MAKRON
Books

CAPÍTULO 2

EDITORA DA UFSC

FUNÇÕES

Neste capítulo introduziremos um dos mais fundamentais conceitos da matemática – o de função. O conceito de função refere-se essencialmente à correspondência entre conjuntos. Uma função associa a elementos de um conjunto, elementos de outro conjunto. Em nosso estudo os conjuntos envolvidos sempre serão subconjuntos de $\mathbb{R}$. As funções neles definidas são chamadas funções reais de variável real.

2.1 DEFINIÇÃO

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma função $f: A \to B$ é uma *lei* ou regra que a *cada* elemento de A faz corresponder um único elemento de B. O conjunto A é chamado *domínio de* f e é denotado por $D(f)$. B é chamado *contradomínio* ou *campo de valores* de f.

Escrevemos:

$$f: \begin{aligned} &A \to B \\ &x \to f(x) \end{aligned}$$

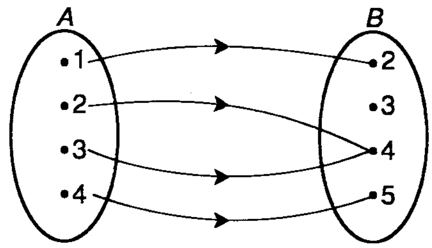
ou

$$\begin{aligned} &A \xrightarrow{f} B \\ &x \to y = f(x). \end{aligned}$$

2.2 EXEMPLOS

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

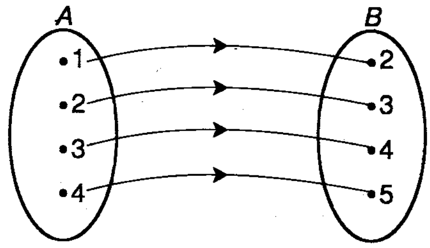
(i) $f: A \to B$ dada pelo diagrama abaixo é uma função de A em B.



(ii) $g: A \to B$

$x \to x + 1$

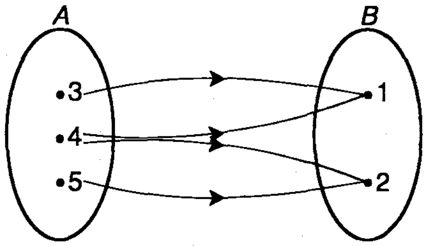
é uma função de A em B. Podemos representar g em diagrama.



2.3 CONTRA-EXEMPLOS

Sejam $A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2\}$.

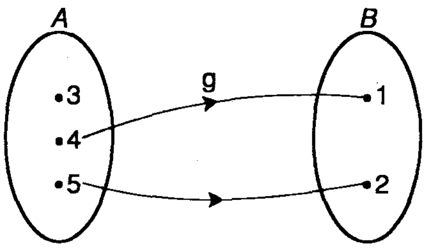
(i) $f: A \to B$ dada pelo diagrama a seguir, *não* é uma função de A em B, pois o elemento $4 \in A$ tem dois correspondentes em B.



(*ii*) $g\colon A \to B$

$x \to x - 3$

não é uma função de A em B, pois o elemento $3 \in A$ não tem correspondente em B. Podemos ver isto facilmente representando g em diagrama.



2.4 DEFINIÇÃO

Seja $f\colon A \to B$.

i) Dado $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado o *valor* da função f no ponto x ou *imagem* de x por f.

ii) O conjunto de todos os valores assumidos pela função é chamado *conjunto imagem de f* e é denotado por Im(f).

2.5 EXEMPLO

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = Z$ (conjunto dos inteiros) e $f: A \to B$ definida pela regra que a cada elemento de A faz corresponder o seu dobro.

Então:
- a regra que define f é $y = 2x$;
- a imagem do elemento 1 é 2, de 2 é 4 etc.;
- o domínio de f, $D(f) = A$;
- a imagem de f, $Im(f) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

2.6 EXEMPLO

Seja
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^2.$$

Então, $D(f) = \mathbb{R}$,

$Im(f) = [0, +\infty)$.

Quando trabalhamos com subconjuntos de $\mathbb{R}$, é usual caracterizar a função apenas pela *fórmula* ou *regra* que a define. Neste caso, entende-se que o domínio de f é o conjunto de todos os números reais para os quais a função está definida.

2.7 EXEMPLOS

Determinar o domínio e a imagem das funções abaixo:

(*i*) $f(x) = 1/x$.

Esta função só não é definida para $x = 0$. Logo, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

$Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

(*ii*) $f(x) = \sqrt{x}$.

Para $x < 0, f(x)$ não está definida. Então, $D(f) = [o, +\infty)$ e $Im(f) = [0, +\infty)$.

(*iii*) $f(x) = -\sqrt{x-1}$.

$f(x)$ não está definida para $x < 1$. $D(f) = [1, \infty)$ e $Im(f) = (-\infty, 0]$.

(*iv*) $f(x) = |x|$.

$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, +\infty)$.

2.8 GRÁFICOS

2.8.1 Definição. Seja f uma função. O gráfico de f é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ de um plano coordenado, onde x pertence ao domínio de f.

Para determinar o gráfico de uma função, assinalamos uma série de pontos, fazendo uma tabela que nos dá as coordenadas. No ponto em que estamos, não existe outro meio de determinar o gráfico a não ser este método rudimentar. No Capítulo 5, desenvolveremos técnicas mais eficazes para o traçado de gráficos.

2.8.2 Exemplos

(*i*) O gráfico da função $f(x) = x^2$ consiste em todos os pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y = x^2$. Em outras palavras, é a coleção de todos os pares (x, x^2) do plano xy. A Figura 2.1 nos mostra o gráfico desta função, onde salientamos alguns pontos, de acordo com a tabela.

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

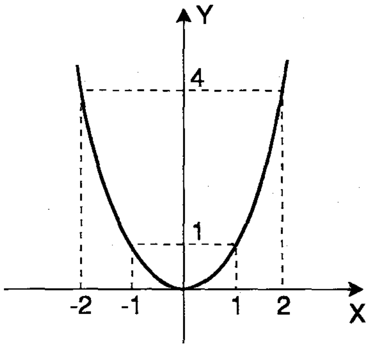


Figura 2-1

(*ii*) Consideremos a função $f(x) = x$. Os pontos de seu gráfico são os pares $(x, x) \in \mathbb{R}^2$. A Figura 2.2 mostra este gráfico.

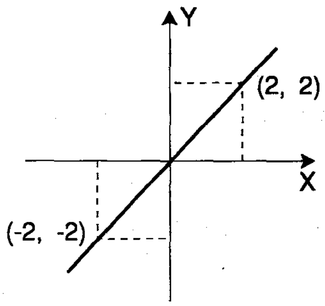


Figura 2-2

(*iii*) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{se} \quad x \leq -2 \\ 2, & \text{se} \quad -2 < x \leq 2 \\ 4, & \text{se} \quad x > 2. \end{cases}$$

O gráfico de f pode ser visto na Figura 2.3.

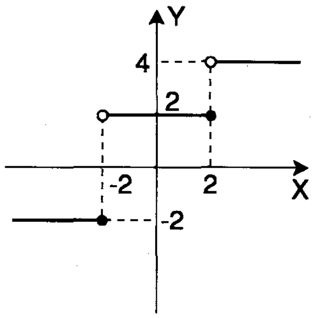


Figura 2-3

(iv) Seja $f(x) = |x|$. Quando $x \geq 0$, sabemos que $f(x) = x$. Quando $x < 0$, $f(x) = -x$. O gráfico de $|x|$ pode ser visto na Figura 2.4.

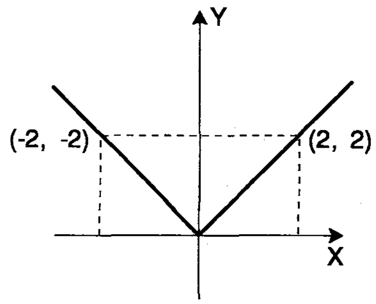


Figura 2-4

(v) Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Então, $D(f) = I\!R - \{0\}$. A Figura 2.5 mostra o gráfico de $f(x) = 1/x$.

Podemos nos perguntar se, dada uma curva c no plano xy, ela sempre representa o gráfico de uma função. A resposta é não. Sabemos que, se f é uma função, um ponto de seu domínio pode ter somente uma imagem. Assim a curva c só representa o gráfico de uma função quando qualquer reta vertical corta a curva no máximo em um ponto.

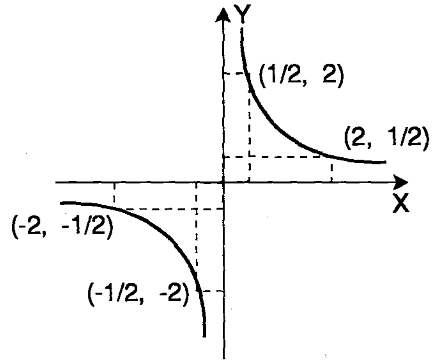


Figura 2-5

Na Figura 2.6 a curva c_1 representa o gráfico de uma função enquanto a curva c_2 não representa.

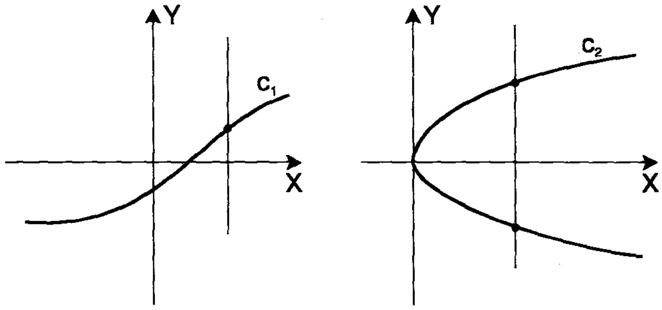


Figura 2-6

2.9 OPERAÇÕES

Assim como podemos adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números, também podemos produzir novas funções através de operações. Estas operações são definidas como segue:

2.9.1 Definição. Dadas as funções f e g, sua soma $f + g$, diferença $f - g$, produto $f \cdot g$ e quociente f/g, são definidas por:

(*i*) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;

(*ii*) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$;

(*iii*) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;

(*iv*) $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

O domínio das funções $f + g$, $f - g$ e $f \cdot g$ é a intersecção dos domínios de f e g. O domínio de f/g é a intersecção dos domínios de f e g, excluindo-se os pontos x onde $g(x) = 0$.

2.9.2 Exemplo. Sejam $f(x) = \sqrt{5 - x}$ e $g(x) = \sqrt{x - 3}$. Então,

$$(f + g)(x) = \sqrt{5 - x} + \sqrt{x - 3};$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{5 - x} - \sqrt{x - 3};$$

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{5 - x} \cdot \sqrt{x - 3} \quad \text{e}$$

$$(f/g)(x) = \frac{\sqrt{5 - x}}{\sqrt{x - 3}}.$$

Como $D(f) = (-\infty, 5]$ e $D(g) = [3, +\infty)$, então o domínio $f + g$, $f - g$ e $f \cdot g$ é $[3, 5]$.

O domínio de f/g é $(3, 5]$. O ponto 3 foi excluído porque $g(x) = 0$ quando $x = 3$.

2.9.3 Definição. Se f é uma função e k é um número real, definimos a função kf por

$$(kf)(x) = kf(x).$$

O domínio de kf coincide com o domínio de f.

2.9.4 Exemplo. Seja $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ e $k = 3$.

Então, $(kf)(x) = 3\sqrt{x^2 - 4}$ e $D(kf) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

2.9.5 Definição. Dadas duas funções f e g, a função composta de g com f, denotada por $g \circ f$, é definida por

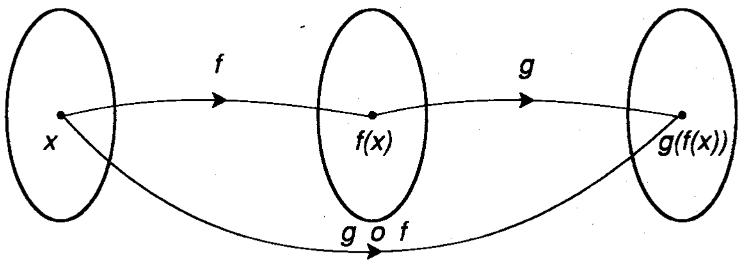
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

O domínio de $g \circ f$ é o conjunto de todos os pontos x no domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g.

Simbolicamente,

$D(g \circ f) = \{x \in D(f) \,/\, f(x) \in D(g)\}$.

Em diagrama,



2.9.6 Exemplos

(*i*) Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 1$. Encontrar $g \circ f$.

Temos,

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 1$.

Como $D(f) = [0, +\infty)$ e $Im(f) = [0, +\infty) \subset D(g) = (-\infty, +\infty)$, então,

$D(g \circ f) = D(f) = [0, +\infty)$.

(ii) Sejam $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Encontrar: *a)* $g_0 f$; *b)* $f_0 g$; *c)* $f_0 f$ e *d)* $g_0 g$.

a) $(g_0 f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = \sqrt{2x - 3}$.

O domínio de f é $D(f) = (-\infty, +\infty)$ e o domínio de g é $D(g) = [0, +\infty)$. Assim, o domínio de $g_0 f$ é o conjunto de todos os números reais x, tais que $f(x) \in [0, +\infty)$. isto é, todos os números reais tais que $2x - 3 \geq 0$. Logo, $D(g_0 f) = [3/2, +\infty)$.

b) $(f_0 g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 3$ e

$D(f_0 g) = \{x \in D(g) = [0, +\infty) \,/\, g(x) \in D(f) = (-\infty, +\infty)\} = [0, +\infty)$.

c)
$$\begin{aligned} (f_0 f)(x) &= f(f(x)) = f(2x - 3) \\ &= 2(2x - 3) - 3 \\ &= 4x - 9. \\ D(f_0 f) &= (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

d) $(g_0 g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$.

$D(g_0 g) = [0, +\infty)$.

(iii) Sejam $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

e $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Determinar $f_0 g$.

Se $x < 0$, $(f_0 g)(x) = f(g(x)) = f(1) = 1^2 = 1$.

Se $0 \leq x \leq 1$, $(f_0 g)(x) = f(g(x)) = f(2x)$.

Para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, temos $0 \leq 2x \leq 1$. Logo, neste caso, $(f_0 g)(x) = (2x)^2 = 4x^2$.

Para $\frac{1}{2} < x \leq 1$ temos $2x > 1$. Assim, para este caso, $(f_0\, g)\,(x) = 0$. Se $x > 1$, $(f_0\, g)\,(x) = f\,(g\,(x)) = f\,(1) = 1$.

$$\text{Logo, } (f_0\, g)\,(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x < 0 \\ 4x^2, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & \text{se} \quad 1/2 < x \leq 1 \\ 1, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

O domínio de $f_0\, g$ é $D(f_0\, g) = (-\infty, +\infty)$.

O gráfico de $f_0\, g$ pode ser visto na Figura 2.7.

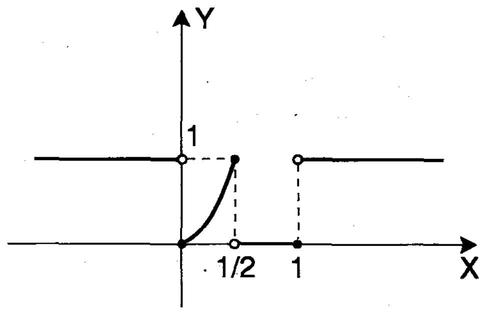


Figura 2-7

2.10 EXERCÍCIOS

1. Se $f\,(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$, achar:

(*a*) $f\,(0)$ (*b*) $f\,(-2)$

(*c*) $f\,(1/t)$ (*d*) $f\,(x-2)$

(*e*) $f\,(1/2)$ (*f*) $f\,(t^2)$

2. Se $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 7}$, determine:

(*a*) $\dfrac{5f(-1) - 2f(0) + 3f(5)}{7}$ (*b*) $[f(-1/2)]^2$

(*c*) $f(3x - 2)$ (*d*) $f(t) + f(4/t)$

(*e*) $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ (*f*) $f[f(5)]$.

3. Dada a função $f(x) = |x| - 2x$, calcular $f(-1)$, $f(1/2)$ e $f(-2/3)$. Mostrar que $f(|a|) = -|a|$.

4. Se $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ e $d = -a$, mostre que $f(f(x)) = x$.

5. Se $f(x) = x^2 + 2x$, achar $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, $h \neq 0$ e interpretar o resultado geometricamente.

6. Dada $\phi(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 7}$, forme as expressões $\phi(1/x)$ e $1/\phi(x)$.

7. Dada a função $f(x) = x^2 + 1$, mostrar que, para $a \neq 0, f(1/a) = f(a)/a^2$.

8. Dada a função $f(x) = 1/x$, mostrar que $f(1 + h) - f(1) = -h/(1 + h)$. Calcular $f(a + h) - f(a)$.

9. Seja $f(n)$ a soma dos n termos de uma progressão aritmética. Demonstrar que

$f(n + 3) - 3f(n + 2) + 3f(n + 1) - f(n) = 0$.

10. Exprimir como função de x:

a) A área de uma esfera de raio x.

b) A área de um cubo de aresta x.

c) A área total de uma caixa de volume dado V, sabendo-se que a base é um quadrado de lado x.

11. Exprimir o comprimento l de uma corda de um círculo de raio 4 cm, como uma função de sua distância x cm ao centro do círculo.

12. Seja $f(x) = (x - 2)(8 - x)$ para $2 \leq x \leq 8$.

a) Determine $f(5), f(-1/2)$ e $f(1/2)$.

b) Qual o domínio da função $f(x)$?

c) Determine $f(1 - 2t)$ e indique o domínio.

d) Determine $f[f(3)]$ e $f[f(5)]$.

e) Trace o gráfico de $f(x)$.

13. Determinar o domínio das seguintes funções:

a) $y = x^2$

b) $y = \sqrt{4 - x^2}$

c) $y = \dfrac{1}{x - 4}$

d) $y = \sqrt{x - 2}$

e) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

f) $y = \sqrt{3 + x} + \sqrt[4]{7 - x}$

g) $y = \sqrt[3]{x + 7} - \sqrt[5]{x + 8}$

h) $y = \dfrac{x + a}{x - a}$

i) $y = |x + 2| + 4, \; -5 \leq x \leq 2$

j) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x + 1}}$

k) $y = x - \dfrac{1}{x}$

l) $y = \dfrac{1}{1 + \sqrt{x}}$

14. Construir o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 + 8x + 14$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

c) $y = (x - 2)^2$

d) $y = -(x + 2)^2$

e) $y = x^3$

f) $y = 4 - x^3$

g) $f(x) = |x|, -3 \leq x \leq 3$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

i) $f(x) = \dfrac{-2}{x + 3}$

j) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ 1/2, & \text{se} \quad x = 0 \\ 1, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 2 \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 1, & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ x^2, & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$

m) $f(x) = \sqrt{2px}$.

15. Para cada uma das seguintes funções $f(x)$ esboce primeiro o gráfico de $y = f(x)$, depois o gráfico de $y = |f(x)|$ e finalmente o gráfico de $y = \dfrac{f(x)}{2} + \dfrac{|f(x)|}{2}$.

a) $f(x) = (x - 2)(x + 1)$;

b) $f(x) = x^2$;

c) $f(x) = -x^2$;

d) $f(x) = 4 - x^2$.

16. Sejam $g(x) = x - 3$ e $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}, & x \neq -3 \\ k, & x = -3. \end{cases}$

Calcule k tal que $f(x) = g(x)$ para todo x.

17. Para cada item, calcule $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f / g, $f_0\, g$, $g_0 f$, $k \cdot f$, onde k é uma constante.

a) $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = |x|$

c) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $g(x) = 1/x$

d) $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $g(x) = x - 2$

e) $f(x) = \sqrt{x - 2}$, $g(x) = \sqrt{x - 3}$

f) $f(x) = x^3$, $g(x) = 1 / \sqrt[3]{x}$.

18. Seja h definida por $h(x) = 2x - 7$. Calcule $h_0 h$, h^2 e $h + h$.

19. Sabendo que $f = g_0 h$, nos itens (*a*), (*c*) e (*d*) encontre a função h e no item (*b*) a função g.

a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + 1$

b) $f(x) = \sqrt{x + 2}$, $h(x) = x + 2$.

c) $f(x) = a + bx$, $g(x) = x + a$.

d) $f(x) = |x^2 - 3x + 5|$, $g(x) = |x|$.

20. Sendo $f(x) = ax + b$, para quais valores de a e b tem-se $(f_0 f)(x) = 4x - 9$?

21. Sejam $f(x) = \sqrt{x - 4}$ e $g(x) = 1/2x + 1$, $x \geq 3$. Calcule $f_0\, g$. Dê o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$, $g(x)$ e $(f_0 g)(x)$.

22. Sejam $f(x) = \begin{cases} 5x, & x \leq 0 \\ -x, & 0 < x \leq 8 \\ \sqrt{x}, & x > 8 \end{cases}$ e $g(x) = x^3$. Calcule $f_0 g$.

23. A função g é definida por $g(x) = x^2$. Defina uma função f tal que $(f_0 g)(x) = x$, para $x \geq 0$ e uma função h, tal que $(h_0 g)(x) = x$, para $x \leq 0$.

24. Se $f(x) = x^2$, encontre duas funções g para as quais $(f_0 g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

25. Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, encontre uma função $g(x)$ tal que $(f / g)(x) = x - 1$.

26. Dadas as funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 2x - 1$:

(a) Determine o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$.

(b) Determine o domínio e o conjunto imagem de $g(x)$.

(c) Construa os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$.

(d) Calcule $f + g$, $f - g$, $g \cdot f$, f / g, $f \circ g$ e $g \circ f$.

(e) Determine o domínio das funções calculadas no item (d).

2.11 FUNÇÕES ESPECIAIS

A seguir vamos relacionar algumas funções que chamaremos de funções especiais.

2.11.1 Função Constante. É toda função do tipo $f(x) = k$, que associa a qualquer número real x um mesmo número real k.

A representação gráfica será sempre uma reta paralela ao eixo do x, passando por $y = k$.

O domínio da função $f(x) = k$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

O conjunto imagem é o conjunto unitário $Im(f) = \{k\}$.

Exemplos.

(i) $f(x) = 2$ [Figura 2.8.(a)].

(ii) $f(x) = -3$ [Figura 2.8.(b)].

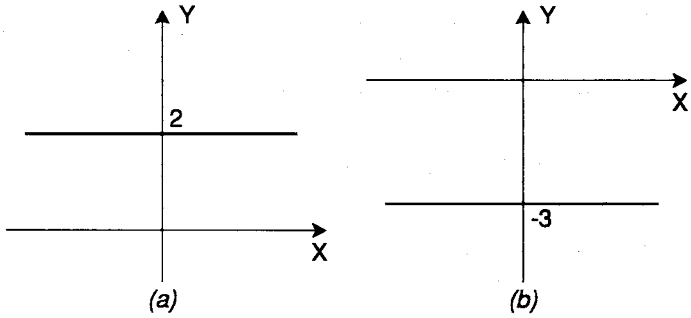


Figura 2-8

2.11.2 Função Identidade. É a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.

O gráfico desta função é uma reta bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes (Figura 2.9).

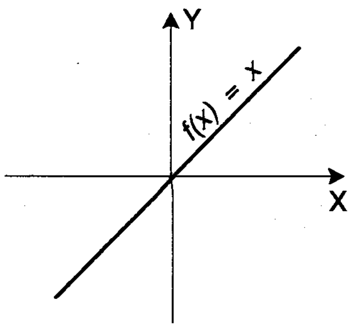


Figura 2-9

O domínio de $f(x) = x$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

O conjunto imagem é $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

2.11.3 Função do 1º Grau. Função do 1º grau é toda função que associa a cada número real x, o número real $ax + b$, $a \neq 0$. Os números reais a e b são chamados, respectivamente, de coeficiente angular e linear.

Quando $a > 0$ a função $f(x) = ax + b$ é crescente, isto é, à medida que x cresce, $f(x)$ também cresce. Quando $a < 0$ a função $f(x) = ax + b$ é decrescente, isto é, à medida que x cresce, $f(x)$ decresce.

O gráfico da função $f(x) = ax + b$ é uma reta não paralela aos eixos coordenados.

O domínio de $f(x) = ax + b$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

O conjunto imagem é $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Exemplos.

(*i*) $f(x) = 2x + 3$ é uma função do 1º grau crescente porque $a > 0$ (Figura 2.10).

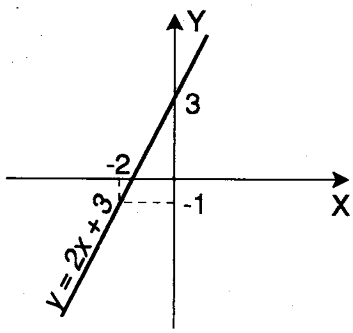


Figura 2-10

(*ii*) A função $f(x) = -3x + 1$ é uma função do 1º grau decrescente porque $a < 0$ (Figura 2.11).

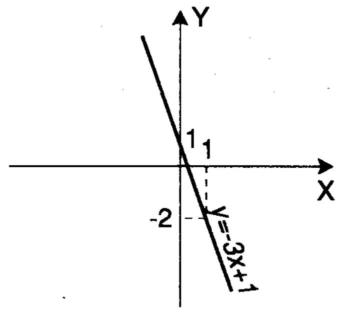


Figura 2-11

(*iii*) No movimento retilíneo uniforme, o espaço percorrido é uma função do tempo, expresso pela fórmula $s = s_0 + vt$, onde s_0 e v são constantes e $v \neq 0$. Esta função é do 1º grau.

2.11.4 Função Módulo. A função definida por $y = |x|$ chama-se função módulo. O seu domínio é o conjunto $D(f) = \mathbb{R}$ e o conjunto imagem é $Im(f) = [0, +\infty)$.

O gráfico desta função está ilustrado na Figura 2.12.

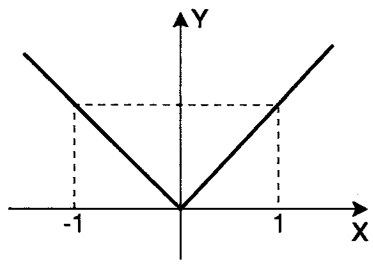


Figura 2-12

2.11.5 Função Quadrática. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ é chamada função do 2º grau ou função quadrática. Seu domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo dos y. Se o coeficiente de x^2 for positivo ($a > 0$), a parábola tem a concavidade voltada para cima. Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

A intersecção do eixo de simetria com a parábola é um ponto chamado vértice.

A intersecção da parábola com o eixo dos x define os zeros da função. No quadro seguinte caracterizamos as diversas possibilidades (Figura 2.13).

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$	$\Delta = b^2 - 4ac = 0$	$\Delta = b^2 - 4ac < 0$
a parábola intercepta o eixo dos x em dois pontos distintos.	a parábola intercepta o eixo dos x em um único ponto.	a parábola não intercepta o eixo dos x.

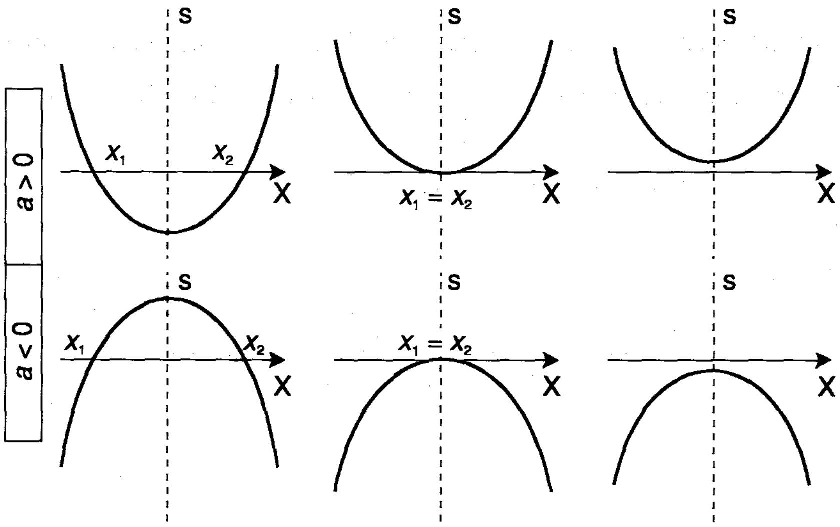


Figura 2-13

2.11.6 Função Polinomial. É a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_0 \neq 0$, são números reais chamados coeficientes e n, inteiro não negativo, determina o grau da função.

O gráfico de uma função polinomial é uma curva que pode apresentar pontos de máximos e mínimos. Posteriormente faremos esboços de gráficos dessas funções com auxílio das derivadas.

O domínio é sempre o conjunto dos números reais.

Exemplos.

(*i*) A função constante $f(x) = k$ é uma função polinomial de grau zero.

(*ii*) A função $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ é uma função polinomial do 1º grau.

(*iii*) A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ é uma função polinomial do 2º grau.

(*iv*) A função $f(x) = x^3$ é uma função polinomial chamada função cúbica.

(*v*) A função $f(x) = 5x^5 - 6x + 7$ é uma função polinomial de grau 5.

2.11.7 Função Racional. É a função definida como o quociente de duas funções polinomiais, isto é, $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$.

O domínio da função racional é o conjunto dos reais excluindo aqueles x tais que $q(x) = 0$.

Exemplos.

(*i*) A função $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ é função racional de domínio $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ (Figura 2.14).

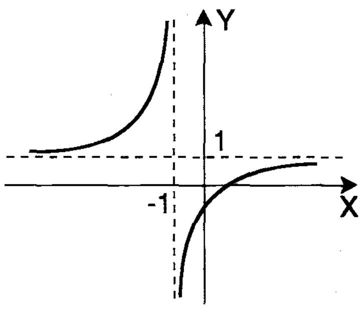


Figura 2-14

(*ii*) A função $f(x) = \dfrac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 9)}{(x^2 + x - 12)(x + 3)}$ é racional de domínio

$D(f) = \mathbb{R} - \{-4, -3, 3\}$ (Figura 2.15).

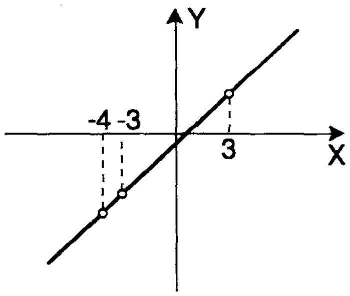


Figura 2-15

2.12 FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Dizemos que uma função $f(x)$ é *par* se, para todo x no domínio de f, $f(-x) = f(x)$.

Uma função $f(x)$ é *ímpar* se, para todo x no domínio de f, $f(-x) = -f(x)$.

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo dos y e o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Exemplos.

(*i*) A função $f(x) = x^2$ é par, já que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

(*ii*) A função $f(x) = x^5 + x^3$ é ímpar, já que $f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 = -x^5 - x^3 = -(x^5 + x^3) = -f(x)$.

(*iii*) A função $f(x) = x^3 + 4$ não é par nem ímpar.

2.13 FUNÇÕES PERIÓDICAS

Dizemos que uma função $f(x)$ é periódica se existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$.

O número T é chamado período da função $f(x)$.

O gráfico de uma função periódica se repete a cada intervalo de comprimento $|T|$.

Exemplos.

(*i*) Mais adiante, mostraremos que as funções trigonométricas $f(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = \cos x$ são periódicas de período $T = 2\pi$.

(*ii*) A função constante é periódica e tem como período qualquer número $T \neq 0$.

(*iii*) A Figura 2.16 mostra gráficos de outras funções periódicas.

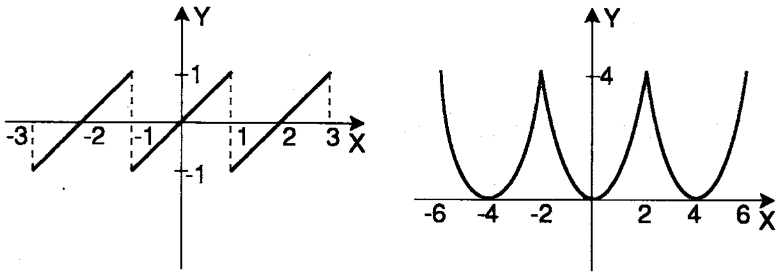


Figura 2-16

2.14 FUNÇÃO INVERSA

Seja $y = f(x)$ uma função de A em B ou $f: A \to B$. Se, para cada $y \in B$, existir ***exatamente um*** valor $x \in A$ tal que $y = f(x)$, então podemos definir uma função $g: B \to A$ tal que $x = g(y)$. A função g definida desta maneira é chamada função inversa de f e denotada por f^{-1}.

Exemplos.

(*i*) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 2x - 5$ tem como função inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $x = \frac{1}{2}(y + 5)$.

(*ii*) A função $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$ definida por $y = \frac{x - 1}{3 - x}$ admite a função inversa $f^{-1}: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ definida por $x = \frac{1 + 3y}{y + 1}$.

Graficamente, podemos determinar se uma função admite inversa. Passando uma reta paralela ao eixo dos x, esta deve cortar o gráfico em apenas um ponto. A Figura 2.17 ilustra a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = x^2$ que não possui inversa. Fazendo uma restrição conveniente no domínio, essa mesma função pode admitir inversa. Por exemplo, para $x \geq 0$ existe a inversa $x_1 = \sqrt{y}$ e para $x \leq 0$ existe a inversa $x_2 = -\sqrt{y}$.

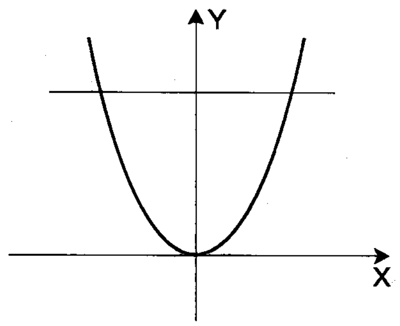


Figura 2-17

Para fazermos o gráfico da função inversa basta traçarmos a reta $y = x$ e observarmos a simetria.

Exemplos.

(*i*) A função $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definida por $f(x) = x^2$ tem como inversa a função $g: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $g(x) = \sqrt{x}$ (ver Figura 2.18).

(*ii*) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = x^3$ admite a função inversa $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sqrt[3]{x}$ (ver Figura 2.19).

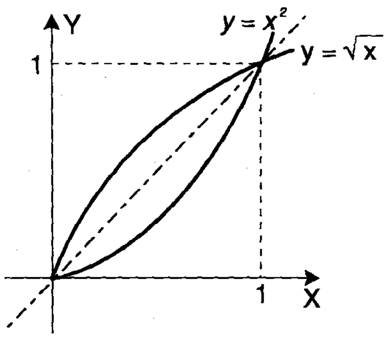


Figura 2-18

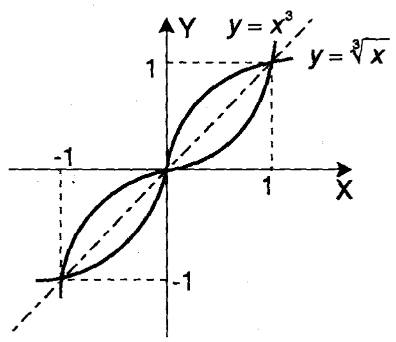


Figura 2-19

2.15 ALGUMAS FUNÇÕES ELEMENTARES

2.15.1 Função Exponencial. Chamamos de função exponencial de base a, a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número real a^x, sendo a um número real, $0 < a \neq 1$,

ou, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to y = a^x$.

O domínio da função exponencial é $D(f) = \mathbb{R}$. A imagem é $\text{Im}(f) = (0, \infty)$. Podemos também denotar $\text{Im}(f) = (0, \infty) = R_+^*$.

Com relação ao gráfico da função $f(x) = a^x$ (Figura 2.20) podemos afirmar:

1) a curva que o representa está toda acima do eixo das abcissas, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

2) corta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1);

3) $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

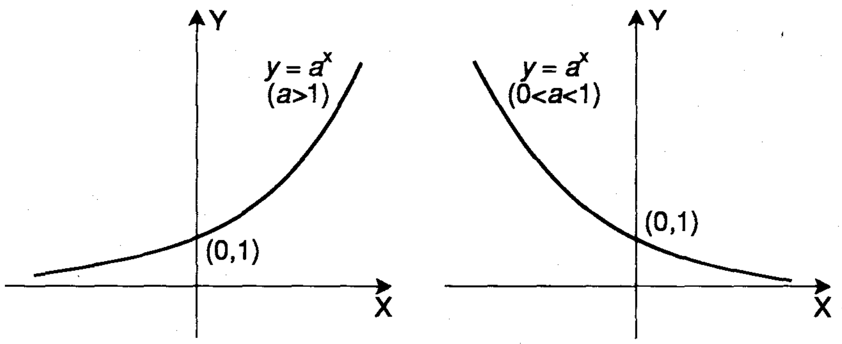


Figura 2-20

2.15.2 Função Logarítmica. Dado um número real a ($0 < a \neq 1$), chamamos função logarítmica de base a a função de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x o número $\log_a x$, isto é,

$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = \log_a x.$$

As funções f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$; $0 < a \neq 1$, são inversas uma da outra.

Temos $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

Com relação ao gráfico da função $f(x) = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) (Figura 2.21), podemos afirmar:

1) está todo à direita do eixo y;

2) corta o eixo das abscissas no ponto $(1, 0)$;

3) $f(x) = \log_a x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$;

4) é simétrico ao gráfico da função $g(x) = a^x$ em relação a reta $y = x$.

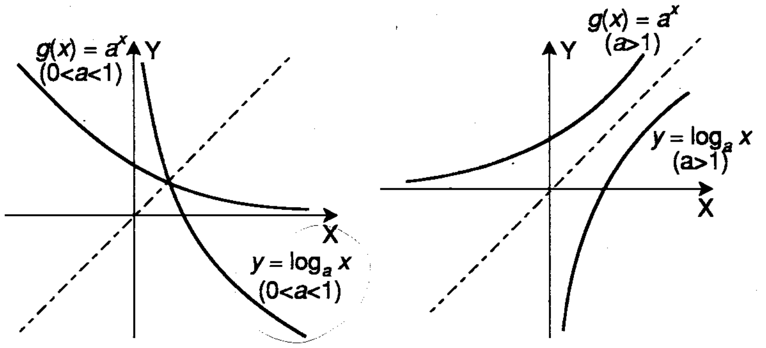


Figura 2-21

2.15.3 Funções Trigonométricas

FUNÇÃO SENO

Seja x um número real. Marcamos um ângulo com medida x radianos, na circunferência unitária com centro na origem (ver Figura 2.22). Seja P o ponto de intersecção do lado terminal do ângulo x, com essa circunferência.

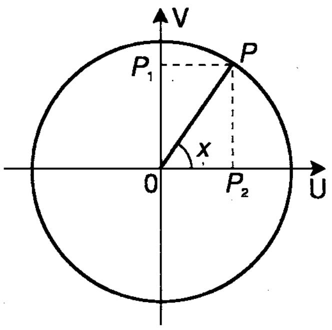


Figura 2-22

Denominamos seno de x a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema $U\,0\,V$.

Definimos a *função seno* como a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o número real $y = \text{sen } x$, isto é,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to y = \text{sen } x.$$

O domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é o intervalo $[-1, 1]$.

A função $y = \text{sen } x$ é periódica e seu período é 2π, já que $\text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } x$.

Em alguns intervalos $\text{sen } x$ é crescente e em outros é decrescente. Por exemplo, nos intervalos $[0, \pi/2]$ e $[3\pi/2, 2\pi]$ $\text{sen } x$ é crescente. Já no intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$ ela é decrescente.

O gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$, denominado senóide, pode ser visto na Figura 2.23.

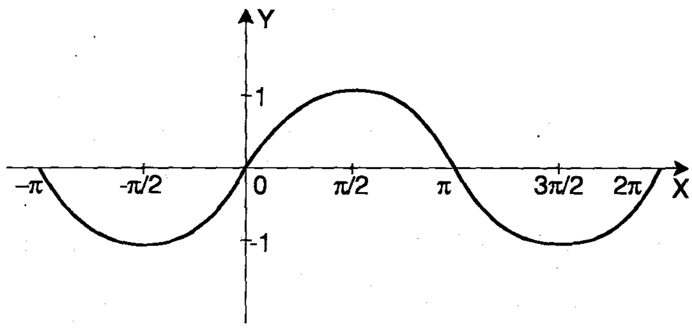


Figura 2-23

FUNÇÃO COSSENO

Seja x um número real. Denominamos cosseno de x a abcissa $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema $U\,0\,V$ (Figura 2.22). Definimos a *função cosseno* como a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o número real $y = \cos x$, isto é,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to y = \cos x.$$

O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é o intervalo $[-1, 1]$.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Portanto, a função cosseno é periódica e seu período é 2π.

Em alguns intervalos a função cosseno é crescente e em outros decrescente. Por exemplo, no intervalo $[0, \pi]$ a função $f(x) = \cos x$ é decrescente. Já no intervalo $[\pi, 2\pi]$ ela é crescente.

O gráfico da função $f(x) = \cos x$, denominado cossenóide, pode ser visto na Figura 2.24.

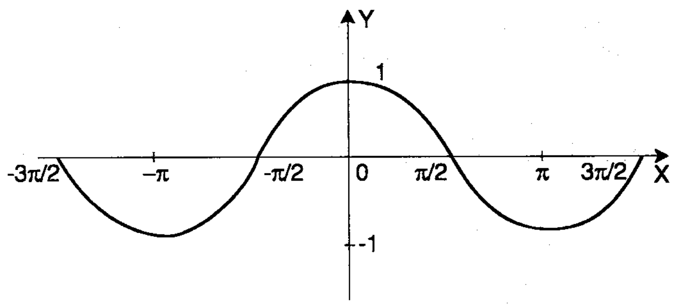


Figura 2-24

FUNÇÕES TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE E COSSECANTE

Estas funções são definidas em termos de seno e cosseno.

As funções tangente e secante são, respectivamente, denotadas pelos símbolos tg e sec e definidas por:

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad ; \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}}$$

para todos os números reais x tais que $\cos x \neq 0$.

As funções cotangente e cossecante são, respectivamente, denotadas por cotg e cosec e definidas por:

$$\boxed{\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad ; \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

para todos os números reais x tais que sen $x \neq 0$.

O domínio das funções tg x e sec x é o conjunto de todos os números reais x para os quais cos $x \neq 0$. Como cos $x = 0$ quando x for $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \ldots$, isto é, quando $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$, temos $D(\text{tg}) = D(\sec) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + n\pi,\ n \in Z\}$.

Analogamente, o domínio das funções cotangente e cossecante é o conjunto de todos os números reais x para os quais sen $x \neq 0$. Como sen $x = 0$ para $x = n\pi$, $n \in Z$, temos:

$D(\text{cotg}) = D(\text{cosec}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq n\pi,\ n \in Z\}$.

Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura 2.25. Podemos observar que as funções tangente e cotangente são periódicas de período π e que as funções secante e cossecante são periódicas de período 2π.

2.15.4 Funções Trigonométricas Inversas.

Conforme definição da seção 2.14, sabemos que é impossível definir uma função inversa para a função $y = \text{sen } x$, porque a cada valor de y corresponde uma infinidade de valores de x.

Portanto, para definirmos a função inversa de $y = \text{sen } x$ necessitamos restringir o domínio.

Este fato ocorre com todas as demais funções trigonométricas.

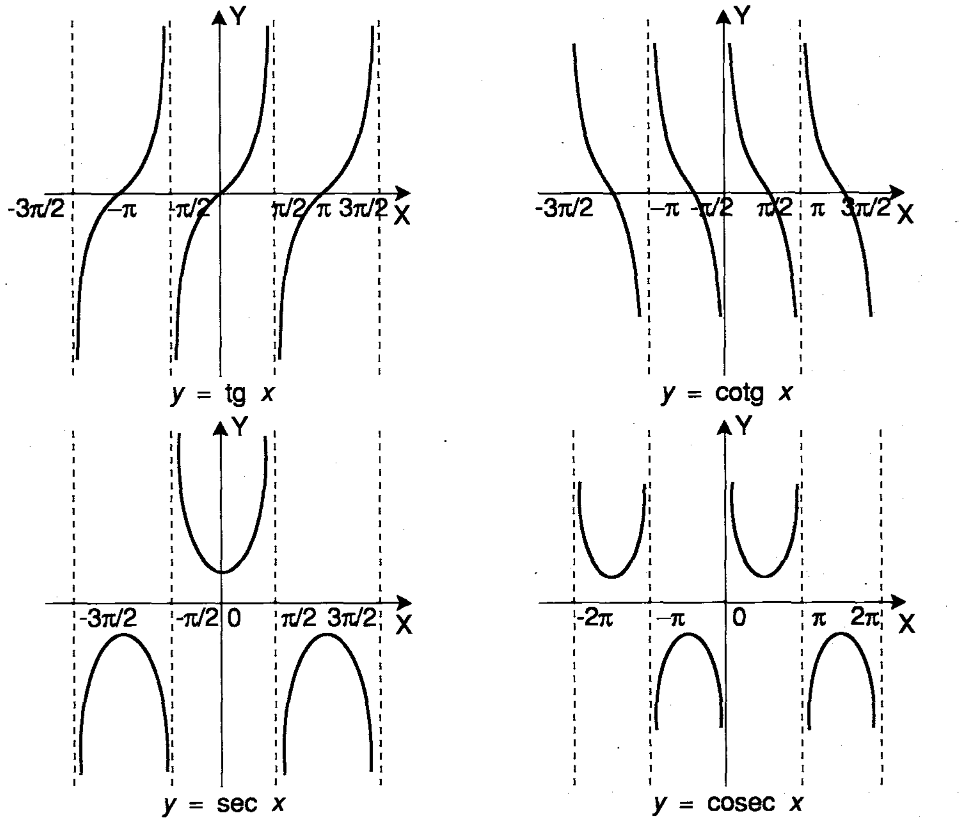


Figura 2-25

FUNÇÃO ARCO SENO

Seja f: $[-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ a função definida por $f(x) = \text{sen } x$. A função inversa da $f(x)$, será chamada arco seno, e denotada por

f^{-1}: $[-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, onde $f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$.

Simbolicamente, para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, escrevemos a equivalência:

$$\boxed{y = \text{arc sen } x \Leftrightarrow \text{sen } y = x}$$

O gráfico desta função nos mostra uma função crescente (Figura 2.26).

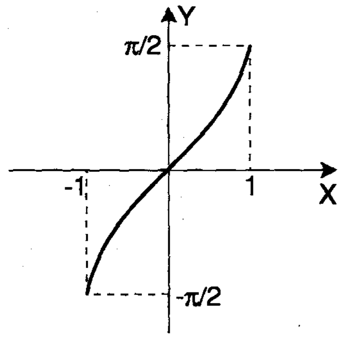


Figura 2-26

Observamos que na definição da função arco seno poderíamos ter restringido o domínio de $y = \text{sen } x$ a qualquer dos seguintes intervalos:

$[\pi/2, 3\pi/2]$, $[3\pi/2, 5\pi/2]$, $[5\pi/2, 7\pi/2]$, ..., ou

$[-3\pi/2, -\pi/2]$, $[-5\pi/2, -3\pi/2]$, $[-7\pi/2, -5\pi/2]$, ...

FUNÇÃO ARCO COSSENO

Seja f: $[0, \pi] \to [-1, 1]$ a função definida por $f(x) = \cos x$. A função inversa de f será chamada arco cosseno, e denotada por f^{-1}: $[-1, 1] \to [0, \pi]$. onde $f^{-1}(x) = \text{arc cos } x$.

Simbolicamente, para $0 \leq y \leq \pi$, escrevemos:

$$\boxed{y = \text{arc cos } x \Leftrightarrow x = \cos y}$$

O gráfico desta função nos mostra uma função decrescente (Figura 2.27).

Observação:

A função $y = \text{arc cos } x$ pode ser definida também pela equação

$$\boxed{\text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc sen } x}$$

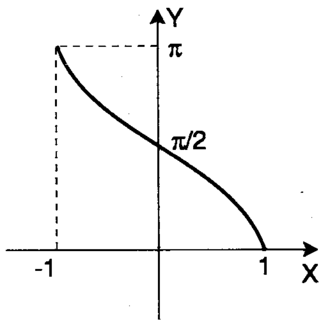


Figura 2-27

De fato, utilizando o triângulo retângulo (Figura 2.28), temos:

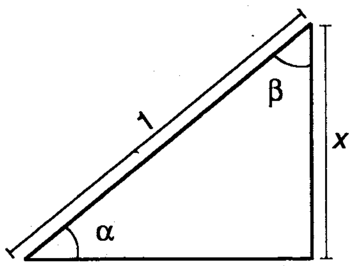


Figura 2-28

Os ângulos α e β são complementares, ou

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

e

$$x = \text{sen } \alpha = \cos \beta.$$

Portanto, $\alpha = \text{arc sen } x$ e $\beta = \text{arc cos } x$. Concluímos que

$$\text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc sen } x.$$

FUNÇÃO ARCO TANGENTE

A função inversa da tangente é definida para todo número real.

Seja f: $(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \text{tg } x$. A função inversa de f, será chamada *função arco tangente* e denotada por f^{-1}: $\mathbb{R} \to (-\pi/2, +\pi/2)$, onde $f^{-1}(x) = \text{arc tg } x$.

Simbolicamente, para $-\pi/2 < y < \pi/2$, escrevemos

$$\boxed{y = \text{arc tg } x \Leftrightarrow x = \text{tg } y}$$

O gráfico nos mostra que quando x se torna muito grande, arc tg x aproxima-se de $\pi/2$. Quando x se torna muito pequeno, arc tg x se aproxima de $-\pi/2$.

É uma função crescente (ver Figura 2-29).

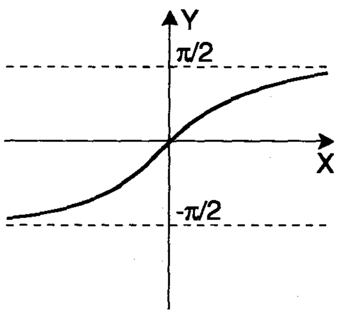


Figura 2-29

OUTRAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Podemos definir a função inversa da cotangente como

$$\boxed{y = \text{arc cotg } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } x}$$

onde $0 < y < \pi$.

As funções inversas da secante e da cossecante serão funções de x no domínio $|x| \geq 1$, desde que adotemos as definições:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \text{arc sec } x = \text{arc cos } (1/x) \\ y = \text{arc cosec } x = \text{arc sen } (1/x). \end{array}}$$

A Figura 2.30 mostra o gráfico dessas funções trigonométricas inversas.

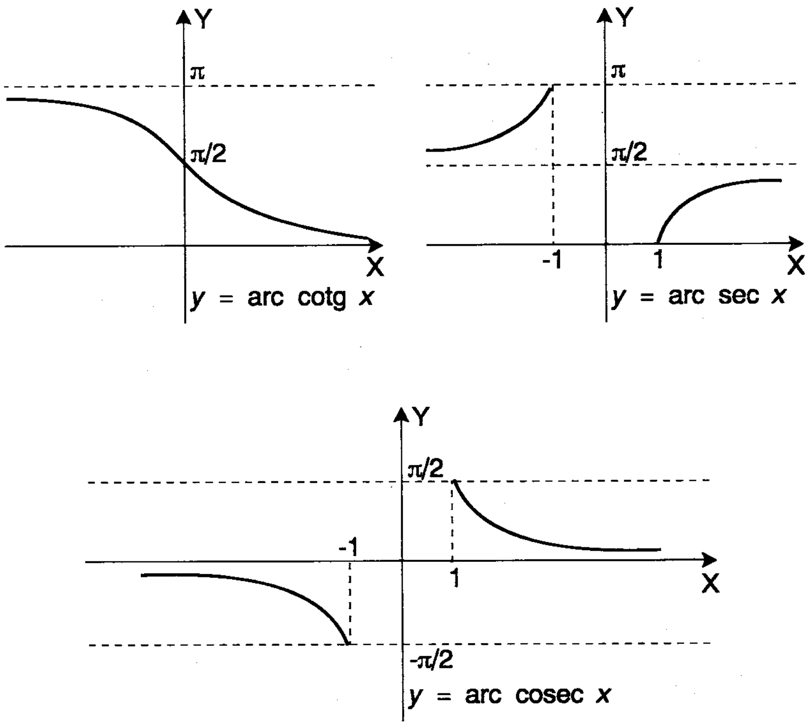


Figura 2-30

2.15.5 Funções Hiperbólicas

As expressões exponenciais

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ocorrem freqüentemente na Matemática Aplicada.

Estas expressões definem, respectivamente, as funções seno hiperbólico de x e cosseno hiperbólico de x.

O comportamento dessas funções nos leva a fazer uma analogia com as funções trigonométricas.

SENO HIPERBÓLICO E COSSENO HIPERBÓLICO

A função seno hiperbólico, denotada por senh, e a função cosseno hiperbólico, denotada por cosh, são definidas, respectivamente, por:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

O domínio e imagem das funções senh e cosh são:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\operatorname{senh}) &= (-\infty, +\infty), \\ \mathrm{D}(\cosh) &= (-\infty, +\infty), \\ \mathrm{Im}(\operatorname{senh}) &= (-\infty, +\infty) \text{ e} \\ \mathrm{Im}(\cosh) &= [1, +\infty). \end{aligned}$$

O gráfico da função senh é dado na Figura 2.31(a). Pode ser obtido pelo método chamado adição de ordenadas. Para usar essa técnica, esboçamos os gráficos das funções $\frac{1}{2}e^x$ e $-\frac{1}{2}e^{-x}$ (tracejados) e somamos as respectivas ordenadas.

Da mesma forma obtemos o gráfico da função cosh [Figura 2.31 (b)].

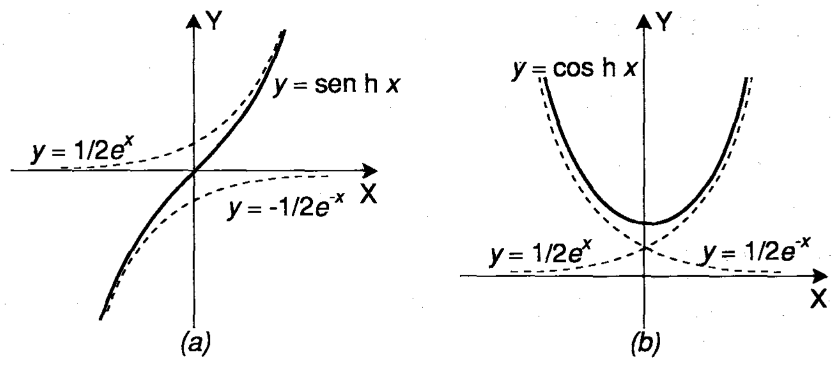


Figura 2-31

A função cosseno hiperbólico pode ser usada para descrever a forma de um cabo ou corrente flexível, uniforme, cujas extremidades estão fixas a uma mesma altura.

Na Figura 2.32 desenhamos um fio de telefone ou de luz. Observamos que a curva representada pelo fio aparenta a forma de uma parábola. No entanto, é possível mostrar que a equação correspondente é:

$y = \cosh(x/a), \quad a \in \mathbb{R}.$

Esta curva recebe a denominação *catenária.*

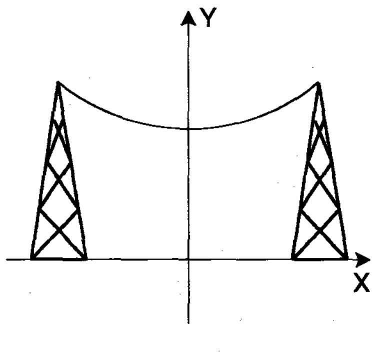


Figura 2-32

As quatro funções hiperbólicas restantes podem ser definidas em termos de senh e cosh.

TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE E COSSECANTE HIPERBÓLICAS

As funções tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas, denotadas respectivamente por tgh, cotgh, sech e cosech são definidas por:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \; ;$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \; ;$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad \text{e}$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \, .$$

Os gráficos dessas funções podem ser vistos na Figura 2.33.

Muitas identidades análogas às conhecidas para funções trigonométricas são válidas para as funções hiperbólicas. Por exemplo, pode-se verificar que

$$\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1.$$

Esta identidade é análoga à identidade trigonométrica $\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u = 1$ e pode ser usada para justificar o adjetivo "hiperbólico" nas definições.

De fato, a identidade $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$ mostra que o ponto P de coordenadas ($\cosh u$, $\operatorname{senh} u$) está sobre a hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$.

Fazendo u variar no conjunto dos reais, o ponto P descreve o ramo direito da hipérbole. Observamos que aqui a variável real u não representa um ângulo, como acontece nas funções trigonométricas. No entanto, pode-se estabelecer uma relação interessante, que fornece uma interpretação geométrica para o parâmetro u.

Na Figura 2.34(a), representamos o círculo unitário, onde demarcamos um ponto P ($\cos t$, $\operatorname{sen} t$). A área A_C do setor circular $\overset{\frown}{QOP}$ é dada por

$$\begin{aligned} A_C &= \frac{1}{2} \cdot t \cdot (1)^2 \\ &= \frac{1}{2}\, t \end{aligned}$$

e portanto, $t = 2A_C$.

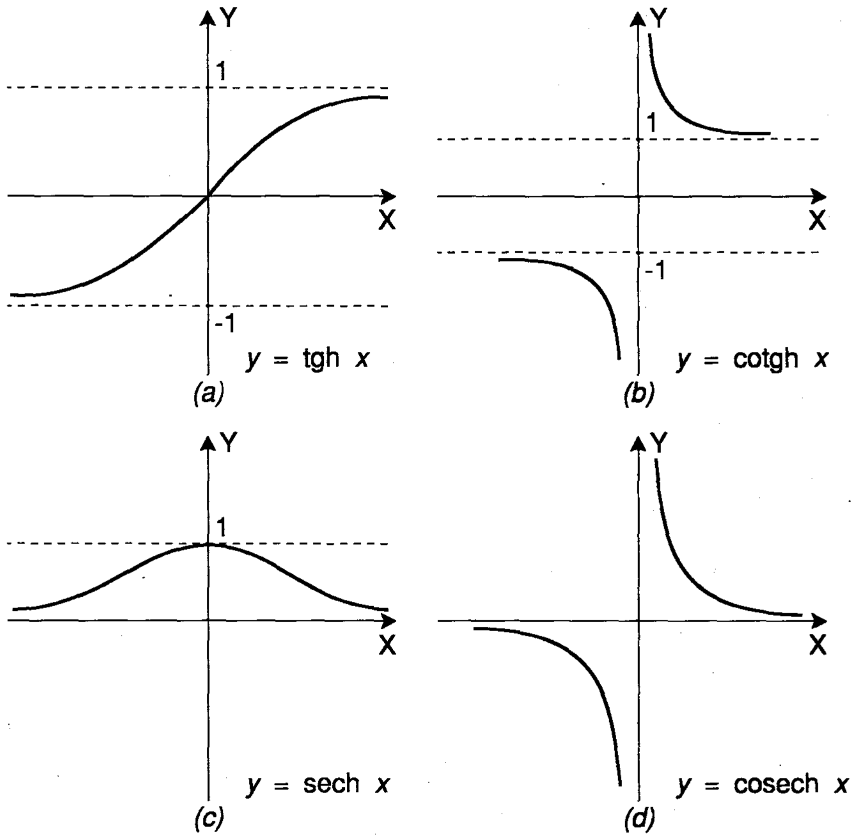


Figura 2-33

Uma relação análoga a esta, é válida para as funções hiperbólicas. De fato, é possível mostrar que a área A_h, do setor hiperbólico $\overset{\frown}{QOP}$ da Figura 2.34(b), é dada por

$$A_h = \frac{1}{2}\,u$$

e dessa forma, $u = 2A_h$.

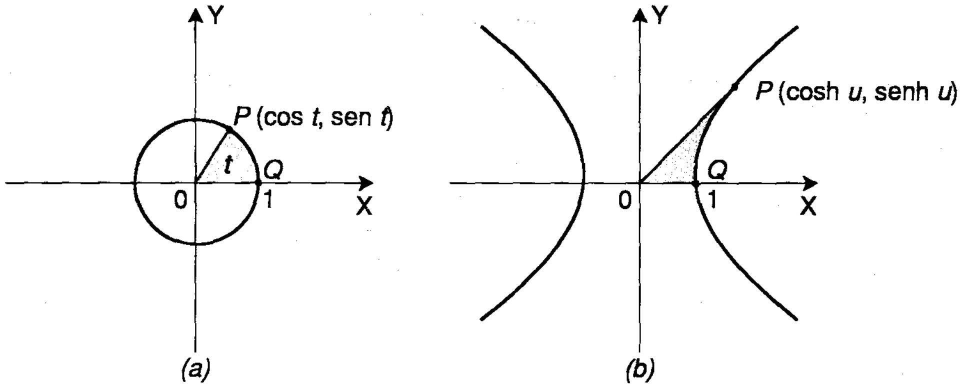


Figura 2-34

Relacionamos abaixo, outras identidades que podem facilmente ser verificadas:

$\text{tgh}\, u = \dfrac{1}{\text{cotgh}\, u}$;

$1 - \text{tgh}^2\, u = \text{sech}^2\, u$ e

$1 - \text{cotgh}^2\, u = -\text{cosech}^2\, u$.

2.15.6 Funções Hiperbólicas Inversas

Nesta seção estudaremos as funções hiperbólicas inversas. Para isso, devemos nos lembrar das definições da seção 2.15.5 e observar os gráficos das Figuras 2.31(a) e (b) e 2.33.

FUNÇÃO INVERSA DO SENO HIPERBÓLICO

Analisando o gráfico da função $y = \text{senh}\, x$ [Figura 2.31(a)], vemos que a cada valor de y na imagem corresponde um único valor de x no domínio. Assim, podemos definir a sua função inversa.

A função inversa do seno hiperbólico, chamada argumento do seno hiperbólico e denotada por arg senh, é definida como segue:

$$\boxed{y = \text{arg senh}\, x \Leftrightarrow x = \text{senh}\, y}$$

Temos D(arg senh x) = Im (arg senh x) = $\mathbb{R}$.

O gráfico da função arg senh pode ser visto na Figura 2.35. Ele é obtido fazendo uma reflexão do gráfico da função senh sobre a reta $y = x$.

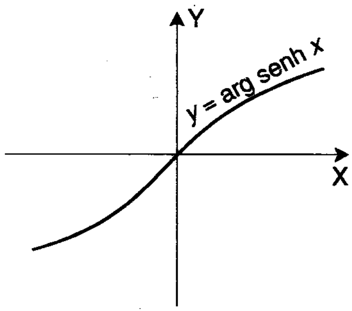


Figura 2-35

FUNÇÃO INVERSA DO COSSENO HIPERBÓLICO

Para definirmos a inversa da função cosseno hiperbólico precisamos restringir o seu domínio, pois como podemos ver no seu gráfico, Figura 2.31(b), a cada valor de y na imagem, exceto $y = 1$, correspondem dois valores de x no domínio.

Seja f: $[0, +\infty) \to [1, +\infty)$ a função dada por $f(x) = \cosh x$. A sua função inversa é chamada argumento do cosseno hiperbólico e é denotada por arg cosh. Simbolicamente, para $y \geq 0$, escrevemos

$$\boxed{y = \text{arg cosh } x \Leftrightarrow x = \cosh y}$$

Temos D(arg cosh x) = $[1, +\infty)$ e Im(arg cosh x) = $[0, +\infty)$.

O gráfico pode ser visto na Figura 2.36.

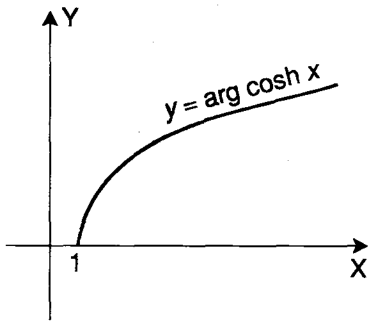


Figura 2-36

INVERSAS DAS FUNÇÕES TANGENTE HIPERBÓLICA, COTANGENTE HIPERBÓLICA E COSSECANTE HIPERBÓLICA

Para definirmos as inversas destas funções não necessitamos restringir os seus domínios, pois a cada valor de y na imagem corresponde um único valor de x no domínio [ver Figura 2.33,(a), (b) e (d)].

As funções inversas da tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica e cossecante hiperbólica, denotadas respectivamente por arg tgh, arg cotgh e arg cosech, são definidas como segue:

$$y = \text{arg tgh } x \Leftrightarrow x = \text{tgh } y$$

$$y = \text{arg cotgh } x \Leftrightarrow x = \text{cotgh } y$$

$$y = \text{arg cosech } x \Leftrightarrow x = \text{cosech } y$$

A Figura 2.37 mostra um esboço dos gráficos dessas funções.

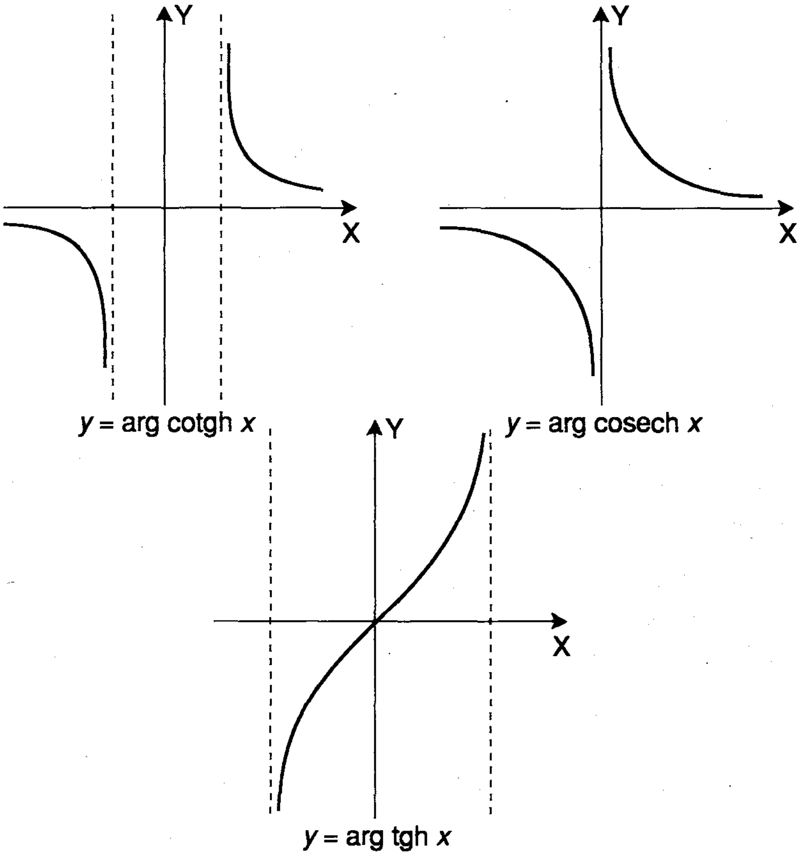


Figura 2-37

INVERSA DA FUNÇÃO SECANTE HIPERBÓLICA

Da mesma forma que ocorreu com a inversa do cosseno hiperbólico, para definirmos a inversa da função secante hiperbólica devemos restringir seu domínio.

Seja f: $[0, +\infty) \to [0, 1]$ a função dada por $f(x) = \text{sech}\, x$. A sua função inversa é denotada por arg sech. Para $y \geq 0$, temos

$$\boxed{y = \text{arg sech}\, x \Leftrightarrow x = \text{sech}\, y}$$

Na Figura 2.38 podemos ver um esboço do gráfico da função arg sech.

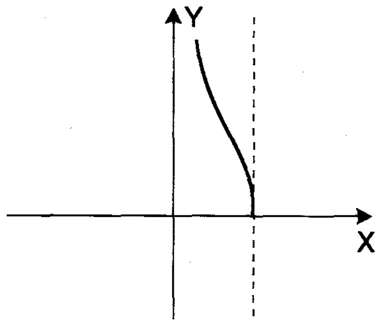


Figura 2-38

Podemos exprimir as funções hiperbólicas inversas em termos de logaritmos naturais. Isso decorre do fato das funções hiperbólicas serem definidas em termos da função exponencial, que admite a função logaritmo natural como inversa.

A seguir apresentamos essas expressões, que aparecem freqüentemente na integração.

$$\text{arg senh } x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \text{ qualquer;}$$

$$\text{arg cosh } x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \; x \geq 1;$$

$$\text{arg tgh } x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad -1 < x < 1\,;$$

$$\text{arg cotgh } x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad |x| > 1\,;$$

$$\text{arg sech } x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1;$$

$$\text{arg cosech } x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \; x \neq 0.$$

EXEMPLO. Mostrar que arg senh $x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$, para todo valor de x.

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $y = \text{arg senh } x$.

Então, $x = \text{senh } y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$

e portanto,

$e^y - 2x - e^{-y} = 0.$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por e^y, temos

$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$

Resolvendo esta equação para e^y pela fórmula quadrática, obtemos

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}\ .$$

Como $e^y > 0$ para qualquer y, a solução envolvendo o sinal negativo deve ser descartada. Portanto,

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}\ .$$

Tomando o logaritmo natural, temos

$y = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$, ou seja,

$\text{arg senh}\, x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$.

2.16 EXERCÍCIOS

1. Construir os gráficos das funções de 1º grau. Dar o domínio e o conjunto imagem.

   (*a*) $y = kx$; se $k = 0, 1, 2, 1/2, -1, -2$

   (*b*) $y = x + b$, se $b = 0, 1, -1$

   (*c*) $y = 1{,}5x + 2$.

2. Construir os gráficos das funções quadráticas. Dar o domínio e o conjunto imagem.

(*a*) $y = ax^2$, se $a = 1$, $1/2$ e -2

(*b*) $y = x^2 + c$, se $c = 0, 1, 1/2, -3$

(*c*) $y = y_0 + (x-1)^2$, se $y_0 = 0, 1, -1$

(*d*) $y = ax^2 + bx + c$, se $a = 1, b = -2$ e $c = 5$.

3. Construir os gráficos das funções polinomiais. Dar o domínio e o conjunto imagem.

(*a*) $y = 2 + (x-1)^3$ (*b*) $y = x^4$ (*c*) $y = 2x^2 - 4$.

4. Construir os gráficos das funções racionais. Dar o domínio e o conjunto imagem.

(*a*) $y = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$ (*b*) $y = \dfrac{1}{x}$ (*c*) $y = \dfrac{x-1}{x+4}$

5. A função $f(x)$ é do 1º grau. Escreva a função se

$f(-1) = 2$ e $f(2) = 3$.

6. Determinar quais das seguintes funções são pares ou ímpares

(*a*) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ (*b*) $f(x) = 5x^3 - 2x$

(*c*) $f(s) = s^2 + 2s + 2$ (*d*) $f(t) = t^6 - 4$

(*e*) $f(x) = |x|$ (*f*) $f(y) = \dfrac{y^3 - y}{y^2 + 1}$

(*g*) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ (*h*) $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x})$

(*i*) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ (*j*) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

7. Demostre que se f e g são funções ímpares, então $(f+g)$ e $(f-g)$ são também funções ímpares.

8. Demonstre que se f e g são funções ímpares, então $f \cdot g$ e f/g são funções pares.

9. Mostre que a função $\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ é par e que a função $\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ é ímpar.

10. Demonstre que qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser expressa como a soma de uma função par com uma função ímpar.

11. Expresse as funções seguintes como a soma de uma função par e uma função ímpar

(*a*) $f(x) = x^2 + 2$

(*b*) $f(x) = x^3 - 1$

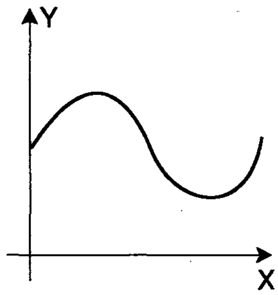
(*c*) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

(*d*) $f(x) = |x| + |x-1|$.

12. Seja $f(x)$ uma função, cujo gráfico para $x \geq 0$, tem o aspecto indicado na figura. Completar esse gráfico no domínio $x < 0$, se:

a) $f(x)$ é par;

b) $f(x)$ é ímpar.



13. Em cada um dos exercícios determine a fórmula da função inversa. Fazer os gráficos da função dada e de sua inversa.

(*a*) $y = 3x + 4$

(*b*) $y = \dfrac{1}{x-a}$

(*c*) $y = \dfrac{x+a}{x-a}$

(*d*) $y = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

(*e*) $y = \sqrt{x - 1}, \quad x \geq 1$

(*f*) $y = -\sqrt{a - x}, \quad x \leq a$

(*g*) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \geq 0$

(*h*) $y = x^2 - 4, \quad x \leq 0$

(*i*) $y = x^2 - 4, \quad x \geq 0.$

14. Mostrar que a função $y = f(x) = \dfrac{x + 2}{2x - 1}$ coincide com a sua inversa, isto é, $x = f(y)$ ou $f(f(x)) = x$.

15. Dada a função $y = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ definida para todo x real, demonstrar que sua inversa é a função $x = g(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$ definida para $|y| < 1$.

16. Seja $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ x^2, & \text{se } 1 \leq x \leq 9 \\ 27\sqrt{x}, & \text{se } x > 9. \end{cases}$

Verifique que f tem uma função inversa e encontre $f^{-1}(x)$.

17. Se $f(x)$ e $g(x)$ são periódicas de período T, prove que:

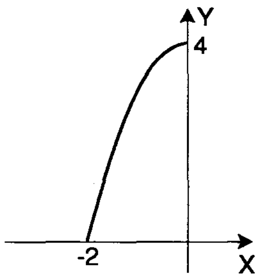
(*a*) $h(x) = f(x) + g(x)$ tem período T.

(*b*) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é periódica de período T.

(*c*) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0 \;\; \forall \; x$, é periódica de período T.

18. Se $f(x)$ é periódica de período T, prove que 3T também é período de f.

19. Sabendo que $f(x)$ é uma função par e periódica de período T = 4, complete o seu gráfico.



20. Se $f(x) = 2^x$, mostrar que

$$f(x+3) - f(x-1) = 15/2\, f(x).$$

21. Seja $\phi(x) = 1/2\,(a^x + a^{-x})$ e $\psi(x) = 1/2\,(a^x - a^{-x})$.

Demostrar que

$$\phi(x+y) = \phi(x) \cdot \phi(y) + \psi(x) \cdot \psi(y) \text{ e}$$

$$\psi(x+y) = \phi(x) \cdot \psi(y) + \phi(y) \cdot \psi(x).$$

22. Construir o gráfico das seguintes funções exponenciais.

(*a*) $y = a^x$, se $a = 2,\ 1/2,\ e\ (e = 2{,}718\ ...)$

(*b*) $y = 10^{1/x}$

(*c*) $y = e^{-x^2}$

(*d*) $y = -2^x$.

23. Dada $\phi(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$, verifique a igualdade $\phi(a) + \phi(b) = \phi\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

24. Sejam $f(x) = \log x$ e $g(x) = x^3$.

Forme as expressões

(*a*) $f[g(2)]$ (*b*) $f[g(a)]$, $a > 0$

(*c*) $g[f(a)]$, $a > 0$.

25. Construir o gráfico das seguintes funções logarítmicas.

(*a*) $y = \ln(-x)$ (*b*) $y = \ln|x|$

(*c*) $y = \ln(x + 1)$ (*d*) $y = \log_a x$ se $a = 10$, 2 e 1/2

(*e*) $y = x \ln x$.

26. Se $f(x) = \text{arc tg } x$ prove que

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right).$$

27. Prove que arc tg a – arc tg b = arc cotg b – arc cotg a.

28. Seja $f(\theta) = \text{tg } \theta$. Verifique a igualdade $f(2\theta) = \dfrac{2f(\theta)}{1 - [f(\theta)]^2}$.

29. Seja $f(x) = \text{arc cos } (\log_{10} x)$.

Calcular $f(1/10), f(1)$ e $f(10)$.

30. Determinar o domínio das seguintes funções:

(*a*) $y = \text{arc cos } \dfrac{2x}{1 + x}$ (*b*) $y = \text{arc sen } (\log_{10} x/10)$

(*c*) $y = \sqrt{\text{sen } 2x}$.

31. Construir o gráfico das seguintes funções trigonométricas. Verificar se são periódicas e em caso afirmativo determinar o período.

(a) $y = \text{sen}\, kx$, $k = 2, 3, 1/2$ e $1/3$

(b) $y = k \cos x$, $k = 2, 3, 1/2, 1/3$ e -1

(c) $y = k \cos 2x$, $k = 2, -1$ e $1/2$

(d) $y = \text{sen}\,(x - \pi/2)$

(e) $y = \cos\,(x + \pi/2)$

(f) $y = \text{tg}\,(x - 3\pi/2)$

(g) $y = \text{cotg}\,(x + \pi/4)$

(h) $y = \text{tg}\,\frac{1}{2}x$

(i) $y = 1 + \text{sen}\, x$

(j) $y = 1 + |\,\text{sen}\, 2x\,|$

32. Dada a função $f(\text{x}) = 2\,\text{senh}\, x - 3\,\text{tgh}\, x$, calcule $f(2), f(-1)$ e $f(0)$.

33. Prove as identidades:

(a) $1 - \text{tgh}^2 u = \text{sech}^2 u$

(b) $1 - \text{cotgh}^2 u = -\,\text{cosech}^2 u$.

34. Defina uma função inversa para $y = \cosh x$, para $x \leq 0$. Esboce o gráfico.

35. Mostre a validade das expressões:

(a) $\arg\cosh x = \ln\,(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$;

(b) $\arg\text{tgh}\, x = 1/2 \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$, $-1 < x < 1$;

(c) $\arg\text{sech}\, x = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$, $0 < x \leq 1$.

36. Sendo $f(x) = \cosh x$, mostre que

$$f\,[\ln\,(x + \sqrt{x^2 - 1}\,)] = x$$

37. Mostre que as funções $\text{senh}\, x$, $\text{tgh}\, x$, $\text{cotgh}\, x$ e $\text{cosech}\, x$ são ímpares.

38. Mostre que as funções $\cosh x$ e $\text{sech}\, x$ são pares.