

DERIVADA

Neste capítulo, estudaremos a DERIVADA. Veremos, inicialmente, que ela representa a inclinação de uma curva num ponto. Posteriormente, apresentaremos outras aplicações práticas, em diversos ramos da Física, Engenharia, Economia etc.

4.1 A RETA TANGENTE

Vamos definir a inclinação de uma curva $y = f(x)$ para, em seguida, encontrar a equação da reta tangente à curva num ponto dado.

As idéias que usaremos, foram introduzidas no século XVIII, por Newton e Leibnitz.

Seja $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a, b) , como na Figura 4.1.

Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da curva $y = f(x)$.

Seja s a reta secante que passa pelos pontos P e Q . Considerando o triângulo retângulo PMQ , na Figura 4.1, temos que a inclinação da reta s (ou coeficiente angular de s) é

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

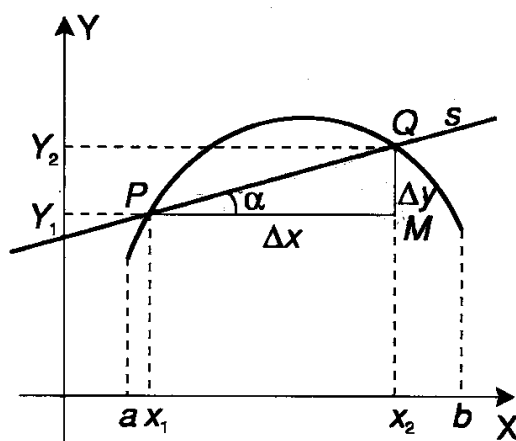


Figura 4-1

Suponhamos agora que, mantendo P fixo, Q se mova sobre a curva em direção a P . Diante disto, a inclinação da reta secante s variará. À medida que Q vai se aproximando cada vez mais de P , a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante (Ver Figura 4.2.).

Esse valor limite, é chamado inclinação da reta tangente à curva no ponto P , ou também inclinação da curva em P .

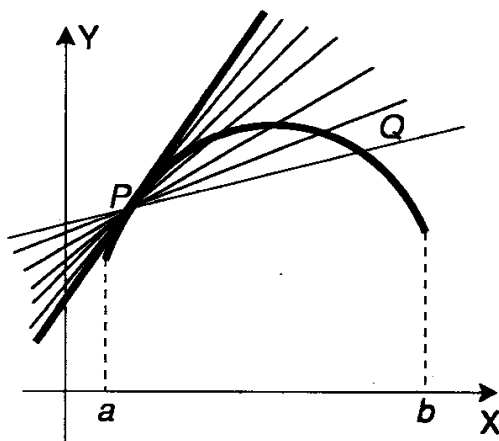


Figura 4-2

4.1.1 Definição. Dada uma curva $y = f(x)$, seja $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto P é dada por

$$m(x_1) = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad (1)$$

quando o limite existe.

Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$ podemos reescrever o limite (1) na forma

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}. \quad (2)$$

Conhecendo a inclinação da reta tangente à curva no ponto P podemos encontrar a equação da reta tangente à curva em P .

4.1.2 Equação da Reta Tangente. Se a função $f(x)$ é contínua em x_1 , então a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$ é:

(i) A reta que passa por P tendo inclinação

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \text{ se este limite existe. Neste caso temos a equação}$$

$$y - f(x_1) = m(x - x_1). \quad (3)$$

(ii) A reta $x = x_1$ se $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ for infinito.

4.1.3 Exemplos

(i) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1) .

Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, então

$$f(x_1) = x_1^2 - 2x_1 + 1 \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned}
 f(x_1 + \Delta x) &= (x_1 + \Delta x)^2 - 2(x_1 + \Delta x) + 1 \\
 &= x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x_1 - 2\Delta x + 1.
 \end{aligned}$$

Usando (2), vem

$$\begin{aligned}
 m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x_1 - 2\Delta x + 1 - (x_1^2 - 2x_1 + 1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x - 2)}{\Delta x} \\
 &= 2x_1 - 2.
 \end{aligned}$$

Portanto, a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1) é

$$m(x_1) = 2x_1 - 2.$$

(ii). Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto cuja abscissa é 2.

O ponto da curva $y = 2x^2 + 3$, cuja abscissa é 2, é o ponto $P(2, f(2)) = (2, 11)$.

Vamos encontrar a inclinação da curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto $P(2, 11)$. Para isso, encontraremos primeiro, a inclinação da curva num ponto (x_1, y_1) . Temos,

$$\begin{aligned}
m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x_1 + \Delta x)^2 + 3 - (2x_1^2 + 3)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_1^2 + 4x_1\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3 - 2x_1^2 - 3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x_1 + 2\Delta x)}{\Delta x} \\
&= 4x_1.
\end{aligned}$$

Como $m(x_1) = 4x_1$, então $m(2) = 4 \cdot 2 = 8$.

Usando (3), escrevemos a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ em $P(2, 11)$.

Temos,

$$y - f(x_1) = m(x - x_1)$$

$$y - 11 = 8(x - 2), \text{ ou ainda,}$$

$$8x - y - 5 = 0.$$

(iii) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$, que seja paralela à reta $8x - 4y + 1 = 0$.

Antes de desenvolvermos este exemplo, convém lembrar que duas retas são paralelas quando os seus coeficientes angulares são iguais.

Vamos primeiro encontrar a inclinação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ num ponto (x_1, y_1) . Temos,

$$\begin{aligned}
m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_1 + \Delta x} - \sqrt{x_1}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x_1 + \Delta x} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})}{\Delta x (\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_1 + \Delta x - x_1}{\Delta x (\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x_1 + \Delta x} + \sqrt{x_1})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_1}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $m(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$.

Como a reta que queremos deve ser paralela a $8x - 4y + 1 = 0$, podemos escrever

$$m(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} = 2, \text{ já que o coeficiente angular de } 8x - 4y + 1 = 0 \text{ é } 2.$$

$$\text{De } \frac{1}{2\sqrt{x_1}} = 2, \text{ concluímos que } x_1 = 1/16.$$

Portanto, a reta que queremos é a reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ no ponto $(1/16, f(1/16))$, ou seja, $(1/16, 1/4)$. Temos,

$$y - f(x_1) = m (x - x_1)$$

$$y - 1/4 = 2 (x - 1/16)$$

$$16y - 4 = 32x - 2$$

$$32x - 16y + 2 = 0, \text{ ou ainda,}$$

$$16x - 8y + 1 = 0.$$

Graficamente, este exemplo é ilustrado na Figura 4.3.

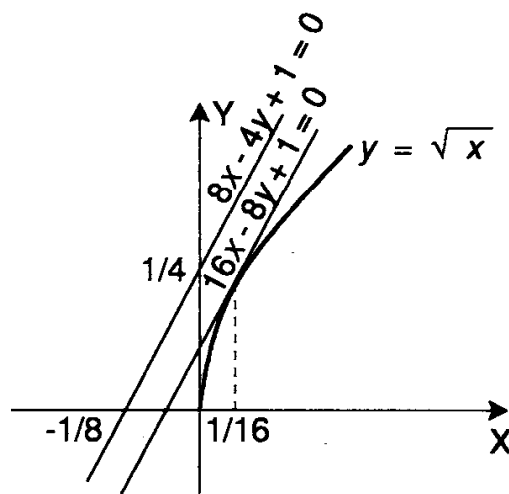


Figura 4-3

(iv) Encontre a equação para a reta normal à curva $y = x^2$ no ponto $P(2, 4)$.

Para resolvermos este exemplo, devemos lembrar que a *reta normal* a uma curva num ponto dado, é a reta perpendicular à reta tangente neste ponto.

Duas retas t e n são perpendiculares se

$$m_t \cdot m_n = -1, \quad (4)$$

onde m_t e m_n são as inclinações das retas t e n , respectivamente, num dado ponto P .

Vamos então calcular a inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(2, 4)$.

Usando (2), temos

$$m_t(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$m_t(x_1) = 2x_1.$$

Quando $x_1 = 2$, temos $m_t(2) = 2 \cdot 2 = 4$.

Usando (4), podemos encontrar a inclinação da reta normal à curva $y = x^2$ no ponto $(2, 4)$. Temos,

$$m_t \cdot m_n = -1$$

$$4 m_n = -1$$

$$m_n = -1/4.$$

Aplicando os dados à equação da reta, vem

$$y - f(x_1) = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -1/4(x - 2)$$

ou,

$$4y + x - 18 = 0.$$

Portanto, $x + 4y - 18 = 0$ é a reta normal à curva $y = x^2$ em $(2, 4)$.

Graficamente, este exemplo é ilustrado na Figura 4.4.

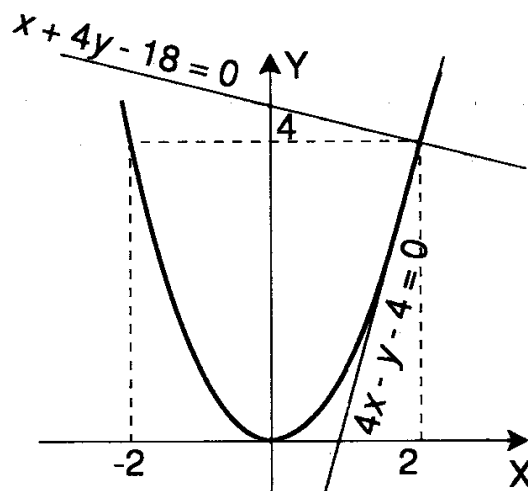


Figura 4-4

4.2 A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

A derivada de uma função $f(x)$ no ponto x_1 , denotada por $f'(x_1)$, (lê-se f' linha de x , no ponto x_1), é definida pelo limite

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \text{ quando este limite existe.}$$

Também podemos escrever

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Como vimos na seção anterior, este limite nos dá a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$. Portanto, geometricamente, a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_1 , representa a inclinação da curva neste ponto.

4.3 A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$, (lê-se f' linha de x), tal que, seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ se este limite existir.}$$

Dizemos que uma função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Outras notações podem ser usadas no lugar de $y' = f'(x)$:

- (i) $D_x f(x)$ (lê-se derivada de $f(x)$ em relação a x).
- (ii) $D_x y$ (lê-se derivada de y em relação a x).

(iii) $\frac{dy}{dx}$ (lê-se a derivada de y em relação a x).

4.4 EXEMPLOS

(i) Dada $f(x) = 5x^2 + 6x - 1$, encontre $f'(2)$.

Usando a definição 4.2, temos

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5(2 + \Delta x)^2 + 6(2 + \Delta x) - 1 - (5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{20 + 20\Delta x + 5(\Delta x)^2 + 12 + 6\Delta x - 20 - 12}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{26\Delta x + 5(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(26 + 5\Delta x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (26 + 5\Delta x) \\
 &= 26.
 \end{aligned}$$

✎ (ii) Dada $f(x) = \frac{x - 2}{x + 3}$, encontre $f'(x)$.

Usando a definição 4.3, temos

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x + \Delta x - 2}{x + \Delta x + 3} - \frac{x - 2}{x + 3}}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x - 2)(x + 3) - (x - 2)(x + \Delta x + 3)}{(x + \Delta x + 3)(x + 3) \cdot \Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + x\Delta x + 3\Delta x - 6 - x^2 - x\Delta x - x + 2\Delta x + 6}{(x + \Delta x + 3)(x + 3) \cdot \Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5\Delta x}{(x + \Delta x + 3)(x + 3) \cdot \Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5}{(x + \Delta x + 3)(x + 3)} \\&= \frac{5}{(x + 3)^2}.\end{aligned}$$

(iii) Dada $f(x) = \sqrt{x}$, encontre $f'(4)$.

$$\begin{aligned}f'(x_1) &= \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \\&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(iv) Dada $f(x) = x^{1/3}$, encontre $f'(x)$.

Usando a definição 4.3, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3}}{\Delta x}.
\end{aligned}$$

Resolveremos este limite como no exemplo 3, da Seção 3.9, fazendo troca de variáveis.

Sejam $(x + \Delta x) = t^3$ e $x = a^3$. Então,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{t \rightarrow a} \frac{t - a}{t^3 - a^3} \\
&= \lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{t^2 + at + a^2} \\
&= \frac{1}{3a^2}.
\end{aligned}$$

Como $a = x^{1/3}$, vem

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

Observamos, neste exemplo, que $f(x) = x^{1/3}$ é contínua em 0, mas $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$ não é definida em 0.

4.5 CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DERIVÁVEIS

De acordo com a observação feita no exemplo (iv) da Seção 4.4, concluímos que $f(x)$ contínua em x_1 , não implica na existência de $f'(x_1)$. A recíproca porém é verdadeira, como mostra o seguinte teorema.

4.5.1 Teorema. Toda função derivável num ponto x_1 é contínua nesse ponto.

Prova. Seja $f(x)$ uma função derivável em x_1 . Vamos provar que $f(x)$ é contínua em x_1 . Em outras palavras, vamos provar que as condições da definição 3.16.1 são válidas. Isto é:

(i) $f(x_1)$ existe;

(ii) $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$.

Por hipótese, $f(x)$ é derivável em x_1 . Logo, $f'(x_1)$ existe e, pela fórmula

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

concluímos que $f(x_1)$ deve existir para que o limite tenha significado.

Além disso, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_1} [f(x) - f(x_1)] &= \lim_{x \rightarrow x_1} \left[(x - x_1) \cdot \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right] \\&= \lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1) \cdot \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \\&= 0 \cdot f'(x_1).\end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow x_1} [f(x) - f(x_1)] = 0.$$

Temos então,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_1} [f(x) - f(x_1) + f(x_1)] \\&= \lim_{x \rightarrow x_1} [f(x) - f(x_1)] + \lim_{x \rightarrow x_1} f(x_1) \\&= 0 + f(x_1) \\&= f(x_1).\end{aligned}$$

Valem então as condições (i), (ii) e (iii) e conclui-se que $f(x)$ é contínua em x_1 .

4.6 EXERCÍCIOS

1. Determinar a equação da reta tangente às seguintes curvas, nos pontos indicados. Esboçar o gráfico em cada caso.

a) $f(x) = x^2 - 1$; $x = 1$, $x = 0$, $x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^2 - 3x + 6$; $x = -1$, $x = 2$.

c) $f(x) = x(3x - 5)$; $x = \frac{1}{2}$, $x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \frac{1}{x}$; $x = \frac{1}{3}$, $x = 3$.

e) $f(x) = \frac{1}{x - a}$, $a \in \mathbb{R} - \{-2, 4\}$; $x = -2$, $x = 4$.

f) $f(x) = 2\sqrt{x}$; $x = 0$, $x = 3$, $x = a$, $a > 0$.

2. Em cada um dos itens do exercício (1), determinar a equação da reta normal à curva, nos pontos indicados. Esboçar o gráfico, em cada caso.

3. Determinar a equação da reta tangente à curva $y = 1 - x^2$, que seja paralela à reta $y = 1 - x$.

4. Encontrar as equações das retas tangente e normal à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto $(-2, 9)$.

5. Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 1$, que seja perpendicular à reta $y = -x$.

6. Dadas as funções $f(x) = 5 - 2x$ e $g(x) = 3x^2 - 1$, determinar:

a) $f'(1) + g'(1)$ b) $2f'(0) - g'(-2)$

c) $f(2) - f'(2)$ d) $[g'(0)]^2 + \frac{1}{2}g'(0) + g(0)$

e) $f\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{f'(5/2)}{g'(5/2)}$

7. Usando a definição, determinar a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = 1 - 4x^2$

b) $f(x) = 2x^2 - x - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x + 2}$

d) $f(x) = \frac{1 - x}{x + 3}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x + 3}$

8. Dadas as funções $f(x) = \frac{1}{x-1}$ e $g(x) = 2x^2 - 3$, determinar:

a) $f \circ f'$ b) $f' \circ f$ c) $g \circ f'$.

d) $g' \circ f'$ e) $f' + g'$ f) $f' - 2g'$

g) $f' \cdot g' / f$.

9. Dada a função $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$, verificar se existe $f'(0)$. Esboçar o gráfico.

10. Dada a função $f(x) = \frac{1}{2x-6}$, verificar se existe $f'(3)$. Esboçar o gráfico.

11. Dada a função $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$, determinar os intervalos em que:

a) $f'(x) > 0$

b) $f'(x) < 0$.

4.7 DERIVADAS LATERAIS

4.7.1 Definição. Se a função $y = f(x)$ está definida em x_1 , então a derivada à direita de f em x_1 , denotada por $f'_+(x_1)$, é definida por

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

caso este limite exista.

4.7.2 Definição. Se a função $y = f(x)$ está definida em x_1 , então a derivada à esquerda de f em x_1 , denotada por $f'_-(x_1)$, é definida por

$$\begin{aligned} f'_-(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \end{aligned}$$

caso este limite exista.

Uma função é derivável em um ponto, quando as derivadas à direita e à esquerda nesse ponto existem e são iguais.

Quando as derivadas laterais (direita e esquerda) existem e são diferentes em um ponto x_1 , dizemos que este é um *ponto angular* do gráfico da função.

4.8 EXEMPLOS

(i) Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{se } x < 2 \\ 7 - x, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em 2.

(b) Encontre $f'_+(2)$ e $f'_-(2)$.

Na Figura 4.5 esboçamos o gráfico desta função.

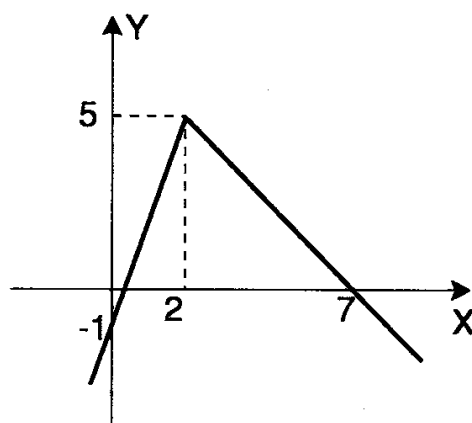


Figura 4-5

(a) Esta função é contínua em 2. De fato, existe $f(2) = 5$; existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (7 - x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 5;$$

e finalmente,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 5.$$

(b) Obtemos $f'_+(2)$ usando a definição 4.7.1. Temos,

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{[7 - (2 + \Delta x)] - 5}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{5 - \Delta x - 5}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} (-1)$$

$$= -1.$$

Usando a definição 4.7.2, obtemos $f'_-(2)$. Temos,

$$f'_-(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{[3(2 + \Delta x) - 1] - 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{6 + 3\Delta x - 1 - 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} 3$$

$$= 3.$$

Como

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x},$$

concluimos que não existe o

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}.$$

Portanto, a função $f(x)$ não é derivável em $x_1 = 2$.

Dizemos que $x_1 = 2$ é um *ponto angular* do gráfico de $f(x)$.

(ii) Seja a função $f(x) = (x - 2) |x|$. Encontre $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$.

Podemos reescrever a $f(x)$ como:

$$f(x) = \begin{cases} (x - 2) \cdot x = x^2 - 2x & , \text{ se } x \geq 0 \\ (x - 2) \cdot (-x) = -x^2 + 2x & , \text{ se } x < 0 . \end{cases}$$

A Figura 4.6 mostra o gráfico de $f(x)$.

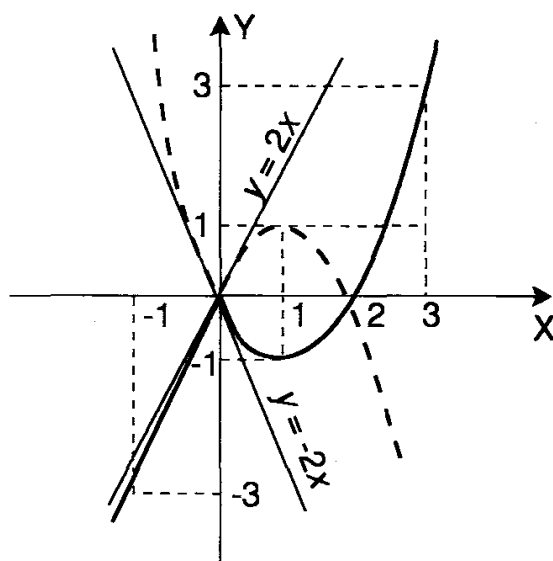


Figura 4-6

Usando 4.7.1 e 4.7.2, respectivamente, obtemos $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$.

Temos,

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{[(0 + \Delta x)^2 - 2(0 + \Delta x)] - 0}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x(\Delta x - 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} (\Delta x - 2)$$

$$= -2.$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{[-(0 + \Delta x)^2 + 2(0 + \Delta x)] - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x(-\Delta x + 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} (-\Delta x + 2)$$

$$= 2.$$

Concluimos, então, que não existe $f'(0)$ porque $f'_+(0) \neq f'_-(0)$.

Ainda podemos concluir que o gráfico da função f tem duas tangentes no ponto $x = 0$. A Figura 4.6 mostra estas tangentes, dadas por

$$y - 0 = (-2)(x - 0), \text{ ou seja, } y = -2x$$

e

$$y - 0 = 2(x - 0), \text{ ou seja, } y = 2x.$$

4.9 EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 5 calcular as derivadas laterais nos pontos onde a função não é derivável. Esboçar o gráfico.

1. $f(x) = 2|x - 3|$

2. $f(x) = \begin{cases} x & , \quad \text{se } x < 1 \\ 2x - 1 & , \quad \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

3. $f(x) = |2x + 4| + 3$

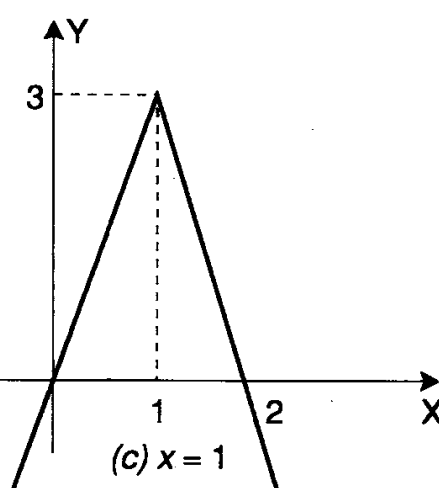
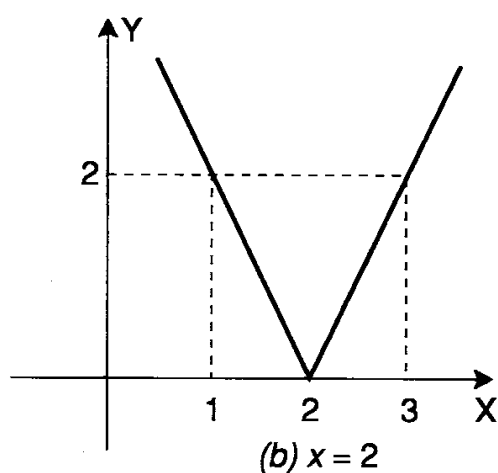
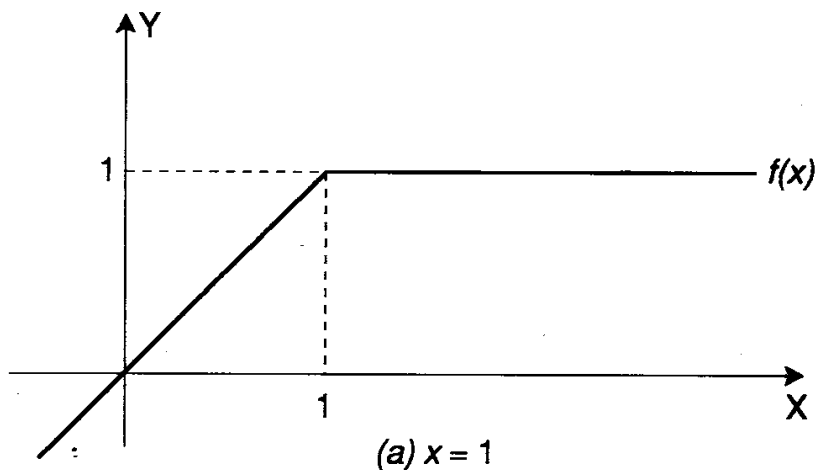
4. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \quad |x| > 1 \\ 0 & , \quad |x| \leq 1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & , \quad x < -2 \\ -2 & , \quad |x| \leq 2 \\ 2x - 6 & , \quad x > 2 \end{cases}$

6. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad \text{se } |x| \leq 1 \\ 1 - x^2 & , \quad \text{se } |x| > 1 \end{cases}$

- Esboçar o gráfico de f .
- Verificar se f é contínua nos pontos -1 e 1 .
- Calcular $f'(-1^-)$, $f'(-1^+)$, $f'(1^-)$ e $f'(1^+)$.
- Calcular $f'(x)$, obter o seu domínio e esboçar o gráfico.

7. Encontrar as derivadas laterais das seguintes funções, nos pontos indicados. Encontrar os intervalos onde $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$.



4.10 REGRAS DE DERIVAÇÃO

Nesta seção, deduziremos várias regras, chamadas regras de derivação, que permitem determinar as derivadas das funções sem o uso da definição.

4.10.1 Proposição (Derivada de uma Constante). Se c é uma constante e $f(x) = c$ para todo x , então $f'(x) = 0$.

Prova. Seja $f(x) = c$. Então,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

4.10.2 Proposição (Regra da Potência). Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Prova. Seja $f(x) = x^n$. Então,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.
 \end{aligned}$$

Expandindo $(x + \Delta x)^n$ pelo Binômio de Newton, temos

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[x^n + nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x^2 + \dots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n] - x^n}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x + \dots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}]}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x + \dots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} \right] \\
&= n \cdot x^{n-1}.
\end{aligned}$$

4.10.3 Exemplos

- (i) Se $f(x) = x^5$ então $f'(x) = 5x^4$.
- (ii) Se $g(x) = x$ então $g'(x) = 1$.
- (iii) Se $h(x) = x^{10}$ então $h'(x) = 10x^9$.

4.10.4 Proposição (Derivada do Produto de uma Constante por uma Função). Sejam f uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = cf(x)$. Se $f'(x)$ existe, então $g'(x) = cf'(x)$.

Prova. Por hipótese, existe

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Temos,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\
&= c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= cf'(x).
\end{aligned}$$

4.10.5 Exemplos

(i) Se $f(x) = 8x^2$ então $f'(x) = 8(2x) = 16x$.

(ii) Se $g(z) = -2z^7$ então $g'(z) = -2(7z^6) = -14z^6$.

4.10.6 Proposição (Derivada de uma Soma). Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Prova. Por hipótese, existem

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Temos,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

A proposição 4.10.6 se aplica para um número finito de funções, isto é, a derivada da soma de um número finito de funções é igual à soma de suas derivadas, se estas existirem.

4.10.7 Exemplos

(i) Seja $f(x) = 3x^4 + 8x + 5$. Então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot (4x^3) + 8 \cdot 1 + 0 \\ &= 12x^3 + 8. \end{aligned}$$

(ii) Seja $g(y) = 9y^5 - 4y^2 + 2y + 7$. Então,

$$\begin{aligned} g'(y) &= 9 \cdot (5y^4) - 4 \cdot (2y) + 2 \cdot 1 + 0 \\ &= 45y^4 - 8y + 2. \end{aligned}$$

4.10.8 Proposição (Derivada de um Produto). Sejam f e g funções e h a função definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x).$$

Prova. Por hipótese, existem

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Também podemos concluir, pelo teorema 4.5.1, que f é contínua e assim $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. Temos,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo ao numerador a expressão $f(x + \Delta x) \cdot g(x)$, vem

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x) g(x) - f(x) g(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) [g(x + \Delta x) - g(x)] + g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\
 &\quad + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
 &\quad + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x).
 \end{aligned}$$

4.10.9 Exemplos

(i) Seja $f(x) = (2x^3 - 1)(x^4 + x^2)$. Então,

$$f'(x) = (2x^3 - 1)(4x^3 + 2x) + (x^4 + x^2)(6x^2).$$

(ii) Seja $f(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 5)(t^6 + 4t)$. Então,

$$f'(t) = \frac{1}{2}[(t^2 + 5)(6t^5 + 4) + (t^6 + 4t)(2t)].$$

4.10.10 Proposição (Derivada de um Quociente). Sejam f e g funções e h a função definida por $h(x) = f(x)/g(x)$, onde $g(x) \neq 0$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Prova. Por hipótese, existem

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Temos também, pelo teorema 4.5.1, que g é contínua e assim $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g(x)$. Temos,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)} \right]. \end{aligned}$$

Subtraindo e adicionando $f(x) \cdot g(x)$ ao numerador, obtemos

$$\begin{aligned} h'(x) &= \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)} \right] \\
&= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x)} \\
&= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)} \\
&= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} .
\end{aligned}$$

4.10.11 Exemplos

(i) Encontrar $f'(x)$ sendo $f(x) = \frac{2x^4 - 3}{x^2 - 5x + 3}$.

Temos,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2 - 5x + 3)(2 \cdot 4x^3 - 0) - (2x^4 - 3)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 3)^2} \\
&= \frac{(x^2 - 5x + 3)(8x^3) - (2x^4 - 3)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 3)^2} .
\end{aligned}$$

(ii) Se $g(x) = \frac{1}{x}$, encontrar $g'(x)$.

Temos,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{x \cdot 0 - 1 \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{-1}{x^2}. \end{aligned}$$

4.10.12 Proposição. Se $f(x) = x^{-n}$ onde n é um inteiro positivo e $x \neq 0$, então $f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$.

Prova. Podemos escrever $f(x) = \frac{1}{x^n}$.

Aplicando a proposição 4.10.10, vem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} \\ &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -n \cdot x^{n-1} \cdot x^{-2n} \\ &= -n x^{-n-1}. \end{aligned}$$

4.11 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 22, encontrar a derivada das funções dadas.

1. $f(r) = \pi r^2$ *$f'(r) = 2\pi r$*

2. $f(x) = 3x^2 + 6x - 10$

3. $f(w) = aw^2 + b$ *$f'(w) = 2aw$*

4. $f(x) = 14 - \frac{1}{2}x^{-3}$

5. $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + 6)$
6. $f(x) = (7x - 1)(x + 4)$
7. $f(x) = (3x^5 - 1)(2 - x^4)$
8. $f(x) = \frac{2}{3}(5x - 3)^{-1}(5x + 3)$
9. $f(x) = (x - 1)(x + 1)$
10. $f(s) = (s^2 - 1)(3s - 1)(5s^3 + 2s)$
11. $f(x) = 7(ax^2 + bx + c)$
12. $f(u) = (4u^2 - a)(a - 2u)$
13. $f(x) = \frac{2x + 4}{3x - 1}$
14. $f(t) = \frac{t - 1}{t + 1}$
15. $f(t) = \frac{3t^2 + 5t - 1}{t - 1}$
16. $f(t) = \frac{2 - t^2}{t - 2}$
17. $f(x) = \frac{4 - x}{5 - x^2}$
18. $f(x) = \frac{5x + 7}{2x - 2}$
19. $f(x) = \frac{x + 1}{x + 2}(3x^2 + 6x)$
20. $f(t) = \frac{(t - a)^2}{t - b}$
21. $f(x) = \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^5}$
22. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{x^6}$
23. Seja $p(x) = (x - a)(x - b)$, a e b constantes. Mostrar que se $a \neq b$ então $p(a) = p(b) = 0$, mas $p'(a) \neq 0$ e $p'(b) \neq 0$.
24. Dadas as funções $f(x) = x^2 + Ax$ e $g(x) = Bx$, determinar A e B de tal forma que
- $$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = 1 + 2x \\ f(x) - g(x) = x^2 \end{cases}$$
25. Dada a função $f(t) = 3t^3 - 4t + 1$, encontrar $f(0) - tf'(0)$.
26. Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = \frac{2x + 1}{3x - 4}$ no ponto de abscissa $x = -1$.
27. Encontrar a equação da reta normal à curva $y = (3x^2 - 4x)^2$ no ponto de abscissa $x = 2$.

28. Encontrar as equações das retas tangentes à curva $y = \frac{x-1}{x+1}$ que sejam paralelas à reta $y = x$.
29. Em que pontos o gráfico da função $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ tem tangente horizontal?
30. Seja $y = ax^2 + bx$. Encontrar os valores de a e b sabendo que a tangente à curva no ponto $(1, 5)$ tem inclinação $m = 8$.

4.12 DERIVADA DE FUNÇÃO COMPOSTA

Consideremos duas funções deriváveis f e g onde $y = g(u)$ e $u = f(x)$.

Para todo x tal que $f(x)$ está no domínio de g , podemos escrever $y = g(u) = g[f(x)]$, isto é, podemos considerar a função composta $(g \circ f)(x)$.

Por exemplo, uma função tal como $y = (x^2 + 5x + 2)^7$ pode ser vista como a composta das funções $y = u^7 = g(u)$ e $u = x^2 + 5x + 2 = f(x)$.

A seguir apresentamos a regra da cadeia, que nos dá a derivada da função composta $g \circ f$ em termos das derivadas de f e g .

4.12.1 Proposição (Regra da Cadeia). Se $y = g(u)$, $u = f(x)$ e as derivadas dy/du e du/dx existem, então a função composta $y = g[f(x)]$ tem derivada que é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{ou} \quad y'(x) = g'(u) \cdot f'(x).$$

Prova Parcial. Vamos fazer a demonstração supondo que existe um intervalo aberto I contendo x , tal que

$$\Delta u = [f(x + \Delta x) - f(x)] \neq 0 \text{ sempre que } (x + \Delta x) \in I \text{ e } \Delta x \neq 0. \quad (1)$$

Isso se verifica para um grande número de funções, porém não para todas. Por exemplo, se f for uma função constante a condição acima não é satisfeita. Porém neste

caso, podemos provar a fórmula facilmente. De fato, se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$ e $y = g[f(x)] = g(c)$ é constante. Assim, $y'(x) = 0 = g'(u) \cdot f'(x)$.

Então provemos que $y'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$ quando $f(x)$ satisfaz a condição (1).

Como $y = g[f(x)]$, temos

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g[f(x + \Delta x)] - g[f(x)]}{\Delta x} \quad \text{se este limite existir.}$$

Vamos considerar primeiro o quociente

$$\frac{g[f(x + \Delta x)] - g[f(x)]}{\Delta x}.$$

Seja $\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x)$. Então Δu depende de Δx e $\Delta u \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Temos,

$$\begin{aligned} \frac{g[f(x + \Delta x)] - g[f(x)]}{\Delta x} &= \frac{g[f(x) + \Delta u] - g[f(x)]}{\Delta x} \\ &= \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Pela condição (1), $\Delta u \neq 0$ em um intervalo aberto contendo x . Assim, podemos dividir e multiplicar o quociente acima por Δu . Temos então,

$$\begin{aligned} \frac{g[f(x + \Delta x)] - g[f(x)]}{\Delta x} &= \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} \\ &= \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Aplicando o limite, temos

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g[f(x + \Delta x)] - g[f(x)]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= g'(u) \cdot f'(x).
 \end{aligned}$$

4.12.2 Exemplos

(i) Dada a função $y = (x^2 + 5x + 2)^7$, determinar dy/dx .

Vimos anteriormente que podemos escrever $y = g(u) = u^7$, onde $u = x^2 + 5x + 2$. Assim, pela regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= 7u^6 \cdot (2x + 5) \\
 &= 7(x^2 + 5x + 2)^6 \cdot (2x + 5).
 \end{aligned}$$

(ii) Dada a função $y = \left(\frac{3x + 2}{2x + 1}\right)^5$, encontrar y' .

Podemos escrever $y = u^5$, onde $u = \frac{3x + 2}{2x + 1}$. Aplicando a regra da cadeia,

temos

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= 5u^4 \cdot \frac{(2x+1) \cdot 3 - (3x+2) \cdot 2}{(2x+1)^2} \\
 &= 5 \cdot \left(\frac{3x+2}{2x+1} \right)^4 \cdot \frac{6x+3-6x-4}{(2x+1)^2} \\
 &= 5 \cdot \left(\frac{3x+2}{2x+1} \right)^4 \cdot \frac{-1}{(2x+1)^2}.
 \end{aligned}$$

(iii) Dada a função $y = (3x^2 + 1)^3 \cdot (x - x^2)^2$, determinar dy/dx .

Neste caso temos o produto de duas funções

$$f(x) = (3x^2 + 1)^3 \quad \text{e} \quad g(x) = (x - x^2)^2.$$

Assim, pela proposição 4.10.8,

$$y'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x).$$

Encontrando $f'(x)$ e $g'(x)$ pela regra da cadeia, temos

$$f'(x) = 3(3x^2 + 1)^2 \cdot 6x \quad \text{e} \quad g'(x) = 2(x - x^2) \cdot (1 - 2x).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= (3x^2 + 1)^3 \cdot 2(x - x^2)(1 - 2x) + 3(3x^2 + 1)^2 \cdot 6x \cdot (x - x^2)^2 \\
 &= 2(3x^2 + 1)^3 (x - x^2)(1 - 2x) + 18x(3x^2 + 1)^2 (x - x^2)^2.
 \end{aligned}$$

4.12.3 Proposição. Se $u = g(x)$ é uma função derivável e n é um número inteiro não nulo, então

$$\frac{d}{dx} [g(x)]^n = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

Prova. Fazendo $y = u^n$, onde $u = g(x)$ e aplicando a regra da cadeia, temos

$$y'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx} [g(x)]^n = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

A regra da potência pode ser generalizada como segue:

Se $u = g(x)$ é uma função derivável e r é um número racional não nulo qualquer, então

$$\frac{d}{dx} [g(x)]^r = r [g(x)]^{r-1} \cdot g'(x),$$

ou ainda,

$$(u^r)' = r \cdot u^{r-1} \cdot u'.$$

4.12.4 Exemplos

(i) Dada a função $f(x) = 5\sqrt{x^2 + 3}$, determinar $f'(x)$.

Podemos escrever

$$f(x) = 5(x^2 + 3)^{1/2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 3)^{-1/2} \cdot 2x \\ &= \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 3}}. \end{aligned}$$

(ii) Dada a função $g(t) = \frac{t^2}{\sqrt[3]{t^3 + 1}}$, determinar $g'(t)$.

Escrevendo a função dada como um produto, temos

$$g(t) = t^2 \cdot (t^3 + 1)^{-1/3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} g'(t) &= t^2 \left(\frac{-1}{3} \right) (t^3 + 1)^{\frac{-1}{3} - 1} \cdot 3t^2 + (t^3 + 1)^{-1/3} \cdot 2t \\ &= -t^4 (t^3 + 1)^{-4/3} + 2t (t^3 + 1)^{-1/3}. \end{aligned}$$

Podemos resumir as proposições da Seção 4.10 e 4.12 na seguinte *tabela de derivadas*.

4.12.5 Tabela. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis e c uma constante qualquer.

$$(1) \quad y = c \quad \Rightarrow \quad y' = 0$$

$$(2) \quad y = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1.$$

$$(3) \quad y = c \cdot u \quad \Rightarrow \quad y' = c \cdot u'$$

$$(4) \quad y = u + v \quad \Rightarrow \quad y' = u' + v'$$

$$(5) \quad y = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$(6) \quad y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$(7) \quad y = u^\alpha, 0 \neq \alpha \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad y' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'.$$

A Tabela 4.12.5 nos ajuda a determinar as derivadas de algumas funções.

4.12.6 Exemplos. Determinar a derivada das funções:

$$(i) \quad y = x^8 + (2x + 4)^3 + \sqrt{x}.$$

$$\begin{aligned} y' &= 8x^7 + 3(2x + 4)^2 \cdot 2 + \frac{1}{2} x^{-1/2} \\ &= 8x^7 + 6(2x + 4)^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$$(ii) \quad y = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 3}}.$$

$$y' = \frac{(\sqrt{x^2 - 3}) \cdot 1 - (x + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 3)^{-1/2} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2 - 3})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - 3} - x(x + 1)/\sqrt{x^2 - 3}}{x^2 - 3}$$

$$= \frac{\frac{(x^2 - 3) - x(x + 1)}{\sqrt{x^2 - 3}}}{x^2 - 3}$$

$$= \frac{-3 - x}{(x^2 - 3)\sqrt{x^2 - 3}}.$$

$$(iii) \quad y = 3x(8x^3 - 2).$$

$$\begin{aligned} y' &= 3x(24x^2) + (8x^3 - 2) \cdot 3 \\ &= 72x^3 + 24x^3 - 6 \\ &= 96x^3 - 6. \end{aligned}$$

$$(iv) \quad y = \sqrt[3]{6x^2 + 7x + 2}.$$

Podemos escrever $y = (6x^2 + 7x + 2)^{1/3}$.

Temos,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3} (6x^2 + 7x + 2)^{-2/3} \cdot (12x + 7) \\ &= \frac{12x + 7}{3 \sqrt[3]{(6x^2 + 7x + 2)^2}}. \end{aligned}$$

4.13 TEOREMA (DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA)

Seja $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto (a, b) . Suponhamos que $f(x)$ admita uma função inversa $x = g(y)$ contínua. Se $f'(x)$ existe e é diferente de zero para qualquer $x \in (a, b)$, então $g = f^{-1}$ é derivável e vale

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[g(y)]}.$$

Prova. A Figura 4.7 nos auxiliará a visualizar a demonstração que segue.

Sejam $y = f(x)$ e $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Observamos que, como f possui uma inversa, se $\Delta x \neq 0$ temos que $f(x + \Delta x) \neq f(x)$ e portanto, $\Delta y \neq 0$. Como f é contínua, quando $\Delta x \rightarrow 0$ temos que Δy também tende a zero.

Da mesma forma, quando $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta x = g(y + \Delta y) - g(y)$ também tende a zero.

Temos então,

$$\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0. \quad (1)$$

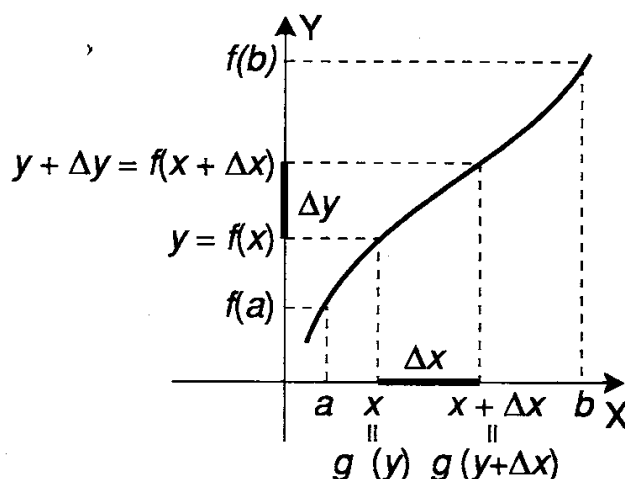


Figura 4-7

Por outro lado, para qualquer $y = f(x)$ vale a identidade

$$\begin{aligned} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} &= \frac{(x + \Delta x) - x}{f(x + \Delta x) - f(x)} \\ &= \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}. \end{aligned}$$

Como $f'(x)$ existe e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, usando (1), vem

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} &= \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{f'(x)}. \end{aligned}$$

Concluimos que $g'(y)$ existe e vale $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

4.13.1 Exemplos

(i) Seja $y = f(x) = 4x - 3$. A sua inversa é dada por

$$x = g(y) = \frac{1}{4} (y + 3).$$

Podemos ver que as derivadas, $f'(x) = 4$ e $g'(y) = 1/4$ são inversas uma da outra.

(ii) Seja $y = 8x^3$. Sua inversa é $x = \frac{1}{2} \sqrt[3]{y}$.

Como $y' = 24x^2$ é maior que zero para todo $x \neq 0$, temos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{24x^2} = \frac{1}{24 \left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{y} \right)^2} = \frac{1}{6y^{2/3}}.$$

Para $x = 0$, temos $y = 0$ e $y' = 0$. Portanto, não podemos aplicar o teorema 4.13.

4.14. DERIVADAS DAS FUNÇÕES ELEMENTARES

Nesta seção apresentaremos as derivadas das funções elementares: exponencial, logarítmica, trigonométricas, trigonométricas inversas, hiperbólicas e hiperbólicas inversas.

Apresentaremos uma tabela de Regras de Derivação que será usada no decorrer de todo o estudo de Cálculo Diferencial e Integral.

4.14.1 Proposição (Derivada da função exponencial) Se $y = a^x$, ($a > 0$ e $a \neq 1$) então

$$y' = a^x \ln a \quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1).$$

Prova. Seja $y = a^x$ ($a > 0$ e $a \neq 1$). Aplicando a definição 4.3, temos

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ é o limite fundamental provado na Seção 3.14.5, vem

$$y' = a^x \cdot \ln a.$$

Caso Particular:

Se $y = e^x$ então $y' = e^x \cdot \ln e = e^x$, onde e é o número neperiano.

4.14.2 Proposição (Derivada da função logarítmica). Se $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), então

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Prova. Seja $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

Aplicando a definição 4.3, temos

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{1/\Delta x}. \end{aligned}$$

Usando a proposição 3.5.2(g), podemos escrever

$$\begin{aligned} y' &= \log_a \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{1/\Delta x} \right] \\ &= \log_a \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x/\Delta x}{x/\Delta x} \right)^{1/\Delta x} \right] \\ &= \log_a \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x/\Delta x} \right)^{1/\Delta x \cdot x/x} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log_a \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x/\Delta x} \right)^{x/\Delta x} \right]^{1/x} \\
&= \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x/\Delta x} \right)^{x/\Delta x} \right].
\end{aligned}$$

Usando o limite fundamental da Seção 3.14.3, vem

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Caso Particular:

$$\begin{aligned}
\text{Se } y = \ln x \text{ então } y' &= \frac{1}{x} \cdot \ln e \\
&= \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

4.14.3 Proposição (Derivada da função exponencial composta). Se $y = u^v$, onde $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções de x , deriváveis num intervalo I e $u(x) > 0$, $\forall x \in I$ então $y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$.

Prova. Usando as propriedades de logaritmos, podemos escrever

$$y = u^v = e^{v \cdot \ln u}.$$

Portanto, $y = (g \circ f)(x)$, onde $g(w) = e^w$ e $w = f(x) = v \cdot \ln u$.

Como existem as derivadas

$$g'(w) = e^w$$

$$f'(x) = (v \cdot \ln u)' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u},$$

pela regra da Cadeia, temos

$$\begin{aligned}
 y' &= g'(w) \cdot f'(x) \\
 &= e^w \left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \\
 &= e^{v \cdot \ln u} \left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \\
 &= u^v \cdot \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'.
 \end{aligned}$$

Se $u(x)$ é uma função derivável, aplicando a regra da Cadeia podemos generalizar as proposições da Seção 4.14. Acrescentamos as seguintes fórmulas em nossa *tabela de derivadas*.

$$(8) \quad y = a^u \quad (a > 0, a \neq 1) \quad \Rightarrow \quad y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$(9) \quad y = e^u \quad \Rightarrow \quad y' = e^u \cdot u'$$

$$(10) \quad y = \log_a u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$(11) \quad y = \ln u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{u}$$

$$(12) \quad y = u^v \quad \Rightarrow \quad y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v', \quad u > 0.$$

4.14.4 Exemplos. Determinar a derivada das funções:

$$(i) \quad y = 3^{2x^2 + 3x - 1}.$$

Fazendo $u = 2x^2 + 3x - 1$, temos $y = 3^u$. Portanto,

$$y' = 3^u \cdot \ln 3 \cdot u'$$

$$= 3^{2x^2 + 3x - 1} \cdot \ln 3 \cdot (4x + 3).$$

$$(ii) \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}$$

Temos $y = \left(\frac{1}{2}\right)^u$, onde $u = \sqrt{x}$. Assim,

$$y' = \left(\frac{1}{2}\right)^u \cdot \ln \frac{1}{2} \cdot u'$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \ln \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(iii) \quad y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

Fazendo $y = e^u$ com $u = \frac{x+1}{x-1}$, temos

$$y' = e^u \cdot u'$$

$$= e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{(x-1) \cdot 1 - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

$$(iv) \quad y = e^{x \cdot \ln x}.$$

Neste caso fazemos $y = e^u$, onde $u = x \cdot \ln x$.

Então,

$$\begin{aligned} y' &= e^u \cdot u' \\ &= e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \ln x)' \\ &= e^{x \cdot \ln x} \left[x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right] \\ &= e^{x \cdot \ln x} (1 + \ln x). \end{aligned}$$

$$(v) \quad y = \log_2 (3x^2 + 7x - 1).$$

Temos $y = \log_2 u$, onde $u = 3x^2 + 7x - 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{u'}{u} \cdot \log_2 e \\ &= \frac{6x + 7}{3x^2 + 7x - 1} \cdot \log_2 e. \end{aligned}$$

$$(vi) \quad y = \ln \left(\frac{e^x}{x + 1} \right).$$

Temos $y = \ln u$, onde $u = \frac{e^x}{x + 1}$. Logo,

$$y' = \frac{u'}{u}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x+1)e^x - e^x \cdot 1}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{e^x}{x+1} \\
 &= \frac{x}{x+1}.
 \end{aligned}$$

$$(vii) \ y = (x^2 + 1)^{2x-1}.$$

Temos $y = u^v$, onde $u = x^2 + 1 > 0$ e $v = 2x - 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
 y' &= (2x-1)(x^2+1)^{2x-1-1} \cdot (x^2+1)' + (x^2+1)^{2x-1} \cdot \ln(x^2+1) \cdot (2x-1)' \\
 &= (2x-1)(x^2+1)^{2x-2} \cdot 2x + (x^2+1)^{2x-1} \cdot \ln(x^2+1) \cdot 2.
 \end{aligned}$$

Derivadas das funções trigonométricas

4.14.5 Proposição (Derivada da função seno). Se $y = \text{sen } x$ então $y' = \cos x$.

Prova. Seja $y = \text{sen } x$. Aplicando a definição 4.3, temos

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x}.$$

Para desenvolvermos o limite aplicaremos a fórmula trigonométrica:

$$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \text{sen } \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}.$$

Então,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \text{sen } \frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(\frac{2x + \Delta x}{2} \right) \\
&= 1 \cdot \cos x \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

4.14.6 Proposição (Derivada da função cosseno). Se $y = \cos x$, então $y' = -\operatorname{sen} x$.

Prova. Seja $y = \cos x$. Aplicando a definição 4.3, temos

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}.$$

Aplicaremos a fórmula trigonométrica:

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p + q}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{p - q}{2}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \operatorname{sen} \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-2 \operatorname{sen} \frac{2x + \Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x / 2}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}}
\end{aligned}$$

$$= -2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$= -\operatorname{sen} x.$$

4.14.7 Derivadas das demais funções trigonométricas.

Como as demais funções trigonométricas são definidas a partir do seno e cosseno, podemos usar as regras de derivação para encontrar suas derivadas.

Por exemplo,

$$\text{se } y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \text{ então } y' = \sec^2 x.$$

De fato, usando a regra do quociente, obtemos

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x.$$

Similarmente, encontramos:

$$\text{Se } y = \operatorname{cotg} x \quad \text{então} \quad y' = -\operatorname{cosec}^2 x;$$

$$\text{se } y = \sec x \quad \text{então} \quad y' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x \quad \text{e}$$

$$\text{se } y = \operatorname{cosec} x \quad \text{então} \quad y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x.$$

Usando a regra da cadeia, obtemos as fórmulas gerais. Acrescentamos os seguintes itens na *tabela de derivadas*.

$$(13) \quad y = \operatorname{sen} u \quad \Rightarrow \quad y' = \cos u \cdot u'$$

$$(14) \quad y = \cos u \quad \Rightarrow \quad y' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$$

$$(15) \quad y = \operatorname{tg} u \quad \Rightarrow \quad y' = \sec^2 u \cdot u'$$

$$(16) \quad y = \operatorname{cotg} u \quad \Rightarrow \quad y' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$$

$$(17) \quad y = \sec u \quad \Rightarrow \quad y' = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u'$$

$$(18) \quad y = \operatorname{cosec} u \quad \Rightarrow \quad y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u \cdot u'.$$

4.14.8 Exemplos. Determinar a derivada das seguintes funções:

$$(i) \quad y = \operatorname{sen}(x^2).$$

$$y = \operatorname{sen} u, \quad u = x^2.$$

$$y' = (\cos u) u'$$

$$= [\cos(x^2)] \cdot 2x$$

$$= 2x \cos(x^2).$$

$$y = \operatorname{sen}(x^2) \Rightarrow y' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$y = \operatorname{sen} u, u = x^2 \Rightarrow y' = \cos u \cdot u'$$

$$y' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$y' = 2x \cos(x^2)$$

$$(ii) \quad y = \cos(1/x).$$

$$y = \cos u, \quad u = (1/x).$$

$$y' = (-\operatorname{sen} u) \cdot u'$$

$$= [-\operatorname{sen}(1/x)] \cdot -1/x^2$$

$$= \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}(1/x).$$

$$y = \cos(1/x) \Rightarrow y' = -\operatorname{sen}(1/x) \cdot (-1/x^2)$$

$$u = 1/x \Rightarrow du = -1/x^2$$

$$y' = -\operatorname{sen} u \cdot du = -\operatorname{sen}(1/x) \cdot (-1/x^2) = \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}(1/x)$$

$$(iii) \quad y = 3 \operatorname{tg} \sqrt{x} + \operatorname{cotg} 3x.$$

$$\begin{aligned} y' &= (3 \operatorname{tg} \sqrt{x})' + (\operatorname{cotg} 3x)' \\ &= 3 \cdot \sec^2 \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' + (-\operatorname{cosec}^2 3x) \cdot (3x)' \\ &= 3 \sec^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - (\operatorname{cosec}^2 3x) 3. \end{aligned}$$

$$(iv) \quad y = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{cotg} x}.$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 + \operatorname{cotg} x)(\cos x)' - \cos x(1 + \operatorname{cotg} x)'}{(1 + \operatorname{cotg} x)^2} \\ &= \frac{(1 + \operatorname{cotg} x)(-\operatorname{sen} x) - \cos x(-\operatorname{cosec}^2 x)}{(1 + \operatorname{cotg} x)^2} \\ &= \frac{-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \operatorname{cotg} x + \cos x \operatorname{cosec}^2 x}{(1 + \operatorname{cotg} x)^2}. \end{aligned}$$

$$(v) \quad y = \sec(x^2 + 3x + 7).$$

$$y = \sec u, \quad u = x^2 + 3x + 7.$$

$$\begin{aligned} y' &= \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u' \\ &= [\sec(x^2 + 3x + 7) \cdot \operatorname{tg}(x^2 + 3x + 7)] \cdot (2x + 3) \\ &= (2x + 3) \sec(x^2 + 3x + 7) \cdot \operatorname{tg}(x^2 + 3x + 7). \end{aligned}$$

$$(vi) \quad y = \operatorname{cosec} \left(\frac{x+1}{x-1} \right).$$

$$y = \operatorname{cosec} u, \quad u = \frac{x+1}{x-1}.$$

$$\begin{aligned}
 y' &= -\operatorname{cosec} u \cdot \cotg u \cdot u' \\
 &= \left[-\operatorname{cosec} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \cdot \cotg \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \right] \frac{-2}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{2}{(x-1)^2} \operatorname{cosec} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \cdot \cotg \left(\frac{x+1}{x-1} \right).
 \end{aligned}$$

Derivadas das Funções Trigonômétricas Inversas

4.14.9 Proposição (Derivada da função arco seno). Seja $f: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ definida por $f(x) = \arcsen x$. Então $y = f(x)$ é derivável em $(-1, 1)$ e

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Prova. Sabemos que

$$y = \arcsen x \Leftrightarrow x = \sen y, \quad y \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Como $(\sen y)'$ existe e é diferente de zero para qualquer $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, aplicando o teorema 4.13, vem

$$y' = \frac{1}{(\sen y)'} = \frac{1}{\cos y}. \quad (1)$$

Como para $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ temos $\cos y = \sqrt{1 - \sen^2 y}$, substituindo em (1), vem $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sen^2 y}}$. Como $\sen y = x$ temos $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, para $x \in (-1, 1)$.

4.14.10 Proposição (Derivada da função arco cosseno). Seja $f: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ definida por $f(x) = \arccos x$. Então $y = f(x)$ é derivável em $(-1, 1)$ e

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Prova. Usando a relação

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \text{ e a proposição 4.14.9, obtemos}$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x \right)' \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ para } x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

4.14.11 Proposição (Derivada da função arco tangente). Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ definida por $f(x) = \arctg x$. Então $y = f(x)$ é derivável e $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

Prova. Sabemos que

$$y = \arctg x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y, y \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Como $(\operatorname{tg} y)'$ existe e é diferente de zero para qualquer $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, aplicando o teorema 4.13, vem

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

Como $\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y$, obtemos

$$y' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}.$$

Substituindo $\operatorname{tg} y$ por x , temos

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4.14.12 Derivadas das Demais Funções Trigonométricas Inversas. As demais funções trigonométricas inversas possuem derivadas dadas por:

$$(i) \quad \text{Se } y = \text{arc cotg } x \text{ então } y' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

$$(ii) \quad \text{Se } y = \text{arc sec } x, |x| \geq 1, \text{ então } y' = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1.$$

$$(iii) \quad \text{Se } y = \text{arc cosec } x, |x| \geq 1, \text{ então } y' = \frac{-1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1.$$

A implicação (i) pode facilmente ser verificada se usarmos a relação $\text{arc cotg } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } x$ e a proposição 4.14.11.

Provaremos a implicação (ii).

Seja $y = \text{arc sec } x = \text{arc cos } (1/x)$ para $|x| \geq 1$. Então $y' = [\text{arc cos } (1/x)]'$.

Usando a proposição 4.14.10 e a regra da Cadeia, temos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-1}{\sqrt{1 - (1/x)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}}} \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{|x|}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}, \quad \text{onde } |x| > 1. \end{aligned}$$

Acrescentamos os seguintes itens na *tabela de derivadas*:

$$(19) \quad y = \arcsen u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$(20) \quad y = \arccos u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$(21) \quad y = \operatorname{arctg} u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{1 + u^2}$$

$$(22) \quad y = \operatorname{arccotg} u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-u'}{1 + u^2}$$

$$(23) \quad y = \operatorname{arcsec} u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{|u| \sqrt{u^2 - 1}}, \quad |u| > 1$$

$$(24) \quad y = \operatorname{arccosec} u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-u'}{|u| \sqrt{u^2 - 1}}, \quad |u| > 1$$

4.14.13 Exemplos. Encontre a derivada das seguintes funções:

(i) $y = \arcsen(x + 1).$

$$y = \arcsen u, \quad u = x + 1.$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + 1)^2}}.$$

(ii) $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right).$

$$y = \operatorname{arctg} u, \quad u = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

$$y' = \frac{u'}{1 + u^2}$$

$$y' = \frac{\frac{(1 + x^2) \cdot (-2x) - (1 - x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2}}{1 + \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2}$$

$$y' = \frac{-2x}{1 + x^4}.$$

4.14.14 Derivadas das funções hiperbólicas.

Como as funções hiperbólicas são definidas em termos da função exponencial, podemos facilmente determinar suas derivadas, usando as regras de derivação já estabelecidas.

Por exemplo, se $y = \sinh x$, então

$$y' = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]',$$

$$= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})',$$

$$= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$= \cosh x.$$

Similarmente, obtemos as derivadas das demais funções hiperbólicas.

Podemos acrescentar na tabela de derivação as seguintes fórmulas.

$$(25) \quad y = \sinh u \quad \Rightarrow \quad y' = \cosh u \cdot u'$$

$$(26) \quad y = \cosh u \quad \Rightarrow \quad y' = \sinh u \cdot u'$$

$$(27) \quad y = \operatorname{tgh} u \quad \Rightarrow \quad y' = \operatorname{sech}^2 u \cdot u'$$

$$(28) \quad y = \operatorname{cotgh} u \quad \Rightarrow \quad y' = -\operatorname{cosech}^2 u \cdot u'$$

$$(29) \quad y = \operatorname{sech} u \quad \Rightarrow \quad y' = -\operatorname{sech} u \cdot \operatorname{tgh} u \cdot u'$$

$$(30) \quad y = \operatorname{cosech} u \quad \Rightarrow \quad y' = -\operatorname{cosech} u \cdot \operatorname{cotgh} u \cdot u'.$$

4.14.15 Exemplos. Determinar a derivada das seguintes funções:

$$(i) \quad y = \sinh (x^3 + 3).$$

$$y = \sinh u, \quad u = x^3 + 3.$$

$$y' = \cosh u \cdot u'$$

$$= \cosh (x^3 + 3) \cdot 3x^2.$$

$$(ii) \quad y = \operatorname{sech} (2x).$$

$$y = \operatorname{sech} u, \quad u = 2x.$$

$$y' = -\operatorname{sech} u \cdot \operatorname{tgh} u \cdot u'$$

$$= -\operatorname{sech} (2x) \cdot \operatorname{tgh} (2x) \cdot 2.$$

$$(iii) \quad y = \ln [\operatorname{tgh} (3x)].$$

$$y = \ln u, \quad u = \operatorname{tgh} (3x).$$

$$y' = \frac{u'}{u}$$

$$= \frac{\operatorname{sech}^2 (3x) \cdot 3}{\operatorname{tgh} (3x)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{3}{\cosh^2(3x)}}{\frac{\sinh(3x)}{\cosh(3x)}} \\
 &= 3 \operatorname{sech}(3x) \cdot \operatorname{cosech}(3x).
 \end{aligned}$$

$$(iv) \quad y = \operatorname{cotgh}(1 - x^3).$$

$$y = \operatorname{cotgh} u, \quad u = 1 - x^3.$$

$$\begin{aligned}
 y' &= -\operatorname{cosech}^2 u \cdot u' \\
 &= -\operatorname{cosech}^2(1 - x^3) \cdot (-3x^2) \\
 &= 3x^2 \operatorname{cosech}^2(1 - x^3).
 \end{aligned}$$

4.14.16 Derivadas das funções hiperbólicas inversas.

Na Seção 2.15.6 vimos que $y = \arg \sinh x$ pode ser expresso na forma

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Assim, fazendo $u = x + \sqrt{x^2 + 1}$ e aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\
 &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Portanto, se $y = \arg \sinh x$ então $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

De maneira similar podem ser obtidas as derivadas das demais funções hiperbólicas.

Apresentamos as fórmulas que completam nossa tabela de derivadas.

$$(31) \quad y = \arg \sinh u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

$$(32) \quad y = \arg \cosh u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}, \quad u > 1$$

$$(33) \quad y = \arg \tanh u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{1 - u^2}, \quad |u| < 1$$

$$(34) \quad y = \arg \coth u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{1 - u^2}, \quad |u| > 1$$

$$(35) \quad y = \arg \operatorname{sech} u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-u'}{u \sqrt{1 - u^2}}, \quad 0 < u < 1$$

$$(36) \quad y = \arg \operatorname{cosech} u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-u'}{|u| \sqrt{1 + u^2}}, \quad u \neq 0.$$

4.14.17 Exemplos. Determinar a derivada de cada uma das funções dadas.

$$(i) \quad y = x^2 \arg \cosh x^2.$$

Temos,

$$\begin{aligned} y' &= x^2 \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^4 - 1}} + 2x \operatorname{arg} \cosh x^2 \\ &= 2x \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^4 - 1}} + \operatorname{arg} \cosh x^2 \right]. \end{aligned}$$

(ii) $y = \operatorname{arg} \operatorname{tgh} (\operatorname{sen} 3x)$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\operatorname{sen} 3x)'}{1 - (\operatorname{sen} 3x)^2} \\ &= \frac{\cos(3x) \cdot 3}{\cos^2 3x} \\ &= \frac{3}{\cos 3x} \\ &= 3 \sec 3x. \end{aligned}$$

(iii) $y = x \operatorname{arg} \operatorname{senh} x - \sqrt{x^2 + 1}$.

$$\begin{aligned} y' &= x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \operatorname{arg} \operatorname{senh} x - \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \operatorname{arg} \operatorname{senh} x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \operatorname{arg} \operatorname{senh} x. \end{aligned}$$

4.14.18 Tabela Geral de derivadas.

Reunindo todas as fórmulas obtidas, formamos a tabela de derivadas que apresentamos a seguir. Nesta tabela u e v são funções deriváveis de x e c , α e a são constantes.

$$(1) \quad y = c \Rightarrow y' = 0$$

$$(2) \quad y = x \Rightarrow y' = 1$$

$$(3) \quad y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$$

$$(4) \quad y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$$

$$(5) \quad y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$(6) \quad y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(7) \quad y = u^\alpha, (\alpha \neq 0) \Rightarrow y' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$$

$$(8) \quad y = a^u (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$(9) \quad y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot u'$$

$$(10) \quad y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \log_a e.$$

$$(11) \quad y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$(12) \quad y = u^v \Rightarrow y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v' \quad (u > 0)$$

$$(13) \quad y = \operatorname{sen} u \Rightarrow y' = \cos u \cdot u'$$

$$(14) \quad y = \cos u \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$$

$$(15) \quad y = \operatorname{tg} u \Rightarrow y' = \sec^2 u \cdot u'$$

$$(16) \quad y = \operatorname{cotg} u \Rightarrow y' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$$

$$(17) y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u'$$

$$(18) y = \operatorname{cosec} u \Rightarrow y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u \cdot u'$$

$$(19) y = \arcsen u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(20) y = \arccos u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(21) y = \operatorname{arctg} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(22) y = \operatorname{arccotg} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$(23) y = \operatorname{arcsec} u, |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \frac{u'}{|u| \sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$$

$$(24) y = \operatorname{arccosec} u, |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \frac{-u'}{|u| \sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$$

$$(25) y = \operatorname{senh} u \Rightarrow y' = \cosh u \cdot u'$$

$$(26) y = \cosh u \Rightarrow y' = \operatorname{senh} u \cdot u'$$

$$(27) y = \operatorname{tgh} u \Rightarrow y' = \operatorname{sech}^2 u \cdot u'$$

$$(28) y = \operatorname{cotgh} u \Rightarrow y' = -\operatorname{cosech}^2 u \cdot u'$$

$$(29) y = \operatorname{sech} u \Rightarrow y' = -\operatorname{sech} u \cdot \operatorname{tgh} u \cdot u'$$

$$(30) y = \operatorname{cosech} u \Rightarrow y' = -\operatorname{cosech} u \cdot \operatorname{cotgh} u \cdot u'$$

$$\times (31) y = \arg \operatorname{senh} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$\times (32) y = \arg \cosh u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}, u > 1$$

$$> (33) \ y = \arg \operatorname{tgh} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1 - u^2}, \quad |u| < 1$$

$$> (34) \ y = \arg \operatorname{cotgh} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1 - u^2}, \quad |u| > 1$$

$$> (35) \ y = \arg \operatorname{sech} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u \sqrt{1 - u^2}}, \quad 0 < u < 1$$

$$> (36) \ y = \arg \operatorname{cosech} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{|u| \sqrt{1 + u^2}}, \quad u \neq 0.$$

4.15 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 75 calcular a derivada.

$$1. \ f(x) = 10 (3x^2 + 7x - 3)^{10}$$

$$2. \ f(x) = \frac{1}{3} (2x^5 + 6x^{-3})^5$$

$$3. \ f(x) = \frac{1}{a} (bx^2 + ax)^3$$

$$4. \ f(x) = (3x^2 + 6x)^{10} - \frac{1}{x^2}$$

$$5. \ f(t) = (7t^2 + 6t)^7 (3t - 1)^4$$

$$6. \ f(x) = (5x - 2)^6 (3x - 1)^3$$

$$7. \ f(t) = \left(\frac{7t + 1}{2t^2 + 3} \right)^3$$

$$8. \ f(x) = (2x - 5)^4 + \frac{1}{x + 1} - \sqrt{x}$$

$$9. \ f(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 6x - 2)^2}$$

$$10. \ f(t) = (4t^2 - 5t + 2)^{-1/3}$$

$$11. \ f(x) = \frac{2x}{\sqrt{3x - 1}}$$

$$12. \ f(x) = \frac{7x^2}{2 \sqrt[5]{3x + 1}} + \sqrt{3x + 1}$$

$$13. \ f(t) = \sqrt{\frac{2t + 1}{t - 1}}$$

$$14. \ f(x) = 2e^{3x^2 + 6x + 7}$$

15. $f(x) = \frac{1}{3} e^{3-x}$

16. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

17. $f(x) = 2^{3x^2 + 6x}$

18. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\ln 2x}$

19. $f(s) = (7s^2 + 6s - 1)^3 + 2e^{-3s}$

20. $f(t) = \frac{e^{-t^2} + 1}{t}$

21. $f(t) = e^{t/2} (t^2 + 5t)$

22. $f(t) = \frac{\sqrt{e^t - 1}}{\sqrt{e^t + 1}}$

23. $f(x) = \log_2 (2x + 4)$

24. $f(x) = \frac{1}{a} (bx^2 + c) - \ln x$

25. $f(s) = \log_3 \sqrt{s + 1}$

26. $f(x) = \frac{1}{2} \ln (7x^2 - 4)$

27. $f(x) = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$

28. $f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

29. $f(x) = \frac{a^{3x}}{b^{3x^2 - 6x}}$

30. $f(t) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\sqrt{t}}$

31. $f(t) = (2t + 1)^{t^2 - 1}$

32. $f(x) = (e^{x^2} + 4)^{\sqrt{x}}$

33. $f(s) = \frac{1}{2} (a + bs)^{\ln(a + bs)}$

34. $f(x) = \sin (2x + 4)$

35. $f(u) = \cos (\pi/2 - u)$

36. $f(\theta) = 2 \cos (2\theta^2 - 3\theta + 1)$

37. $f(\theta) = 2 \cos \theta^2 \cdot \sin 2\theta$

38. $f(\alpha) = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

39. $f(x) = \sin^3 (3x^2 + 6x)$

40. $f(\theta) = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$

41. $f(x) = 3 \operatorname{tg} (2x + 1) + \sqrt{x}$

43. $f(x) = \frac{3 \sec^2 x}{x}$

45. $f(x) = e^{2x} \cos 3x$

47. $f(\theta) = -\operatorname{cosec}^2 \theta^3$

49. $f(x) = a \sqrt{\cos bx}$

51. $f(u) = (u \operatorname{tg} u)^2$

53. $f(\theta) = a^{\operatorname{cotg} \theta}, a > 0$

55. $f(x) = (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^2$

57. $f(t) = t \operatorname{arc} \cos 3t$

59. $f(t) = \operatorname{arc} \cos (\operatorname{sen} t)$

61. $f(x) = \operatorname{arc} \sec \sqrt{x}$

63. $f(t) = t^2 \operatorname{arc} \operatorname{cosec} (2t + 3)$

65. $f(x) = \frac{\ln (\operatorname{sen} hx)}{x}$

67. $f(t) = [\operatorname{cotgh} (t + 1)^2]^{1/2}$

42. $f(s) = \operatorname{cotg}^4 (2s - 3)^2$

44. $f(x) = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)^2$

46. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} (x + 1)}{e^x}$

48. $f(x) = \operatorname{sen}^2 (x/2) \cos^2 (x/2)$

50. $f(t) = \ln \cos^2 t$

52. $f(x) = \log_2 (3x - \cos 2x)$

54. $f(t) = e^{2 \cos 2t}$

56. $f(x) = \operatorname{arc} \cos \frac{2x}{3}$

58. $f(s) = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} s/2}{s + 1}$

60. $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{1 - x^2}$

62. $f(x) = \operatorname{senh} (2x - 1)$

64. $f(t) = \ln [\cosh (t^2 - 1)]$

66. $f(t) = \operatorname{tgh} (4t^2 - 3)^2$

68. $f(x) = \operatorname{sech} [\ln x]$

$$69. f(x) = \left[\operatorname{cosech} \frac{(3x + 1)}{x} \right]^3$$

$$70. f(x) = (\arg \sinh x)^2$$

$$71. f(x) = x \arg \cosh x - \sqrt{x^2 - 1}$$

$$72. f(x) = \arg \operatorname{tgh} \frac{1}{2} x^2$$

$$73. f(x) = x \arg \operatorname{cotgh} x^2$$

$$74. f(x) = (x + 1) \arg \operatorname{sech} 2x$$

$$75. f(x) = \frac{1}{2} [\arg \cosh x^2]^2$$

76. Encontrar $f'(x)$.

$$a) f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \ln |3 - 4x|$$

$$c) f(x) = e^{|2x - 1|}$$

77. Calcular $f'(0)$, se $f(x) = e^{-x} \cos 3x$.

78. Calcular $f'(1)$, se $f(x) = \ln(1 + x) + \arcsen x/2$.

79. Dada $f(x) = e^{-x}$, calcular $f(0) + x f'(0)$.

80. Dada $f(x) = 1 + \cos x$, mostrar que $f(x)$ é par e $f'(x)$ é ímpar.

81. Dada a $f(x) = \sin 2x \cos 3x$, mostrar que $f(x)$ é ímpar e $f'(x)$ é par.

82. Dada a função $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, calcular $f'(x)$ e verificar que f e f' são periódicas de mesmo período.

83. Seja $f(x)$ derivável e periódica de período T . Mostrar que f' também é periódica de período T .

84. Mostrar que a função $y = x e^{-x}$ satisfaz a equação $xy' = (1 - x)y$.
85. Mostrar que a função $y = x e^{-x^2/2}$ satisfaz a equação $xy' = (1 - x^2)y$.
86. Mostrar que a função $y = \frac{1}{1 + x + \ln x}$ satisfaz a equação $xy' = y(y \ln x - 1)$.
87. Sejam f e g funções tais que $(f \circ g)(x) = x$ para todo x , e $f'(x)$ e $g'(x)$ existem para todo x .
Mostrar que

$$f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}, \text{ sempre que } g'(x) \neq 0.$$

88. Obtenha a regra do produto para $(uv)'$ derivando a fórmula

$$\ln(uv) = \ln u + \ln v.$$

89. Provar que:

a) Se $y = \cotg x$, então $y' = -\operatorname{cosec}^2 x$.

b) Se $y = \sec x$, então $y' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$.

c) Se $y = \operatorname{arc} \cotg x$, então $y' = \frac{-1}{1 + x^2}$.

d) Se $y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$, $|x| \geq 1$, então $y' = \frac{-1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}$, $|x| > 1$.

e) Se $y = \cosh x$, então $y' = \sinh x$.

f) Se $y = \operatorname{tgh} x$, então $y' = \operatorname{sech}^2 x$.

g) Se $y = \operatorname{sech} x$, então $y' = -\operatorname{sech} x \cdot \operatorname{tgh} x$.

$$h) \text{ Se } y = \arg \operatorname{sech} x, \text{ então } y' = \frac{-1}{x \sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1.$$

$$i) \text{ Se } y = \arg \operatorname{cosech} x, \text{ então } y' = \frac{-1}{|x| \sqrt{1+x^2}}, \quad x \neq 0.$$

90. Encontrar todos os pontos onde o gráfico de $f(x)$ tem tangente horizontal.

$$a) \quad f(x) = \sin 2x;$$

$$b) \quad f(x) = 2 \cos x.$$

4.16 DERIVADAS SUCESSIVAS

Seja f uma função derivável definida num certo intervalo. A sua derivada f' é também uma função, definida no mesmo intervalo. Podemos, portanto, pensar na derivada da função f' .

4.16.1 Definição. Seja f uma função derivável. Se f' também for derivável, então a sua derivada é chamada *derivada segunda de f* e é representada por $f''(x)$ (lê-se *f -duas linhas de x*) ou $\frac{d^2f}{dx^2}$ (lê-se *derivada segunda de f em relação a x*).

4.16.2 Exemplos

$$(i) \text{ Se } f(x) = 3x^2 + 8x + 1, \text{ então}$$

$$f'(x) = 6x + 8 \text{ e}$$

$$f''(x) = 6.$$

$$(ii) \text{ Se } f(x) = \operatorname{tg} x, \text{ então}$$

$$f'(x) = \sec^2 x \text{ e}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \sec x \cdot \sec x \cdot \operatorname{tg} x \\ &= 2 \sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

(iii) Se $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x \\ &= x (x^2 + 1)^{-1/2} \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= x \cdot \frac{-1}{2} (x^2 + 1)^{-3/2} \cdot 2x + (x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}. \end{aligned}$$

Se f'' é uma função derivável, sua derivada, representada por $f'''(x)$, é chamada *derivada terceira* de $f(x)$.

A derivada de ordem n ou n -ésima derivada de f , representada por $f^{(n)}(x)$, é obtida derivando-se a derivada de ordem $n - 1$ de f .

4.16.3 Exemplos

(i) Se $f(x) = 3x^5 + 8x^2$, então

$$f'(x) = 15x^4 + 16x$$

$$f''(x) = 60x^3 + 16$$

$$f'''(x) = 180x^2$$

$$f^{iv}(x) = 360x$$

$$f^{(5)}(x) = 360$$

$$f^{(6)}(x) = 0$$

$$\begin{aligned} & \text{---} \\ & \text{---} \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = 0, \text{ para } n \geq 6.$$

(ii) Se $f(x) = e^{x/2}$, então

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{x/2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4} e^{x/2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{8} e^{x/2}$$

— — — — —
— — — — —

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n} e^{x/2}.$$

(iii) Se $f(x) = \sin x$, então

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{iv}(x) = \sin x$$

— — — — —
— — — — —

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{para } n = 1, 5, 9, \dots \\ -\sin x, & \text{para } n = 2, 6, 10, \dots \\ -\cos x, & \text{para } n = 3, 7, 11, \dots \\ \sin x, & \text{para } n = 4, 8, 12, \dots \end{cases}$$

4.17 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

4.17.1 Função na forma implícita.

Consideremos a equação

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

Dizemos que a função $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação (1), se ao substituirmos y por $f(x)$ em (1), esta equação se transforma numa identidade.

4.17.2 Exemplos

(i) A equação $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ define implicitamente a função $y = 2(1 - x^2)$.

De fato, substituindo $y = 2(1 - x^2)$ na equação $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$, obtemos a identidade $x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2(1 - x^2) - 1 = 0$.

(ii) A equação $x^2 + y^2 = 4$ define, implicitamente, uma infinidade de funções.

De fato, resolvendo a equação para y como função de x , temos

$$y = \pm \sqrt{4 - x^2}.$$

Duas funções na forma implícita são obtidas naturalmente:

$$y = + \sqrt{4 - x^2} \quad \text{e} \quad y = - \sqrt{4 - x^2}.$$

Os gráficos dessas funções são, respectivamente, a semicircunferência superior e inferior da circunferência de centro na origem e raio 2 (ver Figura 4.8).

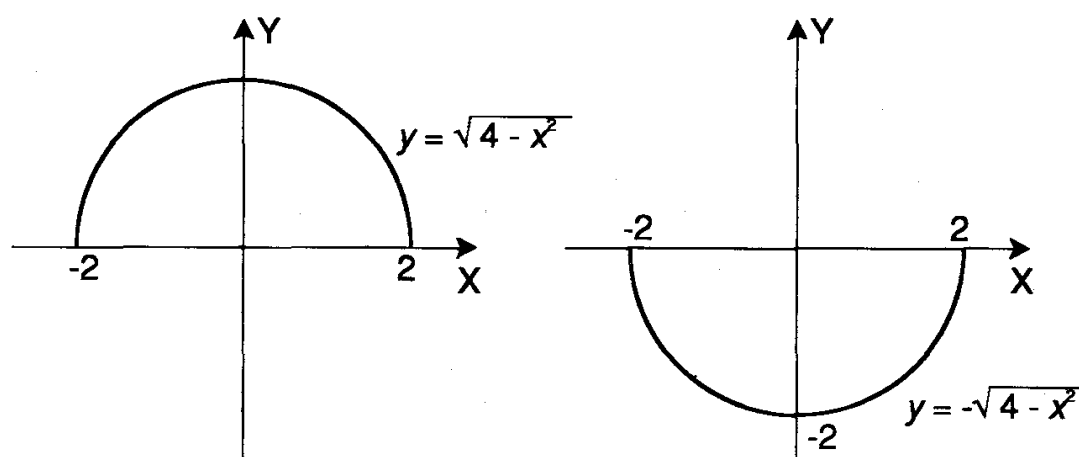


Figura 4-8

Podemos obter outras funções implícitas da equação $x^2 + y^2 = 4$. Se tomamos um número real c qualquer entre -2 e 2 , podemos definir a função

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, & \text{para } x \geq c \\ -\sqrt{4 - x^2}, & \text{para } x < c. \end{cases}$$

A função $h(x)$ é definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$, pois $x^2 + [h(x)]^2 = 4$ para todo x no domínio de h .

Podemos ver o gráfico da função h na Figura 4.9. Observamos que esta função não é contínua no ponto c e portanto não é derivável.

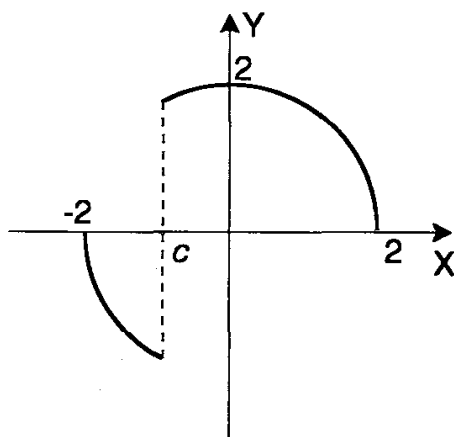


Figura 4-9

Atribuindo diferentes valores a c , podemos obter tantas funções quantas quisermos. Assim, a equação $x^2 + y^2 = 4$, define implicitamente uma infinidade de funções.

Nem sempre é possível encontrar a forma explícita de uma função definida implicitamente. Por exemplo, como explicitar uma função $y = f(x)$ definida pela equação

$$y^4 + 3xy + 2 \ln y = 0?$$

O método da derivação implícita permite encontrar a derivada de uma função assim definida, sem a necessidade de explicitá-la.

4.17.3 A Derivada de uma função na forma implícita.

Suponhamos que $F(x, y) = 0$ define implicitamente uma função derivável $y = f(x)$. Os exemplos que seguem mostram que usando a regra da cadeia, podemos determinar y' sem explicitar y .

Exemplos.

(i) Sabendo que $y = f(x)$ é uma função derivável definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$, determinar y' .

Como a equação $x^2 + y^2 = 4$ define $y = f(x)$ implicitamente, podemos considerá-la uma identidade válida para todo x no domínio de f .

Derivando ambos os membros desta identidade em relação a x , temos

$$(x^2 + y^2)' = (4)'$$

ou,

$$(x^2)' + (y^2)' = 0.$$

Como $y = f(x)$, usando a regra da cadeia, vem

$$2x + 2y y' = 0.$$

Isolando y' , temos

$$y' = \frac{-x}{y}.$$

Observamos que, neste exemplo, foi usado o fato de que $y = f(x)$ é uma função *derivável* definida implicitamente. Esse resultado não é válido para a função $h(x)$, representada graficamente na Figura 4.9. De fato, embora esta função também seja definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$, ela não é contínua no ponto $x = c$ e portanto, não é derivável neste ponto.

(ii) Sabendo que $y = f(x)$ é definida pela equação $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$, determinar y' .

Sabemos que a equação $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$ é uma identidade quando substituímos y por $f(x)$. Portanto, em todos os pontos onde $y = f(x)$ é derivável, temos as seguintes igualdades:

$$(xy^2 + 2y^3)' = (x - 2y)'$$

$$(xy^2)' + (2y^3)' = (x)' - (2y)'$$

$$x \cdot 2y y' + y^2 + 6y^2 y' = 1 - 2y'.$$

Isolando y' na última igualdade, temos

$$y' = \frac{1 - y^2}{2xy + 6y^2 + 2}.$$

(iii) Se $y = f(x)$ é definida por $x^2 y^2 + x \sin y = 0$, determinar y' .

Lembrando que $y = f(x)$ e derivando em relação a x com o auxílio da regra da cadeia, temos

$$x^2 \cdot 2y \cdot y' + 2xy^2 + x \cos y y' + \sin y = 0.$$

Isolando y' , vem

$$y' = - \frac{2xy^2 + \operatorname{sen} y}{2x^2y + x \cos y}.$$

(iv) Determinar a equação da reta tangente à curva $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ no ponto $(-1, 0)$.

Derivando implicitamente em relação a x , temos

$$2x + \frac{1}{2}y' = 0$$

Portanto, $y' = -4x$. No ponto $x = -1$, $y' = 4$.

A equação da reta tangente à curva no ponto $(-1, 0)$ é dada por

$$y - 0 = 4(x + 1), \text{ ou seja,}$$

$$y = 4x + 4.$$

4.18 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NA FORMA PARAMÉTRICA

4.18.1 Função na Forma Paramétrica. Sejam

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (1)$$

duas funções da mesma variável real t , $t \in [a, b]$. Então, a cada valor de t correspondem dois valores x e y . Considerando estes valores como as coordenadas de um ponto P , podemos dizer que a cada valor de t corresponde um ponto bem determinado do plano xy . Se as funções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são contínuas, quando t varia de a até b , o ponto $P(x(t), y(t))$ descreve uma curva no plano (ver Figura 4.10). As equações (1) são chamadas equações paramétricas da curva e t é chamado parâmetro.

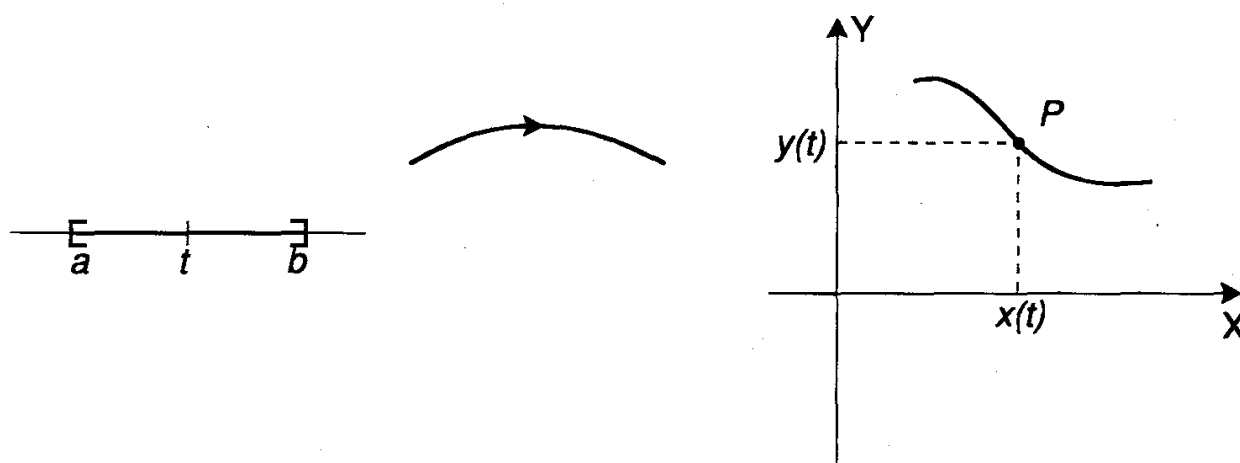


Figura 4-10

Vamos supor agora, que a função $x = x(t)$ admite uma função inversa $t = t(x)$. Neste caso, podemos escrever

$$y = y[t(x)]$$

e dizemos que as equações (1) definem y como função de x na forma paramétrica.

Eliminando o parâmetro t nas equações (1), podemos obter a função $y = y(x)$ na forma analítica usual.

Muitas curvas importantes costumam ser representadas na forma paramétrica. Em geral, as equações paramétricas são úteis porque, em diversas situações, elas simplificam os cálculos. Elas também são muito usadas na Física, para descrever o movimento de uma partícula. A seguir, apresentamos as equações paramétricas de algumas curvas e damos exemplos de algumas funções definidas na forma paramétrica.

4.18.2 Exemplos

$$(i) \quad \text{As equações} \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t + 3 \end{cases}$$

definem uma função $y(x)$ na forma paramétrica.

De fato, a função $x = 2t + 1$ é inversível sendo que sua inversa é dada por $t = \frac{1}{2}(x - 1)$. Substituindo este valor na equação $y = 4t + 3$, obtemos a equação cartesiana da função $y(x)$, que é dada por

$$\begin{aligned} y &= 4 \left[\frac{1}{2}(x - 1) \right] + 3 \\ &= 2x + 1. \end{aligned}$$

(ii) As equações
$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \end{cases} \quad (2)$$

onde a é uma constante positiva, representam uma circunferência de centro na origem e raio a .

Na Figura 4.11, visualizamos o parâmetro t , $0 \leq t \leq 2\pi$, que representa o ângulo formado pelo eixo positivo dos x e o segmento de reta que une o ponto P à origem.

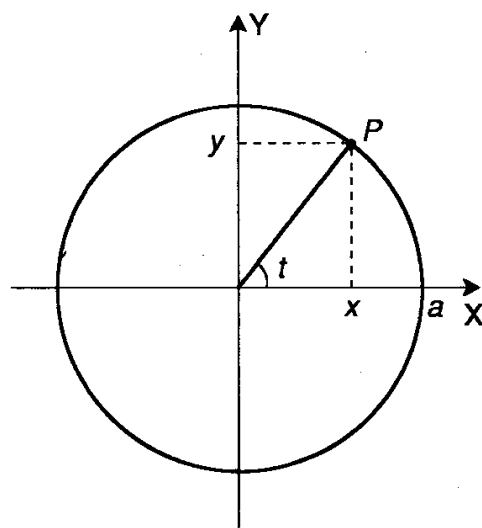


Figura 4-11

Para obter a equação cartesiana, devemos eliminar o parâmetro t .

Elevando ao quadrado cada uma das equações em (2) e adicionando-as, obtemos

$$\begin{array}{r} x^2 = a^2 \cos^2 t \\ y^2 = a^2 \sin^2 t \\ \hline x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t \\ = a^2 \end{array}$$

ou seja, $x^2 + y^2 = a^2$.

Observamos que, neste exemplo, não temos uma função $y(x)$ na forma paramétrica, porque a função $x = a \cos t$ não é inversível no intervalo $[0, 2\pi]$. No entanto, podemos obter uma ou mais funções $y = y(x)$ na forma paramétrica, restringindo convenientemente o domínio.

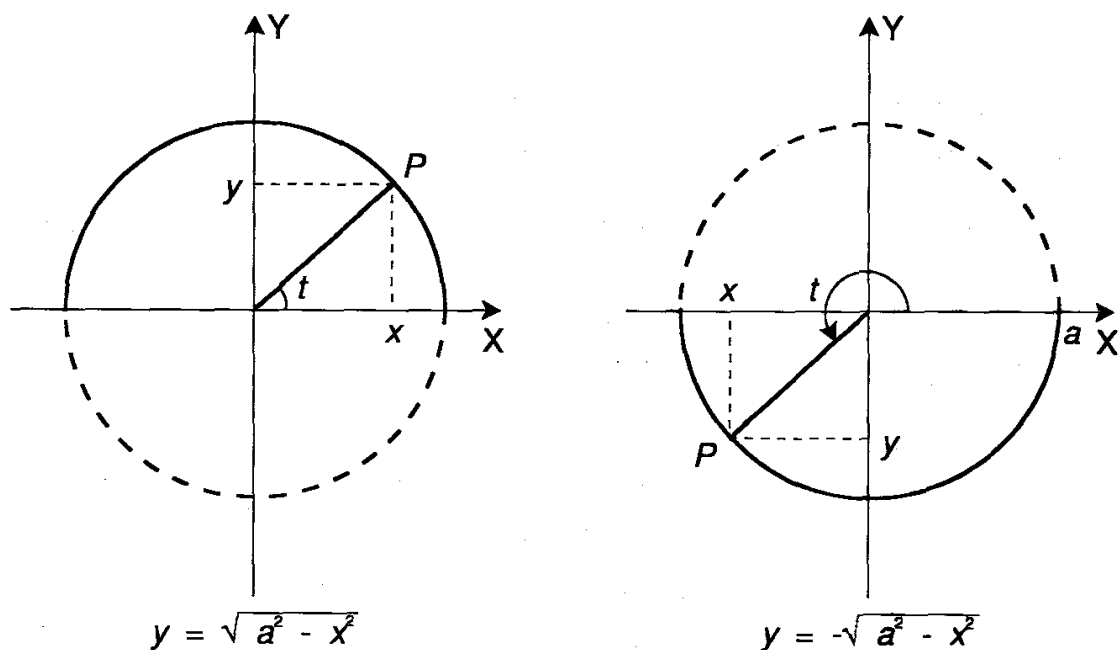


Figura 4-12

Por exemplo, as equações

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t, \quad t \in [0, \pi] \end{cases}$$

definem, na forma paramétrica, a função $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ e as equações

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t, t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

definem a função $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ (ver Figura 4.12).

(iii) As equações

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, t \in [0, 2\pi], \end{cases} \quad (3)$$

onde a e b são constantes positivas, representam uma elipse de centro na origem e semi-eixos a e b , como mostra a Figura 4.13(a).

Neste caso, o parâmetro t também representa um ângulo e pode ser visualizado na Figura 4.13(b).

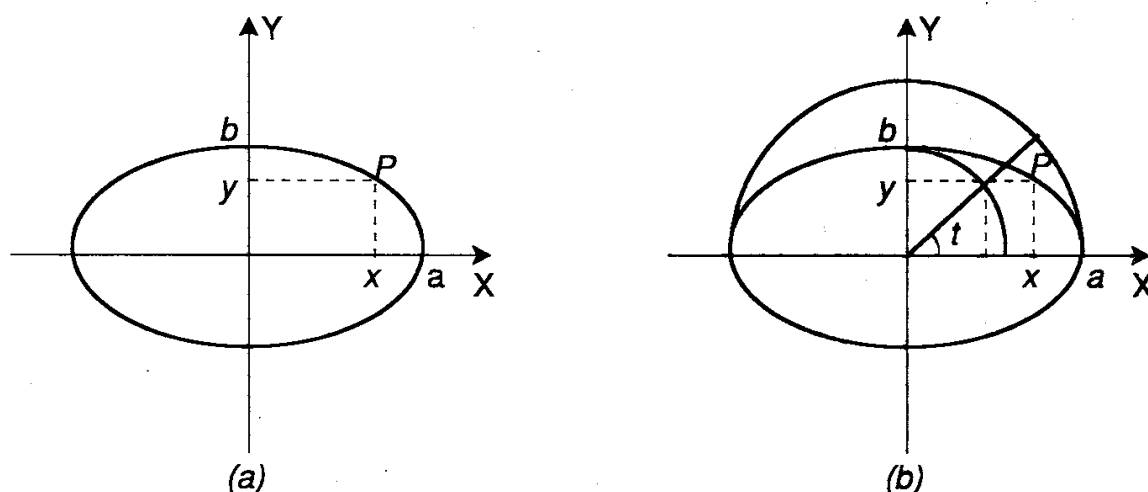


Figura 4-13

Para obter a equação cartesiana da elipse dada, devemos eliminar o parâmetro t .

Multiplicando a primeira equação de (3) por b e a segunda equação por a , obtemos

$$bx = ab \cos t$$

$$ay = ab \sin t.$$

Elevando cada uma dessas equações ao quadrado e adicionando-as, vem

$$\begin{aligned} b^2 x^2 &= a^2 b^2 \cos^2 t \\ a^2 y^2 &= a^2 b^2 \sin^2 t \\ \hline b^2 x^2 + a^2 y^2 &= a^2 b^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= a^2 b^2 \end{aligned}$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como no exemplo anterior, restringindo convenientemente o domínio, podemos definir uma ou mais funções $y(x)$ na forma paramétrica.

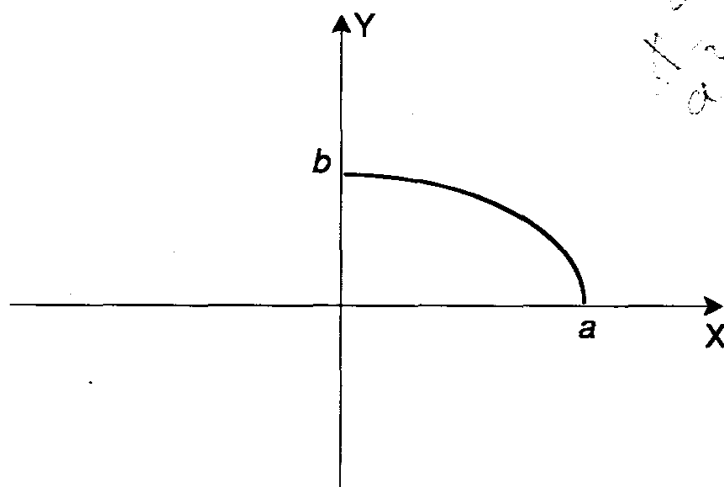


Figura 4-14

Por exemplo, as equações

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \end{cases}$$

definem, na forma paramétrica, a função $y(x)$ que está representada na Figura 4.14.

(iv) As equações

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi, \end{cases} \quad (4)$$

onde a é uma constante positiva, representam a curva vista na Figura 4.15(a).

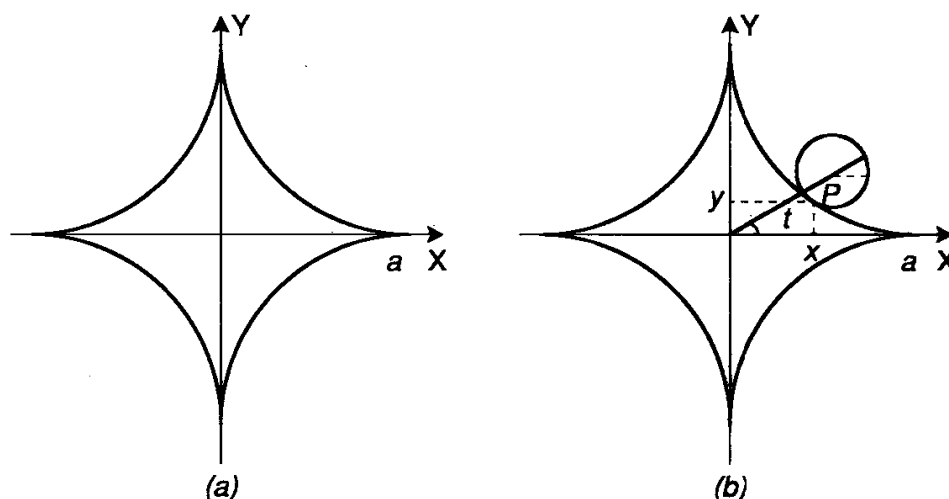


Figura 4-15

Esta curva é chamada astróide ou hipociclóide de 4 cúspides e pode ser definida como a trajetória descrita por um ponto fixo P de uma circunferência de raio $a/4$, quando esta gira, sem escorregar, dentro de uma circunferência fixa de raio a .

Na Figura 4.15(b), ilustramos o significado geométrico do parâmetro t .

Para obter a equação cartesiana da curva, procedemos de forma análoga aos exemplos anteriores. Elevando cada equação de (4) à potência $2/3$ e adicionando-as, obtemos

$$\begin{aligned} x^{2/3} &= a^{2/3} \cos^2 t \\ y^{2/3} &= a^{2/3} \sin^2 t \\ \hline x^{2/3} + y^{2/3} &= a^{2/3} (\cos^2 t + \sin^2 t) \end{aligned}$$

ou, de forma equivalente,

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Observamos que as equações (4) não definem uma função $y(x)$ na forma paramétrica, porque $x = a \cos^3 t$ não é inversível no intervalo $[0, 2\pi]$. Portanto, se queremos definir uma função $y(x)$ na forma paramétrica, devemos tomar o cuidado de restringir convenientemente o domínio.

4.18.3 Derivada de uma Função na Forma Paramétrica.

Seja y uma função de x definida pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a, b]. \quad (5)$$

Suponhamos que as funções $y = y(t)$, $x = x(t)$ e sua inversa $t = t(x)$ são deriváveis.

Podemos ver a função $y = y(x)$, definida pelas equações (5), como uma função composta

$$y = y[t(x)]$$

e aplicar a regra da cadeia. Temos, então

$$\frac{dy}{dx} = y'(t) \cdot t'(x). \quad (6)$$

Como $x = x(t)$ e sua inversa $t = t(x)$ são deriváveis, pelo teorema 4.13, vem

$$t'(x) = \frac{1}{x'(t)}. \quad (7)$$

Substituindo (7) em (6), obtemos

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}}.$$

Observamos que esta fórmula nos permite calcular a derivada $\frac{dy}{dx}$ sem conhecer explicitamente y como função de x .

4.18.4 Exemplos

(i) Calcular a derivada $\frac{dy}{dx}$ da função $y(x)$ definida na forma paramétrica pelas equações:

$$(a) \quad \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t + 3 \end{cases};$$

$$(b) \quad \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 9t^2 - 6t \end{cases}.$$

Solução.

(a) Temos,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4}{2} = 2.$$

(b) Temos,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{18t - 6}{3} = 6t - 2. \quad (8)$$

Se quisermos o valor da derivada $\frac{dy}{dx}$ em função de x , devemos determinar $t = t(x)$ e substituir em (8). Temos,

$$x = 3t - 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{3} (x + 1) .$$

Substituindo em (8), vem

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 6 \cdot \frac{1}{3} (x + 1) - 2 \\ &= 2x. \end{aligned}$$

(ii) Determinar a derivada $\frac{dy}{dx}$ da função $y(x)$ definida na forma paramétrica pelas equações

$$\begin{cases} x = 4 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Temos,

$$x'(t) = -12 \cos^2 t \sin t$$

$$y'(t) = 12 \sin^2 t \cos t.$$

Portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{12 \sin^2 t \cos t}{-12 \cos^2 t \sin t} = - \frac{\sin t}{\cos t} = - \operatorname{tg} t .$$

Observamos que este resultado só é válido para os pontos onde $x'(t) \neq 0$, ou seja, para $t \neq 0$ e $t \neq \frac{\pi}{2}$.

(iii) Determinar a equação da reta tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$, no ponto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Solução. Vamos usar a função $y(x)$ definida na forma paramétrica pelas equações

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t, \quad t \in [0, \pi], \end{cases}$$

como vimos no Exemplo 4.18.2(ii).

Vamos agora, calcular a inclinação da reta tangente no ponto P , ou seja, vamos calcular o valor da derivada $\frac{dy}{dx}$ no ponto P . Temos,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2 \cos t}{-2 \sin t} = -\cotg t.$$

Precisamos determinar o valor do parâmetro t que corresponde ao ponto P .

Temos,

$$\begin{cases} \sqrt{2} = 2 \cos t \\ \sqrt{2} = 2 \sin t, \end{cases}$$

e portanto $t = \frac{\pi}{4}$.

A equação da reta tangente à curva no ponto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, é dada por

$$y - \sqrt{2} = -1(x - \sqrt{2}),$$

ou seja,

$$y = -x + 2\sqrt{2}.$$

4.19 DIFERENCIAL

4.19.1 Acréscimos. Seja $y = f(x)$ uma função. Podemos sempre considerar uma variação da variável independente x . Se x varia de x_1 a x_2 , definimos o *acrécimo de x* , denotado por Δx , como

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

A variação de x origina uma correspondente variação de y , denotada por Δy , dada por

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) \quad \text{ou,}$$

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \quad (\text{ver Figura 4.16}).$$

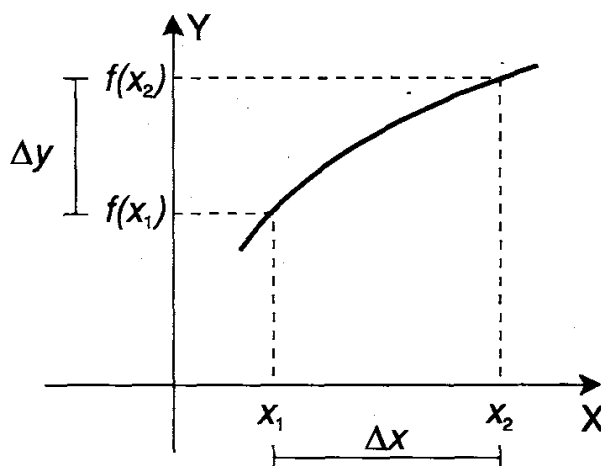


Figura 4-16

4.19.2 Diferencial. Sejam $y = f(x)$ uma função derivável e Δx um acréscimo de x . Definimos:

(a) a diferencial da variável independente x , denotada por dx , como

$$dx = \Delta x;$$

(b) a diferencial da variável dependente y , denotada por dy , como

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

De acordo com a definição anterior, podemos escrever $dy = f'(x) \cdot dx$ ou

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Assim, a notação $\frac{dy}{dx}$, já usada para $f'(x)$, pode agora ser considerada um quociente entre duas diferenciais.

4.19.3 Interpretação Geométrica. Consideremos a Figura 4.17, que representa o gráfico de uma função $y = f(x)$ derivável.

O acréscimo Δx que define a diferencial dx está geometricamente representado pela medida do segmento PM [$P(x_1, f(x_1))$ e $M(x_2, f(x_1))$] (ver Figura 4.17).

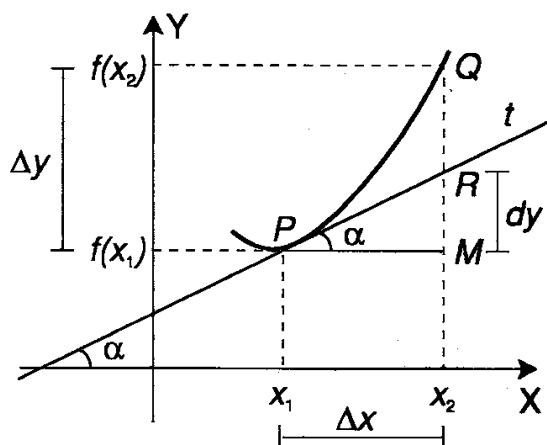


Figura 4-17

O acréscimo Δy está representado pela medida do segmento MQ [$Q(x_2, f(x_2))$].

A reta t é tangente à curva no ponto P . Esta reta corta a reta $x = x_2$ no ponto R , formando o triângulo retângulo PMR . A inclinação desta reta t é dada por $f'(x_1)$ ou $\operatorname{tg} \alpha$. Observando o triângulo PMR , escrevemos

$$f'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{MR}}{\overline{PM}},$$

onde $\overline{MR}$ e $\overline{PM}$ são respectivamente as medidas dos segmentos MR e PM . Usando o fato de que $f'(x_1) = \frac{dy}{dx}$, concluímos que $dy \doteq \overline{MR}$, já que $\overline{PM} = dx$.

Observamos que, quando Δx torna-se muito pequeno, o mesmo ocorre com a diferença $\Delta y - dy$. Usamos esse fato em exemplos práticos, considerando $\Delta y \equiv dy$ (Δy aproximadamente igual a dy), desde que o Δx considerado seja um valor pequeno.

4.19.4 Exemplos

(i) Se $y = 2x^2 - 6x + 5$, calcule o acréscimo Δy para $x = 3$ e $\Delta x = 0,01$.

Usando a definição de Δy , escrevemos

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \\ &= f(3 + 0,01) - f(3) \\ &= f(3,01) - f(3) \\ &= [2 \cdot (3,01)^2 - 6 \cdot 3,01 + 5] - [2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 5] \\ &= 5,0602 - 5 \\ &= 0,0602. \end{aligned}$$

(ii) Se $y = 6x^2 - 4$, calcule Δy e dy para $x = 2$ e $\Delta x = 0,001$.

Usando a definição de Δy , temos

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \\ &= f(2 + 0,001) - f(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [6 \cdot (2,001)^2 - 4] - [6 \cdot 2^2 - 4] \\ &= 20,024006 - 20 \\ &= 0,024006. \end{aligned}$$

Usando a definição de dy , temos

$$\begin{aligned} dy &= f'(x) \cdot \Delta x \\ &= 12x \cdot \Delta x \\ &= 12 \cdot 2 \cdot 0,001 \\ &= 0,024. \end{aligned}$$

Observamos que a diferença $\Delta y - dy = 0,000006$ seria menor caso usássemos um valor menor que 0,001 para Δx .

(iii) Calcule um valor aproximado para $\sqrt[3]{65,5}$ usando diferenciais.

Seja $y = f(x)$ a função definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Escrevemos,

$$y + \Delta y = \sqrt[3]{x + \Delta x} \quad \text{e} \quad dy = \frac{1}{3x^{2/3}} dx.$$

Fazemos $x = 64$ e $\Delta x = 1,5$, isto porque 64 é o cubo perfeito mais próximo de 65,5.

Portanto,

$$x + \Delta x = 65,5, \quad dx = \Delta x = 1,5 \quad \text{e}$$

$$dy = \frac{1}{3(64)^{2/3}} \cdot 1,5 = \frac{1,5}{3 \cdot 16} = 0,03125.$$

Então,

$$\sqrt[3]{65,5} = \sqrt[3]{64 + 1,5} = \sqrt[3]{x + \Delta x} = y + \Delta y.$$

Fazendo $\Delta y \cong dy$, obtemos finalmente que

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{65,5} &\cong y + \Delta y = 4 + 0,03125 \\ &= 4,03125.\end{aligned}$$

(iv) Obtenha um valor aproximado para o volume de uma fina coroa cilíndrica de altura 12 m, raio interior 7 m e espessura 0,05 m. Qual o erro decorrente se resolvermos usando diferenciais?

A Figura 4.18 representa o sólido de altura h , raio interior r e espessura Δr .

O volume V do cilindro interior é dado por

$$\begin{aligned}V &= \pi r^2 \cdot h \\ &= \pi \cdot 7^2 \cdot 12 \\ &= 588 \pi \text{ m}^3.\end{aligned}$$

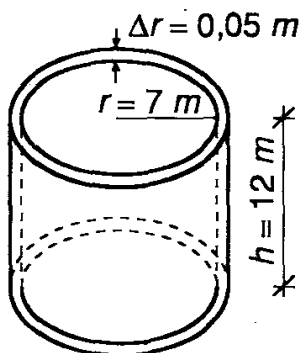


Figura 4-18

Dando um acréscimo Δr o volume da coroa será igual à variação ΔV em V .

Usando diferenciais, temos

$$\begin{aligned}\Delta V \equiv dV &= 2\pi r h \Delta r \\ &= 2\pi \cdot 7 \cdot 12 \cdot 0,05 \\ &= 8,4 \pi \text{ m}^3.\end{aligned}$$

O volume exato será

$$\begin{aligned}\Delta V &= \pi (r + \Delta r)^2 \cdot h - \pi r^2 h \\ &= \pi (7,05)^2 \cdot 12 - \pi \cdot 7^2 \cdot 12 \\ &= 596,43 \pi - 588 \pi \\ &= 8,43 \pi \text{ m}^3.\end{aligned}$$

Portanto, o erro cometido na aproximação usada foi

$$\Delta V - dV = 0,03 \pi \text{ m}^3.$$

4.20 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 12 calcular as derivadas sucessivas até a ordem n indicada.

1. $y = 3x^4 - 2x$; $n = 5$

2. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $n = 3$

3. $y = 3 - 2x^2 + 4x^5$; $n = 10$

4. $y = \sqrt{3 - x^2}$; $n = 2$

5. $y = \frac{1}{x - 1}$; $n = 4$

6. $y = e^{2x+1}$; $n = 3$

7. $y = \frac{1}{e^x}$; $n = 4$

8. $y = \ln 2x$; $n = 2$

9. $y = \sin ax$; $n = 7$

10. $y = -2 \cos \frac{x}{2}$; $n = 5$

11. $y = \operatorname{tg} x$; $n = 3$
12. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$; $n = 2$.
13. Achar a derivada de ordem 100 das funções:
- a) $y = \operatorname{sen} x$; b) $y = \cos x$.
14. Mostrar que a derivada de ordem n da função $y = 1/x$ é dada por $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.
15. Mostrar que a derivada de ordem n da função $y = e^{ax}$ é dada por $y^{(n)} = a^n e^{ax}$.
16. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis até 3ª ordem. Mostrar que:
- a) $(fg)'' = gf'' + 2f'g' + fg''$; b) $(fg)''' = gf''' + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$.
17. Mostrar que $x = A \cos(\omega t + \alpha)$, onde A , ω e α são constantes, satisfaz a equação
- $$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \left(\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} \right).$$
18. Calcular $y' = \frac{dy}{dx}$ das seguintes funções definidas implicitamente.
- a) $x^3 + y^3 = a^3$ b) $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$
- c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ d) $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$
- e) $a \cos^2(x+y) = b$ f) $\operatorname{tg} y = xy$
- g) $e^y = x + y$.
19. Determinar as retas tangente e normal à circunferência de centro $(2, 0)$ e raio 2, nos pontos de abscissa 1.
20. Demonstrar que a reta tangente à elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ no ponto (x_0, y_0) tem a equação
- $$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1.$$

21. Em que pontos a reta tangente à curva $y^2 = 2x^3$ é perpendicular à reta $4x - 3y + 1 = 0$?
22. Mostrar que as curvas cujas equações são $2x^2 + 3y^2 = 5$ e $y^2 = x^3$ interceptam-se no ponto $(1, 1)$ e que suas tangentes nesse ponto são perpendiculares.
23. Calcular a derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ das seguintes funções definidas na forma paramétrica. Para quais valores de t , y' está definida?

$$(a) \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3, \quad t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin t, \quad t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 + 5, \quad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t, \quad t \in [0, \pi] \end{cases}$$

24. Determinar a equação da reta tangente à elipse

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

no ponto $P\left(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

25. Determinar as equações da reta tangente e da reta normal à astróide

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

no ponto $P \left(-\frac{1}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8} \right)$.

26. Encontrar $\Delta y - dy$ das funções dadas.

a) $y = 3x^2 - x + 1$;

b) $y = 2\sqrt{x}$;

c) $y = \frac{x+1}{2x-1}$.

27. Encontrar Δy e dy para os valores dados

a) $y = \frac{1}{2x^2}$; $\Delta x = 0,001$; $x = 1$;

b) $y = 5x^2 - 6x$; $\Delta x = 0,02$; $x = 0$;

c) $y = \frac{2x+1}{x-1}$; $\Delta x = 0,1$; $x = -1$;

28. Calcular um valor aproximado para as seguintes raízes, usando diferencial.

a) $\sqrt{50}$;

b) $\sqrt[3]{63,5}$;

c) $\sqrt[4]{13}$.

29. Calcular a diferencial das seguintes funções.

a) $y = \ln(3x^2 - 4x)$;

b) $y = \frac{x+1}{e^x}$;

c) $y = \sin(5x^2 + 6)$.

30. A área S de um quadrado de lado x é dada por $S = x^2$. Achar o acréscimo e a diferencial desta função e determinar o valor geométrico desta última.

31. Dar a interpretação geométrica do acréscimo e da diferencial da função $S = \pi x^2$ (área do círculo).

32. Uma caixa em forma de um cubo deve ter um revestimento externo com espessura de $1/4$ cm. Se o lado da caixa é de 2 m, usando diferencial, encontrar a quantidade de revestimento necessária.

-
33. Um material está sendo escoado de um recipiente, formando uma pilha cônica cuja altura é sempre igual ao raio da base. Se em dado instante o raio é 12 cm, use diferenciais para obter a variação do raio que origina um aumento de 2 cm^3 no volume da pilha.
34. Use diferenciais para obter o aumento aproximado do volume da esfera quando o raio varia de 3 cm a 3,1 cm.
35. Um terreno, em desapropriação para reforma agrária, tem a forma de um quadrado. Estima-se que cada um de seus lados mede 1 200 m, com um erro máximo de 10 m. Usando diferencial, determinar o possível erro no cálculo da área do terreno.
36. Um pintor é contratado para pintar ambos os lados de 50 placas quadradas com 40 cm de lado. Depois que recebeu as placas verificou que os lados das placas tinham $1/2$ cm a mais. Usando diferencial, encontrar o aumento aproximado da porcentagem de tinta a ser usada.