

NÚMEROS REAIS

Tudo o que vamos estudar no curso de Cálculo se referirá a conjuntos de números reais. Estudaremos funções que são definidas e assumem valores nesses conjuntos. Assim, ao estudarmos limite, continuidade, derivadas e integrais dessas funções, usaremos os fatos elementares a respeito dos números reais.

Neste 1º capítulo, vamos analisar o *conjunto dos números reais*. Enunciaremos os axiomas básicos, deduziremos propriedades, e apresentaremos exemplos envolvendo estas propriedades.

1.1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os primeiros números conhecidos pela humanidade são os chamados *inteiros positivos* ou *naturais*. Temos então o conjunto

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Os números $-1, -2, -3, \dots$ são chamados *inteiros negativos*. A união do conjunto dos números naturais com os inteiros negativos e o zero (0) define o conjunto dos números inteiros que denotamos por

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}.$$

Os números da forma m/n , $n \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$, são chamados de frações e formam o conjunto dos *números racionais*. Denotamos:

$$Q = \{x \mid x = m/n, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}.$$

Finalmente encontramos números que não podem ser representados na forma m/n , $n \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$, tais como $\sqrt{2} = 1,414 \dots$, $\pi = 3,14159 \dots$, $e = 2,71 \dots$. Estes números formam o conjunto dos *números irracionais* que denotaremos por Q' .

Da união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais resulta o *conjunto dos números reais*, que denotamos por

$$R = Q \cup Q'.$$

A seguir apresentaremos os axiomas, definições e propriedades referentes ao conjunto dos números reais.

No conjunto dos números reais introduzimos duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação* que satisfazem os axiomas abaixo:

1.1.1 Fechamento. Se a e $b \in R$, existe um e somente um número real denotado por $a + b$, chamado soma e existe um e somente um número real, denotado por ab (ou $a \times b$, ou $a \cdot b$) chamado produto.

1.1.2 Comutatividade. Se $a, b \in R$ então $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.

1.1.3 Associatividade. Se a, b e $c \in R$ então

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{e} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

1.1.4 Distributividade. Se $a, b, c \in R$ então

$$a \cdot (b + c) = ab + ac.$$

1.1.5 Existência de Elementos Neutros. Existem 0 e $1 \in R$ tais que $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$, para qualquer $a \in R$.

1.1.6 Existência de Simétricos. Todo $a \in \mathbb{R}$ tem um simétrico, denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

1.1.7 Existência de Inversos. Todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tem um inverso, denotado por $1/a$, tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Usando 1.1.6 e 1.1.7 podemos definir a subtração e a divisão de números reais.

1.1.8 Subtração. Se $a, b \in \mathbb{R}$, a diferença entre a e b , denotada por $a - b$, é definida por $a - b = a + (-b)$.

1.1.9 Divisão. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, o quociente de a e b é definido por $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.

1.2 DESIGUALDADES

Para podermos dizer que um número real é maior ou menor que outro, devemos introduzir o conceito de número real positivo e uma relação de ordem.

1.2.1 Axioma de Ordem. No conjunto dos números reais existe um subconjunto denominado de números positivos, tal que:

- (i) se $a \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três afirmações ocorre: $a = 0$; a é positivo; $-a$ é positivo;
- (ii) a soma de dois números positivos é positiva;
- (iii) o produto de dois números positivos é positivo.

1.2.2 Definição. O número real a é negativo se e somente se $-a$ é positivo.

1.2.3 Os símbolos $<$ (menor que) e $>$ (maior que) são definidos:

- (i) $a < b \Leftrightarrow b - a$ é positivo;
 - (ii) $a > b \Leftrightarrow a - b$ é positivo.
- 

1.2.4 Os símbolos $\leq$ (menor ou igual que) e $\geq$ (maior ou igual que) são definidos:

(i) $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ ou $a = b$;

(ii) $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ ou $a = b$.

Expressões envolvendo os símbolos definidos acima são chamadas de DESIGUALDADES. $a < b$ e $a > b$ são desigualdades estritas enquanto $a \leq b$ e $a \geq b$ são desigualdades não estritas.

1.2.5 Propriedades. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(i) Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$.

(ii) Se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$.

(iii) Se $a > b$ e $c < 0$, então $ac < bc$.

(iv) Se $a > b$, então $a + c > b + c$ para todo real c .

(v) Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$.

(vi) Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então $ac > bd$.

As propriedades enunciadas podem ser facilmente provadas usando-se as definições anteriores. Por exemplo:

Prova da Propriedade i). (Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$).

(def.)

$$\text{Se } a > b \Rightarrow (a - b) > 0.$$

(def.)

$$\text{Se } b > c \Rightarrow (b - c) > 0.$$

$$\text{Usando 1.2.1 (ii), temos } (a - b) + (b - c) > 0$$

(def.)

$$\text{ou } a - c > 0 \Rightarrow a > c.$$

Prova da Propriedade ii). (Se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$).

(def.)

$$\text{Se } a > b \Rightarrow (a - b) > 0.$$

Usando 1.2.1 (iii) temos $(a - b) \cdot c > 0$ ou $(ac - bc) > 0$ e finalmente, pela definição, $ac > bc$.

1.3 VALOR ABSOLUTO

1.3.1 Definição. O valor absoluto de a , denotado por $|a|$, é definido como

$$|a| = a, \text{ se } a \geq 0$$

$$|a| = -a, \text{ se } a < 0.$$

1.3.2 Interpretação Geométrica. Geometricamente o valor absoluto de a , também chamado módulo de a , representa a distância entre a e 0. Escreve-se então $|a| = \sqrt{a^2}$.

1.3.3 Propriedades.

$$(i) \quad |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, \text{ onde } a > 0.$$

$$(ii) \quad |x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ ou } x < -a, \text{ onde } a > 0.$$

$$(iii) \quad \text{Se } a, b \in \mathbb{R}, \text{ então } |a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

$$(iv) \quad \text{Se } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } b \neq 0, \text{ então } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

$$(v) \quad (\text{Desigualdade triangular})$$

$$\text{Se } a, b \in \mathbb{R}, \text{ então } |a + b| \leq |a| + |b|.$$

$$(vi) \quad \text{Se } a, b \in \mathbb{R}, \text{ então } |a - b| \leq |a| + |b|.$$

$$(vii) \quad \text{Se } a, b \in \mathbb{R}, \text{ então } |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Vamos provar algumas das propriedades citadas.

Prova da Propriedade i). ($|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$, onde $a > 0$).

Provaremos por partes:

Parte 1: $-a < x < a$, com $a > 0 \Rightarrow |x| < a$.

Se $x \geq 0$, $|x| = x$. Como, por hipótese, $x < a$, vem que $|x| < a$.

Se $x < 0$, $|x| = -x$. Como $-a < x$, aplicando a propriedade 1.2.5 iii) concluímos que $-x < a$.

Assim, $|x| = -x < a$ ou seja $|x| < a$.

Parte 2: $|x| < a$ onde $a > 0 \Rightarrow -a < x < a$.

Se $x \geq 0$, então $|x| = x$. Como $|x| < a$, concluímos que $x < a$. Como $a > 0$, segue que $-a < 0$ e então $-a < 0 \leq x < a$ ou seja $-a < x < a$.

Se $x < 0$, $|x| = -x$. Como por hipótese $|x| < a$, temos que $-x < a$. Como $x < 0$, segue que $-x > 0$. Portanto, $-a < 0 < -x < a$ ou de forma equivalente $-a < x < a$.

Prova da Propriedade iii). (Se $a, b \in \mathbb{R}$ então $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$).

Usando 1.3.2, vem

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = |a| \cdot |b|.$$

Prova da Propriedade iv). (Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$ então $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$).

Usando 1.3.2, vem

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b} \right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

Prova da Propriedade v). (Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a + b| \leq |a| + |b|$).

Como $a, b \in \mathbb{R}$, de 1.2.1(i) vem que ab é positivo, negativo ou zero. Em qualquer caso vale,

$$ab \leq |ab| = |a| |b|. \quad (1)$$

Multiplicando (1) por 2, temos

$$2ab \leq 2 |a| |b|. \quad (2)$$

Da igualdade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e de (2)

$$\begin{aligned} \text{vem que } (a + b)^2 &\leq a^2 + 2 |a| |b| + b^2 \\ (a + b)^2 &\leq |a|^2 + 2 |a| |b| + |b|^2 \\ (a + b)^2 &\leq (|a| + |b|)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Tomamos a raiz quadrada de (3) e obtemos

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Prova da Propriedade vi). (Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a - b| \leq |a| + |b|$).

Basta escrever $a - b = a + (-b)$ e aplicar a propriedade v).

$$\begin{aligned} |a - b| &= |a + (-b)| \leq |a| + |-b| \\ &= |a| + |b|. \end{aligned}$$

Prova da Propriedade vii). (Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $||a| - |b|| \leq |a - b|$).

Vamos fazer $a - b = c$. Aplicando a propriedade v, vem

$$|a| = |c + b| \leq |c| + |b|$$

$$|a| - |b| \leq |c|$$

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

1.4 INTERVALOS

Intervalos são conjuntos infinitos de números reais como segue:

1.4.1 Intervalo Aberto. $\{x \mid a < x < b\}$ denota-se (a, b) ou $]a, b[$.

1.4.2 Intervalo Fechado. $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ denota-se $[a, b]$.

1.4.3 Intervalo Fechado à Direita e Aberto à Esquerda. $\{x \mid a < x \leq b\}$ denota-se $(a, b]$ ou $]a, b]$.

1.4.4 Intervalo Aberto à Direita e Fechado à Esquerda. $\{x \mid a \leq x < b\}$ denota-se $[a, b)$ ou $[a, b[$.

1.4.5 Intervalos Infinitos.

(i) $\{x \mid x > a\}$ denota-se $(a, +\infty)$ ou $]a, +\infty[$;

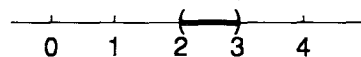
(ii) $\{x \mid x \geq a\}$ denota-se $[a, +\infty)$ ou $[a, +\infty[$;

(iii) $\{x \mid x < b\}$ denota-se $(-\infty, b)$ ou $] -\infty, b[$;

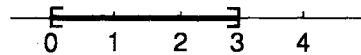
(iv) $\{x \mid x \leq b\}$ denota-se $(-\infty, b]$ ou $] -\infty, b]$.

Podemos fazer uma representação gráfica dos intervalos como nos exemplos que seguem:

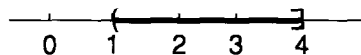
ex. 1.4.1 – $(2, 3)$



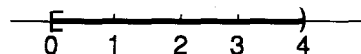
ex. 1.4.2 – $[0, 3]$



ex. 1.4.3 – $(1, 4]$

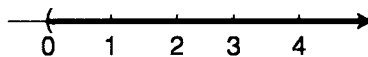


ex. 1.4.4 – $[0, 4)$

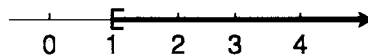


ex. 1.4.5 –

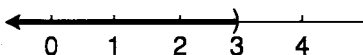
(i) $(0, +\infty)$



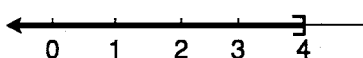
(ii) $[1, +\infty)$



(iii) $(-\infty, 3)$



(iv) $(-\infty, 4]$



1.5 EXEMPLOS

- Determinar todos os intervalos de números que satisfazem as desigualdades abaixo. Fazer a representação gráfica.

(i) $3 + 7x < 8x + 9$

$$3 + 7x - 3 < 8x + 9 - 3 \quad (\text{propriedade 1.2.5 iv})$$

$$7x < 8x + 6$$

$$7x - 8x < 8x + 6 - 8x \quad (\text{propriedade 1.2.5 iv})$$

$$-x < 6$$

$$x > -6 \quad (\text{propriedade 1.2.5 iii})$$

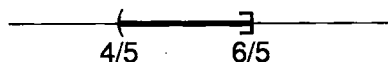
Portanto, $\{x \mid x > -6\} = (-6, +\infty)$ é a solução,

e graficamente



$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad 7 &< 5x + 3 \leq 9 \\
 7 - 3 &< 5x + 3 - 3 \leq 9 - 3 && \text{(propriedade 1.2.5 iv)} \\
 4 &< 5x \leq 6 \\
 \frac{4}{5} &< x \leq \frac{6}{5} && \text{(propriedade 1.2.5 ii)}
 \end{aligned}$$

Portanto, $\{x \mid 4/5 < x \leq 6/5\} = (4/5, 6/5]$ é a solução,
e graficamente



$$\text{(iii)} \quad \frac{x}{x+7} < 5, \quad x \neq -7.$$

Vamos multiplicar ambos os membros da desigualdade por $x + 7$. Devemos, então, considerar dois casos:

$$\begin{aligned}
 \text{Caso 1.} \quad x+7 &> 0 \text{ ou } x > -7 && \text{(propriedade 1.2.5 iv)} \\
 \text{Então,} \quad x &< 5(x+7) && \text{(propriedade 1.2.5 ii)} \\
 x &< 5x+35 \\
 x-5x &< 5x+35-5x && \text{(propriedade 1.2.5 iv)} \\
 -4x &< 35 \\
 x &> -35/4 && \text{(propriedade 1.2.5 iii)}
 \end{aligned}$$

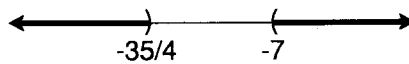
Portanto, $\{x \mid x > -7\} \cap \{x \mid x > -35/4\} = (-7, +\infty)$ é a solução do caso 1.

$$\begin{aligned}
 \text{Caso 2.} \quad x+7 &< 0 \text{ ou } x < -7. \\
 \text{Então,} \quad x &> 5(x+7) \\
 x &> 5x+35 \\
 x &< -35/4
 \end{aligned}$$

Portanto, $\{x \mid x < -7\} \cap \{x \mid x < -35/4\} = (-\infty, -35/4)$ é a solução do caso 2.

A solução final é a união de $(-7, +\infty)$ e $(-\infty, -35/4)$ ou seja $(-\infty, -35/4) \cup (-7, +\infty)$ ou ainda $x \notin [-35/4, -7]$.

Graficamente,



(iv) $(x + 5)(x - 3) > 0$.

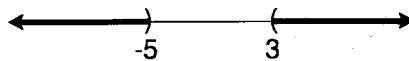
A desigualdade será satisfeita quando ambos os fatores tiverem o mesmo sinal:

Caso 1. $(x + 5) > 0$ e $(x - 3) > 0$ ou
 $x > -5$ e $x > 3$
 ou
 $x > 3$.

Caso 2. $x + 5 < 0$ e $x - 3 < 0$
 ou
 $x < -5$ e $x < 3$
 ou
 $x < -5$.

A solução final será a união entre $(3, +\infty)$ e $(-\infty, -5)$ ou seja todos os $x \notin [-5, 3]$.

Geometricamente,



2. Resolva as equações:

(i) $|5x - 3| = 7$:

Esta equação é verdadeira quando $5x - 3 = 7$ ou $5x - 3 = -7$, ou seja, $x = 2$ ou $x = -4/5$.

Portanto, as duas soluções da equação dada são:

$$x = 2 \text{ e } x = -4/5.$$

$$(ii) \quad |7x - 1| = |2x + 5|.$$

Esta equação será satisfeita se:

$$\text{Caso 1.} \quad 7x - 1 = 2x + 5$$

$$7x - 2x = 5 + 1$$

$$5x = 6$$

$$x = 6/5.$$

$$\text{Caso 2.} \quad 7x - 1 = -(2x + 5)$$

$$7x - 1 = -2x - 5$$

$$7x + 2x = -5 + 1$$

$$9x = -4$$

$$x = -4/9.$$

Portanto, a solução final é $x = 6/5$ e $x = -4/9$.

$$(iii) \quad |9x + 7| = -7.$$

Esta equação não tem solução pois o valor absoluto de um número nunca pode ser negativo.

3. Encontre os números reais que satisfaçam as seguintes desigualdades:

$$(i) \quad |7x - 2| < 4.$$

Aplicando a propriedade 1.3.3 (i),

$$-4 < 7x - 2 < 4$$

$$-4 + 2 < 7x - 2 + 2 < 4 + 2$$

$$-2 < 7x < 6$$

$$-\frac{2}{7} < x < \frac{6}{7}.$$

Portanto, $x \in (-2/7, 6/7)$.

$$(ii) \left| \frac{7-2x}{4+x} \right| \leq 2, \quad x \neq -4.$$

Aplicando a propriedade 1.3.3 (iv),

$$\frac{|7-2x|}{|4+x|} \leq 2.$$

$$|7-2x| \leq 2|4+x|.$$

Elevando ambos os lados da desigualdade ao quadrado, vem

$$49 - 28x + 4x^2 \leq 4(16 + 8x + x^2)$$

$$49 - 28x + 4x^2 \leq 64 + 32x + 4x^2$$

$$49 - 28x + 4x^2 - 64 - 32x - 4x^2 \leq 0$$

$$-60x - 15 \leq 0$$

$$-60x \leq 15$$

$$60x \geq -15$$

$$x \geq -15/60$$

$$x \geq -1/4 \text{ ou } x \in [-1/4, +\infty).$$

$$(iii) \left| \frac{3-2x}{2+x} \right| \leq 4, \quad x \neq -2.$$

$$|3-2x| \leq 4|2+x|$$

$$9 - 12x + 4x^2 \leq 16(4 + 4x + x^2)$$

$$9 - 12x + 4x^2 \leq 64 + 64x + 16x^2$$

$$-12x^2 - 76x - 55 \leq 0$$

$$12x^2 + 76x + 55 \geq 0$$

$$12(x + 5/6)(x + 11/2) \geq 0$$

$$(x + 5/6)(x + 11/2) \geq 0.$$

Procedendo como no exemplo 1 (iv) concluímos que a solução final será a união de $(-\infty, -11/2]$ e $[-5/6, +\infty)$, ou seja, $x \notin (-11/2, -5/6)$.

4. Mostre que, se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, então

$$(i) \quad (x - a)(x - b) > 0 \Rightarrow x \notin [a, b].$$

$$(ii) \quad (x - a)(x - b) \geq 0 \Rightarrow x \notin (a, b).$$

$$(iii) \quad (x - a)(x - b) < 0 \Rightarrow x \in (a, b).$$

$$(iv) \quad (x - a)(x - b) \leq 0 \Rightarrow x \in [a, b].$$

Prova de (i). $((x - a)(x - b) > 0 \Rightarrow x \notin [a, b])$.

Os dois fatores $(x - a)$ e $(x - b)$ devem ter o mesmo sinal. Temos dois casos:

$$\text{Caso 1.} \quad x - a > 0 \quad \text{e} \quad x - b > 0$$

ou

$$x > a \quad \text{e} \quad x > b.$$

A solução deste caso será $x > b$ ou $(b, +\infty)$.

$$\text{Caso 2.} \quad x - a < 0 \quad \text{e} \quad x - b < 0$$

ou

$$x < a \quad \text{e} \quad x < b.$$

A solução deste caso será $x < a$ ou $(-\infty, a)$.

Portanto, a solução final é a união entre $(-\infty, a)$ e $(b, +\infty)$ ou seja $x \notin [a, b]$.

De maneira análoga pode-se provar as demais relações.

1.6 EXERCÍCIOS

1. Determinar todos os intervalos de números que satisfaçam as desigualdades abaixo. Fazer a representação gráfica.

a) $3 - x < 5 + 3x$

b) $2x - 5 < \frac{1}{3} + \frac{3x}{4} + \frac{1 - x}{3}$

c) $2 > -3 - 3x \geq -7$

d) $\frac{5}{x} < \frac{3}{4}$

e) $x^2 \leq 9$

f) $x^2 - 3x + 2 > 0$

g) $1 - x - 2x^2 \geq 0$

h) $\frac{x + 1}{2 - x} < \frac{x}{3 + x}$

i) $x^3 + 1 > x^2 + x$

j) $(x^2 - 1)(x + 4) \leq 0$

k) $\frac{2}{x - 2} \leq \frac{x + 2}{x - 2} \leq 1$

l) $x^4 \geq x^2$

m) $\frac{x}{x - 3} < 4$

n) $\frac{1/2 x - 3}{4 + x} > 1$

o) $\frac{3}{x - 5} \leq 2$

p) $x^3 - x^2 - x - 2 > 0$

q) $x^3 - 3x + 2 \leq 0$

r) $\frac{1}{x + 1} \geq \frac{3}{x - 2}$

s) $8x^3 - 4x^2 - 2x + 1 < 0$

t) $12x^3 - 20x^2 \geq -11x + 2$

2. Resolver as equações em $\mathbb{R}$.

a) $|5x - 3| = 12$

b) $|-4 + 12x| = 7$

c) $|2x - 3| = |7x - 5|$

d) $\left| \frac{x + 2}{x - 2} \right| = 5$

e) $\left| \frac{3x+8}{2x-3} \right| = 4$

f) $|3x+2| = 5-x$

g) $|9x|-11=x$

h) $2x-7=|x|+1.$

3. Resolver as inequações em $\mathbb{R}$.

a) $|x+12| < 7$

b) $|3x-4| \leq 2$

c) $|5-6x| \geq 9$

d) $|2x-5| > 3$

e) $|6+2x| < |4-x|$

f) $|x+4| \leq |2x-6|$

g) $|3x| > |5-2x|$

h) $\left| \frac{7-2x}{5+3x} \right| \leq \frac{1}{2}$

i) $|x-1|+|x+2| \geq 4$

j) $-1 < |x+2| < 4$

k) $\left| \frac{2+x}{3-x} \right| > 4$

l) $\left| \frac{5}{2x-1} \right| \geq \left| \frac{1}{x-2} \right|$

m) $|x|+1 < x$

n) $3|x-1|+|x| < 1$

o) $|2x^2+3x+3| \leq 3$

p) $|x-1|+|x-3| < |4x|$

q) $\frac{1}{|x+1||x-3|} \geq \frac{1}{5}$

r) $\left| \frac{x-1/2}{x+1/2} \right| < 1$

s) $\left| \frac{3-2x}{1+x} \right| \leq 4$

4. Demonstrar:

a) Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $a^2 = b^2$ se e somente se $a = b$.

b) Se $x < y$, então $x < \frac{1}{2}(x + y) < y$.

c) $|x| > a$ se e somente se $x > a$ ou $x < -a$, onde $a > 0$.

d) Se $0 < a < b$, então $\sqrt{ab} < \frac{a + b}{2}$.