

LIMITE E CONTINUIDADE

O objetivo deste capítulo é dar uma definição de LIMITE de uma maneira intuitiva e também de uma maneira convencional. Vamos analisar propriedades e teoremas referentes a limites de funções. Finalmente, definiremos a continuidade das funções usando limites.

3.1 NOÇÃO INTUITIVA

Inicialmente faremos algumas considerações. Sabemos que, no conjunto dos números reais, podemos sempre escolher um conjunto de números segundo qualquer regra pré-estabelecida.

Analisemos os seguintes exemplos de sucessões numéricas.

- (1) $1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- (2) $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, \dots$
- (3) $1, 0, -1, -2, -3, \dots$
- (4) $1, 3/2, 3, 5/4, 5, 7/6, 7, \dots$

Na sucessão (1), os termos tornam-se cada vez maiores sem atingir um LIMITE. Dado um número real qualquer, por maior que seja, podemos sempre encon-

trar na sucessão, um termo maior. Dizemos então que os termos dessa sucessão *tendem para o infinito* ou que o *limite da sucessão é infinito*.

Denota-se

$$x \rightarrow +\infty.$$

Na sucessão (2) os termos crescem mas não ilimitadamente. Os números aproximam-se cada vez mais do valor 1, sem nunca atingirem esse valor. Dizemos que

$$x \rightarrow 1.$$

De maneira análoga, dizemos que na sucessão (3)

$$x \rightarrow -\infty.$$

Em (4) os termos da sucessão oscilam sem tender para um limite.

Ampliaremos agora, o conceito de LIMITE para os diversos casos de *Limite de uma função*.

Observemos as seguintes funções:

Exemplo 1.

Seja $y = 1 - 1/x$ (ver Figura 3.1 e Tabela 3.1).

Tabela 3.1

x	1	2	3	4	5	6	...	500	...	1000	...
y	0	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	...	499/500	...	999/1000	...

x	-1	-2	-3	-4	-5	...	-100	...	-500	...
y	2	3/2	4/3	5/4	6/5	...	101/100	...	501/500	...

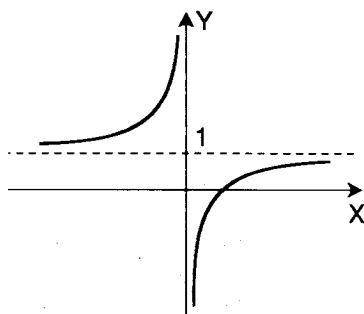


Figura 3-1

Esta função tende para 1 quando x tende para o infinito. Basta observar as tabelas e o gráfico para constatar que:

$$y \rightarrow 1 \text{ quando } x \rightarrow \pm \infty.$$

$$\text{Denota-se } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (1 - 1/x) = 1.$$

Exemplo 2.

A função $y = x^2 + 3x - 2$ tende para $+\infty$ quando $x \rightarrow \pm \infty$.

$$\text{Denota-se } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x^2 + 3x - 2) = +\infty.$$

De fato, intuitivamente, basta analisar o gráfico (Figura 3.2) e as sucessões da tabela (Tabela 3.2).

Tabela 3.2

x	1	2	3	4	5	6	7	...	100	...	1000	...
y	2	8	16	26	38	52	68	...	10298	...	1002998	...

x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	...	-100	...	-500	...
y	-4	-4	-2	2	8	16	...	9698	...	248498	...

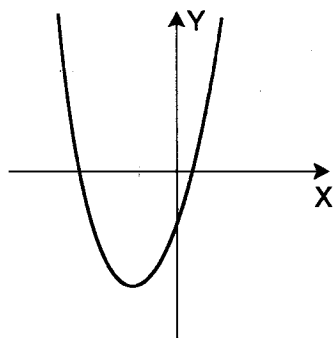


Figura 3-2

Exemplo 3.

A função $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ tende para 2 quando $x \rightarrow \pm \infty$, e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x + 1}{x - 1} = 2.$$

Tabela 3.3

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001	1,0001	...
y	3,5	5	8	14	32	302	3002	30002

x	-1	0	0,9	0,99	0,999	0,9999	...
y	0,5	-1	-28	-298	-2998	-29998	...

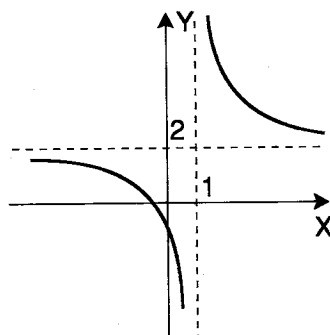


Figura 3-3

Observando a Figura 3.3 e a Tabela 3.3 ainda podemos dizer que $y \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow 1$ através de valores maiores do que 1 e que $y \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow 1$ através de valores menores do que 1. Neste caso, estamos nos referindo aos *limites laterais* denotados por:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 1}{x - 1} = +\infty \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 1}{x - 1} = -\infty,$$

respectivamente chamados *limite à direita* e *limite à esquerda*.

Exemplo 4.

A Figura 3.4 nos mostra o gráfico da função

$$y = \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

Esta função tende para o infinito quando x tende para -1 , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x + 1)^2} = +\infty$$

ou ainda,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty.$$

Tabela 3.4

x	-3	-2	-1,5	-1,25	-1,1	-1,01	-1,001	...
y	0,25	1	4	16	100	10000	1000000	...

x	1	0	-0,5	-0,75	-0,9	-0,99	-0,999	...
y	0,25	1	4	16	100	10000	1000000	...

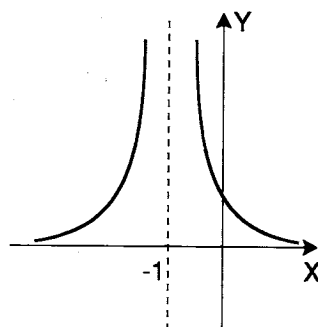


Figura 3-4

Exemplo 5.

A Figura 3.5 mostra o gráfico da função

$$y = \frac{-1}{(x-2)^2}.$$

Escrevemos $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$ ou $y \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow 2$.

Tabela 3.5

x	4	3	2,5	2,1	2,01	2,001	...
y	-0,25	-1	-4	-100	-10000	-1000000	...

x	0	1	1,5	1,9	1,99	1,999	...
y	-0,25	-1	-4	-100	-10000	-1000000	...

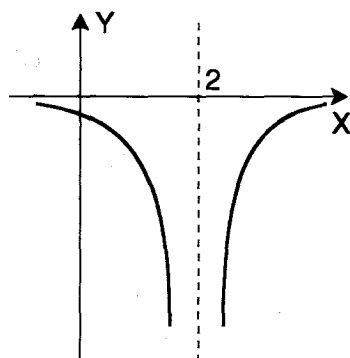


Figura 3-5

Exemplo 6.

Na Figura 3.6 temos o gráfico da função $y = 3x - 1$. De modo análogo aos exemplos anteriores, observando esse gráfico e a Tabela 3.6, podemos escrever que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - 1) = 2,$$

ou ainda,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2.$$

Tabela 3.6

x	0	0,25	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999	0,9999	...
y	-1	-0,25	0,5	1,25	1,7	1,97	1,997	1,9997	...

x	2	1,75	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001	1,0001	...
y	5	4,25	3,5	2,75	2,3	2,03	2,003	2,0003	...

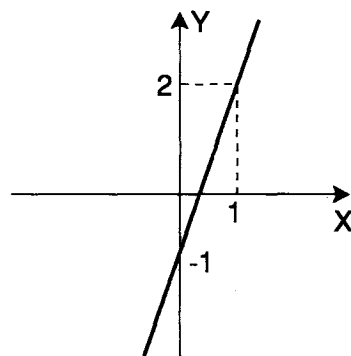


Figura 3-6

Podemos agora analisar os exemplos dados de outro modo.

No Exemplo 3.6, observa-se que é possível fazer o valor de y tão próximo de 2 quanto desejarmos, tornando x suficientemente próximo de 1, mas não necessariamente igual a 1. Ou ainda, o valor absoluto da diferença $y - 2$ tão pequeno quanto desejarmos, tornando o valor absoluto da diferença $x - 1$ suficientemente pequeno. (Observe a Tabela 3.6.)

Estamos agora aptos a formular as definições formais.

3.2 DEFINIÇÃO

Seja $f(x)$ definida num intervalo aberto I , contendo a , exceto possivelmente no próprio a . Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de a é L , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

3.3 EXEMPLOS

Usando a definição 3.2 provar que:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2.$$

De acordo com a definição 3.2 devemos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$|(3x - 1) - 2| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - 1| < \delta.$$

O exame da desigualdade envolvendo ε proporciona uma chave para a escolha de δ .

As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$|3x - 1 - 2| < \varepsilon$$

$$|3x - 3| < \varepsilon$$

$$|3(x - 1)| < \varepsilon$$

$$3|x - 1| < \varepsilon$$

$$|x - 1| < \varepsilon/3.$$

A última desigualdade nos sugere a escolha do δ .

Fazendo $\delta = \varepsilon/3$, vem que

$$|(3x - 1) - 2| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - 1| < \delta.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2$.

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16.$$

Vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$|x^2 - 16| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - 4| < \delta.$$

Da desigualdade que envolve ε , temos

$$|x^2 - 16| < \varepsilon$$

$$|x - 4| |x + 4| < \varepsilon$$

Necessitamos agora substituir $|x + 4|$ por um valor constante. Neste caso, vamos supor

$$0 < \delta \leq 1,$$

e então, de $0 < |x - 4| < \delta$, seguem as seguintes desigualdades equivalentes:

$$|x - 4| < 1$$

$$-1 < x - 4 < 1$$

$$3 < x < 5$$

$$7 < x + 4 < 9$$

Portanto, $|x + 4| < 9$.

Escolhendo $\delta = \min(\varepsilon / 9, 1)$, temos que se $|x - 4| < \delta$

então

$$\begin{aligned} |x^2 - 16| &= |x - 4| |x + 4| < \delta \cdot 9 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{9} \cdot 9 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16$.

3.4 PROPOSIÇÃO (UNICIDADE DO LIMITE)

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Prova. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon/2 \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(x) - L_2| < \varepsilon/2 \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Seja $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$. Então, $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ e $|f(x) - L_2| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Seja x tal que $0 < |x - a| < \delta$. Então, podemos escrever

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, temos $|L_1 - L_2| = 0$ e portanto $L_1 = L_2$.

3.5 PROPRIEDADES DOS LIMITES

Na Seção 3.3, usamos a definição de limite para provar que um dado número era limite de uma função. Foi um processo relativamente simples para funções lineares, que se tornou complicado para funções mais elaboradas. A seguir introduziremos propriedades que podem ser usadas para achar muitos limites sem apelar para a pesquisa do número δ que aparece na definição 3.2.

3.5.1 Proposição. Se a , m e n são números reais, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (mx + n) = ma + n.$$

Prova. Caso 1: $m \neq 0$. De acordo com a definição 3.2, dado $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$, tal que

$$|(mx + n) - (ma + n)| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Podemos obter a chave para a escolha de δ examinando a desigualdade que envolve ε . As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$|(mx + n) - (ma + n)| < \varepsilon$$

$$|mx - ma| < \varepsilon$$

$$|m| |x - a| < \varepsilon$$

$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{|m|}.$$

A última desigualdade sugere a escolha $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$.

De fato, se $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$, temos

$$|(mx + n) - (ma + n)| = |m| |x - a| < |m| \cdot \frac{\varepsilon}{|m|} \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta,$$

e portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} (mx + n) = ma + n.$$

Caso 2: $m = 0$. Se $m = 0$, então $|(mx + n) - (ma + n)| = 0$ para todos os valores de x . Logo, tomando qualquer $\delta > 0$, a definição de limite é satisfeita.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} (mx + n) = ma + n$, para quaisquer a, m e n reais.

Da proposição 3.5.1, decorre que:

(a) Se c é um número real qualquer, então

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c.$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

3.5.2 Proposição. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem, e c é um número real qualquer, então:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x);$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ desde que } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0;$$

$$(e) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n \text{ para qualquer inteiro positivo } n;$$

$$(f) \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}, \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0 \text{ e } n \text{ inteiro ou se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq 0 \text{ e } n \text{ é um inteiro positivo ímpar};$$

$$(g) \quad \lim_{x \rightarrow a} \ln [f(x)] = \ln [\lim_{x \rightarrow a} f(x)], \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0;$$

$$(h) \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos [f(x)] = \cos [\lim_{x \rightarrow a} f(x)];$$

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen} [f(x)] = \operatorname{sen} [\lim_{x \rightarrow a} f(x)];$$

$$(j) \quad \lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}.$$

Provaremos o item (a) desta proposição usando o sinal positivo.

Prova do item (a).

Sejam $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Devemos provar que existe $\delta > 0$ tal que

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\varepsilon/2 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$

Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - M| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja δ o menor dos números δ_1 e δ_2 .

Então $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$ e assim, se $0 < |x - a| < \delta$, temos

$$|g(x) - M| < \varepsilon/2 \text{ e } |f(x) - L| < \varepsilon/2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e desta forma $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M$.

3.5.3 Proposição. Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente em $x = a$, e se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

então,

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L.$$

Prova. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$. Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$.

Então, se $0 < |x - a| < \delta$ temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$ e $|g(x) - L| < \varepsilon$, ou de forma equivalente, $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$ e $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Assim, usando a hipótese, concluímos que se $0 < |x - a| < \delta$, então,

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon,$$

isto é,

$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Logo, se $0 < |x - a| < \delta$, temos que $|h(x) - L| < \varepsilon$ e, portanto, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$.

3.5.4 Exemplos.

(i) Encontrar $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + 5)$.

Temos,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= 2^2 + 3 \cdot 2 + 5 \\ &= 15. \end{aligned}$$

(ii) Encontrar $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{x^3-7}$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{x^3-7} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x-5)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^3-7)} = \frac{3-5}{27-7} = \frac{-2}{20} = -\frac{1}{10}.$$

(iii) Encontrar $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} (x^4 - 4x + 1)} \\ &= \sqrt{(-2)^4 - 4(-2) + 1} \\ &= 5. \end{aligned}$$

(iv) Encontrar $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

Neste caso, não podemos aplicar a propriedade do quociente pois $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$.

Porém, se fatoramos o numerador obtemos

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \text{ para } x \neq 1.$$

Como no processo de limite os valores de x considerados são próximos de 1, mas diferentes de 1, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2.$$

(v) Encontrar $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left| \sin \frac{1}{x} \right|$.

Vamos usar a proposição 3.5.3. Como todos os valores da função seno estão entre -1 e 1, temos

$$0 \leq \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq 1, \quad \forall x \neq 0.$$

Multiplicando a desigualdade por x^2 , temos

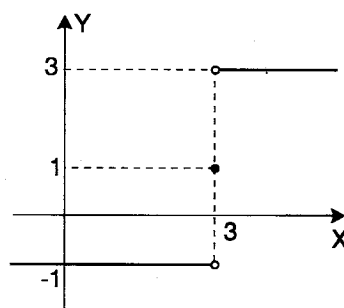
$$0 \leq x^2 \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq x^2, \quad \forall x \neq 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, pela proposição 3.5.3 concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = 0.$$

3.6 EXERCÍCIOS

1. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

•(a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x).$

•(b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x).$

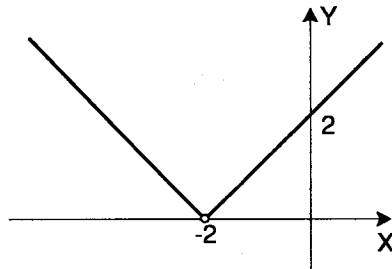
•(c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x).$

•(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$

•(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$

•(f) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x).$

2. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

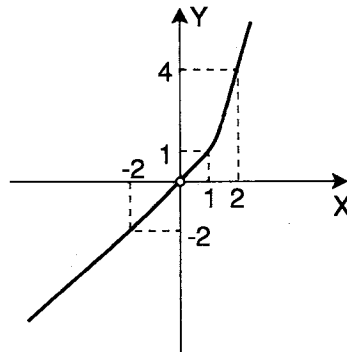
•(a) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$.

•(b) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$.

•(c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

•(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

•(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

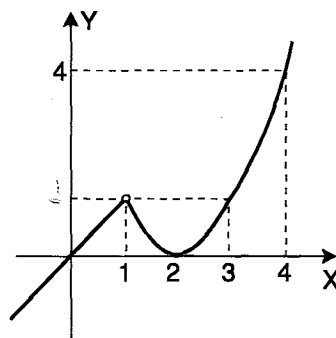
(c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

•(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

•(e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

•(f) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

4. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$

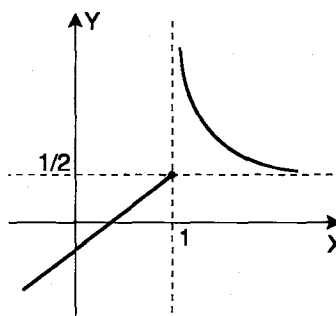
$$(b) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x).$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

5. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

6. Mostrar que existe o limite de $f(x) = 4x - 5$ em $x = 3$ e que é igual a 7.

7. Mostrar que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.

Nos exercícios 8 a 12 é dado $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Determinar um número δ para o ε dado tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

8. $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 4) = 8$, $\varepsilon = 0,01$.

9. $\lim_{x \rightarrow -1} (-3x + 7) = 10$, $\varepsilon = 0,5$.

10. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$, $\varepsilon = 0,1$.

11. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{2 - x} = \frac{-1}{3}$, $\varepsilon = 0,25$.

12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$, $\varepsilon = 0,75$.

13. Demonstrar que $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin 1/x = 0$.
 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$

14. Mostrar que:

(i) Se f é uma função polinomial, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ para todo real a .

(ii) Se g é uma função racional e a pertence ao domínio de g então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Calcular os limites nos exercícios 15 a 34, usando as propriedades de Limites.

15. $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - 7x - 5x^2)$.

16. $\lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 - 7x + 2)$.

17. $\lim_{x \rightarrow -1} (-x^5 + 6x^4 + 2).$
18. $\lim_{x \rightarrow 1/2} (2x + 7).$
19. $\lim_{x \rightarrow -1} [(x + 4)^3 \cdot (x + 2)^{-1}].$
20. $\lim_{x \rightarrow 0} [(x - 2)^{10} \cdot (x + 4)].$
21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 4}{3x - 1}.$
22. $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t + 3}{t + 2}.$
23. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$
24. $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 + 5t + 6}{t + 2}.$
25. $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 5t + 6}{t - 2}.$
26. $\lim_{s \rightarrow 1/2} \frac{s + 4}{2s}.$
27. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{2x + 3}.$
28. $\lim_{x \rightarrow 7} (3x + 2)^{2/3}.$
29. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{2x^2 - x}{3x}.$
30. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{2}}{3x - 4}.$
31. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} [2 \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{cotg} x].$
Handwritten: $\lim_{x \rightarrow \pi/2} 2 \cdot 1 - 0 + \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 2 + \frac{1}{1} = 3$
32. $\lim_{x \rightarrow 4} (e^x + 4x).$
Handwritten: $2^4 + 16 = 16 + 16 = 32$
33. $\lim_{x \rightarrow -1/3} (2x + 3)^{1/4}.$
34. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{senh} x}{4}.$
Handwritten: $\lim_{x \rightarrow 2} e^4 + \lim_{x \rightarrow 2} 4x = e^4 + 8$

3.7 LIMITES LATERAIS

3.7.1 Definição. Seja f uma função definida em um intervalo aberto (a, c) . Dizemos que um número L é o *limite à direita* da função f quando x tende para a , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a < x < a + \delta$.

Se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$, dizemos que $f(x)$ tende a L quando x tende para a pela direita. Usamos o símbolo $x \rightarrow a^+$ para indicar que os valores de x são sempre maiores do que a .

De maneira análoga, definimos limite à esquerda.

3.7.2 Definição. Seja f uma função definida em um intervalo aberto (d, a) . Dizemos que um número L é o *limite à esquerda* da função f , quando x tende para a , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a - \delta < x < a$.

Neste caso, o símbolo $x \rightarrow a^-$ indica que os valores de x considerados são sempre menores do que a .

Observação. As propriedades de limites, vistas nas proposições 3.5.1, 3.5.2 e 3.5.3 continuam válidas se substituirmos $x \rightarrow a$ por $x \rightarrow a^+$ ou $x \rightarrow a^-$.

3.7.3 Exemplos

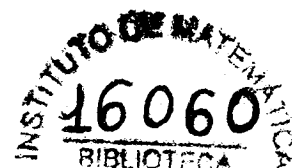
(i) Dada a função $f(x) = (1 + \sqrt{x - 3})$, determinar, se possível,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x).$$

A função dada só é definida para $x \geq 3$. Assim, não existe $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

Para calcular $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, podemos aplicar as propriedades. Temos,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (1 + \sqrt{x - 3})$$



$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} 1 + \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x - 3}$$

$$= 1 + \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3)}$$

$$= 1 + 0$$

$$= 1.$$

• (ii) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{-|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Determinar $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Esboçar o gráfico.

Se $x > 0$, então $|x| = x$ e $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$.

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 = -1$.

Se $x < 0$, então $|x| = -x$ e $f(x) = \frac{x}{-x} = 1$.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$.

O gráfico da função pode ser visto na Figura 3.7. Observamos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

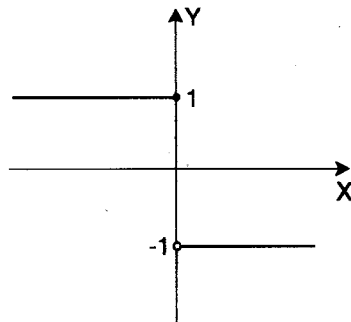


Figura 3-7

(iii) Seja $f(x) = |x|$. Determinar $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Esboçar o gráfico.

Se $x \geq 0$, então $f(x) = x$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$.

Se $x < 0$, então $f(x) = -x$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$.

A Figura 3.8, mostra o esboço do gráfico da função. Neste exemplo, podemos observar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

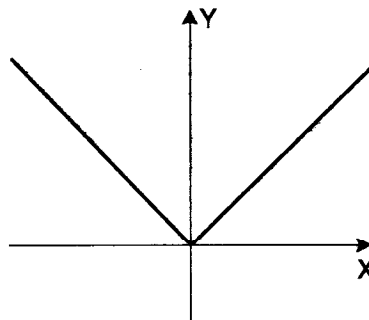


Figura 3-8

O teorema a seguir nos dá a relação existente entre *limites laterais* e *limite* de uma função.

3.7.4 Teorema. Se f é definida em um intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente no ponto a , então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

Prova. Provaremos apenas a condição suficiente. A condição necessária é consequência imediata das definições dos limites envolvidos.

Suponhamos que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$. Então, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a < x < a + \delta_1$ e existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a - \delta_2 < x < a$.

Seja $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Então $a - \delta \leq a - \delta_2$ e $a + \delta \leq a + \delta_1$, e, portanto, se $x \neq a$ e $a - \delta < x < a + \delta$, temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

De forma equivalente, $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e desta forma,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

3.7.5 Exemplos

(i) Analisando os exemplos anteriores, podemos concluir que:

(a) Também não existe $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{|x|}{x} = \frac{-0}{0} = 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$ $-\frac{3}{3} = -1$

$$+\frac{3}{3} = 1$$

$$(ii) \text{ Seja } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{para } x < 2 \\ 2, & \text{para } x = 2 \\ 9 - x^2, & \text{para } x > 2. \end{cases}$$

Determinar, se existirem, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Esboçar o gráfico da função.

Se $x > 2$, então, $f(x) = 9 - x^2$.

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (9 - x^2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 9 - \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 9 - 4 = 5.$$

Se $x < 2$, então, $f(x) = x^2 + 1$.

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 = 4 + 1 = 5.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5.$$

A Figura 3.9, mostra o gráfico de $f(x)$.

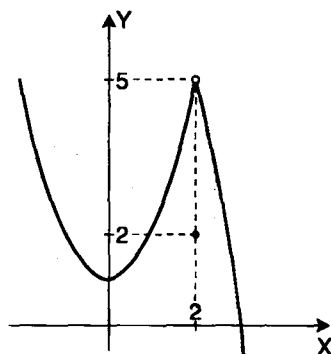


Figura 3-9

3.8 EXERCÍCIOS

1. Seja $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 3 \\ 3x - 7, & x > 3. \end{cases}$

Calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x).$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x).$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x).$

(d) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x).$

(e) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x).$

(f) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x).$

Esboçar o gráfico de $f(x)$.

2. Seja $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3. \end{cases}$

• Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$. Esboce o gráfico de $h(x)$.

3. Seja $F(x) = |x - 4|$. Calcule os limites indicados se existirem:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 4^+} F(x), \quad (b) \lim_{x \rightarrow 4^-} F(x), \quad (c) \lim_{x \rightarrow 4} F(x).$$

Esboce o gráfico de $F(x)$.

4. Seja $f(x) = 2 + |5x - 1|$. Calcule se existir:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1/5^+} f(x), \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1/5^-} f(x), \quad (c) \lim_{x \rightarrow 1/5} f(x).$$

Esboce o gráfico de $f(x)$.

$$5. \text{ Seja } g(x) = \begin{cases} \frac{|x - 3|}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3. \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico de $g(x)$.

(b) Achar, se existirem $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$.

$$6. \text{ Seja } h(x) = \begin{cases} x/|x|, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Mostrar que $h(x)$ não tem limite no ponto 0.

7. Determinar os limites à direita e à esquerda da função $f(x) = \arctg 1/x$ quando $x \rightarrow 0$.

8. Verifique se $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1}$ existe.

9. Seja $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$.

Esboce o gráfico e calcule os limites indicados se existirem:

*(a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

*(b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

*(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

*(d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

*(e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

*(f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

*(g) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

*(h) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

10. Seja $f(x) = (x^2 - 25)/(x - 5)$.

Calcule os limites indicados se existirem:

*(a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

*(b) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$.

*(c) $\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x)$.

*(d) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.

*(e) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$.

3.9 CÁLCULO DE LIMITES

Antes de apresentar exemplos de cálculo de limites, vamos falar um pouco sobre *expressões indeterminadas*. Costuma-se dizer que as expressões:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

são indeterminadas. O que significa isto?

Vejam, por exemplo, $\frac{0}{0}$.

Sejam f e g funções tais $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Nada se pode afirmar, *a priori*, sobre o limite do quociente f/g . Dependendo das funções f e g ele pode assumir qualquer valor real ou não existir. Expressamos isso, dizendo que $0/0$ é um símbolo de indeterminação.

Para comprovar o que dissemos acima, vejamos dois exemplos:

(i) Sejam $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$.

Temos, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

(ii) Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x^2$.

Temos, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ e, neste caso,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Analisaremos, agora, alguns exemplos de cálculo de limites onde os artifícios algébricos são necessários. São os casos de funções racionais em que o limite do denominador é zero num determinado ponto e o limite do numerador também é zero neste mesmo ponto.

Simbolicamente estaremos diante da indeterminação do tipo $0/0$.

Exemplo 1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4}.$

Neste caso, fatora-se o numerador e o denominador fazendo-se a seguir as simplificações possíveis. Aplicamos então a proposição 3.5.2.

Temos,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 2x + 1)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} \\&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} \\&= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 1)}{\lim_{x \rightarrow -2} (x - 2)} \\&= -9/4.\end{aligned}$$

Exemplo 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$.

Para este exemplo usaremos o artifício da racionalização do numerador da função.

Segue então,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2 - 2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Exemplo 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}.$

Neste caso faremos uma troca de variáveis para facilitar os cálculos.

Por exemplo, $x = t^6$, $t \geq 0$.

Quando $t^6 \rightarrow 1$, temos que $t \rightarrow 1$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{t^6} - 1}{\sqrt{t^6} - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t+1}{t^2+t+1} \\ &= 2/3. \end{aligned}$$

Exemplo 4. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$.

Neste exemplo, simplesmente desenvolve-se o numerador para poder realizar as simplificações.

Obtem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x. \end{aligned}$$

3.10 EXERCÍCIOS

1. Para cada uma das seguintes funções ache

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

(a) $f(x) = 3x^2$.

(b) $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$.

(c) $f(x) = 2/3 x^2$.

(d) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$.

(e) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$.

(f) $f(x) = x^3$.

Nos exercícios 2 a 25 calcule os limites.

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

3. $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^3 + 4t^2 + 4t}{(t + 2)(t - 3)}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$

5. $\lim_{t \rightarrow 5/2} \frac{2t^2 - 3t - 5}{2t - 5}$

6. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + (1 - a)x - a}{x - a}$

7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36} \cdot \frac{3}{4}$

8. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4}$

9. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}$

10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$

12. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^4 - 16}{h}$

13. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(4 + t)^2 - 16}{t}$

14. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{25 + 3t} - 5}{t}$

15. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 + bt} - a}{t}, a > 0$

16. $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h} - 1}{h - 1}$

17. $\lim_{h \rightarrow -4} \frac{\sqrt{2(h^2 - 8)} + h}{h + 4}$

18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + h} - 2}{h}$

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{-x}$

20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b}, a, b > 0$

21. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a}, a \neq 0$

$\frac{\sqrt[3]{8+h}-2}{h} = \frac{\sqrt[3]{(2+h)^3}-2}{h} = \frac{(2+h)^3-2^3}{h(\sqrt[3]{(2+h)^3}-2)}$

$\frac{8+h^3+6h^2+12h-8}{h(\sqrt[3]{(2+h)^3}-2)} = \frac{h^3+6h^2+12h}{h(\sqrt[3]{(2+h)^3}-2)} = \frac{h^2+6h+12}{\sqrt[3]{(2+h)^3}-2} = \frac{1}{12}$

$$\bullet 22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}.$$

$$\bullet 23. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}.$$

$$\bullet 24. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}.$$

$$\bullet 25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

3.11 Limites no Infinito

No exemplo 1 da seção 3.1, analisamos o comportamento da função $f(x) = 1 - 1/x$ para valores de x muito grandes.

Intuitivamente, vimos que podemos tornar o valor de $f(x)$ tão próximo de 1 quanto desejarmos, tomando para x valores suficientemente elevados. (Observar a Tabela 3.1.) Da mesma forma, fazendo x decrescer ilimitadamente vemos que $f(x)$ se aproxima desse mesmo valor 1.

Temos as seguintes definições:

3.11.1 Definição. Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$. Escrevemos,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

quando o número L satisfaz à seguinte condição:

Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > A$.

3.11.2 Definição. Seja f definida em $(-\infty, b)$. Escrevemos,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

se L satisfaz a seguinte condição:

Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $B < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x < B$.

Observação. As propriedades dos limites dadas na proposição 3.5.2 da seção 3.5, permanecem inalteradas quando substituímos $x \rightarrow a$ por $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

Temos ainda o seguinte teorema, que nos ajudará muito no cálculo dos limites no infinito.

3.11.3 Teorema. Se n é um número inteiro positivo, então:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Prova. Vamos demonstrar o item (i). Devemos provar que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$, tal que

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{sempre que } x > A.$$

O exame da desigualdade que envolve ε nos sugere a escolha de A .

As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$\left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{|x|^n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{|x|^n}} < \sqrt[n]{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{|x|} < \sqrt[n]{\varepsilon}$$

$$|x| > 1 / \sqrt[n]{\varepsilon}.$$

A última desigualdade nos sugere fazer $A = 1/\sqrt[n]{\epsilon}$.

Temos que $x > A \Rightarrow \left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \epsilon$ e desta forma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

A demonstração do item (ii) se faz de forma análoga. Sugerimos ao aluno que tente fazê-la.

3.11.4 Exemplos

(i) Determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 5}{x + 8}$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Vamos dividir o numerador e o denominador por x e depois aplicar as propriedades de limites juntamente com o teorema 3.11.3.

Temos,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 5}{x + 8} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 5/x}{1 + 8/x} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - 5/x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 8/x)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} 5/x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} 8/x} \end{aligned}$$

$$= \frac{2 - 5.0}{1 + 8.0}$$

$$= 2.$$

(ii) Encontrar $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{4x^5 - 2}$.

Novamente temos uma indeterminação do tipo ∞/∞ .

Para usarmos o teorema 3.11.3, dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x , que neste caso é x^5 .

Temos,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{4x^5 - 2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^5}}{4 - 2/x^5} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2/x^2 - 3/x^4 + 5/x^5)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (4 - 2/x^5)} \\ &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow -\infty} 1/x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow -\infty} 1/x^4 + 5 \lim_{x \rightarrow -\infty} 1/x^5}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 4 - 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} 1/x^5} \\ &= \frac{2.0 - 3.0 + 5.0}{4 - 2.0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iii) Determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{2x^2 - 5}}$.

Neste caso, dividimos o numerador e o denominador por x . No denominador tomamos $x = \sqrt{x^2}$, já que os valores de x podem ser considerados positivos ($x \rightarrow +\infty$). Temos,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{2x^2 - 5}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 5/x}{\sqrt{2x^2 - 5} / \sqrt{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + 5/x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2 - 5}{x^2}}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 - 5/x^2}} \\ &= \frac{2 + 5.0}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - 5/x^2)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2 - 5.0}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(iv) Determinar $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{2x^2 - 5}}$.

Como no exemplo (iii), dividimos numerador e denominador por x . Como neste caso $x \rightarrow -\infty$, os valores de x podem ser considerados negativos. Então, para o denominador, tomamos $x = -\sqrt{x^2}$. Temos,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + 5/x}{\sqrt{2x^2 - 5} / (-\sqrt{x^2})}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + 5/x}{-\sqrt{\frac{2x^2 - 5}{x^2}}} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + 5/x)}{-\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 5/x^2)}} \\
&= \frac{2 + 5.0}{-\sqrt{2 - 5.0}} \\
&= \frac{2}{-\sqrt{2}} \\
&= -\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

3.12 LIMITES INFINITOS

No exemplo 4 da seção 3.1, analisamos o comportamento da função $f(x) = 1/(x+1)^2$ quando x está próximo de -1 . Intuitivamente, olhando a Tabela 3.4, vemos que quando x se aproxima cada vez mais de -1 , $f(x)$ cresce ilimitadamente. Em outras palavras, podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto desejarmos, tomando para x valores bastante próximos de -1 .

Temos a seguinte definição.

3.12.1 Definição. Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto contendo a , exceto, possivelmente, em $x = a$. Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

se para qualquer $A > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

De modo semelhante, observando a Figura 3.5, do exemplo 5 da seção 3.1, podemos ver o que ocorre com uma função $f(x)$ cujos valores decrescem ilimitadamente nas proximidades de um ponto a .

3.12.2 Definição. Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto contendo a , exceto, possivelmente, em $x = a$. Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty,$$

se para qualquer $B < 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $f(x) < B$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Além dos limites infinitos definidos em 3.12.1 e 3.12.2, podemos considerar ainda os limites laterais infinitos e os limites infinitos no infinito. Existem definições formais para cada um dos seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Por exemplo, dizemos que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ se para qualquer $A > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < x - a < \delta$.

A seguir apresentamos um teorema muito usado no cálculo de limites infinitos.

3.12.3 Teorema. Se n é um número inteiro positivo qualquer, então:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty.$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Prova. Vamos provar o item (i). Devemos mostrar que para qualquer $A > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\frac{1}{x^n} > A \quad \text{sempre que } 0 < x < \delta.$$

Trabalhando com a desigualdade que envolve A , obtemos uma pista para a escolha de δ . Como $x > 0$, as desigualdades abaixo são equivalentes:

$$\frac{1}{x^n} > A$$

$$x^n < \frac{1}{A}$$

$$x < \sqrt[n]{1/A}.$$

Assim, escolhendo $\delta = \sqrt[n]{1/A}$, temos $1/x^n > A$ sempre que $0 < x < \delta$.

3.12.4 Propriedades dos Limites Infinitos.

De certo modo, a proposição 3.5.2 permanece válida para limites infinitos, embora devamos tomar muito cuidado quando combinamos funções envolvendo esses limites. A Tabela 3.7 nos dá um *resumo* dos fatos principais válidos para os limites infinitos, onde podemos ter $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$. As demonstrações não são difíceis. Provaremos o item 01 como exemplo.

Na Tabela 3.7, 0^+ indica que o limite é zero e a função se aproxima de zero por valores positivos e 0^- indica que o limite é zero e a função se aproxima de zero por valores negativos.

Tabela 3.7

	$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$h(x) =$	$\lim h(x)$	simbolicamente
01	$\pm \infty$	$\pm \infty$	$f(x) + g(x)$	$\pm \infty$	$\pm \infty \pm \infty = \pm \infty$
02	$+\infty$	$+\infty$	$f(x) - g(x)$	?	$(+\infty) - (+\infty)$ é indeterminação
03	$+\infty$	k	$f(x) + g(x)$	$+\infty$	$+\infty + k = +\infty$
04	$-\infty$	k	$f(x) + g(x)$	$-\infty$	$-\infty + k = -\infty$
05	$+\infty$	$+\infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$+\infty$	$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
06	$+\infty$	$-\infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$-\infty$	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
07	$+\infty$	$k > 0$	$f(x) \cdot g(x)$	$+\infty$	$+\infty \cdot k = +\infty, k > 0$
08	$+\infty$	$k < 0$	$f(x) \cdot g(x)$	$-\infty$	$+\infty \cdot k = -\infty, k < 0$
09	$\pm \infty$	0	$f(x) \cdot g(x)$	?	$\pm \infty \cdot 0$ é indeterminação
10	k	$\pm \infty$	$f(x)/g(x)$	0	$k/\pm \infty = 0$
11	$\pm \infty$	$\pm \infty$	$f(x)/g(x)$	?	$\pm \infty/\pm \infty$ é indeterminação
12	$k > 0$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$k/0^+ = +\infty, k > 0$
13	$+\infty$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$+\infty/0^+ = +\infty$
14	$k > 0$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$k/0^- = -\infty, k > 0$
15	$+\infty$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$+\infty/0^- = -\infty$
16	0	0	$f(x)/g(x)$	?	$0/0$ é indeterminação

Prova do item 01. Sejam f e g tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ e $h(x) = f(x) + g(x)$. Vamos provar que $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = +\infty$.

Devemos mostrar que dado $A > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $h(x) > A$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Seja $A > 0$ qualquer. Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que $f(x) > A/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$. Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $g(x) > A/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Temos, então

$h(x) = f(x) + g(x) > A/2 + A/2 = A$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e desta forma

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = +\infty.$$

3.12.5 Exemplos

(i) Determinar $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + \sqrt{x} + 1/x^2)$.

Temos,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + \sqrt{x} + 1/x^2) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^3 + \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 0} 1/x^2 \\ &= 0 + 0 + \infty \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

(ii) Determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 - 4x^3 + 1)$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Para determinar o limite usamos um artifício de cálculo. Escrevemos,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 - 4x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \left(3 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^5} \right)$$

$$= +\infty (3 - 0 + 0)$$

$$= +\infty.$$

(iii) Determinar $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x^2}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}$.

Para $x > 0$, temos $|x| = x$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Para $x < 0$, temos $|x| = -x$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x^2} = +\infty$, concluímos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2} = +\infty$.

(iv) Determinar $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x + 2}{|x + 1|}$.

Quando $x \rightarrow -1$, $|x + 1| \rightarrow 0^+$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x + 2}{|x + 1|} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (5x + 2)}{\lim_{x \rightarrow -1} |x + 1|} = \frac{-3}{0^+} = -\infty.$$

(v) Determinar $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x - 6}$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x - 6}$

e $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x - 6}$.

Temos,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{(x - 2)(x + 3)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2^+} [(x - 2)(x + 3)]} \\ &= \frac{11}{0^+} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x - 6} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 3x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2^-} [(x - 2)(x + 3)]} \\ &= \frac{11}{0^-} \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x - 6} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x - 6} \quad \text{não existe o } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x - 6}.$$

Porém, muitas vezes, calculando limites de uma maneira menos formal, escrevemos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x - 6} = \infty,$$

sem nos preocuparmos com o sinal.

(vi) Determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{x + 2}$.

Dividindo o numerador e o denominador por x^2 , temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} \\&= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} \\&= \frac{1}{0^+} \\&= +\infty.\end{aligned}$$

(vii) Determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - x^3}{8x + 2}$.

Dividindo o numerador e o denominador por x^3 , temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - x^3}{8x + 2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{x^3} - 1}{\frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^3}} \\&= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (5/x^3 - 1)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (8/x^2 + 2/x^3)}\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{0^+}$$

$$= -\infty.$$

(viii) Determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 2x + 1}{4 - x^4}.$

Dividindo o numerador e o denominador por x^4 , temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 2x + 1}{4 - x^4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{\frac{4}{x^4} - 1} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^4} - 1 \right)} \\ &= \frac{2}{-1} \\ &= -2. \end{aligned}$$

(ix) Determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2}.$

Dividindo o numerador e o denominador por x^3 , temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^3}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^3} \right)} \\
&= \frac{0}{1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(x) Mostrar que se $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ e $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$, então

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m} \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} \right)}{x^m \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^n}{x^m} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} \right)}{\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m} \right)}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^n}{x^m} \cdot \frac{a_0}{b_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m}$$

3.13 EXERCÍCIOS

1. Se $f(x) = \frac{3x + |x|}{7x - 5|x|}$, calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. Se $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$, calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Nos exercícios 3 a 40 calcule os limites.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 + 4x^2 - 1)$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} \right)$.

5. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+1}{t^2+1}$.

6. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t+1}{t^2+1}$.

7. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 - 2t + 3}{2t^2 + 5t - 3}$.

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 2}{-x^2 + 7}$.

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - x^2 + 7}{2 - x^2}$
 $\frac{3x^5 - x^2 + 7}{-x^2 - 3} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{3x^5 - x^2 + 7}{-x^2 - 3}$

10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^3 + 2}{7x^3 + 3}$

11.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x}.$$

12.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 3x - 10}{x^3}.$$

13.
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 - 1}{t - 4}.$$

14.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2x - 7 \cos x)}{3x^2 - 5 \sin x + 1}.$$

15.
$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{v\sqrt{v} - 1}{3v - 1}.$$

16.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}.$$

17.
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}.$$

18.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}).$$

19.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 - 1} - x).$$

20.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{2x}).$$

21.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2 - 3x + 4}{3x^2 - 1}.$$

22.
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}.$$

23.
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 + x^3 - x + 1}.$$

24.
$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{8 - s}{\sqrt{s^2 + 7}}.$$

25.
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7}}{x + 3}.$$

26.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^4 + 15x^3 - 2x + 1} - 2x).$$

27.
$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{3s^7 - 4s^5}{2s^7 + 1}}.$$

28.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7}}{x + 3}.$$

29.
$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{3 - y}{\sqrt{5 + 4y^2}}.$$

30.
$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{3 - y}{\sqrt{5 + 4y^2}}.$$

31.
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x - 3}.$$

32.
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x - 3}.$$

33.
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2 - 4}.$$

34.
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4}.$$

35. $\lim_{y \rightarrow 6^+} \frac{y+6}{y^2-36}$

36. $\lim_{y \rightarrow 6^-} \frac{y+6}{y^2-36}$

37. $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3-x}{x^2-2x-8}$

38. $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3-x}{x^2-2x-8}$

39. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{|x-3|}$

40. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{|x-3|}$

3.14 LIMITES FUNDAMENTAIS

Daremos a seguir três proposições que caracterizam os chamados limites fundamentais. Estaremos tratando de casos particulares de indeterminações do tipo $0/0$, 1^∞ e ∞^0 .

3.14.1 Proposição. O $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$ é igual a 1.

Prova. Consideremos a circunferência de raio 1 (Figura 3.10).

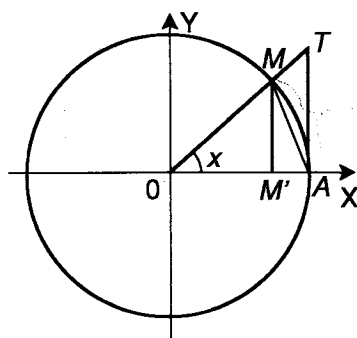


Figura 3-10

Seja x a medida em radianos do arco $\widehat{AOM}$. Limitamos a variação de x ao intervalo $(0, \pi/2)$.

Observando a Figura 3.10, escrevemos as desigualdades equivalentes:

$$\text{área } \triangle MOA < \text{área setor } MOA < \text{área } \triangle AOT$$

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{MM'}}{2} < \frac{\overline{OA} \cdot \widehat{AM}}{2} < \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AT}}{2}$$

$$\overline{MM'} < \widehat{AM} < \overline{AT}$$

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x.$$

Dividindo a última desigualdade por $\text{sen } x$, já que $\text{sen } x > 0$ para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, temos

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x} \\ 1 &> \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x. \end{aligned} \quad (1)$$

Por outro lado, $\text{sen } x/x$ e $\cos x$ são funções pares. Então,

$$\frac{\text{sen}(-x)}{(-x)} = \frac{\text{sen } x}{x} \quad \text{e} \quad \cos(-x) = \cos x.$$

Portanto, a desigualdade (1) vale para qualquer x , $x \neq 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, pela proposição 3.5.3, segue que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

3.14.2 Exemplos

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{x}.$$

Por 3.14.1, podemos calcular limites do tipo

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{u},$$

onde u é uma função em x .

Neste exemplo, $u = 2x$ e $u \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{u/2} = 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{u} = 2 \cdot 1 = 2.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 4x}.$$

Neste caso, faremos inicialmente alguns artifícios de cálculo como segue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen } 3x}{3x} \cdot 3x}{\frac{\text{sen } 4x}{4x} \cdot 4x} \\ &= \frac{3}{4} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 4x}{4x}} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Temos neste caso,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

3.14.3 Proposição. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$, onde e é o número irracional neperiano cujo valor aproximado é 2,718281828459 ...

Prova. A prova desta proposição envolve noções de séries, por este motivo será aqui omitida.

3.14.4 Exemplos

$$(i) \text{ Provar que } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Em primeiro lugar provaremos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{1/x} = e$.

De fato, fazendo $x = 1/t$ temos que $t \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow 0^+$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + 1/t)^t = e.$$

Da mesma forma, prova-se que $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x)^{1/x} = e$.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$.

(ii) Determinar $\lim_{t \rightarrow 0} \ln(1 + t)^{1/t}$.

Usando a proposição 3.5.2(g), temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1 + t)^{1/t} &= \ln \left[\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} \right] \\ &= \ln e \\ &= 1. \end{aligned}$$

3.14.5 Proposição. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0, a \neq 1).$

Próva. Fazendo $t = a^x - 1$, temos

$$a^x = t + 1. \tag{1}$$

Aplicando os logaritmos neperianos na igualdade (1), vem

$$\ln a^x = \ln(t + 1)$$

$$x \ln a = \ln(t + 1)$$

$$x = \frac{\ln(t+1)}{\ln a}.$$

Quando $x \rightarrow 0$, $x \neq 0$ temos que $t \rightarrow 0$, $t \neq 0$ e então podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{\ln a}}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}} \\ &= \ln a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}} \\ &= \ln a \cdot \frac{\lim_{t \rightarrow 0} 1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t}}. \end{aligned}$$

Considerando o exemplo 3.14.4(ii), concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

3.14.6 Exemplos

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}.$$

Temos,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x \left[\frac{a^x}{b^x} - 1 \right]}{x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} b^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1}{x} \\
 &= 1 \cdot \ln \frac{a}{b} \\
 &= \ln a/b.
 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - a^{x-1}}{x^2 - 1}.$$

Neste exemplo, utilizamos artifícios de cálculo para aplicarmos a proposição 3.14.5.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - a^{x-1}}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{x-1} - 1) - (a^{x-1} - 1)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{x-1} - 1}{x-1} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{x-1} - 1}{x-1} \right].
 \end{aligned}$$

Fazemos $t = x - 1$ e consideramos que, quando $x \rightarrow 1$, $x \neq 1$, temos $t \rightarrow 0$, $t \neq 0$.

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - a^{x-1}}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (\ln e - \ln a)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \ln a).$$

3.15 EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 27, calcule os limites aplicando os limites fundamentais.

•1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 9x}{x}.$

•2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{3x}.$

•3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 10x}{\operatorname{sen} 7x}.$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}, b \neq 0.$

•5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x}.$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x/2}{x^3}.$

7. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{x+1}{4}}{(x+1)^3}.$

•8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}.$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

10. $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) \cdot \operatorname{cosec} \pi x.$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \operatorname{sen} 2x}{2x + 3 \operatorname{sen} 4x}.$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}.$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \cos x + \cos 2x}{x^2}.$

14. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^{n+5}.$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 1/\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (1 + \cos x)^{1/\cos x}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^x.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10^{x-2} - 1}{x - 2}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\frac{x+3}{4^{\frac{x+3}{5}}} - 1}{x + 3}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5^x - 25}{x - 2}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{3^{\frac{x-1}{4}}} - 1}{\operatorname{sen}[5(x-1)]}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tgh} ax}{x}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\operatorname{sen} ax - \operatorname{sen} bx}.$$

3.16 CONTINUIDADE

Quando definimos $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ analisamos o comportamento da função $f(x)$ para valores de x próximos de a , mas diferentes de a . Em muitos exemplos vimos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ pode existir, mesmo que f não seja definida no ponto a . Se f está definida em a e $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, pode ocorrer que este limite seja diferente de $f(a)$.

Quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ diremos, de acordo com a definição abaixo, que f é contínua em a .

3.16.1 Definição. Dizemos que uma função f é contínua no ponto a se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (a) f é definida no ponto a ;
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe;
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

A Figura 3.11, mostra esboços de gráficos de funções que não são contínuas em a .

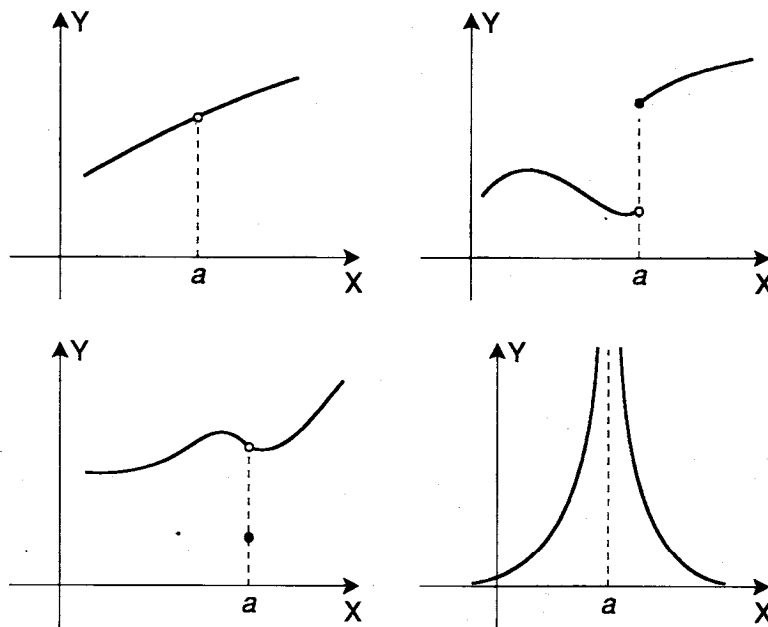


Figura 3-11

3.16.2 EXEMPLOS

(i) Sejam $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ e

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & , \text{ se } x = 1. \end{cases}$$

As funções f e g não são contínuas em $a = 1$. A função f não está definida em $a = 1$. Portanto, não satisfaz a condição (a) da definição 3.16.1. Já para a função g , temos $g(1) = 1$, mas

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Logo, a condição (c) não se verifica no ponto $a = 1$.

A Figura 3.12, mostra um esboço do gráfico dessas funções.

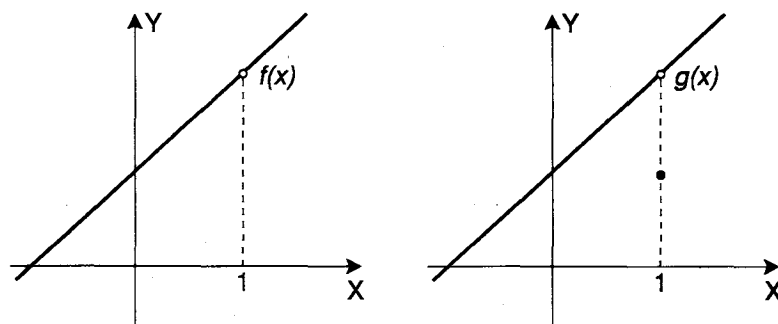


Figura 3-12

(ii) Sejam $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ e

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-2)^2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

As funções f e g não são contínuas no ponto $a=2$. A função f não está definida neste ponto e a função g , embora esteja definida em $a=2$, não cumpre a condição (c) da definição 3.16.1 pois $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \neq g(2)$.

A Figura 3.13, mostra os gráficos dessas funções.

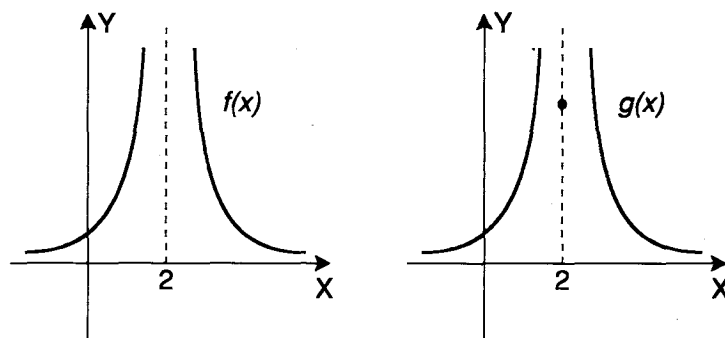


Figura 3-13

(iii) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

f não é contínua no ponto $a = 0$. De fato, se $x > 0$, $f(x) = \frac{x}{x} = 1$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1. \text{ Se } x < 0, f(x) = \frac{x}{-x} = -1.$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$. Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e dessa forma f não é contínua em $a = 0$.

Na Figura 3.14, podemos ver um esboço do gráfico dessa função.

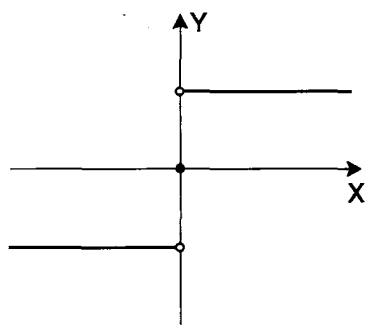


Figura 3-14

$$(iv) \text{ Seja } h(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{se } x \geq -1 \\ -x + 1, & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

h é contínua em todos os pontos.

De fato, seja $a \in \mathbb{R}$. Se $a > -1$, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x + 3) = a + 3 = h(a).$$

Se $a < -1$, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} (-x + 1) = -a + 1 = h(a).$$

Se $a = -1$, temos

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 3) = -1 + 3 = 2 = h(-1) \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x + 1) = -(-1) + 1 = 2.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = 2 = h(-1).$$

Podemos ver um esboço do gráfico de $h(x)$, na Figura 3.15.

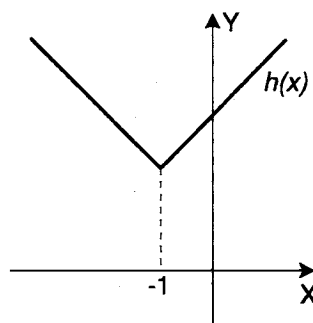


Figura 3-15

$$(v) \text{ Seja } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & \text{se } x \neq -2 \\ 3, & \text{se } x = -2. \end{cases}$$

Então, a função g não é contínua em $x = -2$, pois

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty.$$

Neste caso, embora a função g seja definida em $a = -2$, $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ não existe.

Podemos ver um esboço do gráfico de $g(x)$ na Figura 3.16.

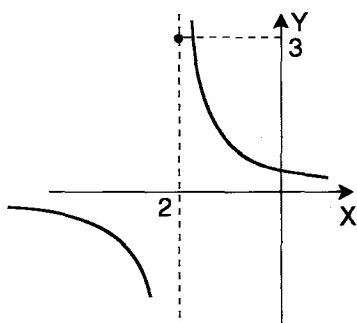


Figura 3-16

PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS

3.16.3 Proposição. Se as funções f e g são contínuas em um ponto a , então:

- (i) $f + g$ é contínua em a ;
- (ii) $f - g$ é contínua em a ;
- (iii) $f \cdot g$ é contínua em a ;
- (iv) f/g é contínua em a , desde que $g(a) \neq 0$.

Prova. Vamos provar o item (iv). Os demais ficam como exercício.

Suponhamos que $g(a) \neq 0$. Então f/g é definida no ponto a .

Como f e g são contínuas no ponto a , temos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Assim, pela proposição 3.5.2, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = (f/g)(a).$$

Logo, f/g é contínua no ponto a .

3.16.4 Proposição.

- (i) Uma função polinomial é contínua para todo número real.
- (ii) Uma função racional é contínua em todos os pontos de seu domínio.
- (iii) As funções $f(x) = \sin x$ e $f(x) = \cos x$ são contínuas para todo número real x .
- (iv) A função exponencial $f(x) = e^x$ é contínua para todo número real x .

A prova dessa proposição segue diretamente das propriedades de limites.

3.16.5 Proposição. Sejam f e g funções tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e g é contínua em b .

Então $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(b)$, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = g \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right].$$

Prova. Queremos mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(b)$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que

$$|(g \circ f)(x) - g(b)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Como g é contínua em b , por definição, $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = g(b)$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, tal que $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |y - b| < \delta_1$.

Como para $y = b$, temos $|g(y) - g(b)| = 0 < \varepsilon$, podemos escrever

$$|g(y) - g(b)| < \varepsilon, \quad \text{sempre que} \quad |y - b| < \delta_1. \quad (1)$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\delta_1 > 0$, pela definição de limite, $\exists \delta > 0$, tal que

$$|f(x) - b| < \delta_1 \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Portanto, se $0 < |x - a| < \delta$, $y = f(x)$ satisfaz (1) e dessa forma

$$|g[f(x)] - g(b)| < \varepsilon.$$

3.16.6 Proposição. Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então a função composta $g \circ f$ é contínua no ponto a .

Prova. Como f é contínua no ponto a , temos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Como g é contínua em $f(a)$, podemos aplicar a proposição 3.16.5. Temos, então

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) &= g \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] = g[f(a)] \\ &= (g \circ f)(a). \end{aligned}$$

Logo, $g \circ f$ é contínua em a .

3.16.7 Proposição. Seja $y = f(x)$ uma função definida e contínua num intervalo I . Seja $J = \text{Im}(f)$. Se f admite uma função inversa $g = f^{-1}: J \rightarrow I$, então g é contínua em todos os pontos de J .

Observamos que, com o auxílio desta proposição, podemos analisar a continuidade das diversas funções inversas definidas no Capítulo 2. Por exemplo, a função

$$g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{matrix} x \\ \ln x \end{matrix}$$

$$x \rightarrow \ln x$$

é contínua, já que ela é a inversa da função exponencial $f(x) = e^x$.

3.16.8 Definição. Seja f definida num intervalo fechado $[a, b]$.

- (i) Se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, dizemos que f é *contínua à direita* no ponto a .
- (ii) Se $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$, dizemos que f é *contínua à esquerda* no ponto b .
- (iii) Se f é contínua em todo ponto do intervalo aberto (a, b) , f é contínua à direita em a e contínua à esquerda em b , dizemos que f é *contínua no intervalo fechado* $[a, b]$.

3.16.9 Teorema do Valor Intermediário. Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e L é um número tal que $f(a) \leq L \leq f(b)$ ou $f(b) \leq L \leq f(a)$, então existe pelo menos um $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = L$ (Ver Figura 3.17).

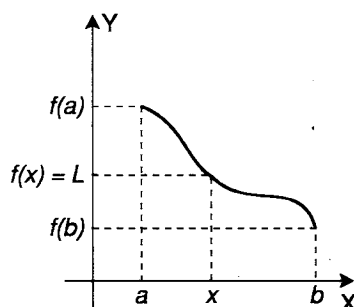


Figura 3-17

Esse teorema nos mostra por que as funções contínuas em um *intervalo* muitas vezes são consideradas como funções cujo gráfico pode ser traçado sem levantar o lápis do papel, isto é, não há interrupções no gráfico. Não apresentamos sua demonstração aqui.

Consequência. Se f é contínua em $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então existe pelo menos um número c entre a e b tal que $f(c) = 0$ (Ver Figura 3.18).

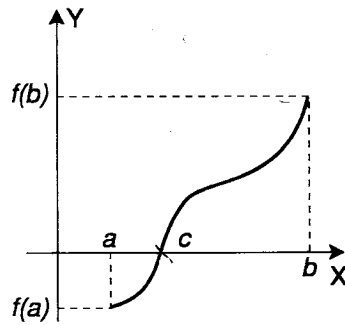


Figura 3-18

3.17 EXERCÍCIOS

1. Investigue a continuidade nos pontos indicados:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{em } x = 0.$$

$$(b) f(x) = x - |x| \quad \text{em } x = 0.$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases} \quad \text{em } x = 2.$$

$$(d) f(x) = \frac{1}{\sin 1/x} \quad \text{em } x = 2.$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{em } x = 0.$$

$$\bullet (f) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 1 \\ 1 - |x|, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \text{em } x = 1.$$

$$\bullet (g) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases} \quad \text{em } x = 2.$$

$$\bullet (h) \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq -1 \\ 1 - |x|, & x < -1 \end{cases} \quad \text{em } x = -1.$$

$$\bullet (i) \quad f(x) = \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 + 1}, \quad \text{em } x = 2.$$

$$\bullet (j) \quad f(x) = \frac{2}{3x^2 + x^3 - x - 3}, \quad \text{em } x = -3.$$

2. Determine, se existirem, os valores de $x \in D(f)$, nos quais a função $f(x)$ não é contínua.

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 1}, & x^2 \neq 1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{1 + \cos x}{3 + \sin x}$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{x - |x|}{x}$$

$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 6}, & x < -3 \text{ e } x > -2 \\ -1, & -3 \leq x \leq -2 \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(f) f(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$(h) f(x) = \cos \frac{x}{x + \pi}$$

3. Faça o gráfico e analise a continuidade das seguintes funções:

$$a) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \ln(x + 1), & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + 4x + 3}.$$

4. Calcule p de modo que as funções abaixo sejam contínuas.

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 + px + 2, & x \neq 3 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x + 2p, & x \leq -1 \\ p^2, & x > -1 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} e^{2x} & , \quad x \neq 0 \\ p^3 - 7 & , \quad x = 0. \end{cases}$$

5. Determine, se existirem, os pontos onde as seguintes funções não são contínuas.

$$(a) f(x) = \frac{x}{(x-3)(x+7)}$$

$$(b) f(x) = \sqrt{(3-x)(6-x)}$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{1+2\sin x}$$

$$(d) f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 6x + 10}$$

6. Prove que se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas em $x_0 = 3$, também o são $f+g$ e $f \cdot g$.

7. Defina funções f , g e h que satisfaçam:

(a) f não é contínua em 2 pontos de seu domínio;

(b) g é contínua em todos os pontos de seu domínio mas não é contínua em $\mathbb{R}$;

(c) $h \circ f$ é contínua em todos os pontos do domínio de f ;

Faça o gráfico das funções f , g , h e $h \circ f$.

8. Dê exemplo de duas funções f e g que não são contínuas no ponto $a=0$ e tais que $h = f \cdot g$ é contínua neste ponto. Faça o gráfico das funções f , g e h .

9. Sejam f , g e h funções tais que, para todo x , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se f e h são contínuas no ponto $x=a$ e $f(a) = g(a) = h(a)$, prove que g é contínua no ponto a .

10. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no ponto a . Se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m$, prove que f é contínua no ponto a .