10 DINÂMICA DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO

Se este pára-quedista não está tocando o solo, como ele pode alterar sua velocidade escalar de rotação? Qual princípio físico está em ação aqui?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- O que significa o torque produzido por uma força.
- Como o torque resultante sobre um corpo afeta o movimento de rotação do corpo.
- Como analisar o movimento de um corpo que gira e também se move como um todo pelo espaço.
- Como solucionar problemas que envolvem trabalho e potência para corpos em rotação.
- A que se refere o momento angular de uma partícula ou de um corpo rígido.
- Como o momento angular de um sistema varia com o tempo.
- Por que um giroscópio em rotação passa pelo curioso movimento chamado de precessão.

Nos capítulos 4 e 5 aprendemos que uma força resultante aplicada sobre um corpo fornece a esse corpo uma aceleração. Mas o que produz aceleração *angular* em um corpo? Ou seja, o que é necessário para fazer um corpo fixo começar a girar ou fazer um corpo em rotação parar? É necessária uma força, porém ela deve ser aplicada de modo a provocar uma ação giratória ou de torção.

Neste capítulo vamos definir uma nova grandeza física, o *torque*, que descreve a ação giratória ou o efeito de torção de uma força. Verificaremos que o torque resultante que atua sobre um corpo rígido determina sua aceleração angular, do mesmo modo que a força resultante sobre um corpo determina sua aceleração linear. Examinaremos também o conceito de trabalho e de potência no movimento de rotação para compreendermos problemas como a transmissão de energia de um eixo rotor da direção de um carro. Finalmente, desenvolveremos um novo princípio de conservação, a lei da *conservação do momento angular*, que é extremamente útil para entender o movimento de rotação de corpos rígidos e de corpos não rígidos. Finalizaremos este capítulo estudando o *giroscópio*, um dispositivo rotatório que parece não obedecer ao senso comum e que não deixa o objeto cair quando você pensa que ele deveria cair — mas que na verdade se comporta de acordo com a dinâmica do movimento de rotação.

10.1 Torque

Sabemos que as forças que atuam sobre um corpo podem afetar seu **movimento de translação** — ou seja, o movimento do corpo como um todo pelo espaço. Agora queremos aprender quais aspectos de uma força determina a sua eficácia em causar ou alterar o movimento de *rotação*. O módulo, a direção e o sentido da força são importantes, mas o ponto de aplicação da força também é relevante. Na Figura 10.1, uma chave de boca é usada para afrouxar uma porca presa firmemente. A força $\vec{F}_b$, aplicada próxima da extremidade do punho da chave, é mais eficiente do que a força $\vec{F}_a$ aplicada nas proximidades da porca. A força $\vec{F}_c$ não ajuda em nada; ela é aplicada no mesmo ponto da força $\vec{F}_b$ e possui o mesmo módulo, porém sua direção coincide com a direção do punho da chave. O *torque* fornece a medida quantitativa de como a ação de uma força pode provocar ou alterar o movimento de rotação de um corpo; dizemos que $\vec{F}_a$ aplica um torque em torno do ponto O para a chave na Figura 10.1, $\vec{F}_b$ aplica um torque maior em torno de O e $\vec{F}_c$ aplica torque nulo em torno de O.

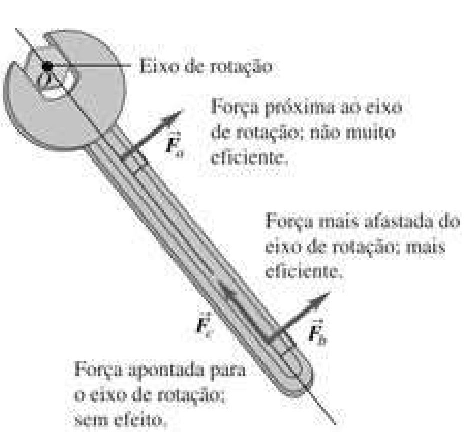


Figura 10.1 Qual das três forças indicadas é mais eficiente para afrouxar a porca presa firmemente?

A Figura 10.2 mostra três exemplos de como calcular o torque. O corpo na figura pode girar em torno de um eixo passando pelo ponto O e é perpendicular ao plano da figura. O corpo está submetido a três forças, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$, situadas no plano da figura. A tendência da força $\vec{F}_1$ para produzir rotação em torno do ponto O depende do módulo de F_1. Depende também da distância *perpendicular* l_1 entre o ponto O e a **linha de ação** da força (isto é, a linha ao longo da qual o vetor força se encontra). Denominamos a distância l_1 de **braço da alavanca** (ou **braço do momento**) da força $\vec{F}_1$ em torno do ponto O. O esforço de torção depende simultaneamente de F_1 e de l_1, por isso definimos o **torque** (ou *momento*) da força $\vec{F}_1$ em relação ao ponto O como o produto $F_1 l_1$. Usaremos a letra grega τ ('tau') para o torque. Para uma força de módulo F cuja linha de ação seja perpendicular a uma distância l ao ponto O, o torque é

$$\tau = Fl \tag{10.1}$$

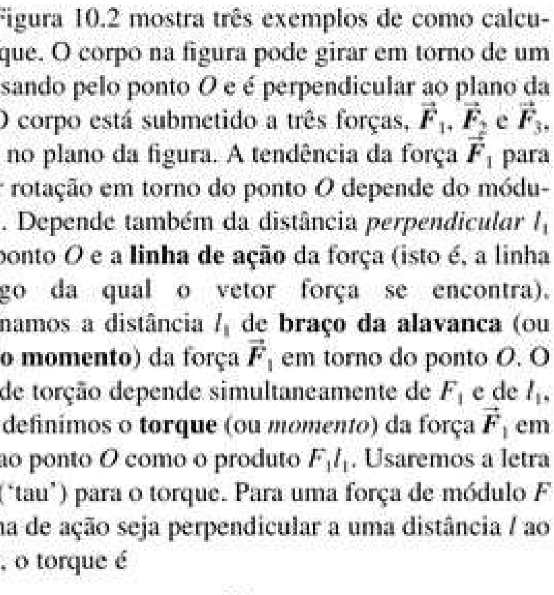


Figura 10.2 O torque de uma força em relação a um ponto é o produto do módulo da força pelo braço da alavanca.

Os físicos normalmente usam o termo 'torque', enquanto os engenheiros usam 'momento' (a menos que se refiram a um eixo rotor). Ambos usam o termo 'braço da alavanca' ou 'braço do momento' para designar a distância l.

O braço da alavanca da força $\vec{F}_1$ na Figura 10.2 é a distância perpendicular l_1, e o braço da alavanca da força $\vec{F}_2$ é a distância perpendicular l_2. A linha de ação da força $\vec{F}_3$ passa pelo ponto de referência O, de modo que o braço da alavanca para $\vec{F}_3$ é zero e seu torque em relação ao ponto O é igual a zero. Analogamente, a força $\vec{F}_c$ na Figura 10.1 possui torque nulo em relação ao ponto O. Por outro lado, $\vec{F}_b$ possui torque maior do que o torque da força $\vec{F}_a$ porque o seu braço da alavanca é maior.

ATENÇÃO Torque é sempre medido em torno de um ponto Note que o torque *é sempre* definido em relação a um ponto específico. Se deslocarmos a posição desse ponto, o torque de cada força pode também mudar. Por exemplo, o torque da força $\vec{F}_3$ na Figura 10.2 é igual a zero em relação ao ponto O, mas *não* é zero em torno de A. Quando descrevemos o torque de uma certa força, não é suficiente falar 'o torque da força $\vec{F}$'; devemos falar 'o torque da força $\vec{F}$ em relação ao ponto X' ou 'o torque de $\vec{F}$ em torno de X'.

A força $\vec{F}_1$ na Figura 10.2 tende a fazer uma rotação em torno de O no sentido *contrário ao dos ponteiros do relógio*, enquanto a força $\vec{F}_2$ tende a produzir uma rotação no *mesmo sentido dos ponteiros do relógio*. Para distinguirmos entre essas duas possibilidades, escolheremos um sentido positivo para a rotação. Escolhemos como *torque positivo o que produz rotação no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e torque negativo o que produz rotação no mesmo sentido dos ponteiros do relógio*. Sendo assim, os torques de $\vec{F}_1$ e de $\vec{F}_2$ em torno de O são

$$\tau_1 = +F_1 l_1 \qquad \tau_2 = -F_2 l_2$$

A Figura 10.2 mostra essa escolha para o sinal de torque. Freqüentemente usamos o símbolo ⊕ para indicar a escolha do sentido positivo da rotação.

A unidade SI de torque é Newton-metro. Em nossa discussão sobre trabalho e energia denominamos essa combinação de joule. Porém, o torque *não* é trabalho nem energia, e o torque deve ser expresso explicitamente como Newton-metro, e *não* como joule.

A Figura 10.3 mostra uma força $\vec{F}$ aplicada em um ponto P definido pelo vetor posição $\vec{r}$ em relação a um ponto escolhido O. Existem três modos de calcular o torque dessa força:

1. Determinar o braço da alavanca l e usar $\tau = Fl$.
2. Determinar o ângulo ϕ entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{r}$; o braço da alavanca é r sen ϕ, de modo que $\tau = rF$ sen ϕ.
3. Representar $\vec{F}$ em termos de um componente radial F_{rad} ao longo da direção de $\vec{r}$ e do componente tangencial F_{tg} ortogonal a $\vec{r}$ tendo ambos ângulos retos. (Chamamos esse componente de

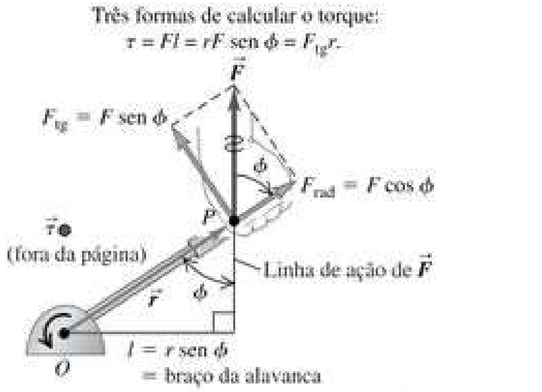


Figura 10.3 Três formas de calcular o torque da força $\vec{F}$ em torno do ponto O. Nesta Figura, $\vec{r}$ e $\vec{F}$ estão no plano da página e o vetor torque $\vec{\tau}$ aponta para fora da página e em direção a você.

tangencial porque, caso haja rotação do corpo, o ponto onde atua a força descreve uma circunferência.) Então, $F_{tg} = F \text{ sen } \phi$ e $\tau = r(F \text{ sen } \phi) = F_{tg}r$. O componente F_{rad} *não* possui nenhum torque em relação ao ponto O porque o braço da alavanca em relação a esse ponto é igual a zero (compare com as forças $\vec{F}_c$ na Figura 10.1 e $\vec{F}_3$ na Figura 10.2).

Resumindo essas três expressões para o torque, temos

$$\tau = Fl = rF \text{ sen } \phi = F_{tg}r \qquad (10.2)$$
(módulo de torque)

Torque como vetor

Vimos na Seção 9.1 que a velocidade angular e a aceleração angular podem ser representadas como vetores; isso também é verdade para o torque. Para verificar como fazer isso, note que a grandeza rF sen ϕ na Equação (10.2) é o módulo do *produto vetorial* $\vec{r} \times \vec{F}$ que foi definido na Seção 1.10. (Você deve fazer uma revisão dessa definição.) Agora generalizamos a definição de torque do seguinte modo: quando uma força $\vec{F}$ atua em um ponto cujo vetor posição é $\vec{r}$ em relação a uma origem O, como na Figura 10.3, o torque $\vec{\tau}$ da força em relação ao ponto O é a grandeza *vetorial*

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (10.3)$$
(definição do vetor torque)

O torque, como definido pela Equação (10.2) nada mais é do que o módulo do vetor torque $\vec{r} \times \vec{F}$. A direção de $\vec{\tau}$ é simultaneamente perpendicular a $\vec{r}$ e a $\vec{F}$. Em particular, quando $\vec{r}$ e $\vec{F}$ estão localizadas em um plano perpendicular ao eixo de rotação, como na Figura 10.3, então o vetor torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ possui a mesma direção do eixo de rotação, sendo seu sentido dado pela regra da mão direita (Figura 1.29). As relações entre as direções e os sentidos são indicadas na Figura 10.4.

Nos diagramas que envolvem $\vec{r}$, $\vec{F}$ e $\vec{\tau}$, é comum ter um dos vetores orientado perpendicularmente à página. (De fato, pela própria natureza do produto, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

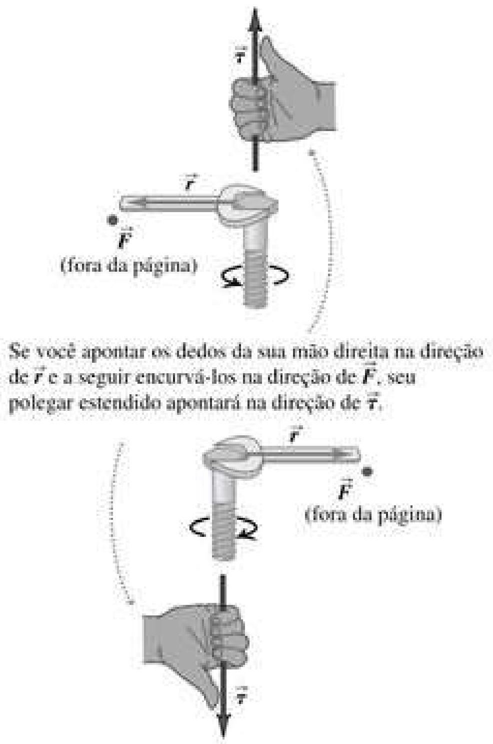


Figura 10.4 O vetor torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ aponta na direção ao longo do eixo do parafuso, perpendicular tanto a $\vec{r}$ quanto a $\vec{F}$. Os dedos da mão direita se encurvam na direção da rotação que o torque tende a causar.

deve ser perpendicular ao plano dos vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$.) Usamos um ponto (•) para representar um vetor que aponta para fora da página (veja Figura 10.3) e uma cruz (×) para representar um vetor que aponta para dentro da página.

Nas seções seguintes, normalmente consideraremos a rotação de um corpo em torno de um eixo orientado em uma dada direção constante. Nesse caso, somente o componente do torque ao longo desse eixo tem importância, e normalmente chamamos esse componente de torque em relação ao *eixo* especificado.

Exemplo 10.1

APLICANDO UM TORQUE Um bombeiro hidráulico, incapaz de afrouxar a conexão de um tubo, encaixa um pedaço de tubo de sucata (uma 'alavanca') sobre a haste da chave de grifa. A seguir ele usa seu peso todo de 900 N, ficando em pé na extremidade da alavanca. A distância entre o centro da conexão e o ponto onde o peso atua é igual a 0,80 m, e o eixo da alavanca faz um ângulo de 19° com a horizontal (Figura 10.5a). Calcule o módulo, a direção e o sentido do torque que ele aplica em torno do centro da conexão do tubo.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: conforme a Figura 10.5b, o ângulo ϕ entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$ é igual a 109°. Usaremos nosso conhecimento desses vetores para calcular o vetor torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

PREPARAR: a Equação (10.1) ou (10.2) fornecerá o módulo do torque, e a regra da mão direita com a Equação (10.3) fornecerá a direção do torque.

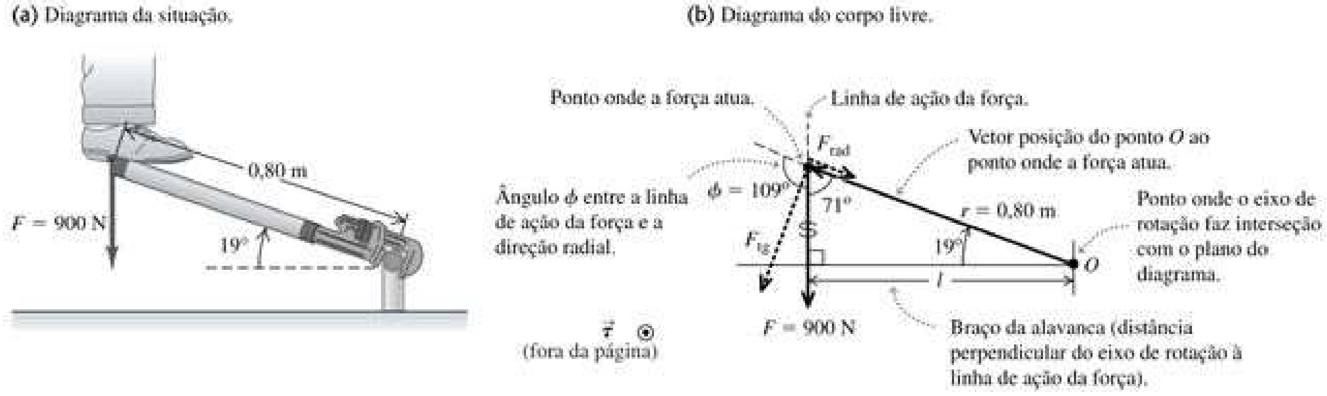


Figura 10.5 (a) Um bombeiro hidráulico tenta afrouxar a conexão de um tubo ficando em pé na extremidade de uma 'alavanca'. (b) Diagrama vetorial para achar o torque em torno de O.

EXECUTAR: para usar a Equação (10.1), primeiramente calculamos o braço de alavanca l. Como indica a Figura 10.5b,

$$l = (0{,}80\ \text{m})\,\text{sen}\,109° = (0{,}80\ \text{m})\,\text{sen}\,71° = 0{,}76\ \text{m}$$

Agora, podemos achar o módulo do torque usando a Equação (10.1):

$$\tau = Fl = (900\ \text{N})(0{,}76\ \text{m}) = 680\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Ou pela Equação (10.2),

$$\tau = rF\,\text{sen}\,\phi = (0{,}80\ \text{m})(900\ \text{N})(\text{sen}\,109°) = 680\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Alternativamente, podemos achar F_{tg}, o componente tangencial de $\vec{F}$. Esse componente atua ortogonalmente ao vetor $\vec{r}$ (ou seja, perpendicularmente ao eixo da 'alavanca'). O vetor $\vec{r}$ faz um ângulo de 19º com a horizontal, de modo que a perpendicular a $\vec{r}$ está em uma direção a 19º da vertical. Uma vez que $\vec{F}$ é vertical, isso significa que $F_{tg} = F\ (\cos 19°) = (900\ \text{N})\ (\cos 19°) = 851\ \text{N}$. Então, o torque é

$$\tau = F_{tg}r = (851\ \text{N})(0{,}80\ \text{m}) = 680\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Se você encurvar os dedos da mão direita da direção de $\vec{r}$ (no plano da Figura 10.5b, para a esquerda e para cima) para a direção de $\vec{F}$ (diretamente para baixo), seu polegar direito apontará para fora do plano da figura. Essa é a direção do torque $\vec{\tau}$.

AVALIAR: já conferimos a resposta para o módulo τ calculando-o de três modos diferentes. Para conferir o resultado obtido para a direção do torque, note que a força na Figura 10.5 tende a produzir uma rotação em torno de O no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Se você encurvar os dedos da mão direita em um sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, o polegar apontará para fora do plano da Figura 10.5, que é de fato a direção do torque.

Teste sua compreensão da Seção 10.1 A Figura mostra uma força P sendo aplicada a uma extremidade de uma alavanca de comprimento L. Qual é o módulo do torque dessa força em torno do ponto A? i) PL sen θ; ii) PL cos θ; iii) PL tg θ. ❚

10.2 Torque e aceleração angular de um corpo rígido

Estamos agora preparados para desenvolver uma relação fundamental para a dinâmica da rotação de um corpo rígido. Mostraremos que a aceleração angular de um corpo rígido que gira é diretamente proporcional à soma dos componentes do torque ao longo do eixo de rotação. O fator de proporcionalidade é o momento de inércia.

Para desenvolvermos essa relação, podemos imaginar novamente o corpo como constituído por um grande número de partículas. Escolhemos para o eixo da rotação o eixo Oz; a primeira partícula possui massa m_1 e está a uma distância r_1 do eixo (Figura 10.6). A *força resultante* $\vec{F}_1$ que atua sobre essa partícula possui um componente $F_{1,rad}$ ao longo da direção radial, um componente $F_{1,tg}$ tangente à circunferência de raio r_1, ao longo da qual a partícula se move quando o corpo gira, e um componente F_{1z} ao longo do eixo de rotação. A segunda lei de Newton para o componente tangencial fornece

$$F_{1,tg} = m_1 a_{1,tg} \tag{10.4}$$

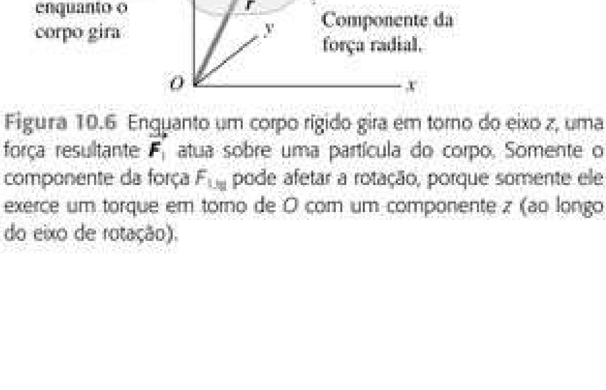


Figura 10.6 Enquanto um corpo rígido gira em torno do eixo z, uma força resultante $\vec{F}_1$ atua sobre uma partícula do corpo. Somente o componente da força $F_{1,tg}$ pode afetar a rotação, porque somente ele exerce um torque em torno de O com um componente z (ao longo do eixo de rotação).

Figura 10.7 Para afrouxar ou apertar um parafuso é necessário fornecer a ele uma aceleração angular e, portanto, aplicar um torque. Essa tarefa é facilitada usando-se uma chave de fenda com um punho com raio grande, para que o braço da alavanca da força que você aplica com a sua mão seja maior.

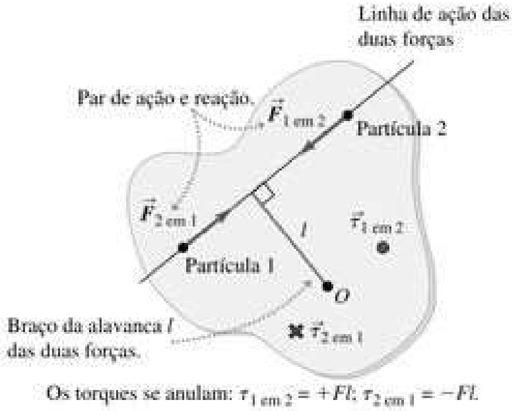


Figura 10.8 A partícula 1 e a partícula 2 de um corpo rígido exercem entre si forças iguais e contrárias. Se essas forças atuam ao longo da linha que une as duas partículas, os braços das alavancas são iguais e os torques dessas forças são iguais e contrários. Somente torques de forças *externas* alteram o movimento de rotação de um corpo rígido.

Podemos expressar o componente tangencial da aceleração da primeira partícula em termos da aceleração angular α_z do corpo, usando a Equação (9.14): $a_{1,tg} = r_1\alpha_z$. Usando essa relação e multiplicando ambos os membros da Equação (10.4) por r_1, obtemos

$$F_{1,tg}r_1 = m_1r_1^2\alpha_z \tag{10.5}$$

Pela Equação (10.2), $F_{1,tg}r_1$ é precisamente o módulo do *torque* τ_{1z} da força resultante em relação ao eixo de rotação. O índice inferior z é um lembrete de que o torque afeta a rotação em torno do eixo z, analogamente ao índice inferior em F_{1z} que é um lembrete de que essa força afeta o movimento da partícula 1 ao longo do eixo z.

Nenhum dos componentes $F_{1,rad}$ ou F_{1z} contribui para o torque em torno do eixo Oz, visto que nenhum deles tende a produzir variação da rotação da partícula em torno desse eixo. Então, $\tau_{1z} = F_{1,tg}r_1$ é o torque resultante que atua sobre a partícula em relação ao eixo de rotação. Também, $m_1r_1^2$ é I_1, o momento de inércia da partícula em torno do eixo de rotação. Levando em conta isso, podemos escrever a Equação (10.5) como

$$\tau_{1z} = I_1\alpha_z = m_1r_1^2\alpha_z$$

Escrevemos uma equação análoga a essa para cada partícula do corpo e a seguir somamos todas as equações:

$$\tau_{1z} + \tau_{2z} + \cdots = I_1\alpha_z + I_2\alpha_z + \cdots$$
$$\cdots = m_1r_1^2\alpha_z + m_2r_2^2\alpha_z + \cdots$$

ou

$$\sum \tau_{iz} = \left(\sum m_ir_i^2\right)\alpha_z \tag{10.6}$$

O membro esquerdo da Equação (10.6) é a soma de todos os torques em torno do eixo de rotação, que atua sobre todas as partículas. O membro direito é $I = \Sigma m_ir_i^2$, o momento de inércia total em torno do eixo de rotação, multiplicado pela aceleração angular α_z. Note que α_z é a mesma para todas as partículas, porque trata-se de um corpo *rígido*. Logo, para o corpo rígido como um todo, podemos enunciar a *segunda lei de Newton para o movimento de rotação:*

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \tag{10.7}$$

(forma análoga da segunda lei de Newton para a rotação de um corpo rígido)

Do mesmo modo que a segunda lei de Newton afirma que a força resultante sobre uma partícula é igual à sua massa multiplicada pela aceleração, a Equação (10.7) diz que o torque resultante sobre um corpo rígido é igual ao seu momento de inércia em relação ao eixo de rotação vezes sua aceleração angular (Figura 10.7).

Note que como deduzimos que a aceleração angular α_z é a mesma para todas as partículas no corpo, note que a Equação (10.7) vale *somente* para corpos *rígidos*. Portanto, essa equação não se aplica a um tanque de água girando ou um tornado fazendo girar a massa de ar, quando a aceleração angular é diferente para diferentes partículas do corpo. Observe também que, como na dedução usamos a Equação (9.14), $a_{tg} = r\alpha_z$, α_z deve ser medido em rad/s^2.

O torque sobre cada partícula é devido à força resultante que atua sobre essa partícula, dada pela soma vetorial das forças internas e externas (definidas na Seção 8.2). De acordo com a terceira lei de Newton, as forças *internas* que um par de partículas exerce mutuamente entre si em um corpo rígido são iguais e opostas (Figura 10.8). Se essas forças atuam ao longo da linha que une as duas partículas, os seus braços da alavanca em relação a qualquer eixo também são iguais. Assim, os torques para esse par de partículas são iguais e contrários e fornecem uma resultante igual a zero. Na verdade, *todos* os torques internos produzem uma resultante igual a zero, de modo que a soma $\Sigma\tau_z$ na Equação (10.7) inclui apenas os torques das forças *externas*.

Freqüentemente, uma das forças externas mais importantes que atuam sobre um corpo é o seu *peso*. Essa força não é concentrada em um único ponto, ela atua em cada partícula constituinte do corpo. Contudo, devido ao fato de $\vec{g}$ ser constante em todos os pontos do corpo, sempre obteremos o torque correto (em torno de qualquer eixo específico) se imaginarmos que o peso total do corpo esteja concentrado em seu *centro de massa*. Demonstraremos esse resultado no Capítulo 11, mas, por enquanto, precisaremos usar esse resultado em alguns problemas deste capítulo.

Estratégia para a solução de problemas 10.1

DINÂMICA DAS ROTAÇÕES PARA CORPOS RÍGIDOS
Nossa estratégia para a solução de problemas de dinâmica das rotações é semelhante à usada na Seção 5.2 para a aplicação da segunda lei de Newton:

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes:* a equação $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$ é útil sempre que os torques atuam sobre um corpo rígido – ou seja, sempre que forças atuarem sobre um corpo de modo a causar variação na sua rotação.
Em alguns casos, talvez você consiga usar uma abordagem de energia, como fizemos na Seção 9.4. Entretanto, se a incógnita é um força, um torque, uma aceleração angular ou um intervalo de tempo decorrido, usar $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$ é quase sempre a melhor abordagem.

PREPARAR *o problema* usando as seguintes etapas:

1. Desenhe um esquema da situação e selecione o corpo ou os corpos a serem analisados.
2. Faça um diagrama do corpo livre para cada corpo e identifique as grandezas desconhecidas usando símbolos algébricos. Uma nova consideração é que você deve mostrar a *forma* do corpo de modo preciso, incluindo todas as dimensões e ângulos necessários para calcular os torques.
3. Escolha um sistema de coordenadas para o corpo, indicando o sentido positivo da rotação de cada corpo. Caso exista uma aceleração linear, é conveniente escolher um eixo com a mesma direção e com o sentido positivo em relação à aceleração. Caso você saiba previamente o sentido de α_z, considerar esse sentido como positivo da rotação simplifica os cálculos.

EXECUTAR *a solução* como segue:

1. Para cada corpo do problema, defina se eles possuem movimento de translação, movimento de rotação ou ambos. Dependendo do tipo de movimento, aplique a fórmula $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ (como na Seção 5.2) ou $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$ ou as duas fórmulas simultaneamente.
2. Podem existir relações *geométricas* entre os movimentos de dois ou mais corpos, como no caso de um fio que se desenrola de uma polia enquanto ela gira ou, então, como no caso de uma roda que rola sem deslizar (caso que será discutido na Seção 10.3). Expresse essas relações sob forma algébrica, em geral como relações envolvendo duas acelerações lineares ou uma aceleração linear e uma aceleração angular.
3. Verifique se o número de equações é compatível com o número de grandezas incógnitas. A seguir, resolva as equações para achar as incógnitas.

AVALIAR *sua resposta:* confira se os sinais algébricos dos resultados fazem sentido. Por exemplo, suponha que o problema se refere a um carretel de linha. Se você está puxando a linha do carretel, suas respostas *não* podem indicar que o carretel está girando na direção que enrola o fio de volta no carretel! Sempre que possível, confira os resultados para casos especiais ou para valores-limite das grandezas. Pergunte a si mesmo: 'Será que este resultado faz sentido?'.

Exemplo 10.2

DESENROLANDO UM CABO I A Figura 10.9a mostra a mesma situação analisada no Exemplo 9.8 (Seção 9.4) usando o método da energia. Um cabo é enrolado diversas vezes em torno de um cilindro sólido uniforme que pode girar em torno do seu eixo. O cilindro possui diâmetro igual a 0,120 m e massa de 50 kg. O cabo é puxado com uma força igual a 9,0 N. Supondo que o cabo seja desenrolado sem se dilatar e sem deslizar, qual é sua aceleração?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a incógnita é a aceleração do cabo, que não podemos calcular diretamente por meio do método de energia da Seção 9.4 (a qual não envolve aceleração). Em vez disso, aplicaremos a dinâmica da rotação ao cilindro. Para obter a aceleração

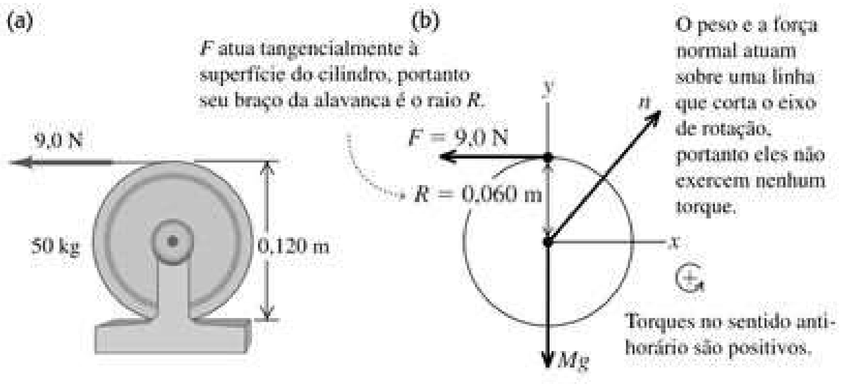


Figura 10.9 (a) Cilindro e cabo. (b) Diagrama do corpo livre do cilindro.

do cabo, encontraremos uma relação entre o movimento do cabo e o movimento da borda do cilindro.

PREPARAR: o cilindro gira no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio quando o cabo é puxado, por isso consideramos como positivo o sentido anti-horário. A força resultante sobre o cilindro deve ser igual a zero porque seu centro de massa permanece em repouso (Figura 10.9b). O peso (módulo igual a Mg) e a força normal (módulo n) exercida pelo cilindro atuam ao longo de linhas que cortam o eixo e, portanto, não possuem torque em relação a esse eixo. O único torque ao longo do eixo de rotação é produzido pela força F.

EXECUTAR: a força F possui um braço da alavanca igual ao raio R do cilindro: $l = R = 0{,}060$ m; logo, o torque em função de F é $\tau_z = FR$. (Esse torque é positivo uma vez que tende a causar uma rotação no sentido anti-horário.) Pelo Exemplo 9.8, o momento de inércia é $I = \frac{1}{2}MR^2$. Portanto, a aceleração *angular* do cilindro é dada pela Equação (10.7):

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = \frac{FR}{MR^2/2} = \frac{2F}{MR} = \frac{2(9{,}0\ \text{N})}{(50\ \text{kg})(0{,}060\ \text{m})} = 6{,}0\ \text{rad/s}^2$$

(Convidamos você a conferir as unidades nessa equação. Podemos acrescentar o 'rad' ao resultado porque um radiano é uma grandeza sem dimensão.)

Para obter a aceleração *linear* do cabo, precisamos de uma relação cinemática. Na Seção 9.3 observamos que a aceleração de um cabo desenrolando-se de um cilindro é a mesma que o componente tangencial da aceleração de um ponto do cabo tangente à periferia do cilindro. A aceleração tangencial é dada pela Equação (9.14):

$$a_x = R\alpha = (0{,}060\ \text{m})(6{,}0\ \text{rad/s}^2) = 0{,}36\ \text{m/s}^2$$

AVALIAR: você é capaz de usar esse resultado juntamente com uma equação do Capítulo 2 para determinar a velocidade do cabo depois que ele é puxado 2,0 m? Tente fazer isso e compare seu resultado com o do Exemplo 9.8, no qual achamos essa velocidade usando considerações de trabalho e energia.

Exemplo 10.3

DESENROLANDO UM CABO II A Figura 10.9a mostra a mesma situação analisada no Exemplo 9.9 (Seção 9.4) usando métodos de energia. Ache a aceleração do objeto de massa m.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: vamos aplicar a dinâmica da translação ao bloco suspenso e a dinâmica rotacional ao cilindro. Como o cabo não desliza sobre o cilindro, há uma relação entre a aceleração linear do bloco (a incógnita) e a aceleração angular do cilindro.

PREPARAR: A Figura 10.10 mostra um diagrama do corpo livre para cada um dos dois corpos. Consideramos como positiva a rotação no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e o sentido positivo do eixo Oy correspondendo ao sentido do objeto descendo.

EXECUTAR: para o objeto, a segunda lei de Newton fornece

$$\sum F_y = mg + (-T) = ma_y$$

Para o cilindro, o peso Mg e a força normal n (exercida pelo eixo) não possuem torque em relação ao eixo de rotação, porque

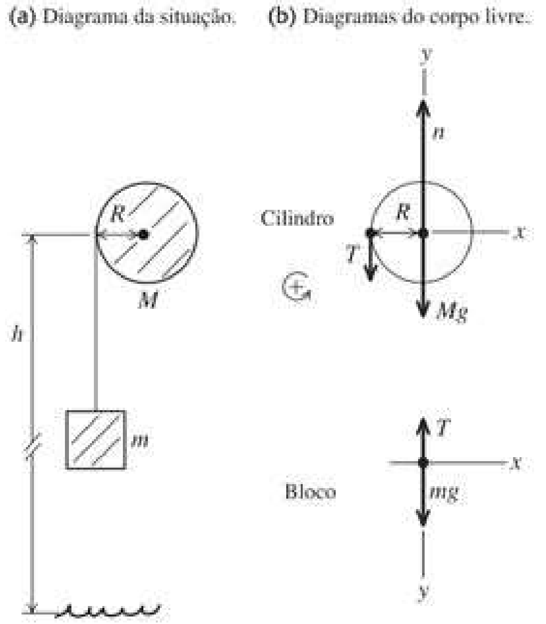


Figura 10.10 (a) Diagrama da situação. (b) Diagramas do corpo livre para o cilindro e para o bloco. O cabo possui massa desprezível.

ambos atuam ao longo de linhas que cruzam o eixo, como no Exemplo 10.2. O único torque existente é produzido pela tensão T no cabo. Aplicando a Equação (10.7) ao cilindro obtemos

$$\sum \tau_z = RT = I\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z$$

Como no Exemplo 10.2, a aceleração do cabo é a mesma que a aceleração tangencial de um ponto sobre a periferia do cilindro. De acordo com a Equação (9.14), esta aceleração é dada por $a_y = a_{tg} = R\alpha_z$. Usamos essa relação para substituirmos $R\alpha_z$ por a_y na relação anterior, e a seguir dividimos o resultado por R; o resultado obtido é

$$T = \frac{1}{2}Ma_y$$

Agora substituímos T na equação da segunda lei de Newton para o objeto e explicitamos a_y:

$$mg - \frac{1}{2}Ma_y = ma_y$$

$$a_y = \frac{g}{1 + M/2m}$$

AVALIAR: a aceleração é positiva (na direção de cima para baixo) e menor que g, como era de se esperar, já que o cabo está segurando o objeto. Para verificar quanta força o cabo exerce, substitua a expressão para a_y na segunda lei de Newton para o objeto a fim de achar T:

$$T = mg - ma_y = mg - m\left(\frac{g}{1 + M/2m}\right) = \frac{mg}{1 + 2m/M}$$

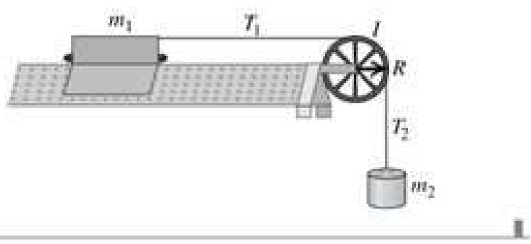
Note que a tensão no cabo *não* é igual ao peso mg do objeto; caso fosse igual, o objeto não poderia se acelerar.

Vamos testar o resultado examinando alguns casos particulares. Quando a massa M é muito maior do que m, a tensão é aproximadamente igual ao peso mg e a aceleração correspondente é muito menor que g. Quando M é zero, $T = 0$ e $a_y = g$; nesse caso, o objeto cai livremente. Se o objeto começa a se deslocar a partir do repouso ($v_{0y} = 0$) e de uma altura h acima do solo, sua velocidade y quando atinge o solo é dada por $v_y^2 = v_{0y}{}^2 + 2a_y h = 2a_y h$, portanto $v_0 = 0$

$$v_y = \sqrt{2a_y h} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

Esse resultado é igual ao obtido por considerações de energia no Exemplo 9.9.

Teste sua compreensão da Seção 10.2 A Figura mostra um cavaleiro de massa m_1 que pode deslizar sem atrito sobre um trilho de ar horizontal. Ele está preso a um objeto de massa m_2 por um fio de massa desprezível. A polia possui raio R e o momento de inércia I em torno do seu eixo de rotação. Quando libertado, o objeto suspenso acelera de cima para baixo, o cavaleiro se acelera da esquerda para a direita e o fio faz girar a polia sem deslizar nem distender. Classifique os módulos das seguintes forças que atuam durante o movimento, em ordem decrescente. i) a força de tensão (módulo T_1) na parte horizontal do fio; ii) a força de tensão (módulo T_2) na parte vertical do fio; iii) o peso $m_2 g$ do objeto suspenso.



10.3 Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo móvel

Podemos estender nossa análise da dinâmica do movimento de rotação para casos em que o eixo de rotação se move. Quando isso ocorre, dizemos que o corpo sofre um **movimento combinado de rotação e translação**. A chave para compreender tais situações é a seguinte: todo movimento possível de um corpo rígido pode ser representado como uma combinação do *movimento de translação do centro de massa* e *de uma rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa*. Isso é verdade mesmo quando o centro de massa se acelera, de modo que ele não pode estar em repouso em nenhum sistema de referência inercial. Um exemplo gráfico é fornecido pelo movimento de um bastão (Figura 10.11). O centro de massa do bastão segue uma trajetória parabólica, como se houvesse uma partícula com a massa do bastão localizada em seu centro de massa. Outros exemplos desse tipo de movimento são o movimento do ioiô que se desenrola de um fio e o movimento de uma bola rolando ao longo de uma encosta.

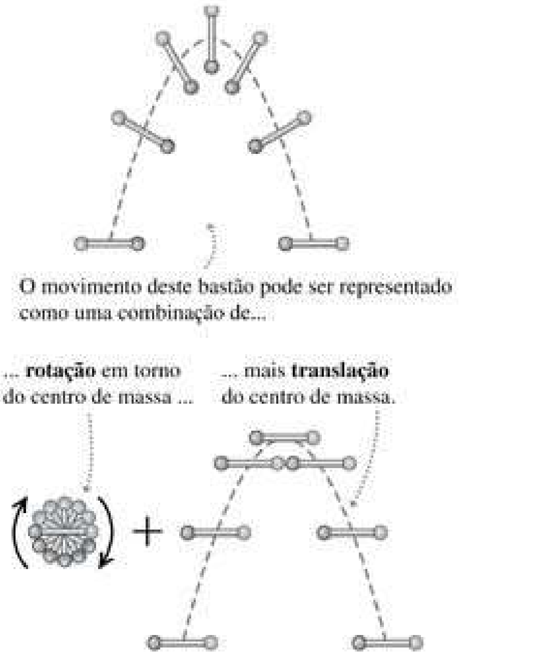


Figura 10.11 O movimento de um corpo rígido é a combinação do movimento translacional do centro de massa e de rotação em torno do centro de massa.

Movimento combinado de rotação e translação: relações envolvendo energia

Está além do escopo deste livro demonstrar que todo movimento de um corpo rígido pode ser sempre dividido em um movimento de translação do centro de massa e de rotação em torno do centro de massa. Porém, podemos demonstrar que isso é verdade para a *energia cinética* de um corpo rígido que possui um movimento combinado de translação e rotação. Nesse caso, a energia cinética do corpo é a soma da parte $\frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2$ associada com o movimento de translação do centro de massa e da parte $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$ associada com a rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \tag{10.8}$$

(corpo rígido com rotação e translação)

Para demonstrar essa relação, novamente imaginamos que o corpo rígido seja constituído por partículas. Considere uma partícula típica com massa m_i, conforme mostra a Figura 10.12. A velocidade $\vec{v}_i$ dessa partícula em relação a um sistema de referência inercial é a soma vetorial da velocidade $\vec{v}_{cm}$ do centro de massa e da velocidade $\vec{v}_i'$ da partícula *relativa* ao centro de massa:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i' \tag{10.9}$$

A energia cinética K_i dessa partícula no referencial inercial é $\frac{1}{2}m_i v_i^2$, a qual pode ser sempre expressa como $\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$. Substituindo a Equação (10.9) nesta última forma, obtemos

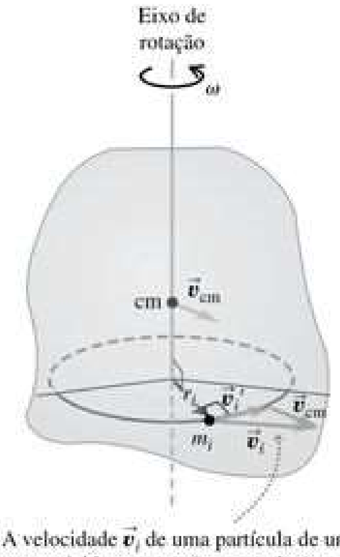


Figura 10.12 Um corpo rígido com movimento combinado de translação e rotação.

$$
\begin{aligned}
K_i &= \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i')\cdot(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i') \\
&= \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm}\cdot\vec{v}_{cm} + 2\vec{v}_{cm}\cdot\vec{v}_i' + \vec{v}_i'\cdot\vec{v}_i') \\
&= \frac{1}{2}m_i(v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm}\cdot\vec{v}_i' + v_i'^2)
\end{aligned}
$$

A energia cinética total é a soma ΣK_i para todas as partículas que constituem o corpo. Escrevendo os três termos da equação anterior como somas separadas, encontramos

$$K = \sum K_i = \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_{cm}^2\right) + \sum(m_i\vec{v}_{cm}\cdot\vec{v}_i') + \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_i'^2\right)$$

O primeiro e o segundo termos possuem fatores comuns que podem ser colocados em evidência:

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)v_{cm}^2 + \vec{v}_{cm}\cdot\left(\sum m_i\vec{v}_i'\right) + \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_i'^2\right) \quad (10.10)$$

Agora obtemos a recompensa pelos nossos esforços. No primeiro termo, Σm_i é a massa total M. O segundo termo é zero porque $\sum m_i\vec{v}_i'$ é M vezes a velocidade do centro de massa *em relação ao centro de massa*, que é igual a zero por definição. O último termo é a soma da energia cinética das partículas determinada pelo cálculo das suas velocidades em relação ao centro de massa. Usando as mesmas etapas que conduziram à Equação (9.17) para a energia cinética da rotação de um corpo rígido, podemos escrever esse último termo como $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$, onde I_{cm} é o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa e ω é a velocidade angular. Desse modo, a Equação (10.10) se transforma na Equação (10.8):

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

Rolamento sem deslizamento

Um caso importante do movimento combinado de rotação e translação é o **rolamento sem deslizamento**, como o movimento da roda ilustrada na Figura 10.13. A roda é simétrica, de modo que seu centro de massa é dado pelo seu centro geométrico. Visualizamos o movimento em um referencial inercial para o qual a superfície em que a roda rola está em repouso. Neste sistema, o ponto sobre a roda que está em contato com a superfície deve permanecer instantaneamente *em repouso*, de modo que ele não escorrega. Logo, a velocidade $\vec{v}_1'$ do ponto de contato em relação ao centro de massa deve ser igual e contrária à velocidade do centro de massa $\vec{v}_{cm}$. Sendo R o raio da roda e ω sua velocidade angular, então o módulo do vetor $\vec{v}_1'$ é $R\omega$; logo devemos ter

$$v_{cm} = R\omega \quad (10.11)$$

(condição para o rolamento sem deslizamento)

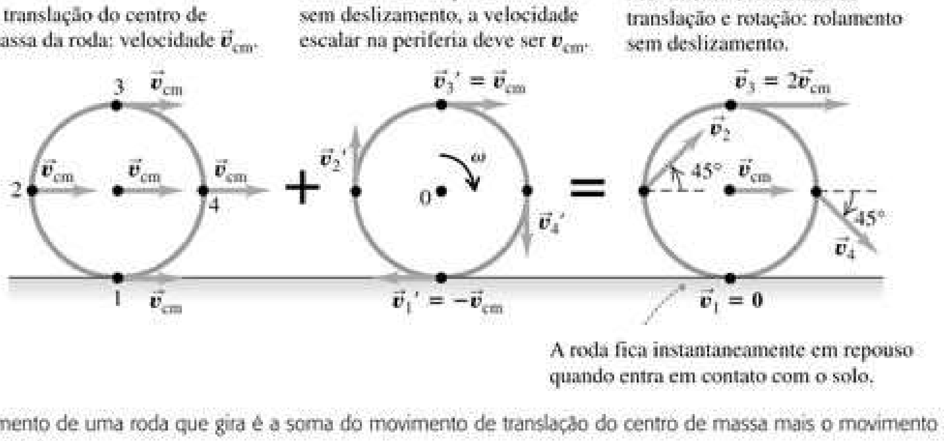


Figura 10.13 O movimento de uma roda que gira é a soma do movimento de translação do centro de massa mais o movimento de rotação da roda em torno do centro de massa.

Figura 10.14 A fumaça provocada pelos pneus traseiros deste carro de corrida indica que os pneus estão deslizando sobre o piso, de modo que v_{cm} não é igual a $R\omega$.

Como mostra a Figura 10.13, a velocidade em um ponto da roda é a soma vetorial da velocidade do centro de massa com a velocidade do ponto em relação ao centro de massa. Logo, enquanto o ponto de contato 1 está instantaneamente em repouso, o ponto 3 no topo da roda se desloca com o *dobro da velocidade* do centro de massa, e os pontos 2 e 4 nos lados da roda possuem velocidades formando um ângulo de 45° com a horizontal.

Em qualquer instante podemos supor que a roda esteja girando em torno de um 'eixo instantâneo' de rotação que passa no ponto de contato com o solo. A velocidade angular ω é a mesma tanto para esse eixo como para um eixo passando pelo centro de massa. Um observador no centro de massa vê a periferia da roda girar com o mesmo número de revoluções por segundo que um observador na periferia olhando o centro de massa girar em torno dele. Se estudarmos o movimento da roda que gira na Figura 10.13 sob esse ponto de vista, a energia cinética da roda é $K = \frac{1}{2}I_1\omega^2$, onde I_1 é o momento de inércia da roda em torno de um eixo que passa pelo ponto 1. Porém, pelo teorema dos eixos paralelos, Equação (9.19), $I_1 = I_{cm} + MR^2$, onde M é a massa total da roda e I_{cm} é o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa. Logo, usando a Equação (10.11), a energia cinética da roda é

$$K = \frac{1}{2}I_1\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

que é o mesmo resultado indicado na Equação (10.8).

ATENÇÃO Rolamento sem deslizamento Note que a relação $v_{cm} = R\omega$ se aplica *somente* quando há rolamento sem deslizamento. Quando um carro de corrida entra inicialmente em movimento, os pneus traseiros giram muito rapidamente, muito embora o carro mal se mova, portanto $R\omega$ é maior do que v_{cm} (Figura 10.14). Se o piloto pisar no freio com demasiada força fazendo o carro derrapar, os pneus vão parar de girar e $R\omega$ será menor que v_{cm}.

Quando um corpo rígido muda de altura à medida que ele se move, devemos levar em conta a energia potencial gravitacional. Conforme discutimos na Seção 9.4, a energia potencial gravitacional associada com qualquer corpo de massa M, rígido ou não, é igual à energia potencial gravitacional de uma partícula de massa M localizada no centro de massa do corpo. Ou seja,

$$U = Mgy_{cm}$$

Exemplo 10.4

VELOCIDADE DE UM IOIÔ PRIMITIVO Um ioiô primitivo é feito enrolando-se um fio diversas vezes em torno de um cilindro de massa M e raio R (Figura 10.15). Você mantém presa a extremidade do fio enquanto o cilindro é liberado sem velocidade inicial. O fio se desenrola, mas não desliza nem se dilata a medida que o cilindro cai e gira. Use considerações de energia para achar a velocidade v_{cm} do centro de massa do cilindro sólido depois que ele caiu até uma distância h.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a extremidade superior do fio permanece fixa, ela não é puxada para cima, de modo que a mão indicada na Figura 10.15 não realiza nenhum trabalho sobre o sistema fio e cilindro. Como no Exemplo 9.8 (Seção 9.4), existe atrito entre o fio e o cilindro, porém como o fio não desliza sobre a superfície do cilindro, não ocorre nenhuma perda de energia mecânica. Portanto, podemos usar a lei da conservação da energia mecânica.

PREPARAR: as energias potenciais são $U_1 = Mgh$ e $U_2 = 0$. A energia cinética do fio é igual a zero porque sua massa é desprezível. A energia cinética inicial do cilindro é $K_1 = 0$, e sua energia cinética final K_2 é dada pela Equação (10.8). O momento de inércia é $I = \frac{1}{2}MR^2$, e $\omega = v_{cm}/R$ porque o cilindro não desliza sobre o fio.

EXECUTAR: pela Equação (10.8), a energia cinética no ponto 2 é

$$K_2 = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4}Mv_{cm}^2$$

A energia cinética é $1\frac{1}{2}$ vezes maior, como se o ioiô estivesse caindo a uma velocidade escalar v_{cm} sem girar. Dois terços do total de energia cinética $(\frac{1}{2}Mv_{cm}^2)$ é de translação e um terço $(\frac{1}{4}Mv_{cm}^2)$ é de rotação. Finalmente, a conservação de energia fornece

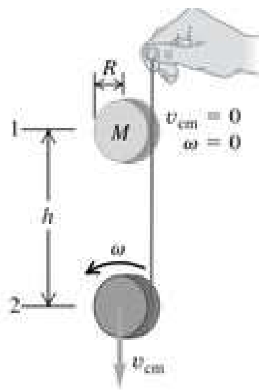


Figura 10.15 Cálculo da velocidade de um ioiô primitivo.

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$
$$0 + Mgh = \frac{3}{4}Mv_{cm}^2 + 0$$

e

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

AVALIAR: esse valor é menor do que $\sqrt{2gh}$, a velocidade que um objeto atinge ao cair de uma altura h, porque um terço da energia potencial do cilindro se transforma em energia cinética de rotação.

Exemplo 10.5

COMPETIÇÃO ENTRE CORPOS GIRANDO Em uma demonstração durante a aula de física, o professor faz uma 'competição' de vários corpos rígidos arredondados deixando-os rolar do alto de um plano inclinado (Figura 10.16). Qual é a forma do corpo que alcança primeiro a parte inferior do plano inclinado?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: podemos usar novamente a conservação de energia porque não ocorre deslizamento dos corpos ao longo do plano inclinado. O atrito cinético não realiza nenhum trabalho quando o corpo rola sem deslizar. Podemos também ignorar os efeitos do *atrito de rolamento*, introduzidos na Seção 5.3, desde que os corpos e o plano sejam perfeitamente rígidos. (Mais adiante nesta seção explicaremos o motivo dessa conclusão.)

PREPARAR: cada corpo parte do repouso no topo do plano inclinado com altura h, de modo que $K_1 = 0$, $U_1 = Mgh$ e $U_2 = 0$. A energia cinética na parte inferior da inclinação é dada pela Equação (10.8). Como os corpos rolam sem deslizar, $\omega = v_{cm}/R$. Os momentos de inércia dos corpos fornecidos na Tabela 9.2 (em torno de um eixo passando pelo respectivo centro de massa) podem ser expressos por $I_{cm} = cMR^2$, onde c é um número puro menor do que 1 ou no máximo igual a 1 e que depende da forma do corpo. O objetivo é encontrar o valor de c que fornece ao corpo a maior velocidade escalar na parte inferior da inclinação.

EXECUTAR: então, pela conservação de energia,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$
$$0 + Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}cMR^2\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 + 0$$
$$= \frac{1}{2}(1 + c)Mv_{cm}^2$$

Logo, a velocidade na parte inferior do plano inclinado é

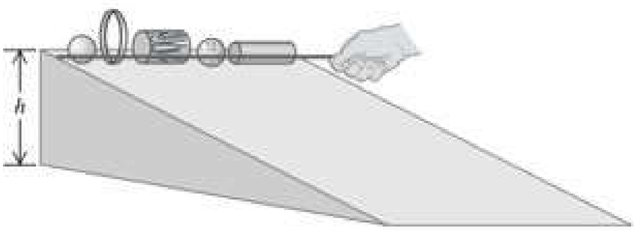


Figura 10.16 Qual é o corpo que rola mais rapidamente para baixo do plano inclinado, e por quê?

Figura 10.17 O eixo da roda de uma bicicleta passa pelo centro de massa da roda e é um eixo de simetria. Portanto, a rotação da roda é descrita pela Equação (10.13), desde que a bicicleta não tombe lateralmente (o que faria alterar a orientação do eixo).

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}$$

AVALIAR: esse resultado é bastante interessante: a velocidade não depende nem da massa M do corpo, nem do raio R. Todos os cilindros sólidos possuem a mesma velocidade no ponto inferior do plano, mesmo quando possuem massas e raios diferentes, porque eles possuem o mesmo valor da constante c. Todas as esferas sólidas possuem a mesma velocidade na base do plano e assim por diante. Quanto menor o valor de c, maior a velocidade do corpo quando ele chega ao ponto inferior do plano (e em qualquer nível ao longo do plano). Os corpos com valores de c pequenos chegam primeiro que os corpos com valores elevados, porque eles gastam menos energia cinética na rotação, deixando uma parte maior para a energia cinética de translação. Lendo os valores de c indicados na Tabela 9.2, vemos que a ordem de chegada na base do plano é: qualquer esfera maciça, qualquer cilindro maciço, qualquer esfera oca com parede fina e qualquer cilindro oco com parede fina.

Movimento combinado de rotação e translação: dinâmica

Podemos também analisar o movimento combinado de rotação e translação de um corpo rígido do ponto de vista da dinâmica. Conforme verificamos na Seção 8.5, para um corpo com massa total M, a aceleração $\vec{a}_{cm}$ do centro de massa é a mesma aceleração de uma partícula de massa M submetida à força externa resultante que atua sobre o corpo rígido real:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \tag{10.12}$$

O movimento de rotação em torno do centro de massa é descrito pela segunda lei de Newton na rotação, Equação (10.7):

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha_z \tag{10.13}$$

onde I_{cm} é o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa e a soma $\Sigma\tau_z$ inclui todos os torques externos em relação a esse eixo. Não é imediatamente óbvio que a Equação (10.13) possa ser aplicada ao movimento de translação de um corpo rígido; afinal, nossa dedução da fórmula $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$ na Seção 10.2 utilizava a hipótese de que o eixo de rotação permanecia fixo. Porém, na verdade, a Equação (10.13) vale *mesmo quando o eixo de rotação se move,* desde que as duas condições seguintes sejam obedecidas:

1. O eixo que passa no centro de massa deve ser um eixo de simetria.
2. O eixo não pode mudar de direção.

Essas condições são atendidas por muitos tipos de rotação (Figura 10.17). Note que em geral esse eixo *não* está em repouso em um sistema de referência inercial.

Podemos agora resolver problemas de dinâmica envolvendo um corpo rígido que possui simultaneamente movimento de translação e rotação, desde que o eixo de rotação satisfaça simultaneamente as duas condições mencionadas anteriormente. A Estratégia para a Solução de Problemas 10.1 desenvolvida na Seção 10.2 é igualmente útil aqui, e seria conveniente revê-la agora. Lembre-se de que, quando um corpo realiza simultaneamente um movimento de rotação e de translação, devemos separar as equações do movimento *para o mesmo corpo*. Uma delas, a Equação (10.12), descreve o movimento de translação do centro de massa. A outra equação do movimento, a Equação (10.13), descreve o movimento de rotação em torno do centro de massa.

Exemplo 10.6

ACELERAÇÃO DE UM IOIÔ PRIMITIVO Para o ioiô primitivo do Exemplo 10.4 (Figura 10.18a), ache a aceleração de cima para baixo do cilindro e a tensão no fio.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: um diagrama do corpo livre do ioiô é indicado na Figura 10.18b, incluindo a escolha do sentido positivo do eixo de referência. Com essas coordenadas, as variáveis do problema são a_{cmy} e T.

PREPARAR: usaremos as equações (10.12) e (10.13), além da condição de que o fio não deslize sobre o cilindro.

EXECUTAR: a equação para o movimento de translação do centro de massa é

$$\sum F_y = Mg + (-T) = Ma_{cmy} \qquad (10.14)$$

O momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa é $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Somente a força de tensão possui torque em relação ao eixo que passa pelo centro de massa, de modo que a equação para o movimento de rotação em torno desse eixo é

$$\sum \tau_z = TR = I_{cm}\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z \qquad (10.15)$$

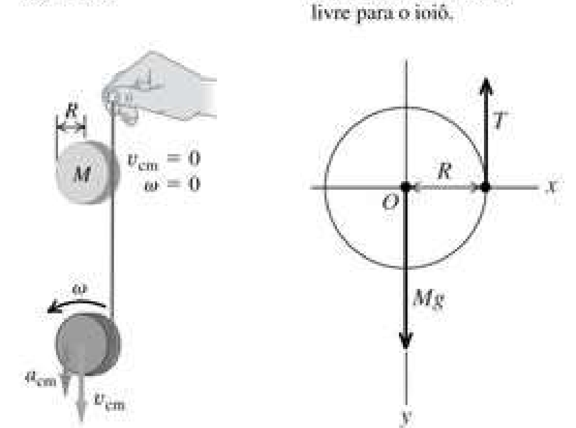


Figura 10.18 Dinâmica de um ioiô primitivo (veja a Figura 10.15).

O fio se desenrola sem deslizar, logo $v_{cmz} = R\omega_z$ pela Equação (10.11); a derivada dessa equação em relação ao tempo fornece

$$a_{cmy} = R\alpha_z \qquad (10.16)$$

Agora usamos a Equação (10.16) para eliminar α_z da Equação (10.15) e a seguir resolvemos as equações (10.14) e (10.15) para obter T e a_{cmy}. Os resultados são bastante simples:

$$a_{cmy} = \frac{2}{3}g \qquad T = \frac{1}{3}Mg$$

Usando a fórmula do movimento com aceleração constante $(v_{cmy})^2 = (v_{cm0y})^2 + 2a_{cmy}h$, você pode mostrar que a velocidade do ioiô depois que ele cai uma distância h é $v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$, confirmando o resultado encontrado no Exemplo 10.4.

AVALIAR: do ponto de vista da dinâmica, a força de tensão é essencial; ela contribui para que a aceleração do ioiô seja menor do que g, e o seu torque é o responsável pela rotação do ioiô. Contudo, nossa análise feita pelo método da energia no Exemplo 10.4 não considerava de forma alguma a força de tensão! Como não existe nenhuma variação da energia mecânica, do ponto de vista da energia o fio é importante apenas como auxiliar na conversão da energia potencial gravitacional em energia cinética rotacional.

Exemplo 10.7

ACELERAÇÃO DE UMA ESFERA ROLANDO Uma bola de boliche sólida desce pela rampa de retorno ao longo da pista rolando sem deslizar (Figura 10.19a). O ângulo de inclinação da rampa em relação à horizontal é igual a β. Qual é a aceleração da bola? Considere a bola como uma esfera sólida homogênea, desprezando seus orifícios.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as incógnitas do problema são a aceleração do centro de massa da bola e o módulo da força de atrito. A Figura 10.19b é um diagrama do corpo livre, mostrando que somente a força de atrito exerce um torque em torno do centro de massa.

PREPARAR: como no Exemplo 10.6, usaremos a Equação (10.12) para descrever o movimento de translação e a Equação (10.13) para descrever o movimento de rotação.

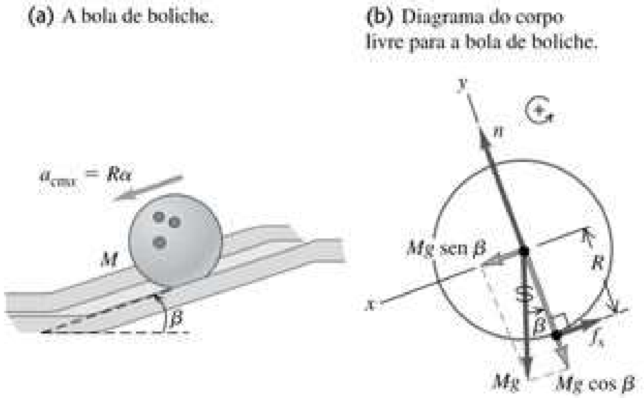


Figura 10.19 Uma bola de boliche rolando para baixo de uma rampa.

EXECUTAR: pela Tabela 9.2 o momento de inércia de uma esfera sólida é dado por $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$. As equações do movimento para a translação e para a rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa são, respectivamente, dadas por

$$\sum F_x = Mg\,\text{sen}\,\beta + (-f) = Ma_{cmx} \qquad (10.17)$$

$$\sum \tau_z = fR = I_{cm}\alpha_z = \left(\frac{2}{5}MR^2\right)\alpha_z \qquad (10.18)$$

Como a bola rola sem deslizar, temos a mesma relação cinemática $a_{cmx} = R\alpha_z$ como no Exemplo 10.6. Usamos essa relação para eliminar α_z da Equação (10.18):

$$fR = \frac{2}{5}MRa_{cmx}$$

Essa equação e a Equação (10.17) formam um sistema de duas equações com as duas incógnitas a_{cmx} e f. Explicitando f na Equação (10.17), substitua o resultado na equação anterior para eliminar f e, a seguir, explicite a_{cmx} para obter

$$a_{cmx} = \frac{5}{7}g\,\text{sen}\,\beta$$

A aceleração é precisamente $\frac{5}{7}$ maior do que a aceleração da bola, caso ela *deslizasse* sem atrito ao longo do plano inclinado, tal como no caso do tobogã do Exemplo 5.10 (Seção 5.2). Finalmente, substituindo o resultado anterior na Equação (10.17) e explicitando f:

$$f = \frac{2}{7}Mg\,\text{sen}\,\beta$$

AVALIAR: como a bola não desliza no ponto que fica instantaneamente em contato com a rampa, a força de atrito f a ser considerada é a força de atrito *estático*; ela impede o deslizamento e fornece para a bola sua aceleração angular. Podemos deduzir uma expressão para o coeficiente de atrito estático μ_s necessário para impedir o deslizamento. A força normal é dada por $n = Mg\cos\beta$. A força de atrito estático máximo é igual a $\mu_s n$, de modo que o coeficiente de atrito estático deve ser maior que ou pelo menos igual a

$$\mu_s = \frac{f}{n} = \frac{\frac{2}{7}Mg\,\text{sen}\,\beta}{Mg\cos\beta} = \frac{2}{7}\text{tg}\,\beta$$

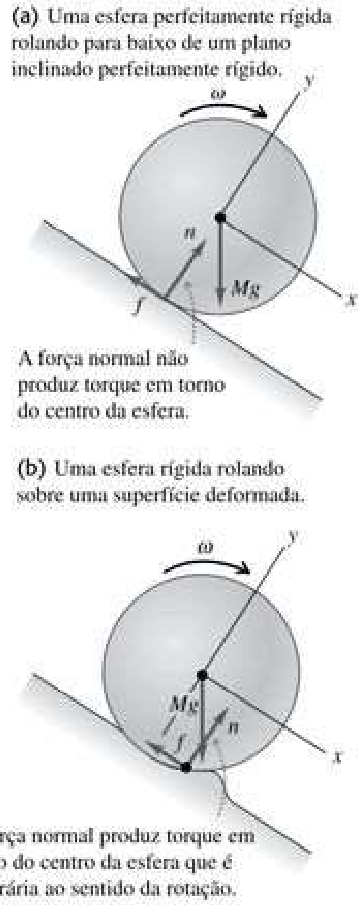


Figura 10.20 Rolando para baixo (a) de uma superfície perfeitamente rígida e (b) de uma superfície deformada. A deformação no item (b) é exagerada.

Quando a inclinação do plano é bem pequena, β é pequeno, e somente um valor pequeno de μ_s é necessário para impedir o deslizamento. Porém, à medida que o ângulo aumenta, o valor de μ_s aumenta, como intuitivamente era de se esperar. Quando a bola começa a deslizar, as equações (10.17) e (10.18) continuam válidas, porém não é mais verdade que $v_{cmx} = R\omega_z$ nem que $a_{cmx} = R\alpha_z$. Temos agora duas equações para três incógnitas (a_{cmx}, α_z e f). Para resolver este problema de rolamento *com* deslizamento é necessário levar em conta o atrito *cinético* (veja o Problema Desafiador 10.101).

Quando a bola de boliche percorre uma distância vertical h ao descer a rampa, o deslocamento ao longo da rampa é h/sen β. Você deve ser capaz de mostrar que a velocidade da bola no fim da rampa é dada por $v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$, que é precisamente o resultado encontrado no Exemplo 10.5 com $c = \frac{2}{5}$.

Caso a bola estivesse rolando *para cima* da rampa, a força de atrito ainda estaria orientada de baixo para cima, como na Figura 10.19b. Você é capaz de explicar por quê?

Atrito de rolamento

No Exemplo 10.5, dissemos que podemos desprezar o atrito de rolamento quando o corpo que rola e a superfície de apoio são corpos rígidos perfeitos. Na Figura 10.20a uma esfera perfeitamente rígida está rolando para baixo de um plano inclinado perfeitamente rígido. A linha de ação da força normal passa pelo centro da esfera, de modo que seu torque é zero; não existe nenhum atrito de deslizamento no ponto de contato, portanto a força de atrito não realiza trabalho. A Figura 10.20b mostra uma situação mais realista, na qual a superfície 'enruga' na parte frontal da esfera e a esfera passa por uma depressão rasa. Por causa dessa deformação, as forças de contato sobre a esfera não mais atuam sobre um único ponto, porém sobre uma área; as forças são concentradas sobre a parte frontal da esfera conforme indicado. Como resultado, a força normal agora exerce um torque que se opõe à rotação. Além disso, existe um certo deslizamento da esfera sobre a superfície por causa da deformação, produzindo uma perda de energia mecânica. A combinação desses dois efeitos origina o fenômeno do *atrito de rolamento*. O atrito de rolamento também ocorre quando o corpo é deformável, tal como um pneu de automóvel. Geralmente o corpo que rola e a superfície são rígidos a ponto de podermos desprezar o atrito de rolamento, como fizemos em todos os exemplos desta seção.

Teste sua compreensão da Seção 10.3 Suponha que o cilindro maciço usado como um ioiô no Exemplo 10.6 seja substituído por um cilindro oco com a mesma massa e o mesmo raio. a) A aceleração do ioiô vai i) aumentar, ii) diminuir ou iii) permanecer constante? b) A tensão do fio vai i) aumentar, ii) diminuir ou iii) permanecer constante? ▮

10.4 Trabalho e potência no movimento de rotação

Quando você pedala uma bicicleta, aplica forças a um corpo que gira e realiza um trabalho sobre ele. Eventos semelhantes ocorrem em muitas outras situações da vida real, como a rotação do eixo de um motor que faz girar um aparelho eletrodoméstico ou o motor de um carro impulsionando um veículo. Podemos descrever esse trabalho em termos do torque e do deslocamento angular.

Suponha que uma força tangencial $\vec{F}_{tg}$ atue sobre a periferia de uma roda com um pivô central — por exemplo, no caso de uma criança correndo enquanto empurra um carrossel em um parque de diversões (Figura 10.21a). A roda gira produzindo um deslocamento angular infinitesimal $d\theta$ em torno de um eixo fixo durante um intervalo de tempo infinitesimal dt (Figura 10.21b). O trabalho dW realizado pela força $\vec{F}_{tg}$ enquanto um ponto da periferia se move uma distância ds é $dW = F_{tg}\,ds$. Se $d\theta$ for medido em radianos, então $ds = R d\theta$ e

$$dW = F_{tg} R\, d\theta$$

Mas $F_{tg}R$ é o *torque* τ_z produzido pela força $\vec{F}_{tg}$, logo

$$dW = \tau_z\, d\theta \tag{10.19}$$

O trabalho total W realizado pelo torque durante um deslocamento angular de θ_1 a θ_2 é

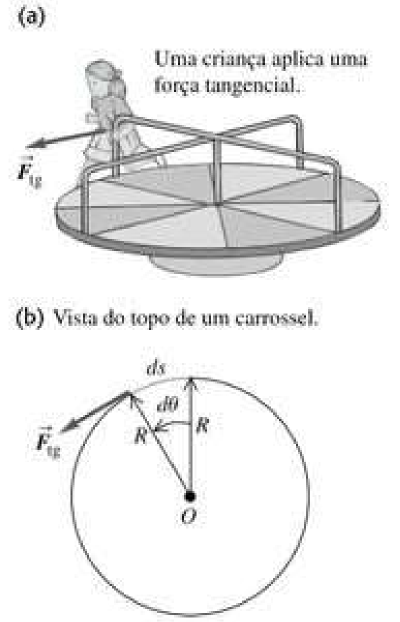


Figura 10.21 Uma força tangencial atuando sobre um corpo que gira produz trabalho.

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z\, d\theta \tag{10.20}$$

(trabalho realizado por um torque).

Quando o torque permanece *constante* enquanto ocorre uma variação finita $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, obtemos

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z \Delta\theta \tag{10.21}$$

(trabalho realizado por um torque constante)

O trabalho realizado por um torque *constante* é igual ao produto do torque pelo deslocamento angular. Quando o torque é expresso em newton · metro $(\text{N} \cdot \text{m})$ e o deslocamento angular é dado em radianos, o trabalho é expresso em joules. A Equação (10.21) usada para o movimento de rotação é análoga à Equação (6.1), $W = Fs$, e a Equação (10.20) é análoga à Equação (6.7), $W = \int F_x\, dx$, que dá o trabalho realizado por uma força em um deslocamento retilíneo.

Caso a força indicada na Figura 10.21 tivesse um componente radial (paralelo ao eixo de rotação) ou um componente radial (apontado para o eixo ou afastando-se do eixo), esse componente não realizaria nenhum trabalho porque o deslocamento do ponto de aplicação possui somente um componente tangencial. Um componente axial ou radial da força também não produziria nenhuma contribuição para o torque em torno do eixo de rotação, de modo que as equações (10.20) e (10.21) permanecem válidas para *qualquer* força, independentemente da natureza dos seus componentes.

Quando um torque realiza trabalho sobre um corpo rígido, a energia cinética varia de uma quantidade igual ao trabalho realizado. Podemos provar isso usando exatamente o mesmo procedimento adotado para a energia cinética de translação de uma partícula nas equações (6.11), (6.12) e (6.13). Inicialmente indicamos por τ_z o torque *resultante* sobre o corpo, de modo que, pela Equação (10.7), $\tau_z = I\alpha_z$. Usando essa equação, estamos supondo que o corpo é rígido, portanto o momento de inércia I é constante. A seguir, transformamos a integral da Equação (10.20) em uma integral sobre ω_z do seguinte modo:

$$\tau_z d\theta = (I\alpha_z)\, d\theta = I\frac{d\omega_z}{dt}\, d\theta = I\frac{d\theta}{dt}\, d\omega_z = I\omega_z\, d\omega_z$$

Uma vez que τ_z é o torque resultante, a integral na Equação (10.20) é um trabalho *total* realizado sobre o corpo rígido que gira. Essa equação fornece o resultado

$$W_{tot} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega_z\, d\omega_z = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \qquad (10.22)$$

A variação da energia cinética da rotação de um corpo *rígido* é igual ao trabalho realizado pelas forças externas ao corpo (Figura 10.22). Essa equação é análoga à Equação (6.13), o teorema do trabalho-energia para uma partícula.

O que podemos dizer acerca da *potência* associada com o trabalho realizado por um torque que atua sobre um corpo que gira? Dividindo ambos os membros da Equação (10.19) pelo intervalo de tempo dt durante o qual o deslocamento angular ocorre, obtemos

$$\frac{dW}{dt} = \tau_z\frac{d\theta}{dt}$$

Porém dW/dt é a taxa da realização do trabalho, ou *potência* P, e $d\theta/dt$ é a velocidade angular ω_z, logo

$$P = \tau_z\omega_z \qquad (10.23)$$

Figura 10.22 A energia cinética de rotação de uma turbina eólica é igual ao trabalho total realizado para colocá-la em rotação.

Quando um torque τ_z (em relação ao eixo de rotação) atua sobre um corpo que gira com velocidade angular ω_z, essa potência (taxa da realização do trabalho) é o produto de τ_z e ω_z. Essa relação é o análogo da relação $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$ que foi desenvolvida na Seção 6.4 para o movimento de uma partícula.

Exemplo 10.8

POTÊNCIA E TORQUE DE UM MOTOR Um anúncio fazendo propaganda da potência desenvolvida pelo motor de um automóvel afirma que o motor desenvolve $1{,}49 \cdot 10^5$ W para uma rotação de 6000 rpm. Qual é o torque desenvolvido pelo motor?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este exemplo usa a relação entre potência, velocidade angular e torque (a incógnita).

PREPARAR: conhecemos a potência P e a velocidade angular ω_z, de modo que podemos calcular o torque usando a Equação (10.23).

EXECUTAR: inicialmente vamos converter rpm para rad/s:

$$P = 1{,}49 \times 10^5 \text{ W}$$

$$\omega_z = 6000 \text{ rev/min} = \left(\frac{6000 \text{ rev}}{1 \text{ min}}\right)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)$$
$$= 628 \text{ rad/s}$$

Pela Equação (10.23),

$$\tau_z = \frac{P}{\omega_z} = \frac{1{,}49 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m/s}}{628 \text{ rad/s}} = 237 \text{ N}\cdot\text{m}$$

AVALIAR: você poderia aplicar um torque semelhante a esse usando uma chave inglesa de comprimento igual a 0,25 m e aplicando à extremidade da chave uma força de 948 N. Você seria capaz de fazer isso?

Exemplo 10.9

CÁLCULO DE POTÊNCIA PELO TORQUE Um motor elétrico exerce um torque constante de 10 N · m sobre um esmeril montado em seu eixo motor. O momento de inércia é $I = 2{,}0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Sabendo que o sistema começa a se mover a partir do repouso, calcule o trabalho realizado pelo motor em 8,0 s e a energia cinética no instante final. Qual é a potência média desenvolvida pelo motor?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como o torque é constante, o esmeril possui uma aceleração angular constante α_z. Ao determinarmos o valor de α_z, poderemos determinar o ângulo $\Delta\theta$ em que o esmeril gira em 8,0 s [o que, pela Equação (10.21), indica o trabalho realizado W] e a velocidade angular ω_z nesse instante (o que indica a energia cinética K). Podemos determinar a potência média P_m dividindo o trabalho realizado pelo intervalo de tempo.

PREPARAR: usamos a versão para rotação da segunda lei de Newton, $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$, para calcular a aceleração angular α_z. Então, usamos as equações cinemáticas da Seção 9.2 para calcular $\Delta\theta$ e ω_z e a partir deles calculamos W, K e P_m.

EXECUTAR: temos $\Sigma\tau_z = 10\ \text{N} \cdot \text{m}$ (o único torque em atuação é aquele devido ao motor) e $I = 2{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$, portanto, da relação $\Sigma\tau_z = I\alpha_z$, vemos que a aceleração angular é $5{,}0\ \text{rad/s}^2$. Pela Equação (9.11), o ângulo total descrito pelo sistema quando ele gira durante 8,0 s é dado por

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_z t^2 = \frac{1}{2}(5{,}0\ \text{rad/s}^2)(8{,}0\ \text{s})^2 = 160\ \text{rad}$$

e o trabalho realizado pelo torque é

$$W = \tau_z\Delta\theta = (10\ \text{N} \cdot \text{m})(160\ \text{rad}) = 1600\ \text{J}$$

Pelas equações (9.7) e (9.17), a velocidade angular e a energia cinética para $t = 8{,}0$ s são

$$\omega_z = \alpha_z t = (5{,}0\ \text{rad/s}^2)(8{,}0\ \text{s}) = 40\ \text{rad/s}$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega_z^2 = \frac{1}{2}(2{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(40\ \text{rad/s})^2 = 1600\ \text{J}$$

A energia cinética inicial era nula, portanto o trabalho realizado equivale ao aumento em energia cinética [veja a Equação (10.22)]. A potência média é

$$P_m = \frac{1600\ \text{J}}{8{,}0\ \text{s}} = 200\ \text{J/s} = 200\ \text{W}$$

AVALIAR: podemos conferir o resultado para a potência *média* considerando a potência *instantânea* $P = \tau_z\omega_z$. Como ω_z cresce continuamente, P também cresce continuamente. A potência instantânea P cresce de zero no instante inicial $t = 0$ até $(10\ \text{N} \cdot \text{m})(40\ \text{rad/s}) = 400\ \text{W}$ no instante final $t = 8{,}0$ s. A velocidade angular e a potência crescem uniformemente com o tempo, de modo que a potência *média* é apenas metade desse valor máximo, ou 200 W.

Teste sua compreensão da Seção 10.4 Você aplica torques iguais a dois cilindros diferentes, um dos quais possui um momento de inércia que é o dobro do outro. Cada cilindro está inicialmente em repouso. Após uma rotação completa, qual deles possui maior energia cinética? I) o cilindro com o maior momento de inércia; ii) o cilindro com o menor momento de inércia; iii) ambos possuem a mesma energia cinética. ∎

10.5 Momento angular

Para cada grandeza referente ao movimento de rotação definida nos capítulos 9 e 10, existe uma grandeza análoga referente ao movimento de translação de uma partícula. A grandeza análoga ao *momento linear* de uma partícula é o **momento angular**, uma grandeza vetorial designada por $\vec{L}$. Sua relação com $\vec{p}$ (que é sempre chamado de *momento linear*) é análoga à relação que liga o torque com a força, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. Para uma partícula com massa constante m, velocidade $\vec{v}$, momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$ e vetor posição $\vec{r}$ em relação a uma origem O de um referencial inercial, definimos o momento angular $\vec{L}$ como

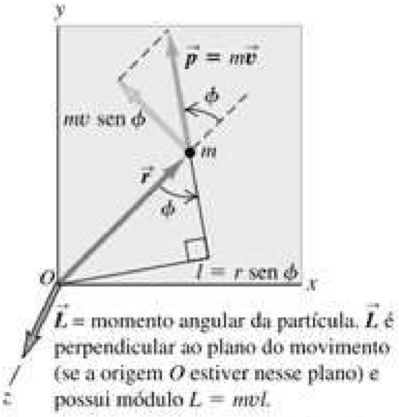


Figura 10.23 Cálculo do momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$ de uma partícula com massa m se movendo no plano xy.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad (10.24)$$

(momento angular de uma partícula)

O valor de $\vec{L}$ depende da escolha da origem O, visto que ele envolve o vetor posição da partícula em relação à origem. As unidades de momento angular são $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Na Figura 10.23, uma partícula se move no plano xy; seu vetor posição $\vec{r}$ e seu momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$ estão indicados. O momento angular $\vec{L}$ é ortogonal ao plano xy. A regra da mão direita para o produto vetorial mostra que sua direção está ao longo do eixo $+Oz$ e seu módulo é

$$L = mvr\,\text{sen}\,\phi = mvl \qquad (10.25)$$

onde l é a distância perpendicular do ponto O à linha da direção do vetor $\vec{v}$. Essa distância desempenha o papel do 'braço da alavanca' para o vetor momento linear.

Quando uma força resultante $\vec{F}$ atua sobre uma partícula, sua velocidade e seu momento linear variam, de modo que seu momento angular também pode variar. Podemos mostrar que a *taxa de variação* do momento angular é igual ao torque da força resultante. Tomando a derivada da Equação (10.24) em relação ao tempo e usando a regra da derivada de um produto, encontramos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times m\vec{a})$$

O primeiro termo é zero porque contém o produto vetorial do vetor $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ por ele mesmo. No segundo termo substituímos $m\vec{a}$ pela força resultante $\vec{F}$ e obtemos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \qquad (10.26)$$

(para uma partícula sob ação da força resultante $\vec{F}$)

A taxa de variação do momento angular de uma partícula é igual ao torque da força resultante que atua sobre ela. Compare esse resultado com a Equação (8.3), a qual afirma que a taxa de variação $d\vec{p}/dt$ do momento *linear* de uma partícula é igual à força resultante que atua sobre ela.

Momento angular de um corpo rígido

Podemos usar a Equação (10.25) para achar o momento angular total de um *corpo rígido* que gira em torno do eixo Oz com velocidade angular ω. Inicialmente considere uma fatia fina do corpo situada sobre o plano xy (Figura 10.24). Cada partícula dessa fatia se move em um círculo centralizado na origem, e em cada instante sua velocidade $\vec{v}_i$ é perpendicular ao vetor posição $\vec{r}_i$, conforme indicado. Logo, na Equação (10.25), $\phi = 90°$ para cada partícula. Uma partícula com massa m_i a uma distância r_i do ponto O possui uma velocidade $v_i = r_i\omega$. Pela Equação (10.25), o módulo L_i do seu momento angular é

$$L_i = m_i(r_i\omega)\,r_i = m_i r_i^2\omega \tag{10.27}$$

A direção e o sentido do momento angular de cada partícula, de acordo com a regra da mão direita, são dados pelo eixo $+Oz$.

O momento angular *total* da fatia do corpo que está sobre o plano xy é a soma ΣL_i dos momentos angulares L_i de todas as partículas. Somando ambos os membros da Equação (10.27), obtemos o resultado

$$L = \sum L_i = \left(\sum m_i r_i^2\right)\omega = I\omega$$

onde I é o momento de inércia da fatia em torno do eixo Oz.

Podemos adotar esse procedimento para todas as fatias do corpo paralelas ao plano xy. Para os pontos que não estão sobre o plano xy, surge uma complicação porque os vetores $\vec{r}$ possuem componentes na direção e no sentido do eixo Oz, assim como ao longo dos eixos Ox e Oy; isso faz com que o momento angular de cada partícula possua um componente perpendicular ao eixo Oz. Contudo, *se o eixo Oz for um eixo de simetria*, os componentes perpendiculares de partículas que estejam em lados opostos se anulam (Figura 10.25). Logo, quando um corpo gira em torno de um eixo de simetria, seu vetor momento angular $\vec{L}$ permanece ao longo do eixo de simetria, e seu módulo é dado por $L = I\omega$.

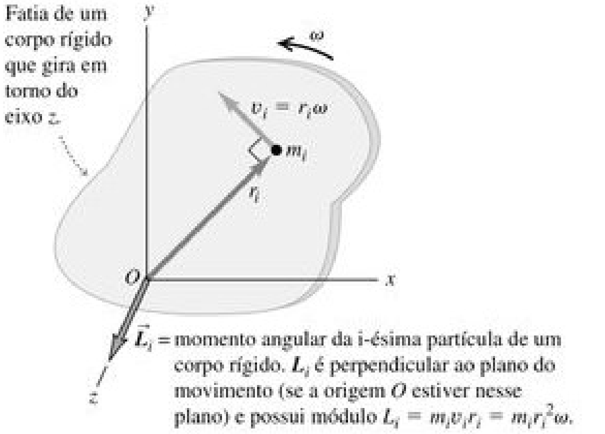


Figura 10.24 Cálculo do momento angular de uma partícula de massa m_i em um corpo rígido girando a uma velocidade escalar angular ω. (Compare com a Figura 10.23.)

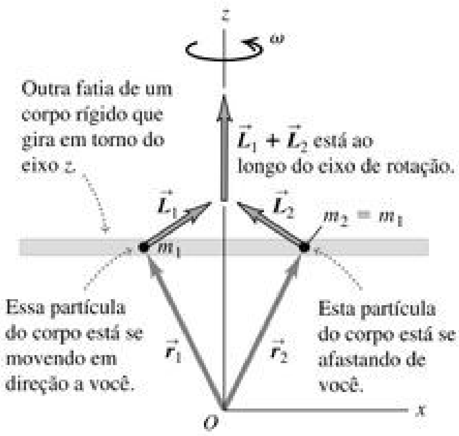


Figura 10.25 Duas partículas de mesma massa localizadas simetricamente de cada lado do eixo de rotação de um corpo rígido. Os momentos angulares $\vec{L}_1$ e $\vec{L}_2$ das partículas individuais não estão sobre o eixo de rotação, porém, a soma vetorial $\vec{L}_1 + \vec{L}_2$ permanece ao longo desse eixo.

O vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ também permanece ao longo do eixo de rotação, conforme discutimos no final da Seção 9.1. Portanto, para um corpo rígido que gira em torno de um eixo de simetria, $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ possuem a mesma direção e o mesmo sentido (Figura 10.26). Logo, é válida a seguinte relação *vetorial*

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{10.28}$$

(para um corpo rígido girando em torno de um eixo de simetria)

Pela Equação (10.26), a taxa de variação do momento angular de uma partícula é igual ao torque da força resultante sobre a partícula. Para qualquer sistema de partículas (tanto para corpos rígidos como para corpos não rígidos), a taxa de variação do momento angular *total* é igual à soma dos torques de todas as forças que atuam sobre todas as partículas. Os torques das forças *internas* se anulam quando a linha de ação dessas forças une as duas partículas, como na Figura 10.8, e, portanto, a soma dos torques inclui somente torques das forças *externas*. (Um cancelamento semelhante ocorreu em nossa discussão do movimento do centro de massa na Seção 8.5.) Se o momento angular total de um sistema de partículas é $\vec{L}$ e a soma dos torques externos é $\sum\vec{\tau}$, então

$$\sum\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{10.29}$$

(para qualquer sistema de partículas)

Finalmente, quando o sistema de partículas for um corpo rígido girando em torno de um eixo de simetria, então $L_z = I\omega_z$ e I é constante. Quando esse eixo possui direção fixa no espaço, então os vetores $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ variam apenas em módulo, mas a direção e o sentido não variam. Nesse caso, $dL_z/dt = I\,d\omega_z/dt = I\alpha_z$, ou

$$\sum\tau_z = I\alpha_z$$

Figura 10.26 Para a rotação em torno de um eixo de simetria, $\vec{\omega}$ e $\vec{L}$ são vetores paralelos e estão sobre o eixo de simetria. As respectivas direções e sentidos são obtidos pela mesma regra da mão direita (compare com a Figura 9.5).

que é novamente a relação básica para a dinâmica da rotação de um corpo rígido. Caso o corpo *não* seja rígido, I pode variar, e nesse caso L varia, mesmo quando ω permanece constante. Para um corpo não rígido, a Equação (10.29) ainda permanece válida, embora a Equação (10.7) não seja mais válida.

Quando o eixo de rotação *não* é um eixo de simetria, o momento angular em geral *não* é paralelo ao eixo (Figura 10.27). À medida que o corpo gira, o vetor momento angular $\vec{L}$ descreve um cone em torno do eixo de rotação. Como $\vec{L}$ varia, deve existir um torque resultante externo atuando sobre o corpo, embora o módulo da velocidade angular ω permaneça constante. Se o corpo for uma roda não balanceada de um carro, esse torque será fornecido por atrito nos mancais, desgastando-os em decorrência. O 'balanceamento' de uma roda significa fazer a distribuição de massas de modo que o eixo de rotação seja um eixo de simetria; então, o vetor $\vec{L}$ aponta ao longo do eixo de rotação, e nenhum torque resultante é necessário para manter a roda girando.

Na rotação em torno de um eixo fixo, normalmente usamos a expressão 'momento angular de um corpo' para fazer referência somente ao *componente* de $\vec{L}$ ao longo do eixo de rotação do corpo (o eixo Oz mostrado na Figura 10.27), com um sinal positivo ou negativo para indicar o sentido da rotação, como no caso da velocidade angular.

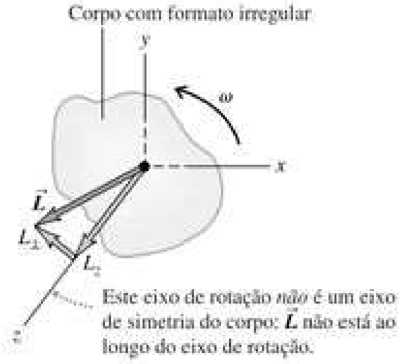


Figura 10.27 Quando o eixo de rotação de um corpo rígido não é um eixo de simetria, o vetor momento angular $\vec{L}$ não se encontra em geral ao longo do eixo de rotação. Mesmo quando $\vec{\omega}$ é constante, a direção de $\vec{L}$ pode variar, e torna-se necessário um torque externo para manter a rotação.

Exemplo 10.10

MOMENTO ANGULAR E TORQUE A hélice da turbina de um motor a jato possui momento de inércia 2,5 kg . m² em torno do eixo de rotação. Quando a turbina começa a girar, sua velocidade angular em função do tempo é dada por

$$\omega_z = (40\ \text{rad/s}^3)t^2$$

a) Calcule o momento angular da hélice em função do tempo e ache seu valor no instante t = 3,0 s. b) Determine o torque resultante que atua sobre a hélice em função do tempo e calcule seu valor para t = 3,0 s.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: assim como no caso de um ventilador elétrico, a hélice da turbina gira em torno de um eixo de simetria (o eixo z). Logo, o vetor do momento angular possui somente um componente z L_z, o qual podemos determinar a partir da velocidade angular ω_z. Como a direção do momento angular é constante, o torque resultante também possui somente um componente τ_z ao longo do eixo de rotação; isso equivale à derivada de tempo de L_z.

PREPARAR: podemos usar a Equação (10.28) para achar L_z a partir de ω_z e a Equação (10.29) para achar t_z a partir da derivada de tempo de L_z.

EXECUTAR: a) O componente do momento angular ao longo do eixo de rotação z é

$$L_z = I\omega_z = (2.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(40\ \text{rad/s}^3)t^2 = (100\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)t^2$$

(Abandonamos o 'rad' na resposta porque um radiano é uma grandeza sem dimensão). No instante t = 3,0 s, L_z = 900 kg · m²/s.

b) Pela Equação (10.29), o componente do torque resultante ao longo do eixo de rotação é

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = (100\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)(2t) = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)t$$

No instante t = 3,0 s,

$$\tau_z = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)(3.0\ \text{s}) = 600\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 600\ \text{N}\cdot\text{m}$$

AVALIAR: para conferir o resultado, note que a aceleração angular da hélice da turbina é $\alpha_z = d\omega_z/dt = (40\ \text{rad/s}^3)(2t) = (80\ \text{rad/s}^3)t$. Pelo equivalente rotacional da segunda lei de Newton, o torque sobre a hélice é $\tau_z = I\alpha_z = (2{,}5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(80\ \text{rad/s}^3)t = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)t$, exatamente como calculamos anteriormente.

Teste sua compreensão da Seção 10.5 Uma bola é presa a uma extremidade de um pedaço de fio. Você segura a outra extremidade do fio e gira a bola descrevendo um círculo em torno da sua mão. a) Se a bola se move a uma velocidade escalar constante, o seu momento linear $\vec{p}$ é constante? Por que sim ou por que não? b) O seu momento angular $\vec{L}$ é constante? Por que sim ou por que não? ❚

10.6 Conservação do momento angular

Acabamos de mostrar que o momento angular pode ser usado como uma formulação alternativa do princípio fundamental da dinâmica das rotações. Esse tratamento também é a base para formular o **princípio da conservação do momento angular**. Tal como a conservação da energia e a conservação do momento linear, esse princípio constitui uma lei geral da conservação, válida em todas as escalas, desde sistemas atômicos e nucleares até o movimento de galáxias. Esse princípio decorre diretamente da Equação (10.29): $\sum\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Quando $\sum\vec{\tau} = \mathbf{0}$, então $d\vec{L}/dt = \mathbf{0}$, em que $\vec{L}$ é um vetor constante.

Quando o torque externo resultante que atua sobre um sistema é igual a zero, o momento angular do sistema permanece constante (se conserva).

Um patinador que dá uma pirueta apoiado na ponta de um único patim sobre o gelo, um acrobata e um mergulhador, todos utilizam esse princípio. Suponha que uma acrobata acabou de sair de um salto com os braços e pernas estendidos, girando no sentido anti-horário em torno de seu centro de massa. Quando ela fecha os braços e as pernas, seu momento de inércia I_{cm} em relação ao centro de massa passa de um valor grande I_1 a um valor muito menor I_2. A única força externa que atua sobre a acrobata é seu peso, que não possui nenhum torque em relação a um eixo passando pelo centro de massa. Logo, o momento angular da acrobata $L_z = I_{cm}\omega_z$ permanece constante, e sua velocidade angular ω_z cresce à medida que I_{cm} diminui. Ou seja,

$$I_1\omega_{1z} = I_2\omega_{2z} \qquad (10.30)$$

(torque externo resultante igual a zero)

Quando uma patinadora ou uma bailarina gira com os braços estendidos e a seguir os recolhe, sua velocidade angular aumenta à medida que seu momento de inércia diminui. Em cada caso existe conservação de momento angular no sistema porque o torque externo resultante é igual a zero.

Quando um sistema possui muitas partes, as forças internas entre as partes produzem variações dos momentos angulares das partes, porém o momento angular *total* não varia. A seguir fornecemos um exemplo. Considere dois corpos A e B que interagem entre si e não interagem com nenhum outro corpo, como os astronautas mencionados na Seção 8.2 (Figura 8.8). Suponha que o corpo A exerça uma força $\vec{F}_{A\,\text{em}\,B}$ sobre o corpo B; o torque correspondente (em relação a qualquer ponto que você escolha) é $\vec{\tau}_{A\,\text{em}\,B}$. De acordo com a Equação (10.29), esse torque é igual à taxa de variação do momento angular do corpo B

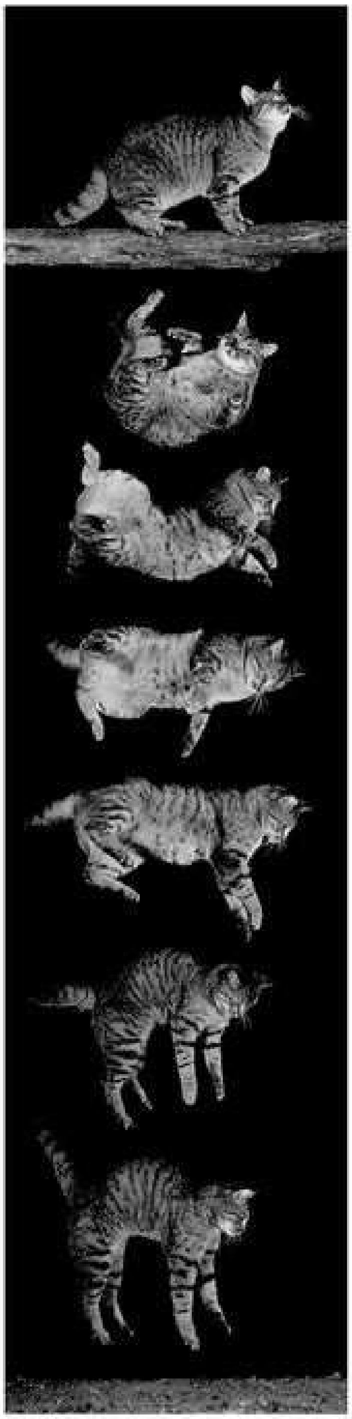


Figura 10.28 Um gato em queda produz torção em diversas partes de seu corpo e em diferentes direções, de modo que ele cai em pé. Em todas as etapas durante a queda o momento angular do gato como um todo permanece constante.

$$\vec{\tau}_{A\,\text{em}\,B} = \frac{d\vec{L}_B}{dt}$$

Ao mesmo tempo, o corpo B exerce sobre A uma força $\vec{F}_{B\,\text{em}\,A}$, com o torque correspondente $\vec{\tau}_{B\,\text{em}\,A}$, e

$$\vec{\tau}_{B\,\text{em}\,A} = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

Pela terceira lei de Newton, $\vec{F}_{B \text{ em } A} = -\vec{F}_{A \text{ em } B}$. Além disso, se as forças atuam ao longo da mesma linha, como na Figura 10.8, seus braços da alavanca em relação ao eixo escolhido são iguais. Logo, os *torques* dessas forças são iguais e de sentidos contrários, e $\vec{\tau}_{B \text{ em } A} = -\vec{\tau}_{A \text{ em } B}$. Assim, quando somamos as duas equações anteriores, obtemos:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \frac{d\vec{L}_B}{dt} = \mathbf{0}$$

ou, como $\vec{L}_A + \vec{L}_B$ é o momento angular *total* $\vec{L}$ do sistema,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mathbf{0} \qquad (10.31)$$

(torque externo resultante igual a zero)

Ou seja, o momento angular total do sistema permanece constante. Os torques das forças internas podem transferir momento angular de uma parte para outra do corpo, mas eles não podem alterar o momento angular *total* do sistema (Figura 10.28).

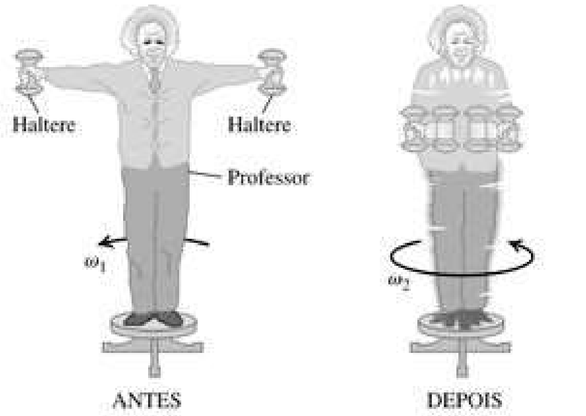


Figura 10.29 Divertimento com a conservação do momento angular.

Exemplo 10.11

QUALQUER UM PODE SER UM BAILARINO Um acrobata professor de física está em pé sobre o centro de uma mesa girante, mantendo os braços estendidos horizontalmente com um haltere de 5,0 kg em cada mão (Figura 10.29). Ele está girando em torno de um eixo vertical e completa uma volta em 2,0 s. Calcule a nova velocidade angular do professor, quando ele aproxima os dois halteres do estômago, e discuta como isso modifica sua energia cinética. Seu momento de inércia (sem os halteres) é igual a 3,0 kg · m², quando seus braços estão estendidos, diminuindo para 2,2 kg · m² quando suas mãos estão próximas do estômago. Os halteres estão inicialmente a uma distância de 1,0 m do eixo e a distância final é igual a 0,20 m. Considere os halteres como partículas.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: se desprezarmos o atrito na mesa girante, nenhum torque externo atua em torno do eixo vertical (z), de modo que o momento angular em torno desse eixo é constante.

PREPARAR: podemos usar a Equação (10.30) para achar a incógnita do problema, a velocidade angular final ω_{2z}.

EXECUTAR: o momento do sistema é $I = I_{\text{prof}} + I_{\text{haltere}}$. Cada haltere de massa m contribui mr^2 para I_{haltere}, onde r é a distância perpendicular do eixo de rotação até o haltere. Inicialmente, temos

$$I_1 = 3{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 + 2(5{,}0\ \text{kg})(1{,}0\ \text{m})^2 = 13\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_{1z} = \frac{1\ \text{rev}}{2{,}0\ \text{s}} = 0{,}50\ \text{rev/s}$$

O momento de inércia final é

$$I_2 = 2{,}2\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 + 2(5{,}0\ \text{kg})(0{,}20\ \text{m})^2 = 2{,}6\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Pela Equação (10.30), a velocidade angular final é

$$\omega_{2z} = \frac{I_1}{I_2}\omega_{1z} = \frac{13\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}{2{,}6\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}(0{,}50\ \text{rev/s}) = 2{,}5\ \text{rev/s}$$

Ou seja, a velocidade angular cresce de um fator cinco enquanto o momento angular permanece constante. Note que não precisamos transformar 'revolução' para 'radianos' nos cálculos realizados. Por quê?

AVALIAR: é útil examinar como a energia cinética varia nesse processo. Para calcular a energia cinética, devemos usar ω_1 e ω_2 em rad/s. (Por quê?) Temos $\omega_{1z} = (0{,}50\ \text{rev/s})(2\pi\ \text{rad/rev}) = 3{,}14\ \text{rad/s}$ e $\omega_{2z} = (2{,}5\ \text{rev/s})(2\pi\ \text{rad/rev}) = 15{,}7\ \text{rad/s}$. A energia cinética inicial é

$$K_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_{1z}^2 = \frac{1}{2}(13\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(3{,}14\ \text{rad/s})^2 = 64\ \text{J}$$

e a energia cinética final é

$$K_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_{2z}^2 = \frac{1}{2}(2{,}6\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(15{,}7\ \text{rad/s})^2 = 320\ \text{J}$$

A energia cinética excedente veio do trabalho que o professor realizou ao puxar os braços e os halteres para junto de si.

Exemplo 10.12

'COLISÃO' EM ROTAÇÃO I A Figura 10.30 mostra dois discos: um deles (A) é o volante de um motor e o outro (B) é um disco ligado a um eixo de transmissão. Seus momentos de inércia são I_A e I_B; inicialmente eles estão girando com a mesma velocidade angular ω_A e ω_B, respectivamente. A seguir, empurramos os dois discos juntos, aplicando forças que atuam ao longo do eixo, de modo que sobre nenhum dos dois discos surge torque em relação ao eixo. Os discos se deslocam unidos e acabam atingindo a mesma velocidade angular final ω. Deduza uma expressão para ω.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o único torque que atua sobre cada disco é o torque que um exerce sobre o outro; não existe nenhum torque externo. Logo, o momento angular total do sistema dos dois discos é o mesmo antes e depois de serem empurrados unidos. No equilíbrio final eles giram juntos como se constituíssem um único corpo com momento de inércia total $I = I_A + I_B$ e velocidade angular ω, que é a incógnita do problema.

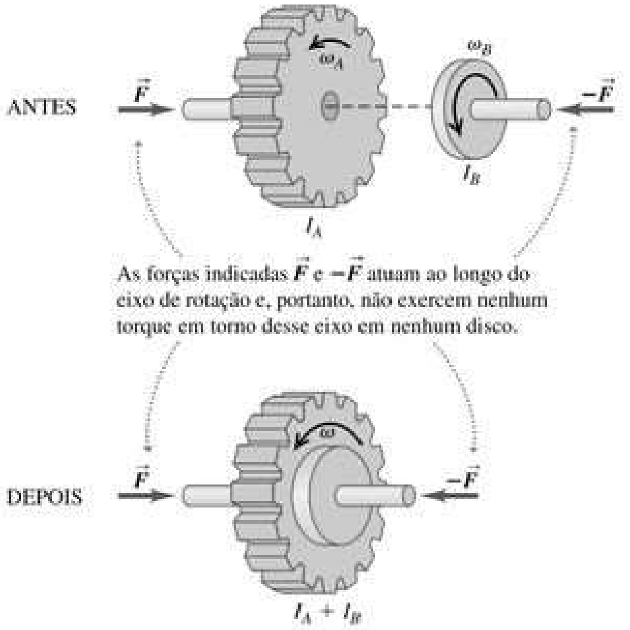


FIGURA 10.30 Quando o torque externo total é igual a zero, o momento angular se conserva.

PREPARAR: a Figura 10.30 mostra que todas as velocidades angulares apontam na mesma direção, por isso podemos considerar ω_A, ω_B e ω como os componentes da velocidade angular ao longo do eixo de rotação.

EXECUTAR: a conservação do momento angular fornece

$$I_A\omega_A + I_B\omega_B = (I_A + I_B)\omega$$
$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}$$

AVALIAR: essa 'colisão' entre dois discos é análoga a uma colisão completamente inelástica (Seção 8.3). Quando dois objetos em movimento de translação ao longo do mesmo eixo se unem e aderem um ao outro, o momento linear do sistema é conservado. Na situação indicada na Figura 10.30, dois objetos em movimento de *rotação* ao longo do mesmo eixo se unem e aderem um ao outro, e o momento *angular* é conservado. A energia cinética do sistema diminui em uma colisão completamente inelástica; no próximo exemplo, veremos o que acontece com a energia cinética na 'colisão' de dois discos em rotação.

Exemplo 10.13

'COLISÃO' EM ROTAÇÃO II No Exemplo 10.12, suponha que o volante *A* possua massa de 2,0 kg, um raio de 0,20 m e uma velocidade angular inicial de 50 rad/s, e a embreagem *B* possua massa de 4,0 kg, um raio de 0,10 m e uma velocidade angular inicial de 200 rad/s. Calcule a velocidade angular comum final ω depois que os discos ficam em contato. A energia cinética se conserva durante esse processo?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: necessitamos calcular a energia cinética de rotação de cada disco antes da colisão e a combinação das suas energias cinéticas após a colisão.

PREPARAR: usaremos o resultado do Exemplo 10.12 e a expressão $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ para a energia cinética de rotação.

EXECUTAR: os momentos de inércia dos dois discos são

$$I_A = \frac{1}{2}m_A r_A^2 = \frac{1}{2}(2{,}0\text{ kg})(0{,}20\text{ m})^2 = 0{,}040\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_B = \frac{1}{2}m_B r_B^2 = \frac{1}{2}(4{,}0\text{ kg})(0{,}10\text{ m})^2 = 0{,}020\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Pelo Exemplo 10.12 temos a velocidade escalar angular

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}\\ &= \frac{(0{,}040\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(50\text{ rad/s}) + (0{,}020\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(200\text{ rad/s})}{0{,}040\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 0{,}020\text{ kg}\cdot\text{m}^2}\\ &= 100\text{ rad/s}\end{aligned}$$

A energia cinética inicial é

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}I_B\omega_B^2\\ &= \frac{1}{2}(0{,}040\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(50\text{ rad/s})^2\\ &\quad+\frac{1}{2}(0{,}020\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(200\text{ rad/s})^2\\ &= 450\text{ J}\end{aligned}$$

A energia cinética final é

$$\begin{aligned}K_2 &= \frac{1}{2}(I_A + I_B)\omega^2\\ &= \frac{1}{2}(0{,}040\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 0{,}020\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(100\text{ rad/s})^2 = 300\text{ J}\end{aligned}$$

AVALIAR: um terço da energia cinética inicial foi perdida durante essa 'colisão angular', o análogo rotacional de uma colisão linear completamente inelástica. Não deveríamos esperar conservação da energia cinética, embora a força externa resultante e o torque externo resultante sejam nulos, porque existem forças internas não conservativas (forças de atrito) que atuam enquanto os dois discos giram unidos e tendem a se aproximar de uma velocidade angular comum.

Exemplo 10.14

MOMENTO ANGULAR EM UMA AÇÃO POLICIAL Uma porta de largura igual a 1,0 m e massa de 15 kg, é articulada com dobradiças em um dos lados de modo que possa girar sem atrito em torno de um eixo vertical. Ela inicialmente não está aberta. Um policial dá um tiro com uma bala de 10 g e velocidade de 400 m/s exatamente no centro da porta e em uma direção perpendicular ao plano da porta. Calcule a velocidade angular da porta imediatamente depois que a bala penetra nela. A energia cinética se conserva?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: considere um sistema formado pela porta juntamente com a bala em seu interior. Não existe nenhum torque externo em torno do eixo definido pelas dobradiças, de modo que o momento angular em torno desse eixo deve se conservar.

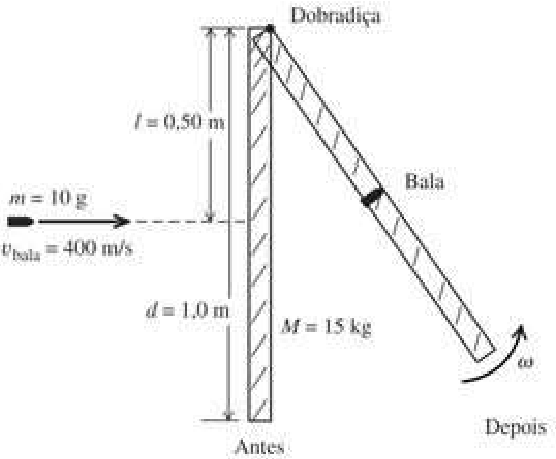


Figura 10.31 Esquematização do problema.

PREPARAR: A Figura 10.31 mostra a esquematização do problema. O momento angular inicial está totalmente na bola e é dado pela Equação (10.25). O momento angular final é o de um corpo rígido composto pela porta e a bala encravada nela. Consideraremos esses dois elementos como sendo iguais e solucionaremos a velocidade escalar angular ω da porta e da bala imediatamente após a colisão.

EXECUTAR: o momento angular inicial da bala é:

$$L = mvl = (0{,}010\text{ kg})(400\text{ m/s})(0{,}50\text{ m}) = 2{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

O momento angular final é $I\omega$, onde $I = I_{porta} + I_{bala}$. Pela Tabela 9.2, para uma porta de largura d,

$$I_{porta} = \frac{Md^2}{3} = \frac{(15\text{ kg})(1{,}0\text{ m})^2}{3} = 5{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

O momento de inércia da bala (em relação a um eixo passando pelas dobradiças) é

$$I_{bala} = ml^2 = (0{,}010\text{ kg})(0{,}50\text{ m})^2 = 0{,}0025\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

A conservação do momento angular exige que $mvl = I\omega$, ou

$$\omega = \frac{mvl}{I} = \frac{2{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{5{,}0\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 0{,}0025\text{ kg}\cdot\text{m}^2} = 0{,}40\text{ rad/s}$$

A colisão entre a bala e a porta é inelástica porque forças não conservativas atuam durante o impacto da bala. Logo, não esperamos que haja conservação da energia cinética. Para conferirmos, calculamos a energia cinética inicial e a energia cinética final:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0{,}010\text{ kg})(400\text{ m/s})^2 = 800\text{ J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(5{,}0025\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(0{,}40\text{ rad/s})^2 = 0{,}40\text{ J}$$

A energia cinética final é apenas 1/2000 da energia cinética inicial!

AVALIAR: a velocidade escalar angular final da porta é bastante lenta: a 0,40 rad/s a porta leva 3,9 s para oscilar 90° ($\pi/2$ radianos). Você é capaz de observar que a velocidade escalar dobraria se a bala fosse disparada no canto da porta, em um ponto próximo à maçaneta?

Teste sua compreensão da Seção 10.6 Se as calotas polares derretessem por completo devido ao aquecimento global, o gelo derretido se redistribuiria pela superfície terrestre. Essa variação faria com que a duração do dia (o tempo necessário para a Terra girar uma vez sobre seu eixo) i) aumentasse; ii) diminuísse; iii) permanecesse inalterada. (*Sugestão*: use os conceitos de momento angular. Considere que o Sol, a Lua e os planetas exercem torques desprezíveis sobre a Terra.) ∎

10.7 Giroscópios e precessão

Em todas as situações analisadas neste capítulo até o momento, o eixo de rotação ou permanecia fixo ou se movia, porém mantendo sempre a mesma direção (como no caso do rolamento sem deslizamento). Entretanto, uma diversidade de novos fenômenos físicos, alguns até inesperados, pode ocorrer quando o eixo de rotação muda de direção. Por exemplo, considere um giroscópio de brinquedo suportado em uma de suas extremidades (Figura 10.32). Se o eixo do volante for inicialmente colocado em posição horizontal e, a seguir, solto, sua extremidade livre começará a cair sob a ação da gravidade — *se* o volante inicialmente não estava girando. Porém, quando o volante *está* girando inicialmente, o que ocorre é bastante diferente. Um movimento possível é o movimento circular uniforme do eixo em um plano horizontal, combinado com o movimento de rotação do volante em torno desse eixo. Esse movimento surpreendente, que não é intuitivo, denomina-se **precessão**. A precessão ocorre na natureza, assim como em máquinas que giram, como no caso do giroscópio. Enquanto você lê estas palavras, a própria Terra está sofrendo precessão; seu eixo de rotação (o eixo que liga o pólo norte ao pólo sul) muda lentamente de direção, e a direção desse eixo só retorna exatamente à posição inicial depois de um ciclo completo de precessão que dura 26000 anos.

Para estudarmos o estranho fenômeno da precessão, devemos nos lembrar de que a velocidade angular, o momento angular e o torque são grandezas *vetoriais*.

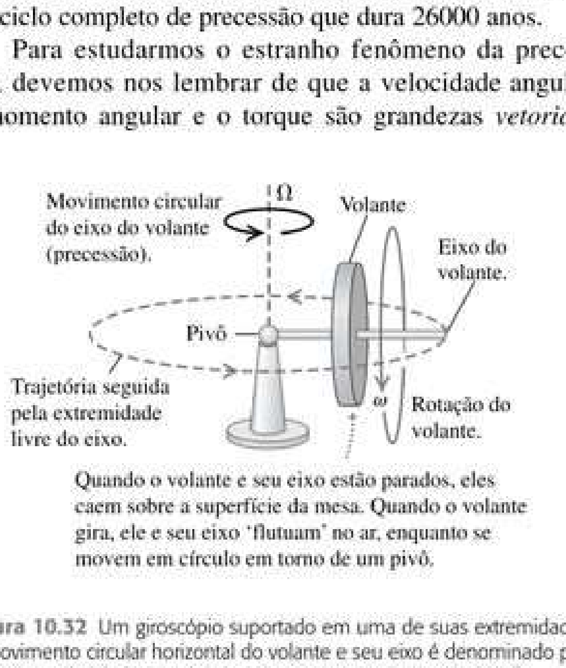


Figura 10.32 Um giroscópio suportado em uma de suas extremidades. O movimento circular horizontal do volante e seu eixo é denominado precessão. A velocidade angular de precessão é representada por Ω.

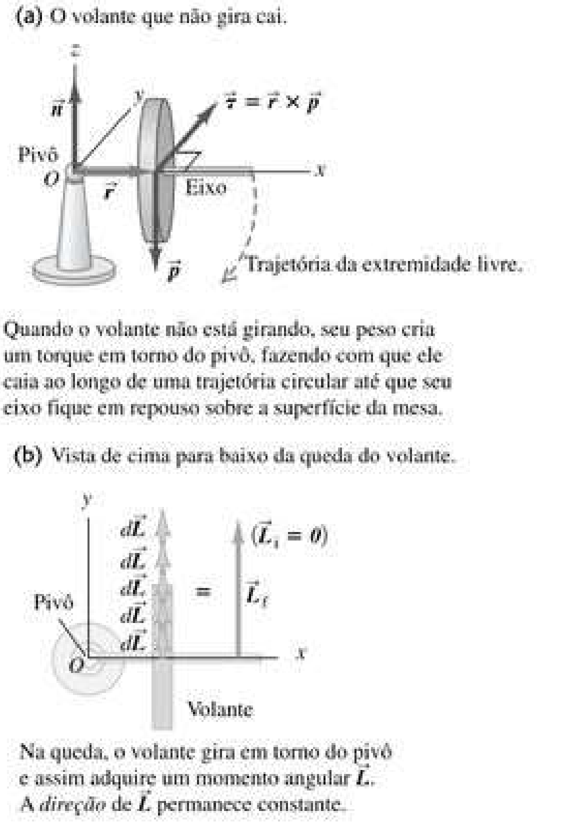


Figura 10.33 (a) Se o volante na Figura 10.32 não está inicialmente girando, seu momento angular inicial é igual a zero. (b) Em cada intervalo de tempo sucessivo dt, o torque produz variação $d\vec{L} = \vec{\tau}dt$ do momento angular. O volante adquire um momento angular $\vec{L}$ na mesma direção que $\vec{\tau}$, e o eixo do volante cai.

Em particular, precisamos da relação geral entre o torque resultante $\sum\vec{\tau}$ que atua sobre um corpo e a taxa de variação do momento angular $\vec{L}$, dada pela Equação (10.29), $\sum\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Vamos inicialmente aplicar essa equação ao caso em que o volante *não* está girando (Figura 10.33a). Tomamos a origem sobre o ponto O do pivô e supomos que o volante seja simétrico, com massa M e momento de inércia I em torno do eixo do volante. O eixo do volante está inicialmente ao longo do eixo Ox. As únicas forças que atuam sobre o giroscópio são a força normal $\vec{n}$, que atua sobre o pivô (com atrito desprezível) e o peso $\vec{p}$ do volante que atua no centro de massa, situado a uma distância r do pivô. A força normal possui torque nulo em relação ao pivô, e o peso possui um torque $\vec{\tau}$ na direção do eixo Oy, como indicado na Figura 10.33a. Inicialmente não existe rotação, e o momento angular inicial $\vec{L}_i$ é igual a zero. Pela Equação (10.29), a *variação* $d\vec{L}$ do momento angular em um intervalo de tempo curto dt depois do início é dada por

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt \qquad (10.32)$$

Essa variação está na direção do eixo Oy porque $\vec{\tau}$ também está. À medida que decorre cada intervalo de tempo dt, o momento angular varia em incrementos adicionais $d\vec{L}$ na direção Oy porque a direção do torque é constante (Figura 10.33b). O aumento crescente do momento angular horizontal significa que o giroscópio gira para baixo com velocidade crescente em torno do eixo Oy, até que atinja o suporte ou então caia na mesa onde se apóia.

Vamos agora analisar o que ocorre quando o volante *está* inicialmente girando, de modo que o momento angular inicial $\vec{L}_i$ não é igual a zero (Figura 10.34a). Uma vez que o volante gira em torno do eixo de simetria, $\vec{L}_i$ está ao longo desse eixo. Porém, cada variação de momento angular $d\vec{L}$ é perpendicular ao eixo, porque o torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{p}$ é perpendicular ao eixo (Figura 10.34b). Isso faz com que a *direção* do eixo varie, mas não o seu módulo. As variações de $d\vec{L}$ ocorrem sempre no plano xy horizontal, de modo que o vetor momento angular e o eixo do volante que com ele se move estão sempre em um plano horizontal. Em outras palavras, o eixo não cai — ele apenas sofre precessão.

Caso isso ainda lhe pareça difícil, pense em uma bola presa a um fio. Se a bola estiver inicialmente em repouso e você puxar o fio para você, a bola também se deslocará para você. Porém, se a bola estiver inicialmente se movendo e você puxar o fio perpendicularmente à direção do movimento da bola, ela se moverá em um círculo em torno de sua mão; ela não se aproximará de sua mão. No primeiro caso a bola possuía momento linear $\vec{p}$ zero; quando você aplica uma força $\vec{F}$ orientada para você durante um intervalo de

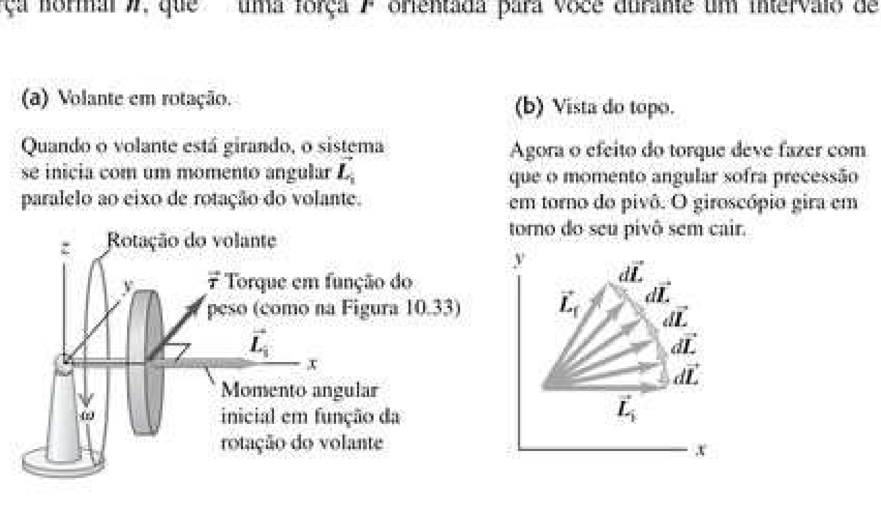


Figura 10.34 (a) O volante gira inicialmente com momento angular $\vec{L}_i$. As forças (não indicadas) são análogas às da Figura 10.33a. (b) Existindo um momento angular inicial, cada variação $d\vec{L} = \tau\Delta t$ é perpendicular a $\vec{L}$. Isso faz com que o módulo de $\vec{L}$ permaneça o mesmo, mas sua direção sofra uma variação contínua.

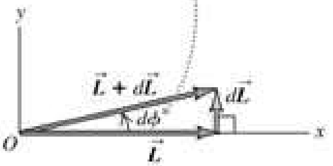


Figura 10.35 Visão detalhada de parte da Figura 10.34b.

tempo dt, a bola adquire um momento linear $d\vec{p} = \vec{F}\,dt$, que também está orientado para você. No entanto, quando a bola já possui um momento linear $\vec{p}$, uma variação do momento $d\vec{p}$ perpendicular a $\vec{p}$ produzirá uma variação da direção do movimento, e não uma variação do módulo da sua velocidade. Troque $\vec{p}$ por $\vec{L}$ e $\vec{F}$ por $\vec{\tau}$ neste raciocínio, e você verá que a precessão é simplesmente o análogo rotacional do movimento circular uniforme.

No instante indicado na Figura 10.34a, o giroscópio possui momento angular $\vec{L}$. Depois de um intervalo de tempo curto dt, o momento angular passa para $\vec{L} + d\vec{L}$; a variação infinitesimal do momento angular é $d\vec{L} = \vec{\tau}dt$, que é perpendicular a $\vec{L}$. Como indica o diagrama vetorial da Figura 10.35, isso significa que o eixo do volante do giroscópio girou de um ângulo pequeno $d\phi$ dado por $d\phi = |d\vec{L}|/|\vec{L}|$. A taxa com a qual o eixo se move, $d\phi/dt$, denomina-se **velocidade angular de precessão escalar**; representando essa grandeza por Ω, achamos

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{|d\vec{L}|/|\vec{L}|}{dt} = \frac{\tau_z}{L_z} = \frac{pr}{I\omega} \qquad (10.33)$$

Portanto, a velocidade angular de precessão é *inversamente* proporcional à velocidade angular da rotação em torno do eixo. Um giroscópio que gira rapidamente realiza uma precessão lenta; caso o atrito nos mancais faça diminuir a velocidade angular do volante, a velocidade angular de precessão *aumenta*! A velocidade angular de precessão da Terra é muito lenta (1 rev/26000 anos) porque sua velocidade angular em torno do eixo, ou velocidade angular de spin L_z, é muito grande e o torque τ_z, devido às influências gravitacionais do Sol e da Lua, é relativamente pequeno.

À medida que o giroscópio realiza uma precessão, seu centro de massa se move em um círculo de raio r sobre um plano horizontal. Seu componente vertical da aceleração é zero, de modo que a força normal de baixo para cima $\vec{n}$ exercida pelo pivô deve ter módulo precisamente igual ao peso. O movimento circular do centro de massa com velocidade angular Ω necessita de uma força $\vec{F}$ orientada para o interior do círculo, com módulo $F = M\Omega^2 r$. Essa força também deve ser fornecida pelo pivô.

Uma hipótese básica que fizemos em nossa análise do giroscópio foi que o vetor momento angular $\vec{L}$ está associado somente com o momento angular de spin do volante e é puramente horizontal. Contudo, existirá também um componente vertical do momento angular associado com o movimento de precessão do giroscópio. Ignorando isso, estamos tacitamente supondo que a precessão é *lenta*; isto é, que a velocidade angular de precessão Ω é muito menor do que a velocidade angular de spin ω. Como a Equação (10.33) mostra, um valor elevado de ω automaticamente fornece um valor pequeno de Ω, de modo que essa aproximação é razoável. Quando a precessão não é lenta, efeitos adicionais mostram que surge um movimento ondulado de cima para baixo, denominado *nutação* do eixo do volante, que se superpõe com o movimento de precessão. Você pode ver o movimento de nutação ocorrendo em um giroscópio à medida que sua velocidade angular de spin diminui, de modo que Ω aumenta, e o componente vertical de $\vec{L}$ não pode mais ser desprezado.

Exemplo 10.15

UM GIROSCÓPIO EM PRECESSÃO A Figura 10.36a mostra a vista de topo de um giroscópio cilíndrico que recebeu uma velocidade angular de spin de um motor elétrico. O pivô está no ponto O, e a massa do eixo é desprezível. a) Visto de cima para baixo, a precessão ocorre no sentido horário ou anti-horário? b) Se o giroscópio leva 4,0 s para uma revolução de precessão, qual deve ser a velocidade angular de spin do volante?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: esta situação é similar à do volante anterior, mostrado na Figura 10.34.

PREPARAR: determinaremos a direção da precessão usando a regra da mão direita como na Figura 10.34, que mostra o mesmo tipo de giroscópio da Figura 10.36. Usaremos a relação entre velocidade angular de precessão escalar Ω e a velocidade angular de spin escalar ω, a Equação (10.33), para achar o valor de ω.

EXECUTAR: a) A regra da mão direita mostra que $\vec{\omega}$ e $\vec{L}$ são orientados da direita para a esquerda (Figura 10.36b). O peso $\vec{p}$ aponta para o interior da página nesta vista de topo e atua no centro de massa (designado por um $\times$); o torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{p}$ está orientado para o topo da página; e $d\vec{L}/dt$ também está orientado para o topo da página. A soma de um pequeno vetor $d\vec{L}$ ao $\vec{L}$ inicial faz a direção de $\vec{L}$ mudar conforme mostrado, de modo que a precessão vista de cima para baixo ocorre no sentido horário do relógio.

b) Tome cuidado para não confundir ω e Ω! Foi fornecido o valor $\Omega = (1\text{ rev})/(4{,}0\text{ s}) = (2\pi\text{ rad})/(4{,}0\text{ s}) = 1{,}57\text{ rad/s}$. O peso é mg, e o momento de inércia em torno do eixo de simetria central de um cilindro maciço de raio R é dado por $I = \frac{1}{2}mR^2$. Explicitando ω da Equação (10.33), encontramos

$$\omega = \frac{pr}{I\Omega} = \frac{mgr}{(mR^2/2)\Omega} = \frac{2gr}{R^2\Omega}$$

$$= \frac{2(9{,}8\text{ m/s}^2)(2{,}0 \times 10^{-2}\text{ m})}{(3{,}0 \times 10^{-2}\text{ m})^2(1{,}57\text{ rad/s})} = 280\text{ rad/s} = 2600\text{ rev/min}$$

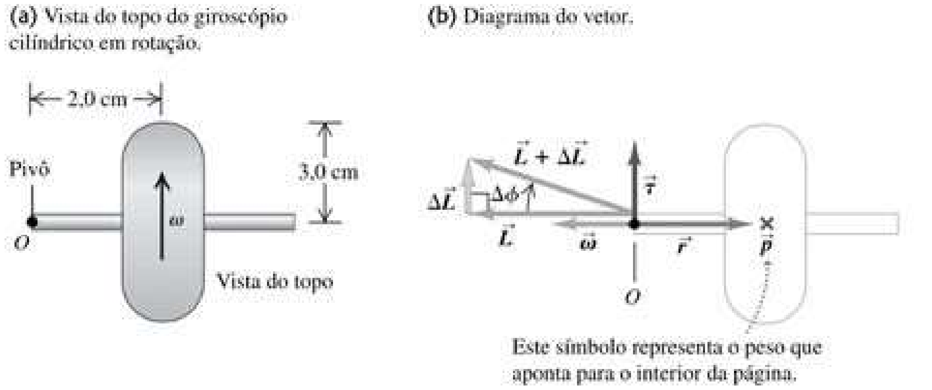


Figura 10.36 Qual é o sentido e qual é a velocidade escalar do movimento de precessão deste giroscópio?

AVALIAR: a velocidade angular de precessão Ω é muito menor do que a velocidade angular de spin ω, de modo que este é um exemplo de precessão lenta.

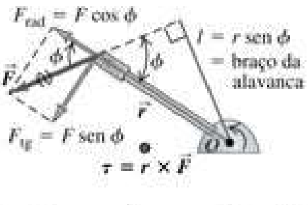
Teste sua compreensão da Seção 10.7 Suponha que a massa do volante na Figura 10.34 fosse duplicada, enquanto todas as demais dimensões e a velocidade angular do spin permanecessem as mesmas. Qual efeito essa variação surtiria na velocidade angular de precessão Ω? i) Ω aumentaria por um fator de 4; ii) Ω dobraria; iii) Ω não seria afetada; iv) Ω teria a metade do valor; v) Ω teria um quarto do valor. ❚

Resumo

Torque: quando uma força $\vec{F}$ atua sobre um corpo, o torque $\vec{\tau}$ dessa força em relação a um ponto O possui um módulo dado pelo produto do módulo de força F e o braço da alavanca l. De acordo com uma definição generalizada, o vetor torque $\vec{\tau}$ é igual ao produto vetorial de $\vec{r}$ (o vetor posição do ponto em que a força atua) por $\vec{F}$ (Exemplo 10.1).

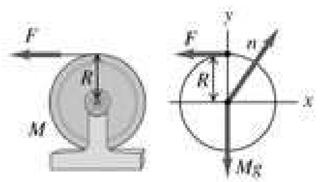
$$\tau = Fl \qquad (10.2)$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (10.3)$$



Dinâmica da rotação: o análogo rotacional da segunda lei de Newton diz que o torque resultante que atua sobre um corpo é igual ao produto do momento de inércia do corpo pela sua aceleração angular (exemplos 10.2 e 10.3).

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \qquad (10.7)$$



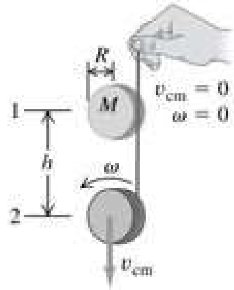
Movimento combinado de translação e rotação: quando um corpo rígido possui simultaneamente movimento de rotação e movimento de translação, a energia cinética pode ser expressa como a soma da energia cinética da translação do centro de massa e da energia cinética da rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa. Em termos da dinâmica, a segunda lei de Newton descreve o movimento do centro de massa, e o equivalente rotacional da segunda lei de Newton descreve a rotação em torno do centro de massa. No caso do rolamento sem deslizamento, há uma relação especial entre o movimento do centro de massa e o movimento de rotação (exemplos 10.4 – 10.7).

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \qquad (10.8)$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \qquad (10.12)$$

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha_z \qquad (10.13)$$

$$v_{cm} = R\omega \qquad (10.11)$$



Trabalho realizado por um torque: um torque que atua sobre um corpo rígido enquanto o corpo gira realiza trabalho sobre esse corpo. O trabalho pode ser expresso como uma integral do torque. Segundo o teorema do trabalho-energia, o trabalho rotacional total realizado sobre um corpo rígido é igual à variação da energia cinética na rotação. A potência, ou a taxa em que o torque realiza trabalho, é o produto do torque pela velocidade angular (exemplos 10.8 e 10.9).

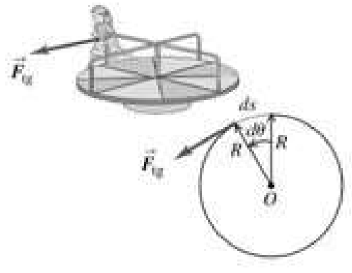
$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z \, d\theta \qquad (10.20)$$

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z\Delta\theta \qquad (10.21)$$

(somente torque constante)

$$W_{tot} = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \qquad (10.22)$$

$$P = \tau_z\omega_z \qquad (10.23)$$



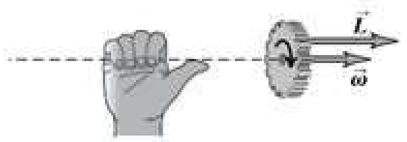
Momento angular: o momento angular de uma partícula em relação a um ponto O é o produto vetorial do vetor posição $\vec{r}$ da partícula em relação a O pelo seu momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$. Quando um corpo simétrico gira em torno de um eixo de simetria fixo, seu momento angular é dado pelo produto do seu momento de inércia pelo seu vetor velocidade angular $\vec{\omega}$. Quando um corpo não é simétrico ou o eixo de rotação (z) não é um eixo de simetria, a componente do momento angular em torno do eixo de rotação é igual a $I\omega_z$. (Exemplo 10.10.)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad (10.24)$$

(partícula)

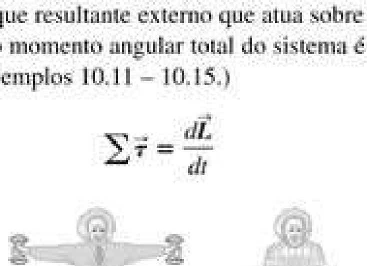
$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (10.28)$$

(corpo rígido girando em torno do eixo de simetria)



Relação entre a dinâmica do movimento de rotação e o momento angular: o torque resultante externo que atua sobre um sistema é igual à taxa de variação do seu momento angular. Quando o torque resultante externo que atua sobre um sistema é igual a zero, o momento angular total do sistema é constante (se conserva). (exemplos 10.11 – 10.15.)

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (10.29)$$



Principais termos

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Quando o pára-quedista está no ar, nenhum torque resultante atua sobre o seu centro de massa. Portanto, o momento angular do corpo dele (o produto do momento de inércia I pela velocidade escalar angular ω) em torno do centro de massa permanece constante. Esticando braços e pernas, ele aumenta I e portanto ω diminui; se ele recolhe braços e pernas, I diminui e ω aumenta.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

10.1 Resposta: (ii) A força P atua ao longo de uma linha vertical, portanto o braço da alavanca é a distância horizontal de A até a linha de ação. Esse é o componente horizontal da distância L, que é $L \cos\theta$. Logo, o módulo do torque é o produto do módulo da força P pelo braço da alavanca $L \cos\theta$, ou $\tau = PL\cos\theta$.

10.2 Respostas: (iii), (ii), (i) Para o objeto suspenso de massa m_2 acelerar de cima para baixo, a força resultante que atua sobre ele deve estar apontada de cima para baixo. Logo, o módulo m_2g da força do peso de cima para baixo deve ser maior do que o módulo T_2 da força de tensão de baixo para cima. Para que a polia tenha uma aceleração angular no sentido horário, o torque resultante que atua sobre a polia deve estar nesse sentido também. A tensão T_2 tende a girar a polia no sentido horário, enquanto a tensão T_1 tende a girar a polia no sentido contrário. Ambas as forças de tensão possuem o mesmo braço da alavanca R, portanto existe um torque no sentido horário T_2R e um toque no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio T_1R. Para que o torque resultante esteja no sentido horário, T_2 deve ser maior do que T_1. Logo, $m_2g > T_2 > T_1$.

10.3 Respostas: (a) (ii), (b) (i) Se você refizer o cálculo do Exemplo 10.6 com um cilindro oco (momento de inércia $I_{cm} = MR^2$) em vez de um cilindro maciço (momento de inércia $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$), você obterá $a_{cmy} = \frac{1}{2}g$ e $T = \frac{1}{2}Mg$ (em vez de $a_{cmy} = \frac{2}{3}g$ e $T = \frac{1}{3}Mg$ para um cilindro maciço). Logo, a aceleração é menor, mas a tensão é maior. Você poderá chegar à mesma conclusão sem fazer o cálculo. O maior momento de inércia significa que o cilindro oco girará de forma mais lenta e, portanto, rolará de cima para baixo mais devagar. Para retardar o movimento de cima para baixo, uma maior força de tensão de baixo para cima é necessária, de modo a se opor à força de gravidade de cima para baixo.

10.4 Resposta: (iii) Você aplica o mesmo torque pelo mesmo deslocamento angular para ambos os cilindros. Logo, pela Equação (10.21), você realiza o mesmo trabalho para ambos os cilindros e fornece a mesma energia cinética para ambos. (Aquele com o momento de inércia menor acaba com uma velocidade escalar angular maior, mas não é essa a questão. Compare com o Exemplo Conceitual 6.5, na Seção 6.2).

10.5 Respostas: (a) não, (b) sim Enquanto a bola segue a trajetória circular, o módulo de $\vec{p} = m\vec{v}$ permanece o mesmo (a velocidade escalar é constante), mas sua direção muda, portanto, o vetor do momento linear não é constante. Mas $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é constante: a bola mantém um módulo constante (a velocidade escalar e a distância perpendicular da sua mão em relação à bola são ambas constantes) e uma direção constante (ao longo do eixo de rotação, perpendicular ao plano do movimento da bola). O momento linear varia porque há uma *força* resultante $\vec{F}$ que atua sobre a bola (em direção ao centro do círculo). O momento angular permanece constante porque não há *torque* resultante; o vetor $\vec{r}$ aponta da sua mão para a bola, e a força $\vec{F}$ que atua sobre a bola aponta para a sua mão, portanto o produto vetorial $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ é igual a zero.

10.6 Resposta: (i) Na ausência de quaisquer torques externos, o momento angular da Terra $L_z = I\omega_z$ permanceria constante. O gelo derretido se deslocaria dos pólos para o Equador – ou seja, distante do eixo de rotação de nosso planeta – e o momento de inércia I da Terra aumentaria levemente. Portanto, a velocidade angular ω_z diminuiria suavemente e o dia seria um pouco mais longo.

10.7 Resposta: (i) Duplicar a massa do volante significa duplicar tanto o seu momento de inércia I quanto o seu peso p, portanto a razão I/p não varia. A Equação (10.33) mostra que a velocidade angular de precessão escalar depende dessa razão, de modo que não há *nenhum* efeito sobre o valor de Ω.

Questões para discussão

Q10.1 Ao apertar os parafusos da cabeça do motor de um automóvel, a grandeza critica é o *torque* aplicado aos parafusos. Por que o torque é mais importante que a *força* efetiva aplicada sobre o punho da chave de boca?

Q10.2 Pode uma única força aplicada a um corpo alterar simultaneamente seu movimento de translação e de rotação? Explique.

Q10.3 Suponha que você possa escolher qualquer tipo de roda para o projeto de um carro de competição *soapbox* (um veículo de quatro rodas sem motor que desce uma encosta a partir do repouso). Seguindo as regras do limite máximo para o peso do carro somado ao peso do competidor, você usaria rodas grandes e pesadas ou rodas pequenas e leves? Você usaria rodas maciças ou rodas ocas com a massa concentrada em um aro na periferia da roda? Explique.

Q10.4 Um veículo com tração nas quatro rodas está acelerando para a frente a partir do repouso. Indique em qual direção as rodas do veículo giram e como isso provoca uma força de atrito em função do pavimento que acelera o veículo para frente.

Q10.5 Ciclistas experientes afirmam que se for para reduzir o peso de uma bicicleta, é mais eficaz fazê-lo nas rodas em vez de em sua estrutura. Por que a redução no peso das rodas facilita mais a ação do ciclista do que reduzir o mesmo valor na estrutura?

Q10.6 Quanto mais fortemente você pisar no freio enquanto o carro se desloca para a frente, mais para baixo a parte dianteira do carro se move (e a parte traseira se move mais para cima). Por quê? O que ocorre durante a aceleração? Por que os carros de corrida do tipo *dragster* não usam apenas direção nas rodas dianteiras?

Q10.7 Quando uma acrobata anda sobre uma corda esticada, ela abre e estende os braços lateralmente. Ela faz isso para que seja mais fácil se equilibrar, caso tombe para um lado ou para o outro. Explique como isso funciona. (*Sugestão:* raciocine usando a Equação (10.7).)

Q10.8 Quando um motor elétrico é acionado, ele leva mais tempo para atingir sua velocidade final quando existe um esmeril ligado ao eixo do motor. Por quê?

Q10.9 Sem quebrar a casca do ovo, um cozinheiro experiente pode distinguir um ovo natural de outro que já tenha sido cozido na água fazendo os dois rolarem sobre um plano inclinado (se você fizer a experiência, tome cuidado para segurar os ovos na base do plano). Como isso é possível? O que ele espera concluir?

Q10.10 O trabalho realizado por uma força é o produto da força pela distância. O torque em função de uma força é o produto da força pela distância. Isso significa que o torque e o trabalho são equivalentes? Explique.

Q10.11 Um bom cliente traz uma bola de estimação à sua empresa de engenharia, querendo saber se ela é maciça ou oca. Ele tentou dar leves batidas nela, mas isso forneceu pouca informação. Prepare uma experiência simples e barata que você possa realizar de forma rápida, sem causar danos à preciosa bola, para descobrir se ela é maciça ou oca.

Q10.12 Você criou duas versões do mesmo objeto, a partir do mesmo material com densidade uniforme. Todas as dimensões de uma delas são exatamente o dobro da outra. Se o mesmo torque atua sobre ambas as versões, e considerando a aceleração angular da menor como α, qual será a aceleração angular da versão maior em relação a α?

Q10.13 Duas massas idênticas presas a polias com atrito desprezível por dois fios bem leves enrolados na borda das polias são libertadas do repouso. Ambas as polias possuem a mesma massa e o mesmo diâmetro, mas uma é maciça e a outra é um aro. À medida que as massas caem, em qual dos casos a tensão no fio é maior, ou ela é a mesma? Justifique sua resposta.

Q10.14 A força da gravidade atua sobre o bastão na Figura 10.11, produzindo torques que provocam variação na velocidade angular de um corpo. Por que, então, a velocidade angular do bastão na figura é constante?

Q10.15 Uma certa bola maciça e uniforme atinge uma altura máxima h_0 ao rolar de baixo para cima de uma colina, sem deslizar. Qual altura máxima (em termos de h_0) ela atingirá, caso você a) dobre o seu diâmetro, b) dobre a sua massa, c) dobre tanto o diâmetro quanto a massa, d) dobre sua velocidade escalar angular na base da colina?

Q10.16 Uma roda está rolando sem deslizamento sobre uma superfície horizontal. Em um sistema de referência inercial no qual a superfície está em repouso, existe algum ponto sobre a roda que possua uma velocidade puramente vertical? Existe algum ponto sobre a roda que possua velocidade com um componente horizontal com sentido oposto ao da velocidade do centro de massa? Explique. Caso a roda deslize durante o giro, suas respostas se modificam? Explique.

Q10.17 Parte da energia cinética da rotação de um automóvel em movimento está em suas rodas. Quando você aplica fortemente os freios em uma rua com gelo, as rodas ficam 'bloqueadas', e o carro começa a deslizar. O que ocorre com a energia cinética da rotação?

Q10.18 Um aro, um cilindro maciço e uniforme, uma casca esférica e uma esfera maciça e uniforme são libertados do repouso no topo de um plano inclinado. Qual é a ordem de chegada desses itens na parte inferior da inclinação? Importa se as massas e os raios dos objetos são os mesmos? Explique.

Q10.19 Uma bola rola sobre uma superfície horizontal a uma velocidade escalar v, sem deslizar, quando encontra uma colina que se ergue a um ângulo constante acima da horizontal. Em qual caso ela subirá a colina: se a colina possuir atrito suficiente para impedir o deslizamento ou se a colina for perfeitamente lisa? Justifique suas respostas em ambos os casos em termos da conservação da energia e em termos da segunda lei de Newton.

Q10.20 Você está em pé no centro de um carrossel horizontal que gira em um parque de diversões. O carrossel gira sobre apoios sem atrito, e sua rotação é livre (ou seja, não existe nenhum motor fazendo o carrossel girar). Quando você caminha até a periferia do carrossel, diga o que ocorre com o momento angular total do sistema constituído por você junto com o carrossel. O que ocorre com a velocidade angular do carrossel? Explique suas respostas.

Q10.21 **Aquecimento global.** À medida que o clima na Terra continua a aquecer, o gelo nas calotas polares continua derretendo e se juntando aos oceanos. Qual efeito isso terá sobre a duração do dia? (*Sugestão:* consulte um mapa para ver onde ficam os oceanos.)

Q10.22 Uma partícula se move em linha reta com velocidade constante, e a distância entre a reta e a origem é igual a l. Em relação à origem, o momento angular da partícula é igual a zero ou diferente de zero? À medida que a partícula se desloca ao longo da reta, seu momento angular em relação à origem varia?

Q10.23 No Exemplo 10.11 (Seção 10.6) a velocidade angular ω varia e isso deve significar que existe uma aceleração angular diferente de zero. Porém, não existe nenhum torque em torno do eixo de rotação quando as forças que o professor aplica sobre os pesos estão orientadas radialmente para dentro. Então, pela Equação (10.7), α_z deve ser igual a zero. Explique o que há de errado nesse raciocínio que leva a uma aparente contradição.

Q10.24 No exemplo 10.11 (Seção 10.6), a energia cinética do professor junto com os halteres aumenta. Contudo, como não existem torques externos, não existe nenhum trabalho capaz de alterar a energia cinética da rotação. Então, pela Equação (10.22), a energia cinética deve permanecer constante! Explique o que há de errado nesse raciocínio que leva a uma aparente contradição. De *onde* vem a energia cinética extra?

Q10.25 Conforme discutimos na Seção 10.6, o momento angular de uma acrobata no circo se conserva à medida que ela se move pelo ar. Seu momento *linear* se conserva? Explique sua resposta.

Q10.26 Quando você segura por um intervalo mínimo de tempo um ovo fresco que está girando e a seguir o liberta, o ovo começa a girar novamente. Quando você repete a experiência com um ovo cozido, ele permanece parado. Experimente fazer isso. Explique.

Q10.27 Um helicóptero possui um rotor grande principal que gira em um plano horizontal e ocasiona a força de sustentação. Existe também um rotor pequeno na traseira do helicóptero que gira em um plano vertical. Qual é a finalidade do rotor traseiro? (*Sugestão:* caso não existisse o rotor traseiro, o que ocorreria quando o piloto fizesse variar a velocidade angular do rotor principal?) Alguns helicópteros não possuem rotor traseiro, mas possuem dois rotores principais grandes que giram em um plano horizontal. Por que é importante que esses rotores girem em sentidos contrários?

Q10.28 Em um projeto comum de giroscópio, o volante e o eixo do volante permanecem no interior de uma estrutura leve e esférica, com o volante no centro da estrutura. O giroscópio é a seguir equilibrado no topo de um pivô, de modo que o volante fique diretamente acima do pivô. O giroscópio realiza precessão quando é libertado enquanto o volante está girando? Explique.

Q10.29 Um giroscópio leva 3,8 s para fazer uma precessão de 1,0 revolução em torno de um eixo vertical. Dois minutos depois ele leva 1,9 s para fazer uma precessão de 1,0 revolução. Ninguém tocou no giroscópio. Explique o que ocorreu.

Q10.30 Um giroscópio realiza um movimento de precessão como indicado na Figura 10.32. O que ocorrerá se você colocar suavemente algum peso em um ponto o mais afastado possível do pivô, ou seja, na extremidade do eixo do volante?

Q10.31 Uma bala sai de um rifle girando sobre o seu eixo. Explique como isso evita que a bala vire e que ela mantenha a extremidade aerodinâmica apontada para a frente?

Q10.32 Uma certa plataforma giratória com diâmetro D_0 possui um momento angular L_0. Se você quisesse reprojetá-la de modo a dobrar o momento angular, porém mantendo a mesma massa e a mesma velocidade angular anterior, qual deveria ser o seu diâmetro em termos de D_0?

Exercícios

Seção 10.1 Torque

10.1 Calcule o torque (módulo, direção e sentido) em torno de um ponto O de uma força $\vec{F}$ em cada uma das situações esquematizadas na Figura 10.37. Em cada caso, a força $\vec{F}$ e a barra estão no plano da página, o comprimento da barra é igual a 4,0 m e a força possui módulo F = 10,0 N.

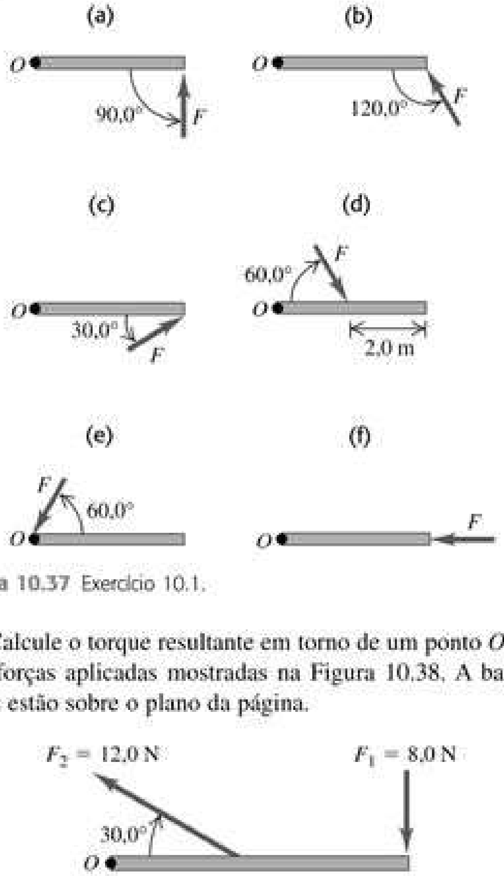


Figura 10.37 Exercício 10.1.

10.2 Calcule o torque resultante em torno de um ponto O para as duas forças aplicadas mostradas na Figura 10.38. A barra e as forças estão sobre o plano da página.

Figura 10.38 Exercício 10.2.

10.3 Uma placa metálica quadrada de lado igual a 0,180 m possui um eixo pivotado perpendicularmente ao plano da página passando em seu centro O (Figura 10.39). Calcule o torque resultante em torno desse eixo produzido pelas três forças mostradas na figura, sabendo que os módulos das forças são $F_1 = 18{,}0$ N, $F_2 = 26{,}0$ N e $F_3 = 14{,}0$ N. O plano da placa e de todas essas forças é o plano da página.

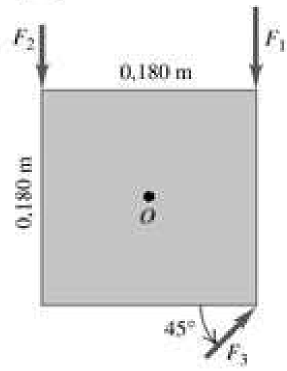


Figura 10.39 Exercício 10.3.

10.4 Três forças são aplicadas a uma roda com raio igual a 0,350 m, conforme mostra a Figura 10.40. Uma força é perpendicular à borda, outra é tangente a ela e a outra forma um ângulo de 40º com o raio. Qual é o torque resultante da roda produzido por essas três forças em relação a um eixo perpendicular à roda e que passa através do seu centro?

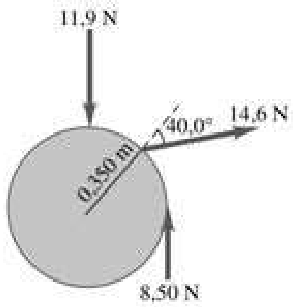


Figura 10.40 Exercício 10.4.

10.5 Uma força atuando sobre uma peça de uma máquina é dada pela expressão $\vec{F} = (-5{,}0\ \text{N})\hat{\imath} + (4{,}0\ \text{N})\hat{\jmath}$. O vetor da origem ao ponto onde a força é aplicada é dado por $\vec{r} = (-0{,}450\ \text{m})\hat{\imath} + (0{,}150\ \text{m})\hat{\jmath}$. a) Faça um diagrama mostrando $\vec{r}$, $\vec{F}$ e a origem. b) Use a regra da mão direita para determinar a direção e o sentido do torque. c) Determine algebricamente o vetor torque produzido por essa força. Verifique se a direção e o sentido do torque são iguais aos obtidos no item (b).

10.6 Um operário está usando uma chave de boca para afrouxar uma porca. A ferramenta tem 25,0 cm de comprimento, e ele exerce uma força de 17,0 N sobre a extremidade do cabo formando um ângulo de 37º com o cabo (Figura 10.41). a) Qual torque o operário exerce sobre o centro da porca? b) Qual é o torque máximo que ele pode exercer com essa força, e como a força deve ser orientada?

Figura 10.41 Exercício 10.6.

Seção 10.2 Torque e aceleração angular de um corpo rígido

10.7 O volante de certa máquina possui momento de inércia igual a 2,50 kg · m² em torno do seu eixo de rotação. Qual é o torque constante necessário para que, partindo do repouso, sua velocidade angular atinja o valor de 400 rev/min em 8,0 s?

10.8 Uma casca esférica uniforme de 8,40 kg e 50,0 cm de diâmetro possui quatro pequenas massas de 2,0 kg presas à superfície externa e igualmente espaçadas entre si. Esse sistema está girando em torno de um eixo que passa pelo centro da esfera e por duas das pequenas massas (Figura 10.42). Qual torque de atrito é necessário para reduzir a velocidade escalar angular de 75,0 rpm para 50 rpm em 30,0 s?

Figura 10.42 Exercício 10.8.

10.9 A peça de uma máquina tem o formato de uma esfera maciça e uniforme com massa de 225 g e diâmetro de 3,0 cm. Ela está girando em torno de um eixo com atrito desprezível que passa pelo seu centro, mas em um ponto no seu equador ela está roçando contra uma parte metálica, resultando em uma força de atrito de 0,0200 N nesse ponto. a) Ache a aceleração angular. a) Quanto tempo levará para a velocidade escalar rotacional ser reduzida em 22,5 rad/s?

10.10 Uma corda é enrolada em torno da periferia de uma roda maciça e uniforme de raio igual a 0,250 m e massa de 9,20 kg. A corda é puxada por uma força constante horizontal de 40,0 N para a direita e tangencialmente à roda. A roda está montada sobre mancais com atrito desprezível sobre um eixo horizontal que passa pelo seu centro. a) Calcule a aceleração angular da roda e a aceleração da parte da corda que já foi puxada para fora da roda. b) Ache o módulo, a direção e o sentido da força que o eixo exerce sobre a roda. c) Qual das respostas nos itens (a) e (b) sofreria variação, caso a força de puxar fosse de baixo para cima em vez de horizontal?

10.11 Um cilindro maciço e uniforme com massa de 8,25 kg e diâmetro de 15,0 cm está girando a 220 rpm sobre um eixo delgado e de atrito desprezível, que passa ao longo do eixo de cilindro. Você projeta um freio de atrito simples, que pára o cilindro pressionando o freio de encontro à periferia externa com uma força normal. O coeficiente de atrito cinético entre o freio e a periferia é 0,333. Qual deve ser a força normal aplicada para colocar o cilindro em repouso após ele ter girado por 5,25 revoluções?

10.12 Uma pedra é suspensa pela extremidade livre de um cabo que está enrolado na periferia externa de uma polia, de modo semelhante ao indicado na Figura 10.10. A polia é um disco uniforme com massa de 10,0 kg e raio de 50,0 cm, que gira sobre mancais com atrito desprezível. Você mede que a pedra se desloca 12,6 m nos primeiros 3,0 s a partir do repouso. Ache a) a massa da pedra e b) a tensão no cabo.

10.13 Um esmeril em forma de disco sólido com diâmetro de 0,520 m e massa de 50,0 kg gira a 850 rev/min. Você pressiona um machado contra sua periferia com uma força normal de 160 N (Figura 10.43), e o esmeril atinge o repouso em 7,50 s. Ache o coeficiente de atrito entre o machado e o esmeril. Despreze o atrito nos mancais.

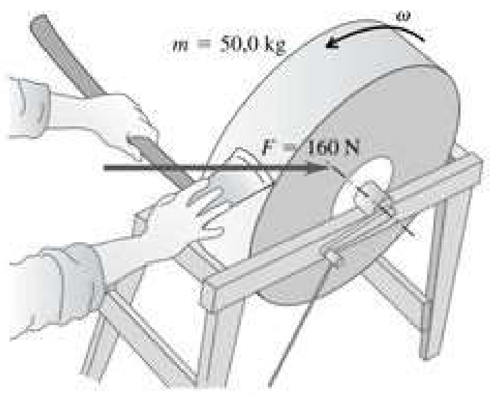


Figura 10.43 Exercício 10.13 e Problema 10.53.

10.14 Um balde com água de 15,0 kg é suspenso por uma corda enrolada em torno de um sarilho, constituído por um cilindro sólido com diâmetro de 0,300 m e massa igual a 12,0 kg. O cilindro é pivotado sobre um eixo sem atrito passando em seu centro. O balde é libertado a partir do repouso no topo de um poço e cai 10,0 m até atingir a água. Despreze o peso da corda. a) Qual é a tensão na corda enquanto o balde está caindo? b) Com que velocidade o balde atinge a água? c) Qual é o tempo de queda? d) Enquanto o balde está caindo, qual é a força exercida pelo eixo sobre o cilindro?

10.15 Um livro de 2,0 kg está em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Uma corda amarrada ao livro passa sobre uma polia com diâmetro igual a 0,150 m e sua outra extremidade está presa a outro livro suspenso com massa de 3,0 kg. O sistema é solto a partir do repouso, e os livros se deslocam 1,20 m em 0,800 s. a) Qual é a tensão em cada parte da corda? b) Qual é o momento de inércia da polia em torno do seu eixo de rotação?

10.16 Uma caixa de 12,0 kg em repouso sobre uma superfície horizontal e livre de atrito está atada a um peso de 5,0 kg por uma cabo delgado e leve que passa sobre uma polia com atrito desprezível (Figura 10.44). A polia possui a forma de um disco maciço e uniforme com massa de 2,0 kg e diâmetro de 0,500 m. Após o sistema ser libertado, ache a) a tensão no cabo sobre ambos os lados da polia, b) a aceleração da caixa e c) os componentes horizontal e vertical da força que o eixo exerce sobre a polia.

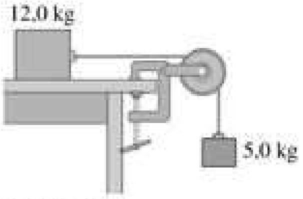


Figura 10.44 Exercício 10.16.

10.17 Um poste delgado e uniforme de 15,0 kg e 1,75 m de comprimento é mantido na posição vertical por um cabo e está preso a uma massa de 5,0 kg e um pivô na sua extremidade inferior (Figura 10.45). O fio preso à massa de 5,0 kg passa sobre uma polia de massa e atrito desprezíveis e que puxa perpendicularmente ao poste. De repente, o cabo se rompe. a) Ache a aceleração angular do poste em torno do pivô assim que o cabo se rompe. b) A aceleração angular no item (a) permanece constante enquanto o poste cai (antes que atinja a polia)? Por quê? c) Qual é a aceleração da massa de 5,0 kg no instante em que o cabo se rompe? Essa aceleração permanece constante? Por quê?

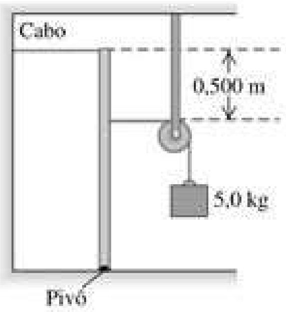


Figura 10.45 Exercício 10.17.

10.18 Uma barra horizontal fina de comprimento l e massa M é articulada em torno de um eixo vertical passando em sua extremidade. Uma força com módulo constante F é aplicada à outra extremidade, fazendo a barra girar em um plano horizontal. A força é mantida perpendicularmente à barra e ao eixo da rotação. Calcule o módulo da aceleração angular da barra.

Seção 10.3 Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo móvel

10.19 Um aro de 2,20 kg e 1,20 m de diâmetro está rolando da esquerda para a direita sem deslizar, sobre um piso horizontal a constantes 3,0 rad/s. a) Com que velocidade o seu centro está se movendo? b) Qual é a energia cinética total do aro? c) Ache o vetor velocidade de cada um dos seguintes pontos, do ponto de vista de uma pessoa em repouso sobre o chão: i) o ponto mais alto do aro; ii) o ponto mais baixo do aro; ii) um ponto do lado direito do aro, a meio caminho entre o topo e a base. d) Ache o vetor velocidade para cada um dos pontos no item (c), só que do ponto de vista de alguém que se move com a mesma velocidade do aro.

10.20 Um fio é enrolado diversas vezes em torno da periferia de um pequeno aro de raio 8,0 cm e massa 0,180 kg. A extremidade livre do fio é mantida fixa e o aro é libertado a partir do repouso (Figura 10.46). Após o aro cair por 75,0 cm, calcule a) a velocidade escalar angular do aro em rotação e b) a velocidade escalar no seu centro.

Figura 10.46 Exercício 10.20 e Problema 10.72.

10.21 Qual fração da energia cinética total é rotacional para os seguintes objetos que rolam sem deslizar sobre uma superfície horizontal? a) Um cilindro maciço e uniforme; b) uma esfera uniforme; c) uma esfera oca de paredes finas; d) um cilindro oco com raio externo R e raio interno $R/2$.

10.22 Uma casca esférica de massa igual a 2,0 kg rola sem deslizar ao longo de um plano inclinado de 38,0°. a) Ache a aceleração, a força de atrito e o coeficiente de atrito mínimo necessário para impedir o deslizamento. b) Como suas respostas do item (a) seriam alteradas caso a massa fosse dobrada para 4,0 kg?

10.23 Uma bola maciça é liberada do repouso e desliza para baixo pela encosta de uma colina com inclinação de 65,0° com o plano horizontal. a) Qual valor mínimo deve o coeficiente de atrito estático entre as superfícies da colina e da bola ter para que nenhum deslizamento ocorra? b) O coeficiente de atrito calculado no item

(a) é suficiente para impedir que uma bola oca (como uma bola de futebol) deslize? Justifique sua resposta. c) No item (a), por que usamos o coeficiente de atrito estático e não o coeficiente de atrito cinético?

10.24 Uma bola de gude homogênea rola para baixo a partir do topo da lateral esquerda de uma tigela simétrica, partindo do repouso. O topo de cada lateral está a uma distância h do fundo da tigela. A metade esquerda da tigela é áspera o suficiente para fazer a bola de gude rolar sem deslizar, mas a metade direita não possui nenhum atrito porque está coberta de óleo. a) A que altura da lateral lisa a bola de gude subirá, se medida verticalmente a partir do fundo? b) A que altura a bola de gude iria se ambos os lados fossem tão ásperos quanto o lado esquerdo? c) A que você atribui o fato de que a bola de gude sobe *mais* com o atrito do lado direito do que sem atrito?

10.25 Uma roda de 392 N sai do eixo de um caminhão em movimento e rola sem deslizar ao longo de uma estrada inclinada. Na base de um morro ela está girando a 25,0 rad/s. O raio da roda é igual a 0,600 m e seu momento de inércia em torno do eixo de rotação é igual a $0{,}800MR^2$. O atrito realiza trabalho sobre a roda à medida que ela sobe o morro até parar, a uma altura h acima da base do morro; esse trabalho possui módulo igual a 3500 J. Calcule h.

10.26 **Uma bola subindo uma inclinação.** Uma bola de boliche rola sem deslizar para cima de uma rampa inclinada de um ângulo β com a horizontal. (Veja o Exemplo 10.7 na Seção 10.3.) Considere a bola uma esfera maciça homogênea e ignore os seus orifícios. a) Faça um diagrama do corpo livre para a bola. Explique por que a força de atrito deve possuir sentido *para cima*. b) Qual é a aceleração do centro de massa da bola? c) Qual deve ser o coeficiente de atrito estático mínimo para impedir o deslizamento?

Seção 10.4 Trabalho e potência no movimento de rotação

10.27 Um carrossel de um parque de diversões possui raio de 2,40 m e momento de inércia igual a 2100 kg · m² em torno de um eixo vertical passando em seu centro e gira com atrito desprezível. a) Uma criança aplica uma força de 18,0 N tangencialmente à periferia do carrossel durante 15,0 s. Se o carrossel está inicialmente em repouso, qual é sua velocidade angular depois deste instante de tempo de 15,0 s? b) Qual é o trabalho realizado pela criança sobre o carrossel? c) Qual é a potência média fornecida pela criança?

10.28 O motor fornece 175 hp para a hélice de um avião a uma rotação de 2400 rev/min. a) Qual é o torque fornecido pelo motor do avião? b) Qual é o trabalho realizado pelo motor em uma revolução da hélice?

10.29 A roda de um esmeril de 1,50 kg possui forma cilíndrica com raio igual a 0,100 m. a) Qual deve ser o torque constante capaz de levá-la do repouso a uma revolução angular de 1200 rev/min em 2,5 s? b) Que ângulo ela girou durante esse intervalo de tempo? c) Use a Equação (10.21) para calcular o trabalho realizado pelo torque. d) Qual é a energia cinética do esmeril quando ele está girando a 1200 rev/min? Compare sua resposta com o resultado do item (c).

10.30 Um motor elétrico consome 9,0 kJ de energia elétrica em 1,0 min. Se um terço dessa energia é consumida no aquecimento e em outras formas de energia interna do motor e o restante é a produção do motor, qual é o torque desenvolvido por esse motor, se ele gira a 2500 rpm?

10.31 As extremidades dos dentes de carboneto de uma serra circular estão situadas a uma distância de 8,6 cm do eixo de rotação. a) Quando a serra não está cortando nenhum objeto, sua velocidade angular é de 4800 rev/min. Por que sua potência é desprezível quando ela não está cortando nenhum objeto? b) Quando ela está cortando tábuas, sua velocidade angular se reduz para 2400 rev/min e a potência de saída é igual a 1.9 hp. Qual é a força tangencial que a madeira exerce sobre as extremidades dos dentes de carboneto?

10.32 A hélice propulsora de um avião possui comprimento de 2,08 m (de uma extremidade a outra) e sua massa é de 117 kg. Logo no início do funcionamento do motor, ele aplica um torque de 1950 N · m na hélice, que começa a se mover a partir do repouso. a) Qual é a aceleração angular da hélice? Considere a hélice como uma barra fina. (*Sugestão:* veja a Tabela 9.2.) b) Qual é a velocidade angular da hélice propulsora quando ela atinge 5,0 rev? c) Qual é o trabalho realizado pelo motor durante as 5,0 rev iniciais? d) Qual é a potência média fornecida pela máquina durante as 5,0 rev iniciais? e) Qual é a potência instantânea do motor no instante em que a hélice propulsora completa essas 5,0 rev?

10.33 a) Calcule o torque desenvolvido por um motor industrial com potência de 150 kW para uma velocidade angular de 4000 rev/min. b) Um tambor de massa desprezível, com diâmetro igual a 0,400 m, é ligado ao eixo do motor e a potência disponível do motor é usada para elevar um peso pendurado em uma corda enrolada em torno do tambor. Qual é o peso máximo que pode ser elevado com velocidade constante? c) Com que velocidade constante o peso sobe?

Seção 10.5 Momento angular

10.34 Uma mulher com massa de 50 kg está em pé sobre a periferia de um grande disco que gira com 0,50 rev/s em torno de um eixo que passa através do seu centro. O disco possui massa de 110 kg e raio igual a 4,0 m. Calcule o módulo do momento angular total do sistema mulher-disco. (Suponha que a mulher possa ser tratada como um ponto.)

10.35 Uma pedra de 2,0 kg possui uma velocidade horizontal com módulo de 12,0 m/s quando está no ponto P na Figura 10.47. a) Nesse instante, qual é o módulo, a direção e o sentido do seu momento angular em relação ao ponto O? b) Caso a única força que atue sobre a pedra seja seu peso, qual é a taxa de variação (módulo, direção e sentido) do momento angular nesse instante?

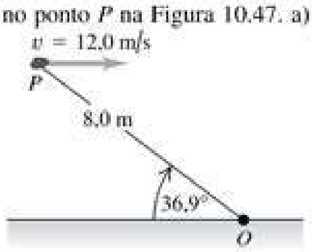


Figura 10.47 Exercício 10.35.

10.36 a) Calcule o módulo do momento angular da Terra descrevendo uma órbita em volta do Sol. É razoável modelá-la como uma partícula? a) Calcule o módulo do momento angular da Terra em função da sua rotação em torno de um eixo que passa pelos pólos norte e sul, modelando-a como uma esfera uniforme. Consulte o Apêndice E e os dados de astronomia no Apêndice F.

10.37 Ache o módulo do momento angular do ponteiro dos segundos de um relógio em torno do eixo que passa pelo centro de massa da face frontal do relógio. Esse ponteiro do relógio possui comprimento de 15,0 cm e massa de 6,0 g. Considere-o uma barra delgada girando com velocidade angular constante em torno de uma de suas extremidades.

10.38 Uma esfera oca com paredes finas de massa igual a 12,0 kg e diâmetro de 48,0 cm está girando em torno de um eixo que passa pelo seu centro. O ângulo (em radianos) em que ele gira em função do tempo (em segundos) é dado por $\theta(t) = At^2 + Bt^4$, onde A possui o valor numérico de 1,50 e B de 1,10. a) Quais são as unidades das constantes A e B? b) No instante de 3,0 s, ache i) o momento angular da esfera e ii) o torque resultante sobre a esfera.

Seção 10.6 Conservação do momento angular

10.39 Sob determinadas circunstâncias, uma estrela pode sofrer um colapso e se transformar em um objeto extremamente denso, constituído principalmente por nêutrons e chamado *estrela de nêutrons*. A densidade de uma estrela de nêutrons é aproximadamente 10^{14} vezes maior do que a da matéria comum. Suponha que a estrela seja uma esfera maciça e homogênea antes e depois do colapso. O raio inicial da estrela era de $7{,}0 \times 10^5$ km (comparável com o raio do Sol); seu raio final é igual a 16 km. Supondo que a estrela original completava um giro em 30 dias, ache a velocidade angular da estrela de nêutrons.

10.40 Um pequeno bloco apoiado sobre uma mesa horizontal sem atrito possui massa de 0,0250 kg. Ele está preso a uma corda sem massa que passa através de um buraco na superfície (Figura 10.48). No início, o bloco está girando a uma distância de 0,300 m do buraco com uma velocidade angular de 1,75 rad/s. A seguir a corda é puxada por baixo, fazendo com que o raio do círculo se encurte para 0,150 m. O bloco pode ser considerado uma partícula. a) O momento angular é conservado? b) Qual é a nova velocidade angular? c) Calcule a variação da energia cinética do bloco. d) Qual foi o trabalho realizado ao puxar a corda?

Figura 10.48 Exercício 10.40, problema 10.92 e problema desafiador 10.103.

10.41 Um patinador girando. Podemos considerar as mãos e os braços esticados para fora de um patinador que se prepara para girar como uma barra delgada cujo eixo de giro passa pelo seu centro de gravidade (Figura 10.49). Quando as mãos e os braços se aproximam do corpo e se cruzam em torno do corpo para executar o giro, eles podem ser considerados um cilindro oco com parede fina. A massa total das mãos e dos braços é igual a 8,0 kg. Quando esticadas para fora, a envergadura é de 1,8 m; quando torcidas, elas formam um cilindro de raio igual a 25 cm. O momento de inércia das partes restantes do corpo em relação ao eixo de rotação é constante e igual a 0,40 kg · m². Se sua velocidade angular inicial é de 0,40 rev/s, qual é sua velocidade angular final?

10.42 Uma mergulhadora pula de um trampolim com braços estendidos verticalmente para cima e pernas esticadas para baixo, fornecendo-lhe um momento de inércia em torno do eixo de rotação igual a 18 kg · m². Então, ela se agacha formando uma pequena bola, fazendo seu momento de inércia diminuir para 3,6 kg · m². Quando está agachada, ela realiza uma revolução completa em 1,0 s. Caso ela não se agachasse, quantas revoluções faria no intervalo de tempo de 1,5 s desde o trampolim até atingir a água?

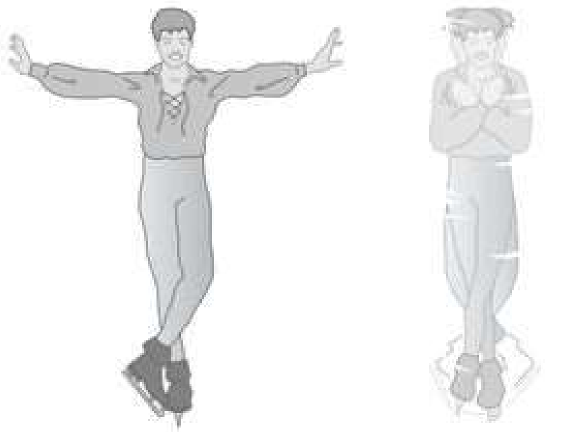


Figura 10.49 Exercício 10.41.

10.43 Uma mesa giratória grande possui forma de disco com raio de 2,0 m e massa igual a 120 kg. A mesa giratória está inicialmente a 3,0 rad/s em torno de um eixo vertical que passa em seu centro. Repentinamente, um pára-quedista de 70 kg pousa suavemente em um ponto próximo da periferia da mesa. a) Ache a velocidade angular da mesa giratória depois do pouso do pára-quedista. (Suponha que o pára-quedista possa ser considerado uma partícula.) b) Calcule a energia cinética do sistema antes e depois do pouso do pára-quedista. Por que essas energias cinéticas são diferentes?

10.44 Uma porta sólida de madeira com largura de 1,0 m e altura de 2,0 m é articulada em um de seus lados e possui massa total de 40,0 kg. Inicialmente aberta e em repouso, a porta é atingida por uma porção de lama pegajosa de massa igual a 0,500 kg, que se desloca perpendicularmente à porta com velocidade de 12,0 m/s e colide com o centro da porta. Calcule a velocidade angular final da porta. A lama contribui significativamente para o momento de inércia?

10.45 Um pequeno inseto de 10,0 g está pousado sobre uma das extremidades de uma barra delgada e uniforme, que está inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal lisa. A outra extremidade da barra pivoteia em torno de um prego martelado na mesa e pode girar livremente, com atrito desprezível. A barra possui massa de 50,0 g e tem 100 cm de comprimento. O inseto salta no sentido horizontal, perpendicular à barra, com uma velocidade escalar de 20,0 cm/s em relação à mesa. a) Qual é a velocidade escalar angular da barra logo após o vivaz inseto saltar? b) Qual é a energia cinética total do sistema logo após o inseto saltar? c) De onde vem essa energia?

10.46 Colisão de um asteróide! Suponha que um asteróide se desloque diretamente para o centro da Terra e venha a colidir com o nosso planeta na altura do Equador, penetrando na superfície terrestre. Qual teria de ser a massa desse asteróide em relação à massa M da Terrra, para que o dia ficasse 25% mais longo do que atualmente, em decorrência da colisão? Suponha que o asteróide seja muito pequeno em comparação com a Terra e que a Terra seja homogênea.

10.47 Uma barra de metal delgada e uniforme que tem 2,0 m de comprimento e pesa 90,0 N está suspensa verticalmente do teto por um pivô com atrito desprezível. De repente, ele é atingido num ponto que está 1,50 m abaixo do teto por uma pequena bola de 3,0 kg, movendo-se inicialmente, no sentido horizontal a 10,0 m/s. A bola rebate na direção contrária com uma velocidade escalar de

6,0 m/s. a) Calcule a velocidade escalar angular da barra logo após a colisão. b) Durante a colisão, por que o momento angular se conserva, mas o momento linear não?

Seção 10.7 Giroscópios e precessão

10.48 a) Desenhe uma vista de topo do giroscópio da Figura 10.32 indicando letras para $\vec{\omega}$, $\vec{L}$ e $\vec{\tau}$. Desenhe $d\vec{L}$ produzido por $\vec{\tau}$. Desenhe $\vec{L} + d\vec{L}$. Determine o sentido da precessão examinando as direções e sentidos de $\vec{L}$ e $\vec{L} + d\vec{L}$. b) Inverta o sentido da velocidade angular do rotor e repita todas as etapas do item (a). c) Mova o pivô para a outra extremidade do eixo, considerando a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade angular de spin como na parte (b) e repita todas as etapas. d) Mantendo o pivô como na parte (c), inverta a velocidade angular de spin do rotor e repita todas as etapas.

10.49 O rotor (volante) de um giroscópio de brinquedo possui massa de 0,140 kg. Seu momento de inércia em relação ao seu eixo é igual a $1{,}20 \times 10^{-4}$ kg · m^2. A massa do suporte é de 0,0250 kg. O giroscópio é suportado em um único pivô (Figura 10.50) e seu centro de massa está situado a uma distância de 4,0 cm do pivô. O giroscópio possui movimento de precessão em um plano horizontal, completando uma revolução em 2,20 s. a) Ache a força de baixo para cima exercida pelo pivô. b) Ache a velocidade angular com a qual o rotor gira em torno de seu eixo, expressa em rev/min. c) Faça um diagrama, desenhando vetores para mostrar o momento angular do rotor e o torque que atua sobre ele.

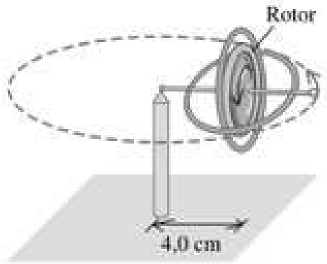


Figura 10.50 Exercício 10.49.

10.50 Um giroscópio na Lua. Certo giroscópio realiza precessão a uma taxa de 0,50 rad/s quando usado na Terra. Se fosse levado para uma base lunar, onde a aceleração da gravidade é 0,165 g, qual seria a sua taxa de precessão?

10.51 Um giroscópio possui movimento de precessão em torno de um eixo vertical. Descreva o que ocorre com a velocidade angular de precessão quando são feitas as seguintes mudanças nas variáveis, mantendo-se as outras grandezas constantes: a) a velocidade angular de spin do volante dobra; b) o peso total dobra; c) o momento de inércia em torno do eixo do volante dobra; d) a distância entre o pivô e o centro de gravidade dobra. e) O que ocorreria se todas as quatro variáveis indicadas nos itens de (a) até (d) dobrassem de valor?

10.52 O período do movimento de precessão da Terra é de 26000 anos, e o período de sua velocidade angular de spin é de um dia. Estime o módulo do torque que produz a precessão da Terra. Você pode usar dados do Apêndice F. Faça a estimativa supondo i) que a Terra seja uma esfera maciça e homogênea e ii) que a precessão da Terra seja semelhante ao movimento de precessão do giroscópio indicado na Figura 10.34. Nesse modelo, o eixo de precessão e o eixo de rotação de spin são perpendiculares. Na verdade, no caso da Terra, o ângulo entre esses dois eixos é de 23,5°; isso altera a estimativa do torque de um fator aproximadamente igual a 2.

Problemas

10.53 Um esmeril de 55,0 kg é um disco sólido de diâmetro igual a 0,520 m. Você comprime um machado sobre a periferia com uma força normal de 160 N (Figura 10.43). O coeficiente de atrito cinético entre a lâmina e a pedra do esmeril é igual a 0,60, e existe um torque do atrito constante igual a 6,50 N · m entre o eixo do esmeril e seus mancais. a) Ache a força que deve ser aplicada tangencialmente à extremidade do eixo da manivela de 0,500 m de comprimento para acelerar a roda do esmeril desde zero até 120 rev/min em 9,0 s. b) Depois que o esmeril atinge a velocidade de 120 rev/min, qual é a força tangencial que deve ser aplicada à extremidade da manivela para manter a velocidade angular constante de 120 rev/min? c) Quanto tempo o esmeril levaria para reduzir sua velocidade angular de 120 rev/min até zero quando a única força atuante for apenas a força de atrito nos mancais?

10.54 Uma roda de bicicleta experimental está sob teste, montada em um eixo de modo que ela possa girar livremente em torno desse seu eixo. Se um torque de 5,0 N · m for aplicado ao pneu durante 2,0 s, a velocidade angular cresce de zero a 100 rev/min. A seguir o torque externo é removido, e a roda atinge o repouso em 125 s pela ação do atrito em seus mancais. Calcule a) o momento de inércia da roda em torno do eixo de rotação; b) o torque do atrito; c) o número total de revoluções realizadas pela roda durante o intervalo de tempo de 125 s.

10.55 Velocímetro. O velocímetro do seu carro converte a velocidade escalar angular das rodas em velocidade escalar linear do carro, considerando-se pneus de tamanho padrão e nenhum deslizamento no piso. a) Se os pneus padrão do seu carro possuem 24 polegadas de diâmetro, qual é a taxa de rotação (em rpm) do carro quando você dirige a uma velocidade de 60 mi/h? b) Suponha que você coloque pneus grandes, de 30 polegadas de diâmetro, no seu carro. Qual é a sua velocidade real quando a leitura no velocímetro é de 60 mi/h? c) Se, por outro lado, você colocar pneus pequenos, de 20 polegadas de diâmetro, qual será a leitura do velocímetro quando você dirige a 50 mi/h?

10.56 Um disco oco uniforme possui dois pedaços de cabo leve e fino em torno da sua borda externa e está suspenso do teto (Figura 10.51). De repente um dos cabos se rompe, e o cabo restante não desliza enquanto o disco rola para baixo. Use a lei da conservação da energia para achar a velocidade escalar do centro desse disco, após ele ter caído por uma distância de 1,20 m.

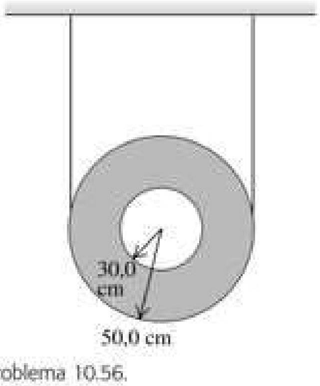


Figura 10.51 Problema 10.56.

10.57 Uma barra delgada e uniforme de 3,80 kg e 80,0 cm de comprimento possui uma bola muito pequena de 2,50 kg grudada em cada extremidade (Figura 10.52). Ela é sustentada horizontalmente por um eixo fino, horizontal e com atrito desprezível, que passa pelo seu centro e é perpendicular à barra. Subitamente, a bola do lado direito se descola e cai, mas a outra permanece grudada na barra. a) Ache a aceleração angular da barra logo após a bola cair. b) A aceleração angular permanecerá constante enquanto a barra continua a oscilar? Em caso negativo, ela vai aumentar ou diminuir? c) Ache a velocidade angular da barra logo após ela oscilar pela sua posição vertical.

Figura 10.52 Problema 10.57.

10.58 Quando explora um castelo, Exena, a Exterminadora, é surpreendida por um dragão que a persegue pelo corredor. Exena corre para dentro de um quarto e tenta fechar uma porta pesada antes que o dragão entre. A porta está inicialmente perpendicular à parede, de modo que ela deve girar a 90° para fechar. A porta possui altura de 3,0 m e largura de 1,25 m, e pesa 750 N. O atrito das dobradiças pode ser desprezado. Se Exena aplica uma força de 220 N à extremidade da porta e ortogonal a ela, quanto tempo ela leva para fechar a porta?

10.59 Uma barra fina de comprimento l repousa sobre o eixo $+Ox$ com sua extremidade direita na origem. Um fio puxa a barra com uma força $\vec{F}$ dirigida a um ponto P situado a uma distância h acima da barra. Determine o ponto ao longo da barra onde você deve amarrar o fio para obter o torque máximo em torno da origem, se o ponto P estiver situado a) acima da extremidade direita da barra; b) acima da extremidade esquerda da barra; c) acima do centro da barra.

10.60 **Ato de equilibrar.** Uma pequena esfera de massa M está ligada à extremidade de uma barra longa, fina e uniforme de comprimento L e massa M. a) Localize a posição do centro de massa do sistema barra-esfera. Anote essa posição em um desenho da barra. b) Você equilibra cuidadosamente a barra no topo de uma mesa sem atrito, de modo que a extremidade sem a esfera fique apoiada verticalmente sobre a mesa. A seguir a barra é inclinada de um pequeno ângulo θ; calcule sua aceleração angular nesse instante. Suponha que a extremidade sem a esfera permaneça em contato com o topo da mesa. (*Sugestão:* Consulte a Tabela 9.2.) c) Você novamente equilibra a barra no topo da mesa, porém agora *com* a extremidade contendo a esfera tocando a mesa. A seguir a barra é novamente inclinada de um pequeno ângulo θ; determine sua aceleração angular nesse instante. Suponha que a extremidade com a esfera permaneça em contato com o topo da mesa. Como esse resultado se compara com o obtido no item (b)? d) Um taco de bilhar é uma barra de madeira cônica grossa em uma extremidade e fina na outra. Você pode equilibrar facilmente o taco na vertical sobre um dedo, quando a extremidade fina fica em contato com esse dedo; esse equilíbrio é muito mais difícil quando a extremidade grossa fica em contato com seu dedo. Explique por quê.

10.61 Você amarra um fio fino a um ponto na periferia de um disco uniforme vertical de raio R e massa M. O disco pode girar livremente sem atrito em um eixo horizontal fixo que passa pelo seu centro de massa. Inicialmente o disco está em repouso, com a conexão do fio no ponto mais elevado do disco. Você puxa o fio com uma força horizontal $\vec{F}$ até que a roda tenha feito exatamente um quarto de rotação em torno do eixo horizontal que passa em seu centro, e a seguir o sistema é libertado. a) Use a Equação (10.20) para achar o trabalho realizado pelo fio. b) Use a Equação (6.14) para achar o trabalho realizado pelo fio. Você obtém o mesmo resultado obtido no item (a)? c) Ache a velocidade angular final do disco. d) Calcule a aceleração radial (centrípeta) máxima de um ponto sobre o disco.

10.62 O mecanismo indicado na Figura 10.53 é usado para elevar um engradado de suprimentos do depósito de um navio. O engradado possui massa total de 50 kg. Uma corda é enrolada em um cilindro de madeira que gira em torno de um eixo de metal. O cilindro possui raio igual a 0,25 m e momento de inércia $I = 2{,}9\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ em torno do eixo. O engradado é suspenso pela extremidade livre da corda. Uma extremidade do eixo está pivotada em mancais sem atrito; uma manivela está presa à outra extremidade. Quando a manivela gira, sua extremidade gira em torno de um círculo vertical de raio igual a 0,12 m, o cilindro gira e o engradado sobe. Calcule o módulo da força $\vec{F}$ aplicada tangencialmente à extremidade da manivela para elevar o engradado com uma aceleração de 0,80 m/s². (A massa da corda e o momento de inércia do eixo e da manivela podem ser desprezados.)

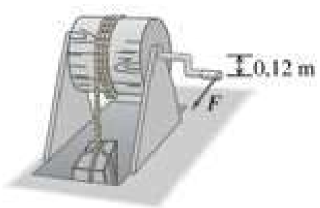


Figura 10.53 Problema 10.62.

10.63 Um grande rolo de papel de 16,0 kg com raio $R = 18{,}0$ cm está em repouso contra uma parede e é mantido no lugar por um suporte ligado a uma barra que passa em seu centro (Figura 10.54). A barra pode girar sem atrito no suporte, e o momento de inércia do papel e da barra em torno do disco é igual a $0{,}260\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. A outra extremidade da barra está presa à parede por uma articulação sem atrito de modo que a barra faz um ângulo de 30,0° com a parede. O peso da barra é desprezível. O coeficiente de atrito cinético entre o papel e a parede é $\mu c = 0{,}25$. Uma força constante vertical $F = 40{,}0$ N é aplicada ao papel, e o papel desenrola. a) Qual é o módulo da força que a barra exerce sobre o papel enquanto ele desenrola? b) Qual é a aceleração angular do rolo?

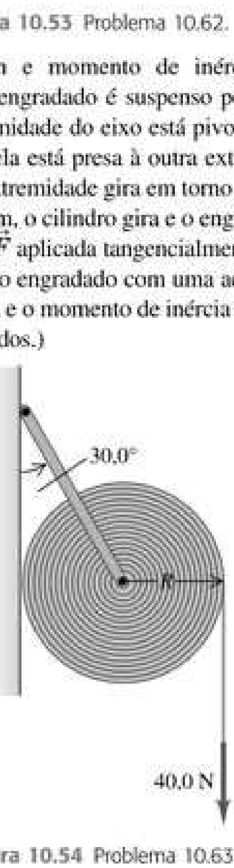


Figura 10.54 Problema 10.63.

10.64 Um bloco de massa $m = 5{,}0$ kg desliza para baixo de uma superfície horizontal inclinada a 36,9° com a horizontal (Figura 10.55). O coeficiente de atrito cinético é 0,25. Um fio amarrado ao bloco é enrolado em torno de um volante que gira em torno de um eixo passando em O. O volante possui massa de 25,0 kg e momento de inércia de $0{,}500\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ em relação ao eixo de rotação. O fio puxa a roda sem deslizar a uma distância perpendicular ao eixo igual a

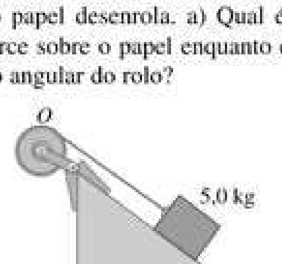


Figura 10.55 Problema 10.64.

0,200 m. a) Qual é a aceleração do bloco para baixo do plano? b) Qual é a tensão no fio?

10.65 Dois discos metálicos, um com raio R_1 = 2,50 cm e massa M_1 = 0,80 kg e outro com raio R_2 = 5,0 cm e massa M_2 = 1,60 kg, são unidos por uma solda e montados sobre um eixo sem atrito passando no centro comum dos discos, como no Problema 9.89. a) Um fio leve é enrolado em torno da periferia do disco menor, e um bloco de 1,50 kg é suspenso na extremidade livre do fio. Qual é o módulo da aceleração de cima para baixo do bloco depois que ele é libertado? b) Repita os cálculos da parte (a), agora supondo que o fio seja enrolado na periferia do disco maior. Em qual dos dois casos a aceleração é maior? Sua resposta faz sentido?

10.66 Um rolo de cortar grama com forma de uma casca cilíndrica de massa M é puxado horizontalmente com uma força constante horizontal F aplicada por um cabo ligado ao eixo. Sabendo que ele rola sem deslizar, calcule a aceleração e a força de atrito.

10.67 Dois pesos estão ligados por uma corda muito leve e flexível, que passa sobre uma polia de 50,0 m com atrito desprezível e raio de 0,300 m. A polia é um disco maciço e uniforme e está suspenso por um gancho preso ao teto (Figura 10.56). Qual força o teto exerce sobre o gancho?

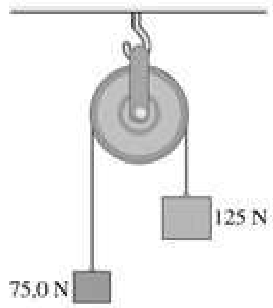


Figura 10.56 Problema 10.67.

10.68 Um disco sólido rola sem deslizar sobre uma superfície horizontal com velocidade constante de 2,50 m/s. a) Se o disco rola para cima de uma rampa inclinada a 30,0°, qual é a distância máxima que ele atinge ao longo da rampa antes de parar? b) Explique por que sua resposta do item (a) não depende nem da massa nem do raio do disco.

10.69 **O ioiô.** Um ioiô é feito usando-se dois discos uniformes, cada um com massa m e raio R ligados por um eixo leve de raio b. Um fio leve e fino é enrolado diversas vezes em torno do eixo e a seguir mantido fixo enquanto o ioiô é libertado do repouso, caindo verticalmente à medida que o fio desenrola. Calcule a aceleração linear e a aceleração angular do ioiô e a tensão no fio.

10.70 Uma casca esférica de paredes finas com massa m e raio r parte do repouso e rola sem deslizar para baixo da trilha indicada na Figura 10.57. O diâmetro da casca é muito pequeno, se comparado com h_0 e R, e o atrito de rolamento é desprezível. a) Qual é a altura mínima h_0 para que a casca esférica complete uma volta na parte circular da trajetória? b) Com que intensidade a trilha empurra a casca no ponto B, que está no mesmo nível do centro da circunferência? c) Suponha que a trilha possui atrito desprezível e que a casca foi libertada da mesma altura h_0 calculada no item (a). Nesse caso ela completaria uma volta? Como você sabe? d) No item (c), com que intensidade a trilha empurra a casca no ponto A, o topo da circunferência? Com que intensidade ela empurrou a casca no item (a)?

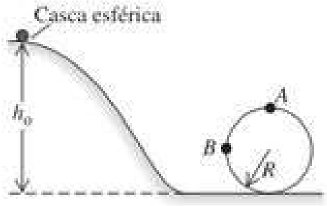


Figura 10.57 Problema 10.70.

10.71 A Figura 10.58 mostra três ioiôs idênticos que estão inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. Para cada ioiô, o fio é puxado conforme indicado. Em cada caso existe atrito suficiente para cada ioiô rolar sem deslizar. Desenhe um diagrama do corpo livre para cada ioiô. Qual é o sentido da rotação de cada ioiô? (Tente fazer essa experiência!) Explique suas respostas.

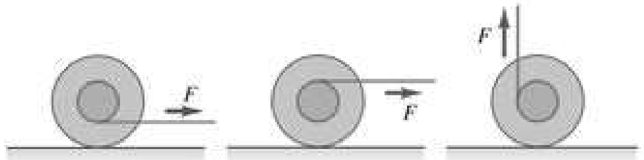


Figura 10.58 Problema 10.71.

10.72 Como indicado na Figura 10.46, um fio é enrolado diversas vezes em torno da periferia de um pequeno aro de raio 0,0800 m e massa igual a 0,180 kg. A extremidade livre do fio é puxada de baixo para cima de um modo exato tal que o aro não se move verticalmente quando o fio é desenrolado. a) Ache a tensão no fio enquanto ele se desenrola. b) Calcule a aceleração angular do aro enquanto o fio se desenrola. c) Ache a aceleração de baixo para cima da mão que puxa o fio. d) O que mudaria nas suas respostas, se o aro fosse substituído por um disco maciço com o mesmo raio e a mesma massa?

10.73 Partindo do repouso, uma força constante F = 100 N é aplicada à extremidade livre de um cabo de 50 m enrolado em volta da borda externa de um cilindro maciço e uniforme, semelhante ao da situação indicada na Figura 10.9a. O cilindro possui massa de 4,0 kg e diâmetro de 30,0 cm e está livre para girar em torno de um eixo fixo e livre de atrito que passa pelo seu centro. a) Quanto tempo leva para que todo o cabo se desenrole e com que velocidade o cabo está se movendo quando a última parte se liberta? b) Agora, suponha que o cilindro seja substituído por um aro uniforme, mas que todas as demais grandezas permaneçam inalteradas. Nesse caso, as respostas ao item (a) seriam maiores ou menores? Explique.

10.74 Uma bola de gude homogênea rola sem deslizar para baixo da trajetória indicada na Figura 10.59, partindo do repouso. a) Ache a altura mínima h necessária para que a bola de gude não caia na cova. b) O momento de inércia da bola de gude depende do seu raio. Explique por que a resposta ao item (a) não depende do raio da bola. c) Solucione o item (a) para um bloco que desliza com atrito desprezível em vez de uma bola de gude que rola. Como a altura mínima h nesse caso se compara com a resposta ao item (a)?

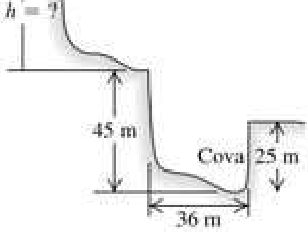


Figura 10.59 Problema 10.74.

10.75 **Pedras que rolam.** Uma pedra esférica, uniforme e maciça parte do repouso e rola para baixo de uma colina de 50,0 m de altura, como indica a Figura 10.60. A metade superior da colina é áspera o suficiente para fazer a pedra rolar sem deslizar, mas a metade inferior está coberta de gelo e não há atrito. Qual é a velocidade escalar de translação da pedra, quando ela atinge a base da colina?

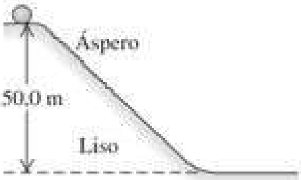


Figura 10.60 Problema 10.75.

10.76 Uma bola maciça e uniforme rola sem deslizar para cima de uma colina, como indica a Figura 10.61. No topo da colina, ela se move horizontalmente e cai pelo rochedo vertical. a) A que distância da base do rochedo a bola aterrissa e com que velocidade ela está se movendo assim que cai? b) Note que, quando a bola aterrissa, ela possui uma velocidade escalar de translação maior do que quando estava na base da colina. Isso significa que de alguma forma a bola ganhou energia? Explique!

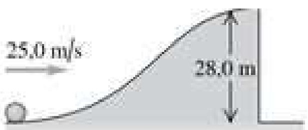


Figura 10.61 Problema 10.76.

10.77 Uma roda de 42,0 cm de diâmetro, que consiste de uma borda e seis raios, é feita de um material plástico rígido, porém fino, com densidade de massa linear de 25,0 g/cm. Essa roda é libertada do repouso no topo de uma colina de 58,0 m de altura. a) Com que velocidade ela está rolando quando atinge a base da colina? b) Em que a sua resposta mudaria, se a densidade de massa linear e o diâmetro da roda fossem duplicados?

10.78 Um modelo antigo de bicicleta possui uma roda dianteira grande com a manivela acionada pelo pé montada no seu eixo e uma roda traseira pequena que gira independentemente da roda dianteira; não há nenhuma corrente conectando as rodas. O raio da roda dianteira é de 65,5 cm, e o raio da roda traseira é de 22,0 cm. A sua bicicleta moderna possui um diâmetro de roda de 66,0 cm e rodas dentada dianteira e traseira com raios de 11,0 cm e 5,5 cm, respectivamente. A roda dentada traseira está firmemente presa ao eixo da roda traseira. Você começa a pedalar a sua bicicleta moderna e gira a roda dianteira a 1,0 rev/s. As rodas de ambas as bicicletas rolam pelo solo sem deslizar. a) Qual é a sua velocidade linear ao pedalar a bicicleta moderna? b) Qual é a taxa de rotação da manivela da bicicleta antiga para que ela se mova na mesma velocidade calculada no item (a)? c) Qual é a velocidade angular (em rev/s) da roda traseira pequena da bicicleta antiga?

10.79 Em uma experiência de laboratório você faz uma bola homogênea rolar para baixo de um trilho curvo. A bola parte do repouso e rola sem deslizar. Enquanto está sobre o trilho, a bola desce uma distância h. A extremidade inferior do trilho é horizontal e se estende para fora da extremidade da mesa do laboratório; a bola abandona o trilho deslocando-se horizontalmente. Durante a queda livre, após abandonar o trilho, a bola se move até uma distância horizontal x e uma distância vertical y. a) Determine x em termos de h e de y, desprezando o trabalho realizado pelo atrito. b) A resposta do item (a) seria diferente se a experiência fosse feita na Lua? c) Ao fazer a experiência com muito cuidado, o valor de x medido é menor do que o calculado no item (a). Por quê? d) Qual seria o valor de x para o mesmo h e y do item (a) se você fizesse uma moeda de um real rolar para baixo do trilho? Despreze o trabalho realizado pelo atrito.

10.80 Em uma catapulta de mola, a constante da mola é igual a 400 N/m e a mola sofre uma compressão de 0,15 m. Quando ela é disparada, 80% da energia potencial elástica armazenada na mola é convertida em energia cinética para uma bola uniforme de 0,0590 kg que estava rolando sem deslizar na base de uma rampa. A bola continua a rolar sem deslizar subindo a rampa com 90% da energia cinética que ela possuía na base convertida em energia potencial gravitacional no momento em que ela pára. a) Determine a velocidade do centro de massa da bola na base da rampa. b) Nessa posição, qual é a velocidade de um ponto no topo da bola? c) Nessa posição, qual é a velocidade de um ponto na base da bola? d) Qual é a altura vertical máxima acima da base da rampa atingida pela bola?

10.81 Quando uma roda rola ao longo de uma superfície horizontal com velocidade constante, as coordenadas de um ponto na periferia da roda são $x(t) = R[(2\pi t/T) - \text{sen}\,(2\pi t/T)]$ e $y(t) = R[1 - \cos\,(2\pi t/T)]$, onde R e T são constantes. a) Faça um desenho da trajetória do ponto de $t = 0$ a $t = 2T$. Uma curva com essa forma é denominada ciclóide. b) Qual é o significado das constantes R e T? c) Ache os componentes x e y do vetor velocidade e da aceleração do ponto em qualquer instante. d) Ache os instantes em que o ponto fica instantaneamente em repouso. Quais são os componentes x e y da aceleração nesses instantes? e) Ache o módulo da aceleração do ponto. Ele depende do tempo? Compare com o módulo da aceleração de uma partícula em movimento circular uniforme, $a_{rad} = 4\pi^2 R/T^2$. Explique seu resultado para o módulo da aceleração do ponto na roda que gira, usando o conceito de que a rolagem é um movimento combinado de rotação e translação.

10.82 Uma criança faz uma bola de basquete de 0,600 kg rolar para cima de uma rampa longa. A bola de basquete pode ser considerada uma casca esférica, de paredes finas. Quando a criança larga a bola na base da rampa, ela possui velocidade igual a 8,0 m/s. Quando a bola retorna para a base ela possui velocidade igual a 4,0 m/s. Suponha que o trabalho realizado pelo atrito na subida da bola seja igual ao trabalho realizado pelo atrito na descida e que a bola rola sem deslizar. Ache a altura máxima atingida pela bola quando ela sobe a rampa.

10.83 Um cilindro homogêneo de massa M e raio $2R$ está em repouso sobre o topo de uma mesa. Um fio é ligado por meio de um suporte duplo preso às extremidades de um eixo sem atrito passando através do centro do cilindro de modo que o cilindro pode girar em torno do eixo. O fio passa sobre uma polia em forma de disco de massa M e raio R montada em um eixo sem atrito que passa em seu centro. Um bloco de massa M é suspenso na extremidade livre do fio (Figura 10.62). O fio não desliza sobre a superfície da polia, e o cilindro rola sem deslizar sobre o topo da mesa. Calcule o módulo da aceleração do bloco quando o sistema é libertado a partir do repouso.

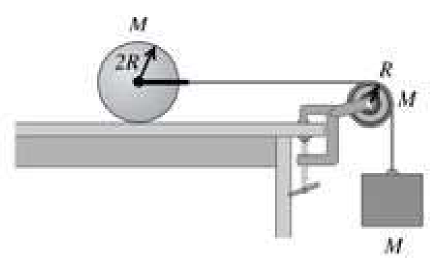


Figura 10.62 Problema 10.83.

10.84 Uma ponte levadiça homogênea de 8,0 m de comprimento está presa à estrada por uma dobradiça livre de atrito em uma das extremidades, e ela pode ser levantada por um cabo atado à outra extremidade. A ponte está em repouso, suspensa a um ângulo de

60,0° acima do plano horizontal, quando o cabo se rompe. a) Determine a aceleração angular da ponte no instante em que o cabo se rompe. (A gravidade atua como se tudo se passasse no centro da massa.) b) Você poderia usar a equação $\omega = \omega_0 + \alpha t$ para calcular a velocidade escalar angular da ponte levadiça em um instante posterior? Explique por quê. c) Qual é a velocidade angular da ponte quando ela fica horizontal?

10.85 Uma bola de 5,0 kg é abandonada de uma altura de 12,0 m acima de uma das extremidades de uma barra uniforme que está pivotada no seu centro. A barra possui massa de 8,0 kg e tem 4,0 m de comprimento. Na outra extremidade da barra há outra bola de 5,0 kg, que não está presa à barra. A bola largada adere à barra após a colisão. Qual altura a outra bola atingirá após a colisão?

10.86 Uma barra uniforme de 0,0300 kg e comprimento de 0,400 m gira em um plano horizontal em torno de um eixo fixo passando em seu centro e perpendicular à barra. Dois pequenos anéis, cada um com massa de 0,0200 kg, são montados de forma que eles possam deslizar ao longo da barra. Eles inicialmente estão presos por pregadores em distâncias afastadas de 0,0500 m do centro da barra, e o sistema começa a girar com 30,0 rev/min. Sem alterar nada no sistema, os pregadores são libertados e os anéis deslizam ao longo da barra e saem pelas suas extremidades. a) Qual é a velocidade angular da barra no instante em que os anéis atingem as extremidades dela? b) Qual é a velocidade angular da barra depois que os anéis saem pelas suas extremidades?

10.87 Uma barra uniforme de comprimento L repousa sobre uma superfície horizontal sem atrito. A barra possui um pivô, de modo que ela pode girar sem atrito em torno de um eixo passando por uma das suas extremidades. A barra está inicialmente em repouso. Uma bala se deslocando com velocidade v ortogonal à barra e paralela à superfície atinge o centro da barra e permanece retida em seu interior. A massa da bala é um quarto da massa da barra. a) Qual é a velocidade angular final da barra? b) Determine a razão entre a energia cinética do sistema depois da colisão e a energia cinética da bala antes da colisão.

10.88 A porta sólida de madeira de um ginásio tem largura de 1,0 m e altura de 2,0 m, sua massa total é igual a 35,0 kg e ela possui uma articulação em um dos seus lados. A porta está aberta e em repouso quando uma bola de basquete colide frontalmente no centro da porta, aplicando sobre ela uma força média igual a 1500 N durante 8,0 ms. Calcule a velocidade angular da porta depois da colisão. (*Sugestão:* integrando a Equação (10.29), obtemos $\Delta L_z = \int_{t_1}^{t_2} (\sum \tau_z)\, dt = (\sum \tau_z)_m \Delta t$. Denomina-se *impulso angular* $\int_{t_1}^{t_2} (\sum \tau_z)\, dt$.)

10.89 Um alvo é constituído por uma placa quadrada de madeira vertical com lado igual a 0,250 m e massa de 0,750 kg, pivotada em um eixo horizontal situado em seu topo. A placa é atingida frontalmente em seu centro por uma bala de massa igual a 1,90 g que se desloca a 360 m/s e que fica retida no interior da placa. a) Qual é a velocidade angular da placa logo após o impacto da bala? b) Qual é a altura máxima atingida pelo centro de massa da placa antes que ela comece a oscilar para baixo novamente? c) Qual deveria ser a velocidade mínima da bala para que a placa completasse a rotação passando a girar em torno do eixo depois do impacto?

10.90 Aceleração repentina de uma estrela de nêutrons. Ocasionalmente, uma estrela de nêutrons (Exercício 10.39) sofre uma aceleração repentina e inesperada conhecida como *glitch*. Uma explicação é que o *glitch* ocorre quando a crosta da estrela de nêutrons sofre uma pequena sedimentação, fazendo diminuir o momento de inércia em torno do eixo de rotação. Uma estrela de nêutrons com velocidade angular $\omega_0 = 70{,}4$ rad/s sofreu um *glitch* em outubro de 1975 que fez sua velocidade angular aumentar para $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, onde $\Delta\omega/\omega_0 = 2{,}01 \times 10^{-6}$. Se o raio da estrela de nêutrons era de 11 km, qual foi sua diminuição na sedimentação dessa estrela? Suponha que a estrela de nêutrons seja uma esfera maciça e homogênea.

10.91 Um pássaro de 500,0 g está voando horizontalmente a 2,25 m/s, quando inadvertidamente colide com uma barra vertical fixa, atingindo-a 25,0 cm abaixo do topo (Figura 10.63). A barra homogênea com 0,750 m de comprimento e massa de 1,50 kg está presa por uma dobradiça na sua base. A colisão atordoa o pássaro, que cai ao chão em seguida. Qual é a velocidade angular da barra a) logo após ser atingida pelo pássaro e b) assim que atinge o solo?

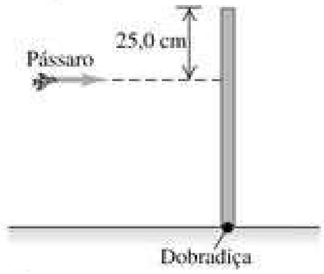


Figura 10.63 Problema 10.91.

10.92 Um pequeno bloco de massa 0,250 kg está amarrado por um fio que passa por um orifício em uma superfície horizontal (veja a Figura 10.48). O bloco está inicialmente em um círculo com raio igual a 0,800 m em torno do orifício com velocidade tangencial igual a 4,0 m/s. O fio a seguir é puxado por baixo lentamente, fazendo o raio do círculo se reduzir. A tensão de ruptura do fio é igual a 30,0 N. Qual é o raio do círculo quando o fio se rompe?

10.93 Um disco horizontal de madeira compensada de massa igual a 7,0 kg e diâmetro de 1,0 m é pivotado em mancais sem atrito em torno de um eixo vertical passando em seu centro. Você monta sobre o disco um modelo circular de trilhos com massa desprezível e diâmetro igual a 0,95 m. Um trem de brinquedo com 1,20 kg movido por uma bateria está em repouso sobre os trilhos. Para demonstrar a conservação do momento angular, você liga o motor do trem. O trem se move no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, atingindo logo uma velocidade constante de 0,600 m/s em relação aos trilhos. Ache o módulo, a direção e o sentido da velocidade angular do disco em relação à Terra.

10.94 Um cabo uniforme e rígido de massa M_0 e comprimento L_0 é cortado em várias partes que são encurvadas e soldadas de modo a forma uma roda circular com quatro raios idênticos que partem do centro. Nada do cabo é desperdiçado, e você pode desprezar a massa da solda. a) Qual é o momento de inércia dessa roda em torno de um eixo que passa pelo seu centro e é perpendicular ao plano da roda? b) Se a roda é inicialmente girada com velocidade angular ω_0, e pára uniformemente no instante T, qual é o torque de atrito no seu eixo?

10.95 Em um laboratório de física, você realiza a seguinte experiência de pêndulo balístico; usando uma espingarda de mola, você dispara uma bala com massa m e velocidade v na direção da horizontal. A bala fica imediatamente presa a uma distância r abaixo de um eixo sem atrito por um dispositivo de massa M que a retém e que pode girar sem atrito em torno do pivô. O momento de inércia desse dispositivo em torno do pivô é igual a I. A distância r é muito maior do que o raio da bala. a) Use a lei da conservação do momento angular para mostrar que a velocidade angular do sistema logo após o momento em que a bala é retida é dada por $\omega = mvr/(mr^2 + I)$. b) Depois que a bala fica retida, o centro de massa do sistema bala-dispositivo retentor oscila para cima e atinge uma altura máxima h. Use a lei da conservação da energia para mostrar que $\omega = \sqrt{2(M+m)gh/(mr^2+I)}$. c) Sua amiga de laboratório diz que o momento linear é conservado na colisão e deduz a relação $mv = (m+M)V$, onde V é a velocidade da bala depois da colisão. A seguir, ela usa a lei da conservação da energia para mostrar que $V = \sqrt{2gh}$, logo $mv = (m+M)\sqrt{2gh}$. Use os resultados dos itens (a) e (b) para mostrar que esse resultado é satisfeito somente no caso particular em que r é obtido da relação $I = Mr^2$.

10.96 Um corredor de 55 kg corre na periferia de uma mesa giratória montada em um eixo vertical sem atrito passando em seu centro. A velocidade do corredor em relação à Terra possui módulo de 2,8 m/s. A mesa giratória gira em sentido contrário com velocidade angular de módulo igual a 0,20 rad/s em relação à Terra. O raio da mesa é de 3,0 m e seu momento de inércia em torno do eixo de rotação é igual a 80 kg · m^2. Calcule a velocidade angular do sistema quando o velocista fica em repouso em relação à mesa giratória. (O velocista pode ser considerado uma partícula.)

10.97 **Recuo da Lua.** Medidas cuidadosas da distância entre a Terra e a Lua indicam que o nosso satélite está atualmente se afastando de nós em aproximadamente 3,0 cm por ano. Despreze qualquer momento angular que possa ser transferido da Terra para a Lua. Calcule a taxa de variação (em rad/s ao ano) da velocidade angular lunar em torno da superfície terrestre (consulte o Apêndice E e os dados de astronomia do Apêndice F). A sua velocidade angular está aumentando ou diminuindo? (*Sugestão:* Se L é constante, então $dL/dt = 0$.)

10.98 **Centro de percussão.** Um bastão de bola de beisebol está em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. O bastão possui comprimento de 0,900 m, massa de 0,800 kg e seu centro de massa está situado a 0,600 m da extremidade do punho do bastão (Figura 10.64). O momento de inércia do bastão em relação ao centro de massa é igual a 0,0530 kg · m^2. O bastão é golpeado por uma bola de beisebol que se desloca ortogonalmente a ele. O impacto fornece um impulso $J = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt$ em um ponto situado a uma distância x do punho do bastão. Qual deve ser o valor de x para que a extremidade do punho do bastão permaneça em repouso à medida que o bastão se move? (*Sugestão:* Considere o movimento do centro de massa e a rotação em torno do centro de massa. Ache x de modo que a combinação dos dois movimentos forneça $v = 0$ para a extremidade do bastão logo após a colisão. Note também que a integração da Equação (10.29) fornece $\Delta L = \int_{t_1}^{t_2}(\sum\tau)\,dt$ (Problema 10.88).) O ponto que você localizou denomina-se *centro de percussão*. Quando uma bola de beisebol colide no centro de percussão, ocorre uma diminuição da força de "picada" que o batedor sente nas mãos.

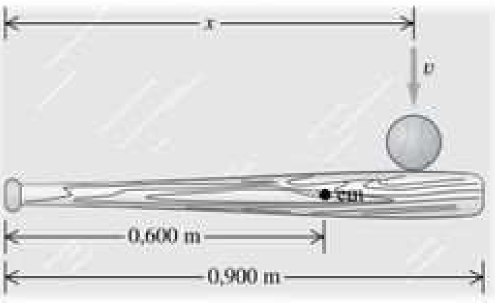


Figura 10.64 Problema 10.98.

10.99 Considere um giroscópio com um eixo que não está na direção horizontal, mas possui um ângulo de inclinação β em relação à horizontal. Mostre que a velocidade angular da precessão não depende do valor de β; mas é dada pela Equação (10.33).

Problemas desafiadores

10.100 Uma bola uniforme de raio R rola sem deslizar entre dois trilhos de tal modo que a distância horizontal entre os dois pontos de contato entre a bola e os trilhos seja igual a d. a) Faça um desenho e mostre que em qualquer instante $v_{cm} = \omega\sqrt{R^2 - d^2/4}$. Discuta essa expressão nos limites $d = 0$ e $d = 2R$. b) Para uma bola uniforme partindo do repouso e descendo uma distância vertical h enquanto rola sem deslizar para baixo de uma rampa, temos, $v_{cm} = \sqrt{10gh/7}$. Trocando a rampa pelos dois trilhos, mostre que

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10gh}{5 + 2/(1 - d^2/4R^2)}}$$

Em cada um desses casos, o trabalho realizado pelo atrito foi desprezado. c) Qual das duas velocidades indicadas na parte (b) é a menor? Por quê? Raciocine em termos de como a energia potencial é dividida entre o ganho da energia cinética da translação e da energia cinética da rotação. d) Para qual valor da razão d/R as expressões das duas velocidades da parte (b) diferem de 5,0%? E quando diferem de 0,50%?

10.101 Quando um objeto rola sem deslizar, a força de atrito de rolamento é muito menor do que a força de atrito quando o objeto desliza sem rolar; uma moeda de um Real rola sobre sua periferia mais rapidamente do que quando ela desliza com sua face voltada para baixo. (Veja a Seção 5.3.) Quando um objeto rola sem deslizar ao longo de uma superfície horizontal, podemos desprezar a força de atrito, de modo que a_x e α_z são nulos e v_x e ω_z são constantes. Rolar sem deslizar implica $v_x = r\omega_z$ e $a_x = r\alpha_z$. Quando um objeto se desloca sobre uma superfície *sem* obedecer a essas igualdades, o atrito (cinético) de deslizamento está atuando sobre o objeto à medida que ele desliza, até que o rolamento sem deslizamento comece a ocorrer. Um cilindro homogêneo de massa M e raio R girando com velocidade angular ω_0 em torno de um eixo passando em seu centro é lançado sobre uma superfície horizontal sobre a qual o coeficiente de atrito cinético é μ_c. a) Faça um diagrama do corpo livre para o cilindro sobre a superfície. Pense com atenção no sentido da força de atrito sobre o cilindro. Calcule a aceleração α_x do centro de massa do cilindro e a aceleração angular α_z em torno do centro de massa do cilindro. b) No início o cilindro desliza sem rolar, então $\omega_z = \omega_0$, mas $v_x = 0$. O rolamento sem deslizamento começa quando $v_x = R\omega_z$. Calcule a *distância* que o cilindro percorre no momento em que termina o deslizamento. c) Calcule o trabalho realizado pela força de atrito sobre o cilindro desde o momento em que ele toca a superfície até o momento em que começa o rolamento sem deslizamento.

10.102 Um giroscópio de demonstração pode ser construído retirando-se o pneu de uma roda de bicicleta com diâmetro de 0,650 m, enrolando-se um fio de chumbo no aro e fixando-o nele. O eixo se projeta 0,200 m para cada lado da roda, e uma garota apóia as extremidades do eixo em suas mãos. A massa do sistema é igual a

8,0 kg; toda a sua massa pode ser considerada concentrada em sua periferia. O eixo é horizontal, e a roda gira em torno do eixo com 5,0 rev/s. Ache o módulo, a direção e o sentido da força que cada mão exerce sobre o eixo a) quando o eixo está em repouso; b) quando o eixo está girando em um plano horizontal em torno do seu centro com 0,050 rev/s; c) quando o eixo está girando em um plano horizontal em torno do seu centro com 0,300 rev/s. d) Com que taxa o eixo deve girar de modo que ele possa ser suportado apenas em uma das suas extremidades?

10.103 Um bloco de massa m está girando com velocidade linear v_1 em um círculo de raio r_1 sobre uma superfície horizontal sem atrito (veja a Figura 10.48). O fio é puxado por baixo até que o raio do círculo no qual o bloco se move é reduzido a um valor r_2. a) Calcule a tensão T no fio em função de r, a distância entre o bloco e o orifício. Dê sua resposta em função da velocidade inicial v_1 e do raio r_1. b) Use a relação $W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{T}(r) \cdot d\vec{r}$ para calcular o trabalho realizado pela tensão $\vec{T}$ quando r varia desde r_1 até r_2. c) Compare o resultado do item (b) com a variação da energia cinética do bloco.