptero possui quatro lâminas, cada qual com 3,40 m de comprimento desde o eixo central até sua extremidade. O modelo gira em um túnel de vento com 550 rev/min. a) Qual é a velocidade linear da extremidade da lâmina em m/s? b) Qual é a aceleração radial da extremidade da lâmina expressa como múltiplo da aceleração da gravidade, g?

3.31 Em um teste de um 'aparelho para g', um voluntário gira em um círculo horizontal de raio igual a 7,0 m. Qual é o período da rotação para que a aceleração centrípeta possua módulo de a) 3,0 g? b) 10 g?

3.32 O raio da órbita da Terra em torno do Sol (suposta circular) é igual a $1{,}50 \times 10^8$ km, e a Terra percorre essa órbita em 365 dias. a) Qual é o módulo da velocidade orbital da Terra em m/s? b) Qual é a aceleração radial da Terra no sentido do Sol em m/s^2? c) Repita os cálculos de (a) e de (b) para o planeta Mercúrio (raio da órbita = $5{,}79 \times 10^7$ km, período da órbita = 88,0 dias).

3.33 Uma roda-gigante com raio igual a 14,0 m está girando em torno de um eixo horizontal passando pelo seu centro (Figura 3.42). A velocidade linear de uma passageira em sua periferia é igual a 7,0 m/s. Determine o módulo, a direção e o sentido da aceleração da passageira a) no ponto mais baixo do movimento circular, b) no ponto mais alto do movimento circular. c) Quanto tempo leva a roda-gigante para completar uma revolução?

Figura 3.42 Exercícios 3.33 e 3.34.

3.34 A roda-gigante da Figura 3.42, que gira no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, começa a se mover. Em dado instante, um passageiro na periferia da roda e passando no ponto mais baixo do movimento circular, move-se a 3,0 m/s e está ganhando velocidade com uma taxa de 0,500 m/s^2. a) Determine o módulo, a direção e o sentido da aceleração do passageiro nesse instante. b) Faça um desenho da roda-gigante e do passageiro, mostrando a velocidade e os vetores de aceleração dele.

3.35 Hipergravidade. No *Ames Research Center*, a NASA usa sua grande centrífuga '20-G' para testar os efeitos de acelerações muito grandes ('hipergravidade') sobre pilotos e astronautas de teste. Nesse dispositivo, um braço de 8,84 m de comprimento gira uma extremidade em um plano horizontal, e o astronauta fica preso na outra extremidade. Suponha que ele está alinhado ao longo do braço, com a cabeça na extremidade mais externa. A aceleração sustentada máxima à qual os humanos são sujeitos nessa máquina é geralmente 12,5 g. a) A que velocidade a cabeça do astronauta deve se mover para sentir essa aceleração máxima? b) Qual é a *diferença* entre a aceleração da sua cabeça e a dos seus pés, se o astronauta tiver 2,0 m de altura? c) Qual a velocidade em rpm (rev/min) em que o braço está girando para produzir a aceleração máxima sustentada?

Seção 3.5 Velocidade relativa

3.36 O vagão-plataforma de um trem se desloca para a direita, com uma velocidade escalar de 13,0 m/s relativa a um observador fixo no solo. Há alguém dirigindo uma lambreta sobre o vagão-plataforma (Figura 3.43). Qual a velocidade (módulo, direção e sentido) da lambreta em relação ao vagão, se sua velocidade relativa ao observador em solo é a) 18,0 m/s para a direita? b) 3,0 m/s para a esquerda? c) zero?

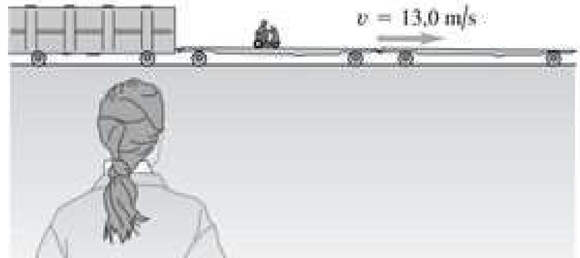


Figura 3.43 Exercício 3.36.

3.37 A 'esteira rolante horizontal' do terminal de um aeroporto se move a 1,0 m/s e tem 35,0 m de comprimento. Se uma mulher pisa em uma das extremidades e caminha a 1,5 m/s em relação à plataforma móvel, quanto tempo ela necessita para chegar à extremidade oposta, se andar a) na mesma direção que a plataforma se move? b) na direção oposta?

3.38 Dois píeres estão localizados em um rio: o píer B está situado a 1500 m de A corrente abaixo (Figura 3.35). Dois amigos devem fazer um percurso do píer A ao píer B e depois voltar. Um deles vai de barco com velocidade constante de 4,0 km/h em relação à água. O outro caminha pela margem do rio com velocidade constante de 4,0 km/h. A velocidade do rio é igual a 2,80 km/h no sentido de A para B. Calcule o tempo de cada um para fazer o percurso de ida e volta.

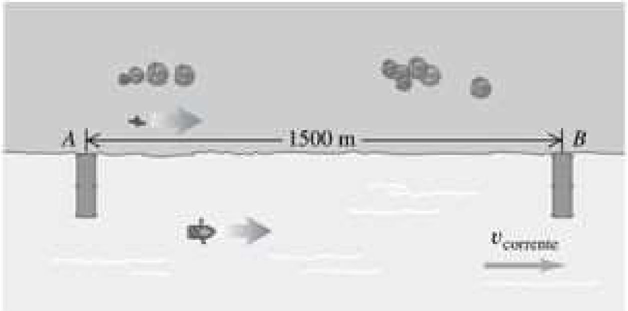


Figura 3.44 Exercício 3.38.

3.39 Uma canoa possui velocidade de 0,40 m/s do sul para leste em relação à Terra. A canoa se desloca em um rio que escoa a 0,50 m/s do oeste para leste em relação à Terra. Determine o módulo, a direção e o sentido da velocidade da canoa em relação ao rio.

3.40 O piloto de um avião deseja voar de leste para oeste. Um vento de 80,0 km/h (sobre 50 mi/h) sopra do norte para o sul. a) Se a velocidade do avião em relação ao ar (sua velocidade se o ar estivesse em repouso) é igual a 320,0 km/h (sobre 200 mi/h), qual deve ser a direção escolhida pelo piloto? b) Qual é a velocidade do avião em relação ao solo? Ilustre sua solução com um diagrama vetorial.

3.41 **Cruzando o rio I.** A água de um rio se escoa com velocidade de 2,0 m/s do norte para o sul. Um homem dirige um barco com motor ao longo do rio; com velocidade igual a 4,2 m/s em relação à água, de oeste para leste. A largura do rio é igual a 800 m. a) Determine o módulo, a direção e o sentido da sua velocidade em relação à Terra. b) Quanto tempo é necessário para atravessar o rio? c) A que distância ao sul do ponto inicial ele atingirá a margem oposta?

3.42 **Cruzando o rio II.** a) Em que direção o barco do Exercício 3.41 deveria se para atingir a margem oposta diretamente a leste do ponto inicial? (Sua velocidade em relação à água permanece igual a 4,2 m/s.) b) Qual a velocidade do barco em relação à Terra? c) Quanto tempo é necessário para atravessar o rio?

3.43 Um avião ultraleve aponta de norte para sul, e seu indicador de velocidade em relação ao ar mostra 35 m/s. O avião está submetido a um vento de 10 m/s que sopra na direção sudoeste em relação à Terra. a) Faça um diagrama vetorial mostrando a relação entre os vetores dados e $\vec{v}_{P/T}$ (a velocidade do avião em relação à Terra). b) Usando a coordenada x para o leste e a coordenada y para o norte, determine os componentes de $\vec{v}_{P/T}$. Determine o módulo, a direção e o sentido de $\vec{v}_{P/T}$.

Problemas

3.44 Um modelo de foguete se move no plano xy (o sentido positivo do eixo vertical Oy é de baixo para cima). A aceleração do foguete possui os componentes $a_x(t) = \alpha t^2$ e $a_y(t) = \beta - \gamma t$, onde $\alpha = 2{,}50\ \text{m/s}^4$, $\beta = 9{,}0\ \text{m/s}^2$ e $\gamma = 1{,}40\ \text{m/s}^3$. Para $t = 0$, o foguete está na origem e possui velocidade $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath}$, sendo $v_{0x} = 1{,}0$ m/s e $v_{0y} = 7{,}0$ m/s. a) Determine o vetor velocidade e o vetor posição em função do tempo. b) Qual a altura máxima atingida pelo foguete? c) Faça um desenho da trajetória do foguete. d) Qual o deslocamento horizontal do foguete quando ele retorna para o ponto $y = 0$?

3.45 Um foguete é lançado a um ângulo do topo de uma torre com altura $h_0 = 50{,}0$ m. Devido ao projeto dos motores, suas coordenadas de posição estão na forma $x(t) = A + Bt^2$ e $y(t) = C = Dt^3$, sendo que A, B, C e D são constantes. Além disso, a aceleração do foguete 1,0 s após o lançamento é $\vec{a} = (4{,}0\hat{\imath} + 3{,}0\hat{\jmath})\ \text{m/s}^2$. Suponha que a origem das coordendas esteja na base da torre. a) Ache as constantes A, B, C e D, incluindo suas unidades SI. b) No instante imediatamente após o lançamento do foguete, quais são seu vetor de aceleração e sua velocidade? c) Quais são os componentes x e y da velocidade do foguete 10,0 s após seu lançamento e com que velocidade ele se desloca? d) Qual o vetor posição do foguete 10,0 s após seu lançamento?

3.46 Um pássaro voa em um plano xy com um vetor velocidade dado por $\vec{v} = (\alpha - \beta t^2)\hat{\imath} + \gamma t\hat{\jmath}$, sendo $\alpha = 2{,}4$ m/s, $\beta = 1{,}6\ \text{m/s}^3$ e $\gamma = 4{,}0\ \text{m/s}^2$. O sentido positivo do eixo vertical Oy é de baixo para cima. Em $t = 0$, o pássaro está na origem. a) Determine o vetor posição e o vetor aceleração do pássaro em função do tempo. b) Qual é a altura do pássaro (coordenada y) quando ele voa sobre $x = 0$ pela primeira vez depois de $t = 0$?

3.47 Um foguete de teste é lançado por aceleração ao longo de uma inclinação de 200,0 m, a 125 m/s², partindo do repouso no ponto A (Figura 3.45). A inclinação se ergue a 35,0° sobre a horizontal e, no instante em que o foguete parte dela, os motores se apagam e ele fica sujeito somente à gravidade (a resistência ao ar pode ser desprezada). Determine a) a altura máxima sobre o solo atingida pelo foguete e b) o maior alcance horizontal do foguete passando-se o ponto A.

Figura 3.45 Problema 3.47.

3.48 **Atletas marcianas.** No salto à distância, uma atleta se projeta a um ângulo sobre o solo e cai mantendo-se na mesma altura, tentando percorrer a maior distância horizontal. Suponha que na Terra ela permanecesse no ar pelo tempo T, atingindo uma altura máxima h e percorrendo uma distância horizontal D. Se ela saltasse *exatamente* da mesma forma em uma competição em Marte, onde g_{MARTE} é 0,379 do seu valor na Terra, ache o tempo dela no ar, a altura máxima e a distância horizontal. Expresse cada uma dessas três grandezas em termos do seu valor na Terra. Despreze a resistência do ar nos dois planetas.

3.49 **Dinamite!** Uma equipe de demolição usa dinamite para explodir um edifício velho. Fragmentos da explosão voam em todas as direções e mais tarde são encontrados num raio de 50 m da explosão. Faça uma estimativa da velocidade máxima atingida pelos fragmentos da explosão. Descreva todas as hipóteses que você usar.

3.50 **Em espiral.** É comum ver aves de rapina ganhando altura impulsionadas por uma corrente de ar quente. A trajetória que elas percorrem se assemelha a uma espiral. Pode-se reproduzir o movimento em espiral como um movimento circular uniforme combinado com uma velocidade ascendente constante. Suponha que um pássaro complete um círculo com raio de 8,0 m a cada 5,0 s e suba verticalmente a uma taxa de 3,0 m/s. Determine a) a velocidade escalar do pássaro em relação ao solo, b) a aceleração do pássaro (módulo, direção e sentido) e c) o ângulo entre o vetor de velocidade do pássaro e a horizontal.

3.51 Na selva, um veterinário com uma arma carregada com um dardo tranqüilizante e um macaco astuto de 1,5 kg estão 25 m acima do solo, cada qual em uma árvore a 90 m de distância uma da outra. Assim que o caçador atira horizontalmente no macaco, este se solta da árvore na tentativa de escapar do tiro. Qual deve ser a velocidade mínima do dardo no cano da arma para que o caçador atinja o macaco antes que ele chegue ao chão?

3.52 Uma dublê de cinema pula de um helicóptero em vôo a 30,0 m acima do solo com velocidade constante cujo componente vertical é igual a 10,0 m/s de baixo para cima e cujo componente horizontal é igual a 15,0 m/s do norte para o sul. Despreze a resistência do ar. a) Em que lugar do solo (em relação ao ponto onde ela abandonou o helicóptero) a dublê colocou almofadas de espuma para amortecer a queda? b) Faça diagramas xt, yt, v_xt e v_yt para o movimento.

3.53 No combate a incêndios em florestas, aviões jogam água para ajudar equipes que trabalham no solo. Um piloto em treinamento lança uma caixa com corante vermelho, na esperança de atingir um alvo no solo. Se o avião está voando horizontalmente a 90,0 m acima do solo com velocidade de 64,0 m/s (143 mi/h), a que distância horizontal do alvo o piloto deve lançar a caixa? Despreze a resistência do ar.

3.54 Um navio se aproxima do porto a 45,0 cm/s e uma importante peça do equipamento de ancoragem precisa ser lançada, para que ele possa aportar. Esse equipamento é lançado a 15,0 m/s e 60,0° acima da horizontal, do topo de uma torre, à beira da água, 8,75 m acima do convés do navio (Figura 3.46). Para esse equipamento cair na frente do navio, a que distância D da doca deve estar o navio quando o equipamento for lançado? Despreze a resistência do ar.

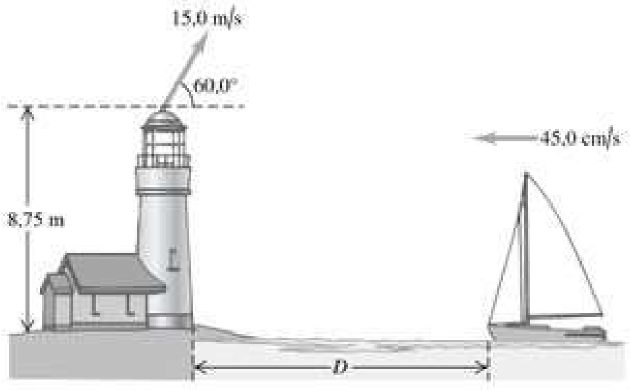


Figura 3.46 Problema 3.54.

3.55 **O maior alcance de uma bola de beisebol.** De acordo com o *Guinness Book of World Records*, o recorde de alcance de uma bola de beisebol foi obtido em uma batida feita por Roy 'Dizzy' Carlyle em um jogo menor de um campeonato. A bola percorreu uma distância horizontal de 188 m até atingir o solo fora do campo. a) Supondo que a bola tenha sido lançada a 45,0° acima da horizontal e desprezando a resistência do ar, qual era a velocidade inicial da bola para que isso ocorresse, sabendo-se que a bola foi batida em um ponto a 0,9 m acima do nível do solo? Suponha que o solo seja perfeitamente plano. b) Em que ponto a bola passou acima da cerca de 3,0 m de altura, sabendo-se que a cerca estava a uma distância de 116 m do ponto do lançamento da bola?

3.56 Uma mangueira de água é usada para encher um grande tanque cilíndrico com diâmetro D e altura $2D$. O jato de água sai da mangueira a 45° acima da horizontal, a partir do mesmo nível da base do tanque, e está a uma distância $6D$ (Figura 3.47). Para qual *alcance* de velocidade de lançamento (v_0) a água entrará no tanque? Despreze a resistência do ar e expresse sua resposta em termos de D e g.

Figura 3.47 Problema 3.56.

3.57 Um projétil está sendo lançado do nível do chão, sem sofrer resistência do ar. Você quer evitar que ele penetre uma camada de inversão de temperatura na atmosfera a uma altura h sobre o solo. a) Qual velocidade de lançamento máxima você poderia aplicar nesse projétil, se o lançasse diretamente de baixo para cima? Expresse sua resposta em termos de h e g. b) Suponha que a plataforma de lançamento disponível dispare projéteis ao dobro da velocidade de lançamento máxima calculada na parte a) A que ângulo máximo sobre a horizontal você deve lançar o projétil? c) A que distância (em termos de h) da plataforma de lançamento o projétil aterrissa na parte (b)?

3.58 **Chutando a gol.** No futebol americano, após um *touchdown (aterrissagem, nome de uma jogada vencedora)*, o time tem a oportunidade de conquistar mais um ponto chutando a bola sobre a barra entre as traves do gol. A barra fica a 10,0 pés acima do solo, e a bola é chutada do nível do solo, na direção horizontal a 36,0 pés da barra (Figura 3.48). As regras do futebol americano são enunciadas em unidades inglesas, mas devem ser convertidas para SI neste caso. a) Há um ângulo mínimo acima do solo que garante que a bola passará sobre a barra, seja qual for a velocidade do chute. Qual é esse ângulo? b) Se a bola for chutada

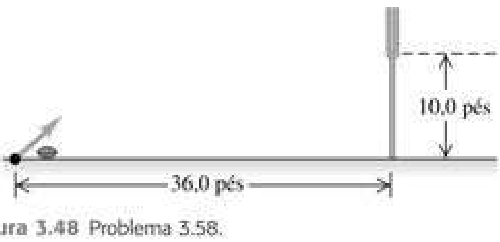


Figura 3.48 Problema 3.58.

a 45,0° acima da horizontal, qual deve ser a velocidade escalar inicial suficiente para que ela passe sobre a barra? Expresse sua resposta em m/s e km/h.

3.59 Um projétil é lançado com velocidade v_0 formando um ângulo α_0 com a horizontal. O ponto de lançamento está situado a uma altura h acima do solo. a) Desprezando a resistência do ar, mostre que a distância horizontal percorrida pelo projétil antes de ele atingir o solo é dada por

$$x = \frac{v_0 \cos\alpha_0}{g}\left(v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0 + 2gh}\right)$$

Verifique que, se o ponto de lançamento estivesse situado no mesmo nível do solo, isto é, $h = 0$, essa expressão se reduziria ao alcance horizontal R encontrado no Exemplo 3.8. b) Para o caso $v_0 = 10$ m/s e $h = 5{,}0$ m, faça um gráfico de x em função do ângulo de lançamento α_0 para valores d α_0 e de 0° a 90°. Seu gráfico deve mostrar que x é igual a zero para $\alpha_0 = 90°$, mas x é diferente de zero para $\alpha_0 = 0$; explique a razão disso. c) Vimos no Exemplo 3.8 que, quando o projétil atinge o solo no mesmo nível em que ele é lançado, o alcance horizontal é máximo para $\alpha_0 = 45°$. Para o caso desenhado no item (b), o ângulo de lançamento para o alcance horizontal máximo é igual a, maior que ou menor que 45°? (Este problema fornece um resultado geral para o lançamento de um projétil lançado de um ponto mais elevado do que o ponto onde ele atinge o solo.)

3.60 Cuidado! Uma bola de neve rola do telhado de um celeiro que possui uma inclinação para baixo igual a 40° (Figura 3.49). A extremidade do telhado está situada a 14,0 m acima do solo e a bola de neve possui velocidade de 7,0 m/s quando ela abandona o telhado. Despreze a resistência do ar. a) A que distância do celeiro a bola de neve atingirá o solo caso não colida com nada durante sua queda? b) Faça diagramas xt, yt, $v_x t$ e $v_y t$ para o movimento da parte (a). c) Um homem de 1,9 m de altura está parado a uma distância de 4,0 m da extremidade do celeiro. Ele será atingido pela bola de neve?

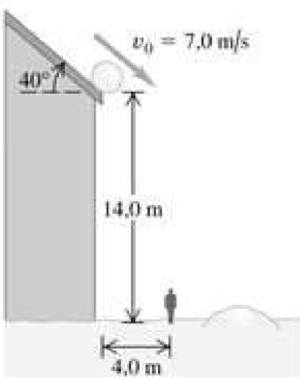


Figura 3.49 Problema 3.60.

3.61 a) Prove que um projétil lançado em um ângulo α_0 possui o mesmo alcance horizontal de outro lançado com a mesma velocidade em um ângulo $(90° - \alpha_0)$. b) Uma rã salta com uma velocidade de 2,2 m/s e chega ao solo a 25 cm de distância de seu ponto inicial. Para que ângulos acima da horizontal ela poderia ter saltado?

3.62 No trapézio voador. Em um novo circo, Maria oscila em um trapézio, projeta-se em um ângulo de 53° e deve ser segurada por João, cujas mãos estão a 6,1 m acima e 8,2 m horizontalmente do ponto de lançamento de Maria (Figura 3.50). Despreze a resistência do ar. a) Qual deve ser a velocidade inicial de Maria para que ela seja segurada por João? b) Para a velocidade inicial calculada em (a), qual é o módulo, a direção e o sentido da velocidade de Maria quando ela é segurada por João? c) Supondo que Maria possua a velocidade inicial calculada em (a), faça diagramas xt, yt, $v_x t$ e $v_y t$ para o movimento dos dois trapezistas. Seus gráficos devem mostrar o movimento para cima até o instante em que Maria alcança João. d) Na noite de estréia, João não consegue segurar Maria. Qual a distância horizontal percorrida por Maria, a partir de seu ponto inicial, até o momento em que ela atinge a rede de segurança situada a 8,6 m abaixo de seu ponto inicial?

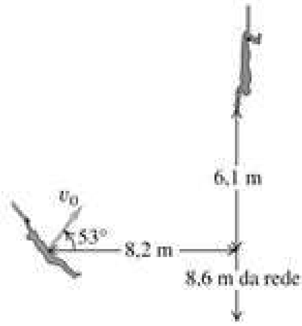


Figura 3.50 Problema 3.62.

3.63 Saltando no rio II. Um professor de física faz loucas proezas em suas horas vagas. Sua última façanha foi saltar sobre um rio com sua motocicleta (Figura 3.51). A rampa de decolagem era inclinada de 53,0°, a largura do rio era de 40,0 m, e a outra margem estava a 15,0 m abaixo do nível da rampa. O rio estava a 100 m abaixo do nível da rampa. Despreze a resistência do ar. a) Qual deveria ser sua velocidade para que ele pudesse alcançar a outra margem sem cair no rio? b) Caso sua velocidade fosse igual à metade do valor encontrado em (a), aonde ele cairia?

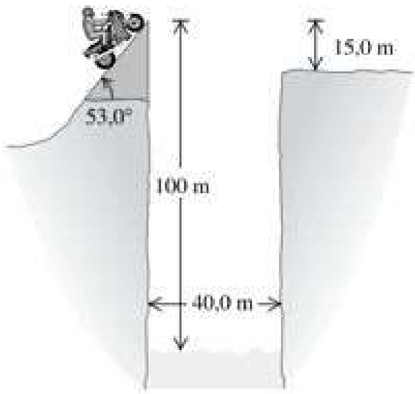


Figura 3.51 Problema 3.63.

3.64 Uma pedra é atirada do telhado de um edifício com velocidade v_0, formando um ângulo α_0 com a horizontal. Despreze a resistência do ar. Determine o módulo, a direção e o sentido da velocidade da pedra imediatamente antes de atingir o solo e mostre que essa velocidade não depende de ângulo α_0.

3.65 Uma carreta de 5.500 kg carregando uma plataforma vertical para lançamento de foguetes se desloca para a direita, a uma velocidade constante de 30,0 m/s ao longo de uma pista horizontal. Essa plataforma lança um foguete de 45,0 kg verticalmente de baixo para cima, com velocidade inicial de 40,0 m/s em relação à carreta. a) Que altura o foguete atingirá? b) Onde, em relação à carreta, o foguete aterrissará? c) Que distância a carreta percorre enquanto o foguete está no ar? d) Do ponto de vista de um observador em repouso no solo, a que ângulo, em relação à horizontal, o foguete se desloca assim que deixa a carreta? 2) Desenhe a trajetória do foguete do ponto de vista de um observador i) parado na carreta e ii) parado no solo.

3.66 Uma bola de 2,7 kg é jogada de baixo para cima com velocidade inicial de 20 m/s, da borda de um rochedo que mede 45,0 m de altura. No instante em que a bola é jogada, uma mulher começa a correr da base do rochedo, com velocidade constante de 6,0 m/s. Ela corre em linha reta no nível do solo, e a resistência do ar sobre a bola é desprezível. a) A que ângulo sobre a horizontal a bola deve ser jogada para que a corredora consiga pegá-la antes que atinja o solo e que distância ela percorre até conseguir isso? b) Desenhe a trajetória da bola do ponto de vista de i) uma pessoa em repouso no solo e ii) a corredora.

3.67 Uma rocha de 76,0 kg rola horizontalmente pelo topo de um rochedo vertical, que está 20 m acima da superfície de um lago, conforme a Figura 3.52. O topo da face vertical de uma barragem localiza-se a 100 m do pé do rochedo, sendo que o topo da barragem está no mesmo nível da superfície do lago. Uma planície nivelada está 25 m abaixo do topo da barragem. a) Qual deve ser a velocidade mínima da rocha ao cair do rochedo, de modo que role para a planície, sem atingir a represa? b) A que distância da base da represa a rocha atinge a planície?

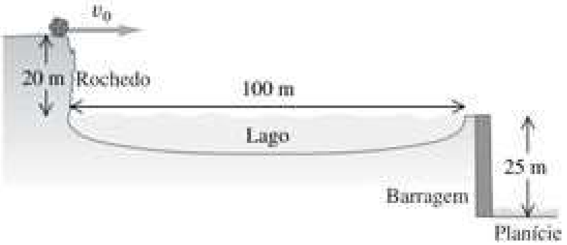


Figura 3.52 Problema 3.67.

3.68 **Atirando o almoço.** Henriqueta está indo para a aula de física e corre pela calçada a 3,05 m/s. De repente, seu marido Bruno percebe que ela saiu com tanta pressa que esqueceu o sanduíche. Ele corre para a janela do apartamento, que está 43,9 m acima do nível da rua e se projeta sobre a calçada, pretendendo jogar o lanche para a esposa. Bruno joga o pacote horizontalmente 9,0 s após Henriqueta passar sob a janela e ela consegue apanhá-lo sem parar de correr. Despreze a resistência do ar. a) Com que velocidade inicial Bruno deve jogar o sanduíche para que Henriqueta possa apanhá-lo antes que caia no chão? b) Onde está Henriqueta quando apanha o sanduíche?

3.69 Dois tanques militares estão em exercício de treinamento no nível do solo. O primeiro dispara uma munição carregada de tinta, com velocidade de disparo de 250 m/s e a um ângulo de 10,0° com a horizontal, enquanto avança em direção ao segundo tanque, com velocidade de 15,0 m/s relativa ao solo. O segundo tanque recua a 35,0 m/s em relação ao solo, mas é atingido pelo cartucho. Despreze a resistência do ar e suponha que o cartucho atinja o alvo na mesma altura sobre o solo de quando foi disparado. Ache a distância entre os tanques a) quando a munição foi inicialmente disparada e b) no instante do impacto.

3.70 **Bang!** Um estudante está sentado sobre uma plataforma a uma distância h acima do solo. Ele lança um grande rojão horizontalmente com uma velocidade v. Entretanto, um vento que sopra paralelo ao solo dá ao artefato uma aceleração horizontal constante com módulo a. Isso faz com que o artefato caia no chão diretamente sob o estudante. Determine a altura h em termos de v, a e g. Despreze o efeito da resistência do ar sobre o movimento vertical.

3.71 Um foguete é lançado verticalmente do repouso, com uma aceleração ascendente constante de 1,75 m/s^2. Após 22,0 s do lançamento, um tanque de combustível não mais necessário é desconectado do foguete. Um membro da tripulação mede que a velocidade inicial do tanque é 25,0 m/s e que ele se move perpendicularmente à trajetória do foguete. O tanque não sofre resistência significativa do ar, somente a força da gravidade, assim que se separa do foguete. a) Com que velocidade o foguete se move no instante em que o tanque de combustível é ejetado? b) Quais são os componentes horizontal e vertical da velocidade do tanque de combustível, assim que é ejetado, medido do ponto de vista de i) um membro da tripulação no foguete e ii) um técnico parado em solo? c) Para qual ângulo em relação à horizontal o tanque ejetado inicialmente se move, do ponto de vista de i) um membro da tripulação no foguete e ii) um técnico parado em solo? d) Qual altura máxima sobre a plataforma de lançamento o tanque ejetado atinge?

3.72 Um foguete se desloca verticalmente para cima a 8,50 m/s constantes em relação ao solo. Quando atinge 145 m de altura, ele lança um segundo foguete a uma velocidade escalar de 12,0 m/s e ângulo de 53° sobre a horizontal, ambas as grandezas medidas por um astronauta no interior do foguete. Despreze a resistência do ar. a) No instante em que o segundo foguete é lançado, quais são os componentes horizontal e vertical da sua velocidade relativa a i) o astronauta no foguete e ii) o Controle da Missão no solo? b) Ache a velocidade inicial e o ângulo de lançamento do segundo foguete, medido pelo Controle da Missão. c) Qual altura máxima acima do solo o segundo foguete atinge?

3.73 Em uma comemoração de 04 de julho (Dia da Independência dos EUA), um rojão é lançado do nível do solo com velocidade inicial de 25,0 m/s e ângulo de 30,0° da *vertical*. Ao atingir sua altura máxima, ele explode em vários fragmentos, dois dos quais se projetam para frente inicialmente a 20,0 m/s e a +/−53,0° em relação à horizontal, ambas as grandezas medidas *em relação ao rojão original, imediatamente antes da explosão*. Com que ângulos em relação à horizontal, os dois fragmentos inicialmente se movem logo após a explosão, medidos do ponto de vista de um espectador parado no solo?

3.74 Em um filme de aventura, o herói joga uma granada de seu carro, que se desloca a 90,0 km/h, atingindo o carro do inimigo, que se desloca a 110,0 km/h. O carro do inimigo está 15,8 m à frente do carro do herói quando ele joga a granada. Se o lançamento é tal que sua velocidade inicial em relação a ele forma um ângulo de 45° acima da horizontal, qual deve ser o módulo da velocidade inicial? Os dois carros se deslocam no mesmo sentido numa estrada retilínea e plana. Despreze a resistência do ar. Ache o módulo da velocidade inicial em relação ao herói e em relação à Terra.

3.75 Uma pedra amarrada em uma corda se move no plano xy. Suas coordenadas são dadas em função do tempo por

$$x(t) = R\cos\omega t \qquad y(t) = R\,\text{sen}\,\omega t$$

onde R e ω são constantes. a) Mostre que a distância da pedra até a origem é constante e igual a R, ou seja, sua trajetória é uma circunferência de raio R. b) Mostre que em cada ponto o vetor velocidade é perpendicular ao vetor posição. c) Mostre que o vetor aceleração é sempre oposto ao vetor posição e possui módulo igual a ω^2. d) Mostre que o módulo da velocidade da pedra é constante e igual a ωR. e) Combine os resultados das partes (c) e (d) para mostrar que a aceleração da pedra possui módulo constante igual a v^2/R.

3.76 Um rio com largura de 400,0 m corre de oeste para leste a 30,0 m/min. Seu barco se move a 100,0 m/min em relação à água, não importando a direção em que segue. Para atravessar esse rio, você parte de um embarcadouro no ponto A localizado na margem sul. Há um barco aportando na direção exatamente oposta, no ponto B localizado na margem norte, e ainda outro no ponto C, 75,0 m abaixo de B (Figura 3.53). a) Aonde na margem norte você aportará, se orientar seu barco perpendicularmente à correnteza e qual distância terá percorrido? b) Se você inicialmente orientar seu barco diretamente para o ponto C e não mudar essa posição em relação à margem, onde na margem norte você aportará? c) Para chegar ao ponto C: i) para qual posição você deve orientar o barco, ii) quanto tempo levará para atravessar o rio, iii) qual distância percorrerá e iv) qual a velocidade escalar do seu barco, conforme medido por um observador parado na margem do rio?

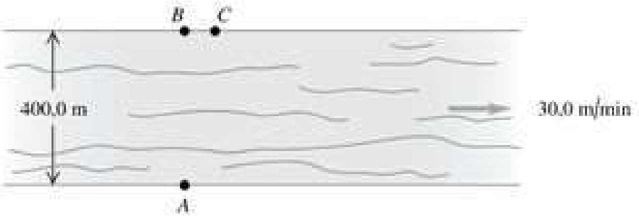


Figura 3.53 Problema 3.76.

3.77 **Ciclóide.** Uma partícula se move em um plano x,y. Suas coordenadas são dadas em função do tempo por

$$x(t) = R(\omega t - \operatorname{sen}\omega t) \qquad y(t) = R(1 - \cos\omega t)$$

onde R e ω são constantes. a) Faça um esboço da trajetória da partícula. (Essa curva é a trajetória de um ponto que se desloca na periferia de uma roda que rola com velocidade escalar constante numa superfície horizontal. A curva traçada por esse ponto enquanto ele se move no espaço denomina-se *ciclóide*.) b) Determine os componentes da velocidade e da aceleração da partícula em qualquer tempo t. c) Para que instantes a partícula está momentaneamente em repouso? Quais são as coordenadas da partícula nesses instantes? Determine o vetor aceleração. d) O módulo da aceleração é função do tempo? Compare com o movimento circular uniforme.

3.78 Um projétil é disparado do ponto A de um ângulo sobre a horizontal. No seu ponto mais alto, após ter percorrido uma distância horizontal D a partir do seu ponto de lançamento, ele explode e se parte em dois fragmentos idênticos, que se deslocam horizontalmente com velocidades iguais, mas opostas, conforme medidas *em relação ao projétil, imediatamente antes da explosão*. Se um dos fragmentos cair de volta no ponto A, a que distância de A (em termos de D) o outro fragmento cairá?

3.79 **Centrífuga em Mercúrio.** Uma centrífuga de laboratório na superfície terrestre faz n rpm (rev/min) e produz uma aceleração de $5{,}0g$ na sua extremidade mais externa. a) Qual a aceleração (em g) em um ponto na metade do caminho para o fim? b) Essa centrífuga está sendo usada em uma cápsula espacial sobre o planeta Mercúrio, onde $g_{\text{MERCÚRIO}}$ é 0,378 do que é na Terra. Quantos rpm (em termos de n) ela deve fazer para produzir $5g_{\text{MERCÚRIO}}$ na sua extremidade mais externa?

3.80 **Gotas de chuva.** Quando a velocidade de um trem é de 12,0 m/s na direção leste, as gotas de chuva que caem verticalmente em relação à superfície terrestre deixam vestígios com inclinação de 30,0° em relação à vertical, nas janelas do trem. a) Qual o componente horizontal da velocidade de uma gota em relação à superfície terrestre? Em relação ao trem? b) Qual o módulo da velocidade da gota em relação à superfície terrestre? Em relação ao trem?

3.81 Um piloto de avião coloca o curso da direção de leste para oeste com uma bússola e mantém uma velocidade em relação ao ar de 220 km/h. Depois de voar durante 0,500 h, ele se encontra sobre uma cidade a 120 km a oeste e 20 km ao sul da sua posição inicial. a) Ache a velocidade do vento (módulo, direção e sentido). b) Se a velocidade do vento fosse igual a 40 km/h do norte para o sul, em que direção o piloto deveria orientar seu curso para que pudesse se dirigir de leste para oeste. Considere a mesma velocidade em relação ao ar de 220 km/h.

3.82 Um elevador se move de baixo para cima com velocidade constante de 2,50 m/s. Um parafuso no teto do elevador está roxo e cai. a) Quanto tempo ele leva para atingir o piso do elevador? Qual é a velocidade do parafuso no momento em que ele atinge o piso do elevador b) para um observador dentro do elevador? c) E para um observador parado fora do elevador? d) Para o observador do item (c), qual é a distância percorrida pelo parafuso entre o teto e o piso do elevador?

3.83 Suponha que o elevador do Problema 3.82 parta do repouso e mantenha uma aceleração ascendente constante de 4,0 m/s^2 e que o parafuso caia no instante em que o elevador começa a se mover. a) Quanto tempo o parafuso leva para cair no piso do elevador? b) Quando chega ao piso, com que velocidade o parafuso se move, do ponto de vista de um observador i) no elevador? ii) Parado no andar do prédio? c) De acordo com cada observador no item (b), qual distância o parafuso percorre entre o teto e o piso do elevador?

3.84 A cidade A fica diretamente a oeste da cidade B. Quando não há vento, um avião faz o vôo de ida e volta de 5.550 km entre as cidades em 6,60 h de tempo de vôo enquanto se desloca na mesma velocidade em ambas as direções. Quando sopra um vento forte e regular de 225 km/h, do oeste para leste, e o avião possui a mesma velocidade que antes em relação ao ar, quanto tempo levará a viagem completa?

3.85 Em uma partida de futebol da Copa do Mundo, José está correndo para o gol na direção norte, com velocidade de 8,0 m/s em relação ao solo. Um companheiro de time passa a bola para ele. A bola tem velocidade de 12,0 m/s e se move em uma direção de 37,0° do leste para o norte, em relação ao solo. Quais são o módulo e a direção da velocidade da bola em relação a José?

Problemas desafiadores

3.86 Um homem está sobre um vagão largo e aberto, que se desloca com velocidade de 9,10 m/s (Figura 3.54). Ele deseja lançar uma bola através de um aro em repouso a uma altura de 4,90 m de sua mão, de tal modo que a bola se mova horizontalmente quando passar pelo aro. Ele lança a bola com velocidade de 10,8 m/s em relação a si próprio. a) Qual deve ser o componente vertical da velocidade inicial da bola? b) Quantos segundos após o lançamento da bola ela passará através do aro? c) A que distância horizontal à frente do aro ele deve lançar a bola? d) Quando a bola deixa a mão do homem, qual é a direção de sua velocidade relativa em relação ao vagão? E em relação a um observador em repouso no solo?

3.87 Uma espingarda dispara um grande número de pequenas pelotas de baixo para cima. Algumas delas se deslocam aproximadamente na vertical e outras divergem cerca de 1,0° da vertical. Suponha que a velocidade inicial das pelotas seja uniforme para todas e igual a 150,0 m/s. Despreze a resistência do ar. a) Dentro de que raio, a partir do ponto do disparo, as pelotas se distribuem? b) Caso haja 1000 pelotas e elas caiam em um círculo cujo raio foi calculado na parte (a), qual a probabilidade de que pelo menos uma pelota caia na cabeça da pessoa que fez o disparo? Suponha que o raio da sua cabeça seja de 10 cm. c) A resistência do ar, de fato, produz diversos efeitos. Ela diminui a velocidade da pelota que sobe, torna menor o seu componente horizontal e limita a velocidade com a qual elas caem. Qual desses efeitos poderá tornar maior o raio no cálculo que você fez para responder ao item (a) e qual poderá fazê-lo diminuir? O que você pensa sobre o efeito global da resistência do ar? (O efeito da resistência do ar sobre um componente da velocidade aumenta quando o módulo da velocidade desse componente aumenta.)

3.88 Um projétil é lançado de um ponto P. Ele se move de tal modo que sua distância ao ponto P é sempre crescente. Determine o ângulo máximo acima da horizontal com o qual o projétil foi lançado. Despreze a resistência do ar.

Figura 3.54 Problema desafiador 3.86.

3.89 **Movimento de projétil em uma Inclinação I.** Uma bola de beisebol recebe uma velocidade inicial com módulo v_0, formando um ângulo ϕ com um plano inclinado a um ângulo θ acima da horizontal (Figura 3.55). a) Calcule a distância, medida ao longo do plano inclinado, entre o ponto de lançamento e o ponto em que a bola colide com o plano inclinado. Suas respostas serão em termos de v_0, g, θ e ϕ. b) Qual o ângulo ϕ que fornece o alcance máximo, medido ao longo do plano inclinado? (*Nota:* Você poderia se interessar pelos três diferentes métodos de solução apresentados por I. R. Lapidus na revista *Am. Jour. of Phys.*, vol. 51, (1983), p. 806 e 847. Veja também H. A. Buckmaster na revista *Am. Jour. of Phys.*, vol. 53 (1985), p. 638-641, para um estudo aprofundado deste e de outros problemas semelhantes.)

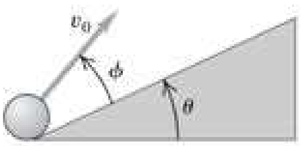


Figura 3.55 Problema desafiador 3.89.

3.90 **Movimento de projétil em uma inclinação II.** Considere o Problema Desafiador 3.89. a) Um arqueiro se encontra em um terreno com inclinação constante de 30,0° e deseja atingir um alvo situado a uma distância de 60,0 m para cima do plano inclinado. O arco, a flecha e o centro do alvo estão situados a uma distância de 1,50 m acima do plano inclinado. A velocidade inicial da flecha no exato momento em que ela sai do arco possui módulo igual a 32,0 m/s. Para que ângulo acima da *horizontal* o arqueiro deve apontar para atingir o centro do alvo? Caso existam dois ângulos, ache o menor entre os dois. Você pode ter que resolver a equação que fornece o ângulo por meio de uma iteração, ou seja, pelo método das tentativas. Como esse ângulo se relaciona com o ângulo que seria obtido supondo-se um terreno plano com inclinação igual a zero? b) Repita o item (a) para uma inclinação *para baixo* constante e igual a 30,0°.

3.91 Sem nenhum motivo aparente, um cão *poodle* corre com velocidade constante v = 5,0 m/s em torno de um círculo com raio R = 2,50 m. Seja $\vec{v}_1$ o vetor velocidade no tempo t_1 e $\vec{v}_2$ o vetor velocidade no tempo t_2. Considere $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ e $\Delta t = t_2 - t_1$. Lembre-se de que $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Para Δt = 0,5 s, 0,1 s e 0,05 s, calcule o módulo (com quatro algarismos significativos), a direção e o sentido (em relação a $\vec{v}_1$) da aceleração média $\vec{a}_m$. Compare seus resultados com a expressão geral da aceleração instantânea a obtida no texto para o caso do movimento circular uniforme.

3.92 Um foguete projetado para colocar pequenas cargas em órbita é conduzido a uma altura de 12,0 km acima do nível do mar por uma aeronave convertida. Quando a aeronave está voando em linha reta com velocidade constante de 850 km/h, o foguete é lançado. Depois do lançamento, a aeronave mantém a mesma altitude e velocidade e continua a voar em linha reta. O foguete cai durante um intervalo de tempo pequeno, depois do qual seu motor é acionado. Com o motor funcionando, o efeito combinado da gravidade e da força motriz produzem uma aceleração constante de módulo 3,0g dirigida para cima e formando um ângulo de 30,0° com a horizontal. Por razões de segurança, o foguete deve permanecer pelo menos a uma distância de 1,0 km à frente da aeronave quando ele sobe até atingir a altura da aeronave. Sua tarefa é calcular o intervalo de tempo mínimo da queda do foguete antes do seu motor ser acionado. Despreze a resistência do ar. Sua solução deve incluir: i) um diagrama que mostre as trajetórias do vôo do foguete e da aeronave, identificadas mediante seus respectivos vetores para a velocidade e a aceleração em diversos pontos; ii) um gráfico xt que mostre os movimentos do foguete e da aeronave; e iii) um gráfico yt que mostre os movimentos do foguete e da aeronave. Nos diagramas e nos gráficos, indique o instante em que o foguete é lançado, o instante em que o motor é acionado e o instante em que o foguete sobe atingindo a altura da aeronave.

3.93 Dois estudantes estão praticando canoagem em um rio. Quando eles estão se dirigindo no sentido contrário ao da corrente, uma garrafa vazia cai acidentalmente da canoa. A seguir, eles continuam remando durante 60 minutos, atingindo um ponto 2,0 km a montante do ponto inicial. Nesse ponto eles notam a falta da garrafa e, pensando na preservação do meio ambiente, dão uma volta e retornam no sentido da corrente. Eles recolhem a garrafa (que acompanhou o movimento da corrente) em um ponto situado a 5,0 km correnteza abaixo, do ponto onde eles retornaram. a) Supondo que o esforço feito para remar seja constante em todas as etapas do trajeto, qual a velocidade de escoamento do rio? b) Qual seria a velocidade da canoa em um lago calmo, supondo que o esforço feito para remar seja o mesmo?