MAKRON
Books

CAPÍTULO 5

EDITORA DA UFSC

APLICAÇÕES DA DERIVADA

Neste capítulo, apresentaremos as aplicações da Derivada.

Em diversas áreas encontramos problemas que serão resolvidos utilizando a derivada como uma taxa de variação.

A análise do comportamento das funções será feita detalhadamente usando definições e teoremas que envolvem derivadas.

Finalmente, introduziremos as regras de L'Hospital, que serão usadas no cálculo de alguns limites.

5.1 VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Velocidade e aceleração são conceitos que todos nós conhecemos. Quando dirigimos um carro, podemos medir a distância percorrida num certo intervalo de tempo. O velocímetro marca, a cada instante, a velocidade. Se pisamos no acelerador ou no freio, percebemos que a velocidade muda. Sentimos a aceleração.

Mostraremos que podemos calcular a velocidade e a aceleração através de derivadas.

5.1.1 Velocidade. Suponhamos que um corpo se move em linha reta e que $s = s(t)$ represente o espaço percorrido pelo móvel até o instante t. Então, no intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$, o corpo sofre um deslocamento

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

Definimos a *velocidade média* nesse intervalo de tempo como o quociente

$$v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

isto é, a velocidade média é o quociente do espaço percorrido pelo tempo gasto em percorrê-lo.

De forma geral, a velocidade média nada nos diz sobre a velocidade do corpo no instante t. Para obtermos a *velocidade instântanea* do corpo no instante t, calculamos sua velocidade média em instantes de tempo Δt cada vez menores. A velocidade instantânea, ou velocidade no instante t, é o limite das velocidades médias quando Δt se aproxima de zero, isto é,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Como já vimos no capítulo anterior, esse limite é a derivada da função $s = s(t)$ em relação a t. Portanto,

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}.$$

5.1.2 Aceleração. O conceito de aceleração é introduzido de maneira análoga ao de velocidade.

A *aceleração média* no intervalo de tempo de t até $t + \Delta t$ é dada por

$$a_m = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Observamos que ela mede a variação da velocidade do corpo por unidade de tempo no intervalo de tempo Δt. Para obtermos a aceleração do corpo no instante t, tomamos sua aceleração média em intervalos de tempo Δt cada vez menores. A *aceleração instantânea* é o limite

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t).$$

Logo, a derivada da velocidade nos dá a aceleração. Como $v(t) = s'(t)$, temos $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

5.1.3 Exemplos

(*i*) No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante t é dada por $s(t) = 16t - t^2$.

Determinar:

(*a*) a velocidade média do corpo no intervalo de tempo [2, 4];

(*b*) a velocidade do corpo no instante $t = 2$;

(*c*) a aceleração média no intervalo [0, 4];

(*d*) a aceleração no instante $t = 4$.

(*a*) A velocidade média do corpo no intervalo de tempo entre 2 e 4 é dada por

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} \\ &= \frac{(16 \cdot 4 - 4^2) - (16 \cdot 2 - 2^2)}{4 - 2} \\ &= \frac{48 - 28}{2} \\ &= 10 \text{ unid. veloc.} \end{aligned}$$

(b) A velocidade do corpo no instante $t = 2$ é o valor da derivada $s\,'(t)$ no ponto $t = 2$. Como $s(t) = 16t - t^2$, temos

$$v(t) = s\,'(t) = 16 - 2t.$$

No instante $t = 2$, a velocidade é

$$\begin{aligned} v(2) &= 16 - 2 \cdot 2 \\ &= 12 \text{ unid. veloc.} \end{aligned}$$

(c) A aceleração média no intervalo [0, 4] é dada por

$$a_m = \frac{v\,(4) - v\,(0)}{4 - 0}.$$

Como $v(t) = 16 - 2t$, temos

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{(16 - 2 \cdot 4) - (16 - 2 \cdot 0)}{4} \\ &= \frac{8 - 16}{4} \\ &= -2 \text{ unid. aceler. .} \end{aligned}$$

(d) A aceleração no instante $t = 4$ é dada pela derivada $v\,'(4)$. Como $v(t) = 16 - 2t$, temos $a(t) = v\,'(t) = -2$. Portanto,

$$a(4) = -2 \text{ unid. aceler. .}$$

(ii) A equação do movimento de um corpo em queda livre é

$$s = \frac{1}{2}\,gt^2,$$

onde $g \cong 9{,}8$ m/s^2 é a aceleração da gravidade. Determinar a velocidade e a aceleração do corpo em um instante qualquer t.

Num instante qualquer t, a velocidade é dada por

$$\begin{aligned} v(t) &= s'(t) \\ &= \frac{1}{2} g \cdot 2t \\ &= gt \text{ m/s.} \end{aligned}$$

A aceleração num instante t é

$$\begin{aligned} a(t) &= v'(t) \\ &= g \text{ m/s}^2, \end{aligned}$$

que é a aceleração de gravidade.

5.2 TAXA DE VARIAÇÃO

Na seção anterior vimos que quando um corpo se move em linha reta de acordo com a equação do movimento $s = s(t)$, a sua velocidade é dada por $v = s'(t)$.

Sabemos que a velocidade representa a razão de variação do deslocamento por unidade de variação do tempo. Assim, a derivada $s'(t)$ é a *taxa de variação da função* $s(t)$ por unidade de variação t.

O mesmo ocorre com a aceleração que é dada por $a(t) = v'(t)$. Ela representa a razão de variação da velocidade $v(t)$ por unidade de variação do tempo t.

Toda derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação. Dada uma função $y = f(x)$, quando a variável independente varia de x a $x + \Delta x$, a correspondente variação de y será $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. O quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

representa a *taxa média de variação* de y em relação a x.

A derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

é a *taxa instantânea de variação* ou simplesmente *taxa de variação* de y em relação a x.

A interpretação da derivada como uma razão de variação tem aplicações práticas nas mais diversas ciências. Vejamos alguns exemplos.

5.2.1 Exemplos

(*1*) Sabemos que a área de um quadrado é função de seu lado. Determinar:

(*a*) a taxa de variação média da área de um quadrado em relação ao lado quando este varia de 2,5 a 3 m.;

(*b*) a taxa de variação da área em relação ao lado quando este mede 4 m.

Solução. Sejam A a área do quadrado e l seu lado. Sabemos que

$A = l^2$.

(*a*) A taxa média de variação de A em relação a l quando l varia de 2,5 m a 3 m é dada por

$$\begin{aligned}\frac{\Delta A}{\Delta l} &= \frac{A(3) - A(2{,}5)}{3 - 2{,}5} \\ &= \frac{9 - 6{,}25}{0{,}5}\end{aligned}$$

$$= \frac{2{,}75}{0{,}5}$$

$$= 5{,}5.$$

(*b*) A taxa de variação da área em relação ao lado é dada por

$$\frac{dA}{dl} = \frac{d}{dl}(l^2)$$

$$= 2\,l.$$

Quando $l = 4$, temos

$$\frac{dA}{dl} = 2 \cdot 4 = 8\,,$$

ou,

$$\left.\frac{dA}{dl}\right|_{(4)} = 8\,.$$

Portanto, quando $l = 4$ m, a taxa de variação da área do quadrado será de 8 m^2 por variação de 1 metro no comprimento do lado.

(*2*) Uma cidade *X* é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo *t* (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado por

$$f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}\cdot$$

(*a*) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo $t = 4$?

(*b*) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo $t = 8$?

(*c*) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no 5º dia?

Solução. A taxa com que a epidemia se propaga é dada pela razão de variação da função $f(t)$ em relação a t. Portanto, para um tempo t qualquer, essa taxa é dada por

$$f'(t) = 64 - t^2.$$

(*a*) No tempo $t = 4$, temos

$$f'(4) = 64 - 16 = 48.$$

Logo, no tempo $t = 4$, a moléstia está se alastrando à razão de 48 pessoas por dia.

(*b*) No tempo $t = 8$, temos

$$\begin{aligned} f'(8) &= 64 - 64 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, no tempo $t = 8$ a epidemia está totalmente controlada.

(*c*) Como o tempo foi contado em dias a partir do 1º dia de epidemia, o 5º dia corresponde à variação de t de 4 para 5.

O número de pessoas atingidas pela moléstia durante o quinto dia será dado por

$$\begin{aligned} f(5) - f(4) &= \left(64 \cdot 5 - \frac{5^3}{3}\right) - \left(64 \cdot 4 - \frac{4^3}{3}\right) \\ &= 320 - \frac{125}{3} - 256 + \frac{64}{3} \\ &\cong 43. \end{aligned}$$

No item (*a*), vimos que no tempo $t = 4$ (início do 5º), a epidemia se alastra a uma taxa de 48 pessoas por dia. No item (*c*), calculamos que durante o 5º dia 43 pessoas serão atingidas. Essa diferença ocorreu porque a taxa de propagação da moléstia se modificou no decorrer do dia.

(3) Analistas de produção verificaram que em uma montadora x, o número de peças produzidas nas primeiras t horas diárias de trabalho é dado por

$$f(t) = \begin{cases} 50\,(t^2 + t), & \text{para } 0 \leq t \leq 4 \\ 200\,(t + 1), & \text{para } 4 \leq t \leq 8\,. \end{cases}$$

(*a*) Qual a razão de produção (em unidades por hora) após 3 horas de trabalho? E após 7 horas?

(*b*) Quantas peças são produzidas na 8ª hora de trabalho?

Solução.

(*a*) A razão de produção após 3 horas de trabalho é dada por $f\,'(3)$. Para $t < 4$, temos

$$f\,'(t) = 50(2t + 1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f\,'(3) &= 50(2 \cdot 3 + 1) \\ &= 350. \end{aligned}$$

Logo, após 3 horas de trabalho a razão de produção é de 350 peças por hora de trabalho.

A razão de produção após 7 horas de trabalho é dada por $f\,'(7)$. Para $t > 4$,

$f\,'(t) = 200.$

Logo, após 7 horas de trabalho a razão de produção é de 200 peças por hora de trabalho.

(*b*) O número de peças produzidas na oitava hora de trabalho é dado por

$$\begin{aligned} f(8) - f(7) &= 200(8 + 1) - 200(7 + 1) \\ &= 200. \end{aligned}$$

Neste exemplo, o número de peças produzidas na 8ª hora de trabalho coincidiu com a razão de produção após 7 horas de trabalho. Isso ocorreu porque a razão de produção permaneceu constante durante o tempo considerado.

(*4*) Um reservatório de água está sendo esvaziado para limpeza. A quantidade de água no reservatório, em litros, t horas após o escoamento ter começado é dada por

$$V = 50(80 - t)^2.$$

Determinar:

(*a*) A taxa de variação média do volume de água no reservatório durante as 10 primeiras horas de escoamento.

(*b*) A taxa de variação do volume de água no reservatório após 8 horas de escoamento.

(*c*) A quantidade de água que sai do reservatório nas 5 primeiras horas de escoamento.

Solução.

(*a*) A taxa de variação média do volume nas 10 primeiras horas é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v}{\Delta t} &= \frac{50\,(80 - 10)^2 - 50\,(80 - 0)^2}{10} \\ &= \frac{50\,[70^2 - 80^2]}{10} \\ &= 50 \cdot (-150) \\ &= -7.500 \text{ l/hora.} \end{aligned}$$

O sinal negativo aparece porque o volume de água está diminuindo com o tempo.

(*b*) A taxa de variação do volume de água num tempo qualquer é dada por

$$\frac{dV}{dt} = 50 \cdot 2(80 - t)(-1)$$

$$= -100(80 - t).$$

No tempo $t = 8$, temos

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(8)} = -100(80 - 8)$$

$$= -100 \cdot 72$$

$$= -720 \text{ l/h}.$$

(*c*) A quantidade de água que sai do reservatório nas 5 primeiras horas é dada por

$$V(0) - V(5) = 50(80)^2 - 50(75)^2$$

$$= 38.750 \text{ l}.$$

Em muitas situações práticas a quantidade em estudo é dada por uma função composta. Nestes casos, para determinar a taxa de variação, devemos usar a regra da cadeia. Vejamos os exemplos que seguem.

(5) Um quadrado de lado l está se expandindo segundo a equação $l = 2 + t^2$, onde a variável t representa o tempo. Determinar a taxa de variação da área desse quadrado no tempo $t = 2$.

Solução. Seja A a área do quadrado. Sabemos que $A = l^2$ e que $l = 2 + t^2$.

A taxa de variação da área em relação ao tempo, num tempo t qualquer é dada por $\dfrac{dA}{dt}$.

Usando a regra da cadeia, vem

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{dA}{dl}\cdot\frac{dl}{dt}\\ &= 2l\cdot 2t\\ &= 4l\,t\\ &= 4(2+t^2)\cdot t.\end{aligned}$$

No tempo $t = 2$, temos

$$\begin{aligned}\left.\frac{dA}{dt}\right|_{(2)} &= 4\,(2+2^2)\cdot 2\\ &= 48 \text{ unid. área/unid. tempo.}\end{aligned}$$

(*6*) O raio de uma circunferência cresce à razão de 21 cm/s. Qual a taxa de crescimento do comprimento da circunferência em relação ao tempo?

Solução. Sejam r = raio da circunferência,

t = tempo,

l = comprimento da circunferência .

Da geometria, sabemos que $l = 2\,\pi\, r$.

Por hipótese, a taxa de crescimento de r em relação a t é $\frac{dr}{dt} = 21$ cm/s.

A taxa de crescimento de l em relação a t é dada por $\frac{dl}{dt}\cdot$ Usando a regra da cadeia, vem

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$= 2\,\pi \cdot 21$$

$$= 42\,\pi \text{ cm/s.}$$

(7) Um ponto $P(x, y)$ se move ao longo do gráfico da função $y = 1/x$. Se a abscissa varia à razão de 4 unidades por segundo, qual é a taxa de variação da ordenada quando a abscissa é $x = 1/10$?

Solução. Temos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Como x varia à razão de 4 unid./seg, $\frac{dx}{dt} = 4$. Como $y = 1/x$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$.

Então,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{x^2} \cdot 4$$

$$= \frac{-4}{x^2}.$$

Quando $x = 1/10$, temos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-4}{(1/10)^2}$$

$$= -4 \cdot 100$$

$$= -400\ .$$

Portanto, quando a abscissa do ponto P é $x = 1/10$ e está *crescendo* a uma taxa de 4 unid./seg a ordenada *decresce* a uma razão de 400 unid./s. Intuitivamente, podemos perceber isso analisando o gráfico de f (Ver Figura 5.1).

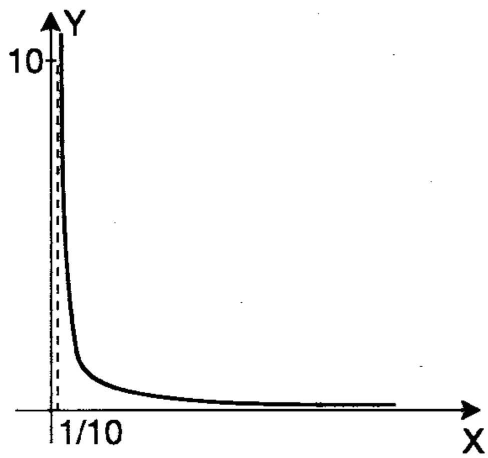


Figura 5-1

(*8*) Acumula-se areia em um monte com a forma de um cone onde a altura é igual ao raio da base. Se o volume de areia cresce a uma taxa de $10\ m^3/h$, a que razão aumenta a área da base quando a altura do monte é de 4 m?

Solução. Sejam V = volume de areia,

h = altura do monte,

r = raio da base,

A = área da base. (Ver Figura 5.2.)

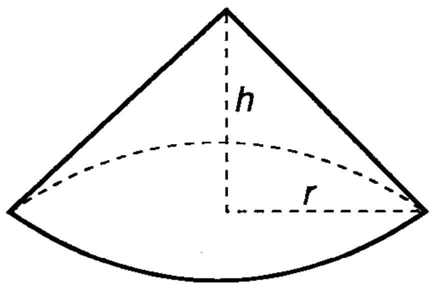


Figura 5-2

Da geometria, sabemos que

$$A = \pi r^2 \qquad (1)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h . \qquad (2)$$

Por hipótese, $\dfrac{dV}{dt} = 10$ m³/h e $h = r$. Substituindo $h = r$ em (2), temos

$$V = \frac{1}{3} \pi r^3 . \qquad (3)$$

Queremos encontrar a taxa de variação $\dfrac{dA}{dt}$ quando $r = 4$ m.

Derivando (*1*) em relação a t, temos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt} .$$

Precisamos determinar $\dfrac{dr}{dt}$ · Derivando a equação (*3*) em relação a t, vem

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$= \pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} .$$

Como $\dfrac{dV}{dt} = 10$ m³/h, temos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi r^2} \cdot 10$$

$$= \frac{10}{\pi r^2} .$$

Portanto,

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{10}{\pi r^2}$$

$$= \frac{20}{r}.$$

Quando $r = h = 4$ m, $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{20}{4} = 5$.

Logo, quando a altura do monte é de 4 m, a área da base cresce a uma taxa de 5 m^2/h.

5.3 EXERCÍCIOS

1. Um corpo se move em linha reta, de modo que sua posição no instante t é dada por $f(t) = 16t + t^2$, $0 \leq t \leq 8$, onde o tempo é dado em segundos e a distância em metros.

   (*a*) Achar a velocidade média durante o intervalo de tempo $[b, b + h]$, $0 \leq b < 8$.

   (*b*) Achar a velocidade média durante os intervalos [3; 3,1], [3; 3,01] e [3; 3,001].

   (*c*) Determinar a velocidade do corpo num instante qualquer t.

   (*d*) Achar a velocidade do corpo no instante $t = 3$.

   (*e*) Determinar a aceleração no instante t.

2. Influências externas produzem uma aceleração numa partícula de tal forma que a equação de seu movimento retilíneo é $y = \dfrac{b}{t} + ct$, onde y é o deslocamento e t o tempo.

   (*a*) Qual a velocidade da partícula no instante $t = 2$?

   (*b*) Qual é a equação da aceleração?

3. A posição de uma partícula que se move no eixo dos x depende do tempo de acordo com a equação $x = 3t^2 - t^3$, em que x vem expresso em metros e t em segundos.

(*a*) Qual é o seu deslocamento depois dos primeiros 4 segundos?

(*b*) Qual a velocidade da partícula ao terminar cada um dos 4 primeiros segundos?

(*c*) Qual é a aceleração da partícula em cada um dos 4 primeiros segundos?

4. Um corpo cai livremente partindo do repouso. Calcule sua posição e sua velocidade depois de decorridos 1 e 2 segundos. (Da Física, use a equação $y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ para determinar a posição y do corpo, onde v_0 é a velocidade inicial e $g \cong 9{,}8$ m/s^2).

5. Numa granja experimental, constatou-se que uma ave em desenvolvimento pesa em gramas

$$W(t) = \begin{cases} 20 + \frac{1}{2}(t+4)^2 & , \ 0 \le t \le 60 \\ 24{,}4t + 604 & , \ 60 \le t \le 90, \end{cases}$$

onde t é medido em dias.

(*a*) Qual a razão de aumento do peso da ave quando $t = 50$?

(*b*) Quanto a ave aumentará no 51º dia?

(*c*) Qual a razão de aumento do peso quando $t = 80$?

6. Uma peça de carne foi colocada num freezer no instante $t = 0$. Após t horas, sua temperatura, em graus centígrados, é dada por

$$T(t) = 30 - 5t + \frac{4}{t+1}, \ 0 \le t \le 5.$$

Qual a velocidade de redução de sua temperatura após 2 horas?

7. A temperatura de um gás é mantida constante e sua pressão p em kgf/cm^3 e volume v em cm^3 estão relacionadas pela igualdade $vp = c$, onde c é constante. Achar a razão de variação do volume em relação à pressão quando esta vale 10 kgf/cm^3.

8. Uma piscina está sendo drenada para limpeza. Se o seu volume de água inicial era de 90.000 litros e depois de um tempo de t horas este volume diminuiu 2500 t^2 litros, determinar:

(*a*) tempo necessário para o esvaziamento da piscina;

(*b*) taxa média de escoamento no intervalo [2, 5];

(*c*) taxa de escoamento depois de 2 horas do início do processo.

9. Um apartamento está alugado por Cr$ 4.500,00. Este aluguel sofrerá um reajuste anual de Cr$ 1.550,00.

(*a*) Expresse a função com a qual podemos calcular a taxa de variação do aluguel, em t anos.

(*b*) Calcule a taxa de variação do aluguel após 4 anos.

(*c*) Qual a porcentagem de variação do aluguel depois de 1 ano do primeiro reajuste?

(*d*) Que acontecerá à porcentagem de variação depois de alguns anos?

10. Numa pequena comunidade obteve-se uma estimativa que daqui a t anos a população será de

$$p(t) = 20 - \frac{5}{t+1} \text{ milhares.}$$

(*a*) Daqui a 18 meses, qual será a taxa de variação da população desta comunidade?

(*b*) Qual será a variação real sofrida durante o 18º mês?

11. Seja r a raiz cúbica de um número real x. Encontre a taxa de variação de r em relação a x quando x for igual a 8.

12. Um líquido goteja em um recipiente. Após t horas, há $5t - t^{1/2}$ litros no recipiente. Qual a taxa de gotejamento de líquido no recipiente, em l/hora, quando $t = 16$ horas?

13. Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto de 5 m de raio de base e 10 m de altura. No tempo $t = 0$, a água começa a fluir no tanque à razão de 25 m^3/h. Com que velocidade o nível de água sobe? Quanto tempo levará para o tanque ficar cheio?

14. Achar a razão de variação do volume v de um cubo em relação ao comprimento de sua diagonal. Se a diagonal está se expandindo a uma taxa de 2 m/s, qual a razão de variação do volume quando a diagonal mede 3 m?

15. Uma usina de britagem produz pó de pedra, que ao ser depositado no solo, forma uma pilha cônica onde a altura é aproximadamente igual a 4/3 do raio da base.

(*a*) Determinar a razão de variação do volume em relação ao raio da base.

(*b*) Se o raio da base varia a uma taxa de 20 cm/s, qual a razão de variação do volume quando o raio mede 2 m?

16. Os lados de um triângulo equilátero crescem à taxa de 2,5 cm/s.

(*a*) Qual é a taxa de crescimento da área desse triângulo, quando os lados tiverem 12 cm de comprimento?

(*b*) Qual é a taxa de crescimento do perímetro, quando os lados medirem 10 cm de comprimento?

17. Um objeto se move sobre a parábola $y = 2x^2 + 3x - 1$ de tal modo que sua abscissa varia à taxa de 6 unidades por minuto. Qual é a taxa de variação de sua ordenada quando o objeto estiver no ponto $(0, -1)$?

18. Um trem deixa uma estação, num certo instante, e vai para a direção norte à razão de 80 km/h. Um segundo trem deixa a mesma estação 2 horas depois e vai na direção leste à razão de 95 km/h. Achar a taxa na qual estão se separando os dois trens 2 horas e 30 minutos depois do segundo trem deixar a estação.

19. Uma lâmpada colocada em um poste está a 4 m de altura. Se uma criança de 90 cm de altura caminha afastando-se da lâmpada à razão de 5 m/s, com que rapidez se alonga sua sombra?

20. O raio de um cone é sempre igual à metade de sua altura h. Determinar a taxa de variação da área da base em relação ao volume do cone.

Análise do Comportamento das Funções

Dada uma curva $y = f(x)$, usaremos a derivada para obter alguns dados acerca da curva. Por exemplo, discutiremos os pontos de máximos e mínimos, os intervalos onde a curva é crescente ou decrescente.

Esses dados nos levam a um método geral para construir esboços de gráficos de funções.

5.4 MÁXIMOS E MÍNIMOS

A Figura 5.3 nos mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$, onde assinalamos pontos de abscissas x_1, x_2, x_3 e x_4.

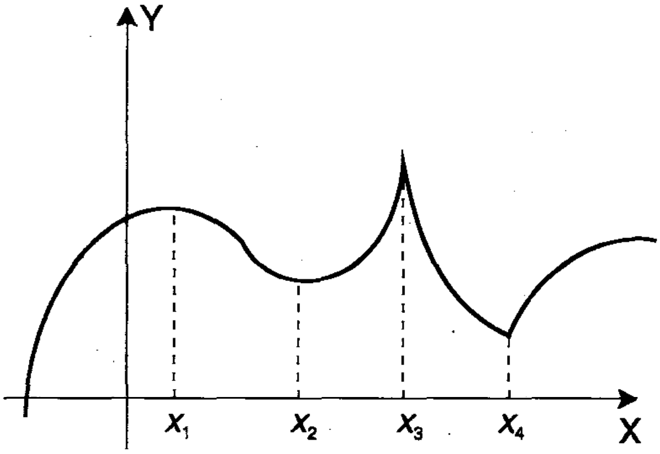


Figura 5-3

Esses pontos são chamados *pontos extremos* da função. $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são chamados *máximos relativos* e $f(x_2)$, $f(x_4)$ são chamados *mínimos relativos*.

Podemos formalizar as definições.

5.4.1 Definição. Uma função f tem um máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

5.4.2 Definição. Uma função f tem um mínimo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

5.4.3 Exemplo. A função $f(x) = 3x^4 - 12x^2$ tem um máximo relativo em $c_1 = 0$, pois existe o intervalo $(-2, 2)$ tal que $f(0) \geq f(x)$ para todo $x \in (-2, 2)$.

Em $c_2 = -\sqrt{2}$ e $c_3 = +\sqrt{2}$, a função dada tem mínimos relativos pois $f(-\sqrt{2}) \leq f(x)$ para todo $x \in (-2{,}0)$ e $f(\sqrt{2}) \leq f(x)$ para todo $x \in (0, 2)$ (ver Figura 5.4).

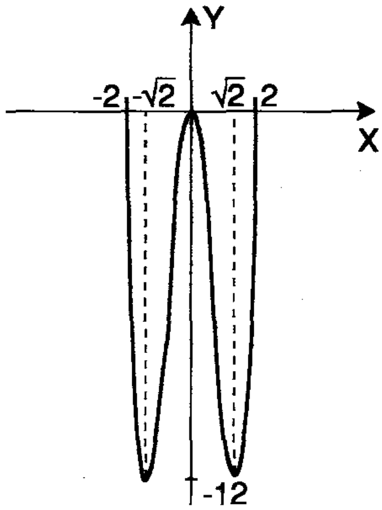


Figura 5-4

A proposição seguinte permite encontrar os possíveis pontos extremos de uma função.

5.4.4 Proposição. Suponhamos que $f(x)$ existe para todos os valores de $x \in (a, b)$ e que f tem um extremo relativo em c, onde $a < c < b$. Se $f\,'(c)$ existe, então $f\,'(c) = 0$.

Prova. Suponhamos que f tem um ponto de máximo relativo em c e que $f\,'(c)$ existe. Então,

$$f\,'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Como f tem um ponto de máximo relativo em c, pela definição 5.4.1, se x estiver suficientemente próximo de c temos que $f(c) \geq f(x)$ ou $f(x) - f(c) \leq 0$.

Se $x \to c^+$, temos $x - c > 0$. Portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ e então

$$f\,'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \qquad (1)$$

Se $x \to c^-$, temos $x - c < 0$. Portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ e então

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 . \qquad (2)$$

Por (*1*) e (*2*), concluímos que $f'(c) = 0$.

Se f tem um ponto de mínimo relativo em c, a demonstração é análoga.

Esta proposição pode ser interpretada geometricamente. Se f tem um extremo relativo em c e se $f'(c)$ existe, então o gráfico de $y = f(x)$ tem uma reta tangente horizontal no ponto onde $x = c$.

Da proposição, podemos concluir que quando $f'(c)$ existe, a condição $f'(c) = 0$ é *necessária* para a existência de um extremo relativo em c. Esta condição *não é suficiente* (ver Figura 5.5(a)). Isto é, se $f'(c) = 0$, a função f pode ter ou não um extremo relativo no ponto c.

Da mesma forma, a Figura 5.5(*b*) e (*c*) nos mostra que quando $f'(c)$ não existe, $f(x)$ pode ter ou não um extremo relativo em c.

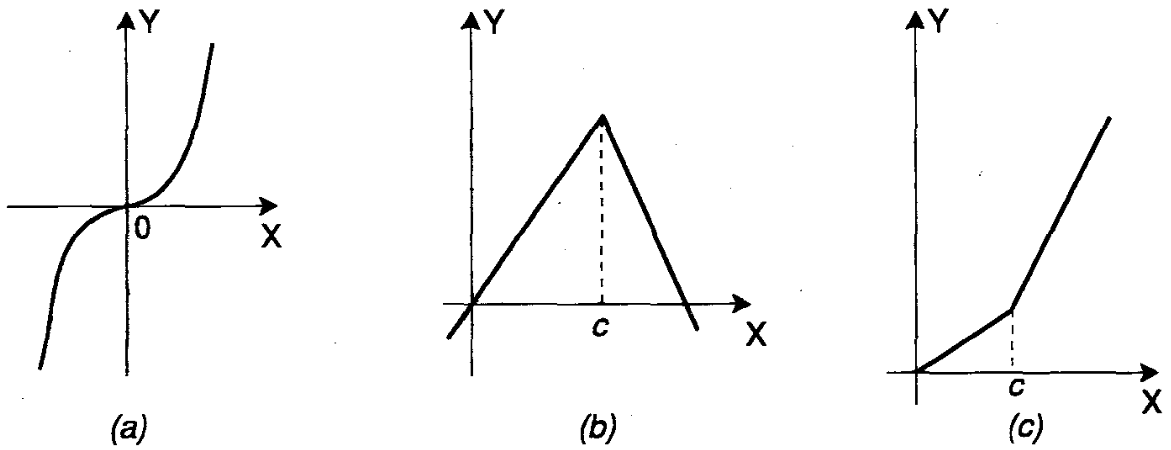


Figura 5-5

O ponto $c \in D(f)$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe, é chamado *ponto crítico* de f.

Portanto, uma condição necessária para a existência de um extremo relativo em um ponto c é que c seja um ponto crítico.

É interessante verificar que uma função definida num dado intervalo pode admitir diversos pontos extremos relativos. *O maior valor* da função num intervalo é chamado *máximo absoluto* da função nesse intervalo. Analogamente, o menor valor é chamado *mínimo absoluto*.

Por exemplo, a função $f(x) = 3x$ tem um mínimo absoluto igual a 3 em $[1, 3)$. Não existe um máximo absoluto em $[1, 3)$.

A função $f(x) = -x^2 + 2$ possui um máximo absoluto igual a 2 em $(-3, 2)$. Também podemos dizer que -7 é mínimo absoluto em $[-3, 2]$.

Temos a seguinte proposição, cuja demonstração será omitida.

5.4.5 Proposição. Seja f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então f assume máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

Para analisarmos o máximo e o mínimo absoluto de uma função quando o intervalo não for especificado usamos as definições que seguem.

5.4.6 Definição. Dizemos que $f(c)$ é o máximo absoluto da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

5.4.7 Definição. Dizemos que $f(c)$ é o mínimo absoluto da função f se $c \in D(f)$, e $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

5.4.8 Exemplos

(*i*) A função $f(x) = x^2 + 6x - 3$ tem um mínimo absoluto igual a -12 em $c = -3$, já que $f(-3) = -12 \leq f(x)$ para todos os valores de $x \in D(f)$ (ver Figura 5.6(*a*)).

(*ii*) A função $f(x) = -x^2 + 6x - 3$ tem um máximo absoluto igual a 6 em $c = 3$, já que $f(3) = 6 \geq f(x)$ para todos os $x \in D(f)$ (ver Figura 5.6(*b*)).

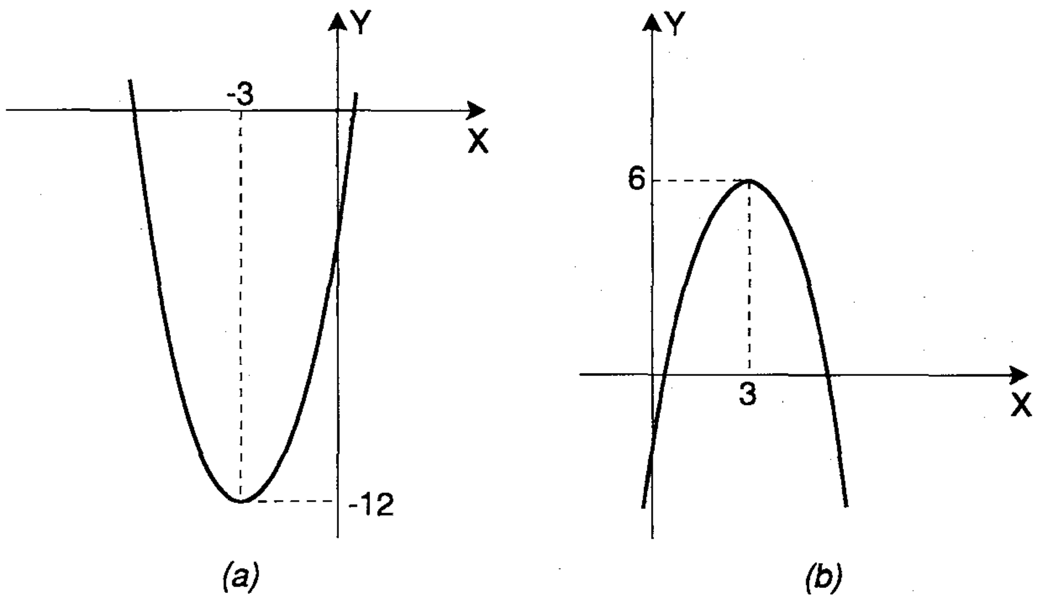


Figura 5-6

5.5 TEOREMAS SOBRE DERIVADAS

5.5.1 Teorema de Rolle. Seja f uma função definida e contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto c entre a e b tal que $f'(c) = 0$.

Prova. Faremos a prova em duas partes.

1ª parte. Seja $f(x) = 0$, para todo x, $a \leq x \leq b$. Então $f'(x) = 0$ para todo x, $a < x < b$. Portanto, qualquer número entre a e b pode ser tomado para c.

2ª parte. Seja $f(x) \neq 0$, para algum x, $a < x < b$. Como f é contínua em $[a, b]$, pela proposição 5.4.5, f atinge seu máximo e seu mínimo em $[a, b]$. Sendo $f(x) \neq 0$ para algum $x \in (a, b)$, um dos extremos de f será diferente de zero. Como $f(a) = f(b) = 0$, esse extremo será atingido em um ponto $c \in (a, b)$.

Como f é derivável em $c \in (a, b)$, usando a proposição 5.4.4, concluímos que $f'(c) = 0$.

5.5.2 Teorema do Valor Médio. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então existe um número c no intervalo (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Antes de provar este teorema apresentaremos sua *interpretação geométrica.*

Geometricamente, o teorema do valor médio estabelece que se a função $y = f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe pelo menos um ponto c entre a e b onde a tangente à curva é paralela à corda que une os pontos $P\ (a, f(a))$ e $Q\ (b, f(b))$ (ver Figura 5.7).

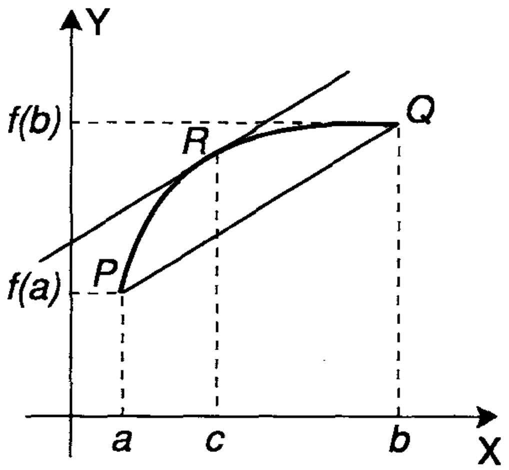


Figura 5-7

Prova do Teorema do Valor Médio. Sejam $P\ (a, f(a))$ e $Q\ (b, f(b))$. A equação da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a).$$

Fazendo $y = h\,(x)$, temos

$$h\,(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) + f(a).$$

Como $h(x)$ é uma função polinomial, $h(x)$ é contínua e derivável em todos os pontos.

Consideremos a função $g(x) = f(x) - h(x)$. Esta função determina a distância vertical entre um ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f e o ponto correspondente na reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$.

Temos,

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

A função $g(x)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle em $[a, b]$. De fato,

(*i*) $g(x)$ é contínua em $[a, b]$ já que $f(x)$ e $h(x)$ são contínuas em $[a, b]$.

(*ii*) $g(x)$ é derivável em (a, b) pois $f(x)$ e $h(x)$ são deriváveis em (a, b).

(*iii*) $g(a) = g(b) = 0$, pois

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = 0$$

e

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = 0.$$

Portanto, existe um ponto c entre a e b tal que $g'(c) = 0$.

Como $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, temos

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

e desta forma,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

5.6 FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES

5.6.1 Definição. Dizemos que uma função f, definida num intervalo I, é *crescente* neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ver Figura 5.8).

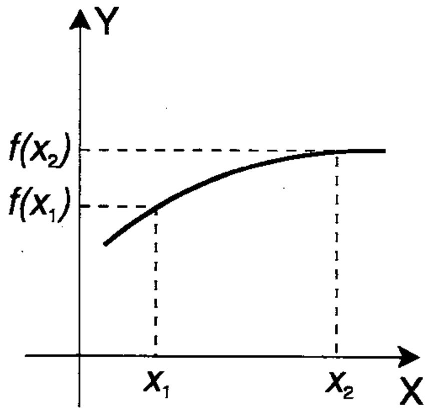


Figura 5-8

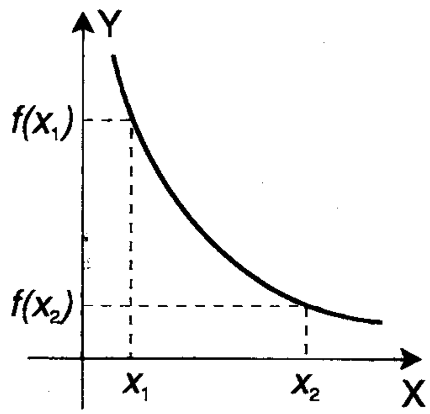


Figura 5-9

5.6.2 Definição. Dizemos que uma função f, definida num intervalo I, é *decrescente* nesse intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) \geq f(x_2)$ (ver Figura 5.9).

Se uma função é crescente ou decrescente num intervalo, dizemos que é *monótona* neste intervalo.

Analisando geometricamente o sinal da derivada podemos determinar os intervalos onde uma função derivável é crescente ou decrescente. Temos a seguinte proposição.

5.6.3 Proposição. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b).

(*i*) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é crescente em $[a, b]$;

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente em $[a, b]$.

Prova. Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em $[a, b]$ tais que $x_1 < x_2$. Então f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2). Pelo teorema do valor médio, segue que

$$\exists\ c \in (x_1, x_2) \quad \text{tal que} \quad f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{1}$$

(i) Por hipótese, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então $f'(c) > 0$. Como $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1 > 0$.

Analisando a igualdade (*1*), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$.

Logo, f é crescente em $[a, b]$.

(ii) Neste caso, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Temos então $f'(c) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$.

Analisando a igualdade (*1*), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) < 0$ e dessa forma $f(x_2) < f(x_1)$.

Logo, f é decrescente em $[a, b]$.

Observamos que a hipótese da continuidade de f no intervalo fechado $[a, b]$ é muito importante. De fato, tomando por exemplo, a função

f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

temos que $f'(x) = 1 > 0$ para todo $x \in (0, 1)$ e no entanto, f não é crescente em $[0, 1]$.

A proposição não pode ser aplicada porque $f(x)$ não é contínua no ponto 1.

5.6.4 Exemplos. Determinar os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes.

(*i*) $f(x) = x^3 + 1$.

Vamos derivar a função e analisar quais os números x tais que $f'(x) > 0$ e quais os números x tais que $f'(x) < 0$.

Temos,

$f'(x) = 3x^2$.

Como $3x^2$ é maior que zero para todo $x \neq 0$, concluímos que a função é sempre crescente.

A Figura 5.10 ilustra este exemplo.

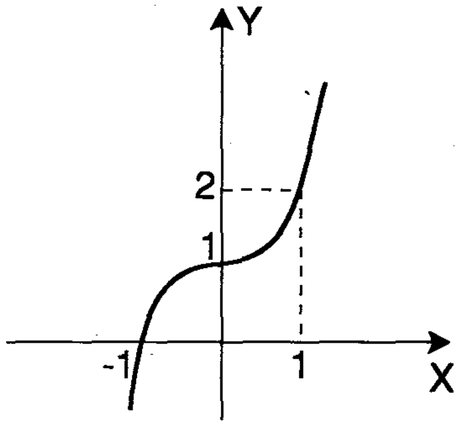


Figura 5-10

(*ii*) $f(x) = x^2 - x + 5$.

Temos $f'(x) = 2x - 1$. Então, para $2x - 1 > 0$ ou $x > 1/2$ a função é crescente.

Para $2x - 1 < 0$ ou $x < 1/2$ a função é decrescente (ver Figura 5.11).

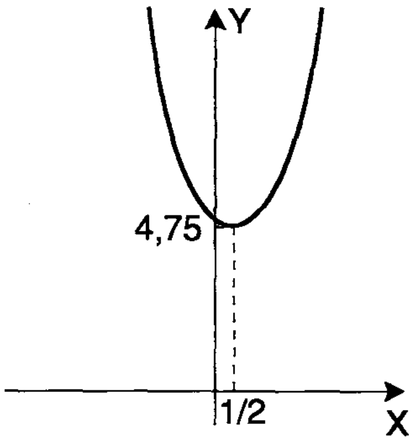


Figura 5-11

$$(iii)\ f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4, & \text{se } x \le 1 \\ -x - 1, & \text{se } x \ge 1\,. \end{cases}$$

O gráfico de $f(x)$ pode ser visto na Figura 5.12.

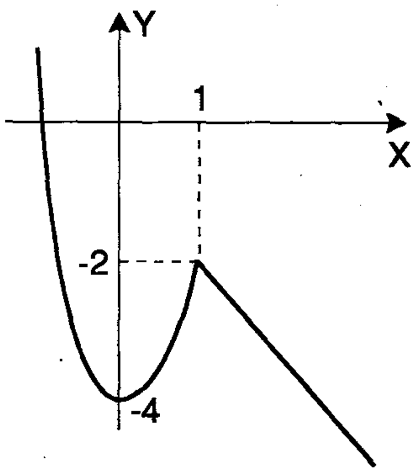


Figura 5-12

Se $x < 1$, então $f\,'(x) = 4x$. Temos,

$4x > 0$ para $x \in (0,\ 1)$;

$4x < 0$ para $x \in (-\infty,\ 0)$.

Se $x > 1$, temos $f'(x) = -1$. Então, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (1, +\infty)$. Concluímos que f é crescente em $[0, 1]$ e decrescente em $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

5.7 CRITÉRIOS PARA DETERMINAR OS EXTREMOS DE UMA FUNÇÃO

A seguir demonstraremos teoremas que estabelecem critérios para determinar os extremos de uma função.

5.7.1 Teorema (Critério da derivada primeira para determinação de extremos). Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto c.

(*i*) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.

(*ii*) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

Prova.

(*i*) Usando a proposição 5.6.3, podemos concluir que f é crescente em $[a, c]$ e decrescente em $[c, b]$. Portanto, $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b) e assim f tem um máximo relativo em c.

(*ii*) Pela proposição 5.6.3, concluímos que f é decrescente em $[a, c]$ e crescente em $[c, b]$. Logo $f(x) > f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b). Portanto, f tem um mínimo relativo em c.

A Figura 5.13 ilustra as diversas possibilidades do teorema.

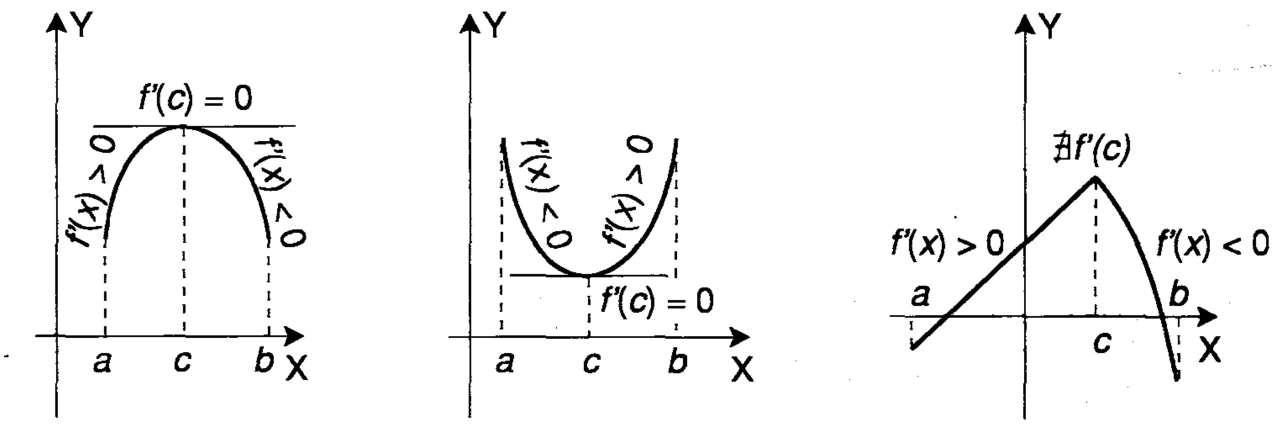


Figura 5-13

5.7.2 Exemplos

(*i*) Encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento e os máximos e mínimos relativos da função

$$f(x) = x^3 - 7x + 6.$$

Temos $f\,'(x) = 3x^2 - 7$, para todo x. Fazendo $f\,'(x) = 0$, vem

$$3x^2 - 7 = 0$$

ou,

$$x = \pm\sqrt{7/3}\,.$$

Portanto, os pontos críticos da função f são $+\sqrt{7/3}$ e $-\sqrt{7/3}$.

Para $x < -\sqrt{7/3}$, $f\,'(x)$ é positiva. Aplicando a proposição 5.6.3, concluímos que f é crescente em $(-\infty, -\sqrt{7/3})$. Para $-\sqrt{7/3} < x < \sqrt{7/3}$, $f\,'(x)$ é negativa. Então f é decrescente em $[-\sqrt{7/3}\,,\ \sqrt{7/3}\,]$. Para $x > \sqrt{7/3}$, $f\,'(x)$ é positiva e então, f é crescente em $[\sqrt{7/3}\,,\ +\infty)$.

Pelo critério da derivada primeira concluímos que f tem um máximo relativo em $-\sqrt{7/3}$ e f tem um mínimo relativo em $+\sqrt{7/3}$.

A Figura 5.14 mostra um esboço do gráfico de f.

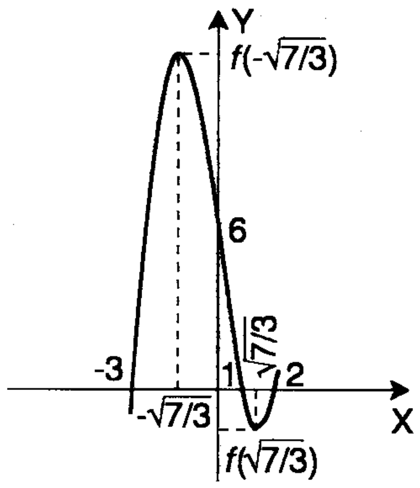


Figura 5-14

(*ii*) Seja

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 3, & \text{se } x \leq 5 \\ 1/2\,(x+7), & \text{se } x > 5. \end{cases}$$

Se $x < 5$, temos $f'(x) = 2\,(x-2)$ e se $x > 5$ temos $f'(x) = 1/2$.

Ainda $f'_+\ (5) = 1/2$ e $f'_-\ (5) = 6$. Logo, $f'(5)$ não existe e então 5 é um ponto crítico de f.

O ponto $x = 2$ também é ponto crítico, pois $f'(2) = 0$.

Se $x < 2$, $f'(x)$ é negativa. Então pela proposição 5.6.3, f é decrescente em $(-\infty, 2]$.

Se $2 < x < 5$, $f'(x)$ é positiva. Então f é crescente em $[2, 5]$.

Se $x > 5$, $f'(x)$ é positiva. Então f é crescente em $[5, +\infty)$.

Pelo critério da derivada primeira, concluímos que f tem um mínimo relativo em $x = 2$.

Apresentamos o gráfico de f na Figura 5.15.

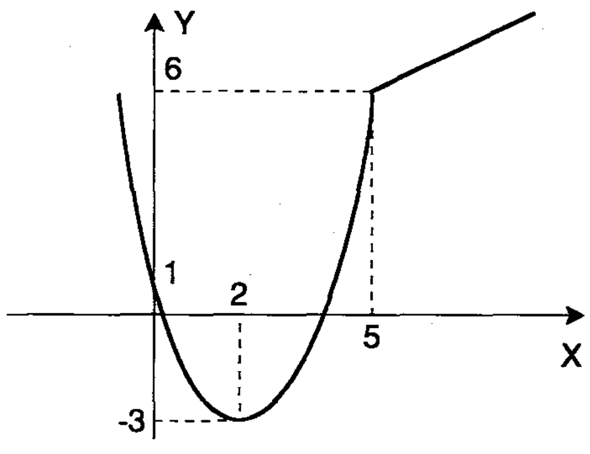


Figura 5-15

5.7.3 Teorema (Critério da derivada 2ª para determinação de extremos de uma função). Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b), temos:

(*i*) Se $f''(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c.

(*ii*) Se $f''(c) > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c.

Prova. Para provar este teorema utilizaremos o seguinte resultado que não foi mencionado no Capítulo 3. "Se $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e é negativo, existe um intervalo aberto contendo a tal que $f(x) < 0$ para todo $x \neq a$ no intervalo".

Prova de (*i*). Por hipótese $f''(c)$ existe e $f''(c) < 0$. Então,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0.$$

Portanto, existe um intervalo aberto I, contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0, \quad \text{para todo } x \in I. \qquad (1)$$

Seja A o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x < c$. Então, c é o extremo direito do intervalo aberto A.

Seja B o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x > c$. Assim, c é o extremo esquerdo do intervalo aberto B.

Se $x \in A$, temos $x - c < 0$. De (I), resulta que $f'(x) > f'(c)$.

Se $x \in B$, $x - c > 0$. De (I), resulta que $f'(x) < f'(c)$.

Como $f'(c) = 0$, concluímos que se $x \in A, f'(x) > 0$ e se $x \in B, f'(x) < 0$. Pelo critério da derivada primeira (teorema 5.7.1), f tem um valor máximo relativo em c.

A prova de (ii) é análoga.

5.7.4 Exemplos. Encontre os máximos e os mínimos relativos de f aplicando o critério da derivada segunda.

(i) $f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$.

Temos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 18 + 6x - 12x^2 \\ \text{e} \quad f''(x) &= 6 - 24x. \end{aligned}$$

Fazendo $f'(x) = 0$, temos $18 + 6x - 12x^2 = 0$. Resolvendo esta equação obtemos os pontos críticos de f que são $3/2$ e -1.

Como $f''(3/2) = -30 < 0$, f tem um valor máximo relativo em $3/2$.

Como $f''(-1) = 30 > 0$, f tem um valor mínimo relativo em -1.

(ii) $f(x) = x\,(x-1)^2$.

Neste exemplo, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cdot 2\,(x-1) + (x-1)^2 \cdot 1 \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

$$\text{e} \quad f''(x) = 6x - 4.$$

Fazendo $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$ e resolvendo a equação obtemos os pontos críticos de f, que neste caso são 1 e 1/3.

Como $f''(1) = 2 > 0$, f tem um valor mínimo relativo em 1. Como $f''(1/3) = -2 < 0$, f tem um valor máximo relativo em 1/3.

(*iii*) $f(x) = 6x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3$.

Temos,

$$f'(x) = 6 - 6x + \frac{3}{2}x^2.$$

$$\text{e} \quad f''(x) = -6 + 3x.$$

Fazendo $f'(x) = 0$, temos $6 - 6x + \frac{3}{2}x^2 = 0$. Resolvendo a equação, obtemos $x = 2$ que neste caso é o único ponto crítico de f.

Como $f''(2) = 0$ nada podemos afirmar com auxílio do teorema 5.7.3.

Usando o critério da derivada primeira, concluímos que esta função é sempre crescente. Portanto não existem máximos nem mínimos relativos.

5.8 CONCAVIDADE E PONTOS DE INFLEXÃO

O conceito de concavidade é muito útil no esboço do gráfico de uma curva.

Vamos introduzi-lo, analisando geometricamente a Figura 5.16.

Na Figura 5.16(a) observamos que dado um ponto qualquer c entre a e b, em pontos próximos de c o gráfico de f está acima da tangente à curva no ponto P $(c, f(c))$. Dizemos que a curva tem concavidade voltada para cima no intervalo (a, b).

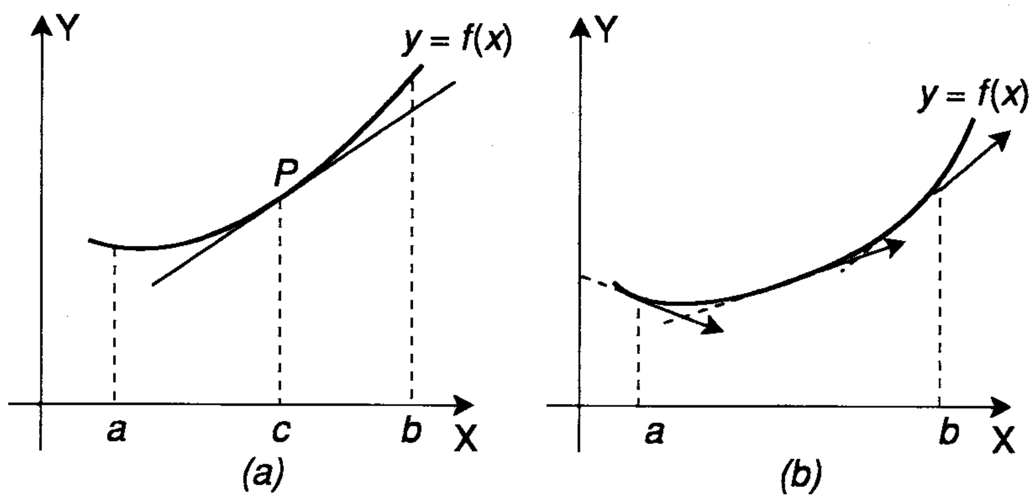


Figura 5-16

Como $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente à curva, observa-se na Figura 5.16(b), que podemos descrever esta mesma situação afirmando que no intervalo (a, b) a derivada $f'(x)$ é crescente. Geometricamente, isto significa que a reta tangente gira no sentido anti-horário à medida que avançamos sobre a curva da esquerda para a direita.

Analogamente, a Figura 5.17 descreve uma função que tem concavidade voltada para baixo no intervalo (a, b).

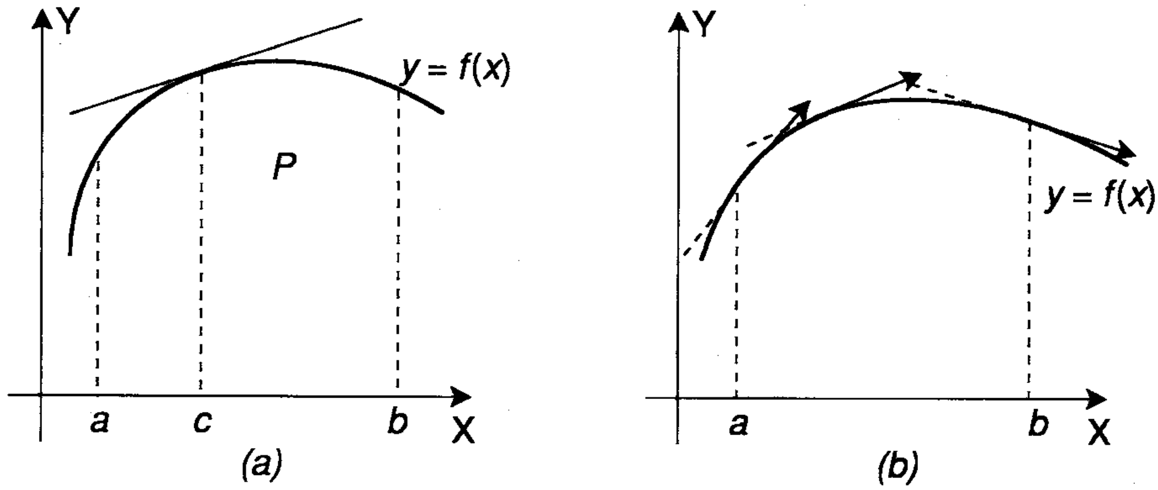


Figura 5-17

Na Figura 5.17(b) vemos que a tangente gira no sentido horário quando nos deslocamos sobre a curva da esquerda para a direita. A derivada $f'(x)$ é decrescente em (a, b).

Temos as seguintes definições:

5.8.1 Definição. Uma função f é dita côncava para cima no intervalo (a, b), se $f'(x)$ é crescente neste intervalo.

5.8.2 Definição. Uma função f é côncava para baixo no intervalo (a, b), se $f'(x)$ for decrescente neste intervalo.

Reconhecer os intervalos onde uma curva tem concavidade voltada para cima ou para baixo, auxilia muito no traçado de seu gráfico. Faremos isso, analisando o sinal da derivada $f''(x)$.

5.8.3 Proposição. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável até 2ª ordem no intervalo (a, b):

(*i*) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para cima em (a, b).

(*ii*) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para baixo em (a, b).

Prova. (*i*). Como $f''(x) = [f'(x)]'$, se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, pela proposição 5.6.3, $f'(x)$ é crescente no intervalo (a, b). Logo, f é côncava para cima em (a, b).

Analogamente, se prova (*ii*).

Podem existir pontos no gráfico de uma função nos quais a concavidade muda de sentido. Esses pontos são chamados *pontos de inflexão.*

5.8.4 Definição. Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é chamado um ponto de inflexão, se existe um intervalo (a, b) contendo c, tal que uma das seguintes situações ocorra:

(*i*) f é côncava para cima em (a, c) e côncava para baixo em (c, b).

(*ii*) f é côncava para baixo em (a, c) e côncava para cima em (c, b).

Na Figura 5.18, os pontos de abscissa c_1, c_2, c_3 e c_4 são pontos de inflexão. Vale observar que c_2 e c_3 são pontos de extremos de f e que f não é derivável nestes pontos. Nos pontos c_1 e c_4, existem as derivadas $f'(c_1)$ e $f'(c_4)$. Nos correspondentes pontos $(c_1, f(c_1))$ e $(c_4, f(c_4))$ a reta tangente corta o gráfico de f.

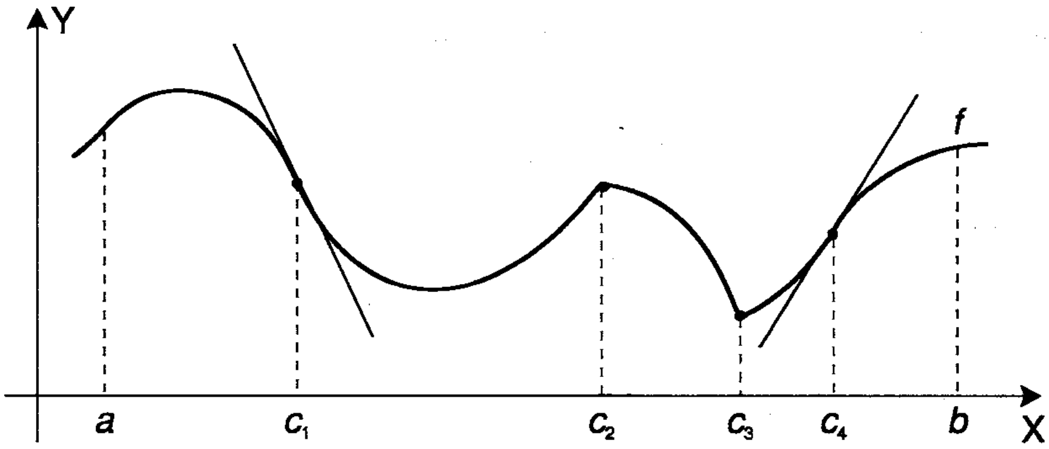


Figura 5-18

5.8.5 Exemplos. Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

(*i*) $f(x) = (x - 1)^3$.

Temos

$$f'(x) = 3(x-1)^2$$

e $$f''(x) = 6(x-1).$$

Fazendo $f''(x) > 0$, temos as seguintes desigualdades equivalentes

$$6(x-1) > 0$$
$$x - 1 > 0$$
$$x > 1.$$

Portanto, no intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) > 0$. Analogamente, no intervalo $(-\infty, 1)$, $f''(x) < 0$. Pela proposição 5.8.3 f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 1)$ e no intervalo $(1, +\infty)$ f é côncava para cima.

No ponto $c = 1$ a concavidade muda de sentido. Logo, neste ponto, o gráfico de f tem um ponto de inflexão.

Podemos ver o gráfico de f na Figura 5.19.

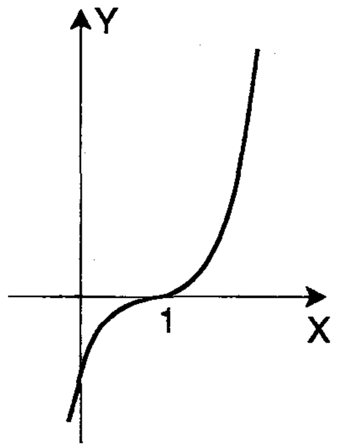


Figura 5-19

(*ii*) $f(x) = x^4 - x^2$.

Temos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 2x \\ \text{e} \quad f''(x) &= 12x^2 - 2. \end{aligned}$$

Fazendo $f''(x) > 0$, vem

$$\begin{aligned} 12x^2 - 2 &> 0 \\ x^2 &> 1/6. \end{aligned}$$

Então, $x > \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ou $x < -\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Portanto, f tem concavidade para cima nos intervalos

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, +\infty\right)..$$

No intervalo $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $f''(x) < 0$. Portanto, neste intervalo f é côncava para baixo.

Nos pontos $c_1 = \frac{-\sqrt{6}}{6}$ e $c_2 = \frac{+\sqrt{6}}{6}$ a concavidade muda de sentido. Logo, nestes pontos o gráfico de f tem pontos de inflexão.

A Figura 5.20 mostra o gráfico de f onde assinalamos os pontos de inflexão.

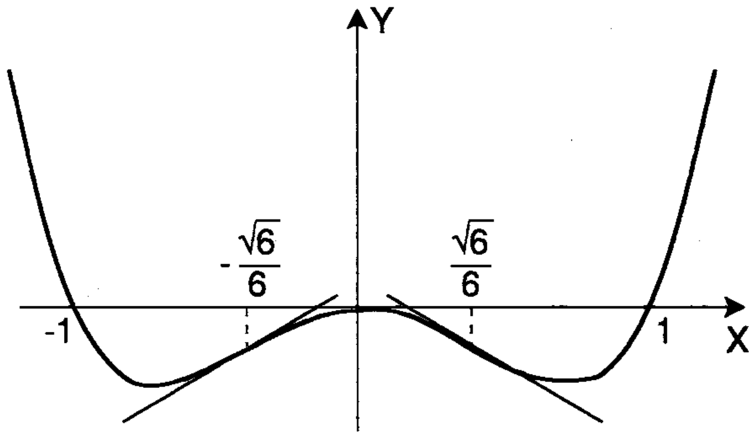


Figura 5-20

$$(iii)\ f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad \text{para } x \leq 1 \\ 1-(x-1)^2, & \text{para } x > 1\,. \end{cases}$$

Para $x < 1$, $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$. Para $x > 1$, $f'(x) = -2(x-1)$ e $f''(x) = -2$. Logo, para $x \in (-\infty, 1)$, $f''(x) > 0$ e portanto f é côncava para cima neste intervalo. No intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) < 0$. Portanto, neste intervalo f é côncava para baixo.

No ponto $c = 1$, a concavidade muda de sentido e assim o gráfico de f apresenta um ponto de inflexão em $c = 1$.

O gráfico de f pode ser visto na Figura 5.21. Observamos que no ponto $c = 1, f$ tem um máximo relativo.

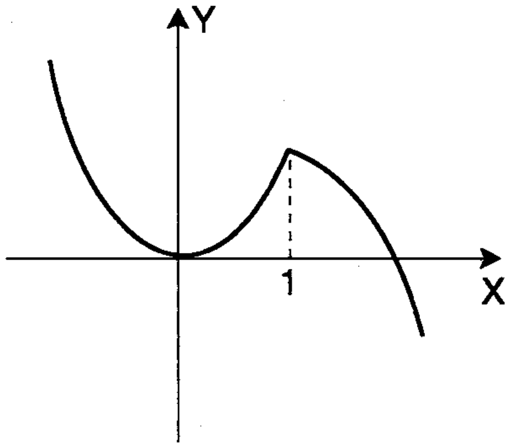


Figura 5-21

5.9 ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS E VERTICAIS

Em aplicações práticas, encontramos com muita freqüência gráficos que se aproximam de *uma reta* a medida que x cresce ou decresce (ver Figuras 5.22 e 5.23).

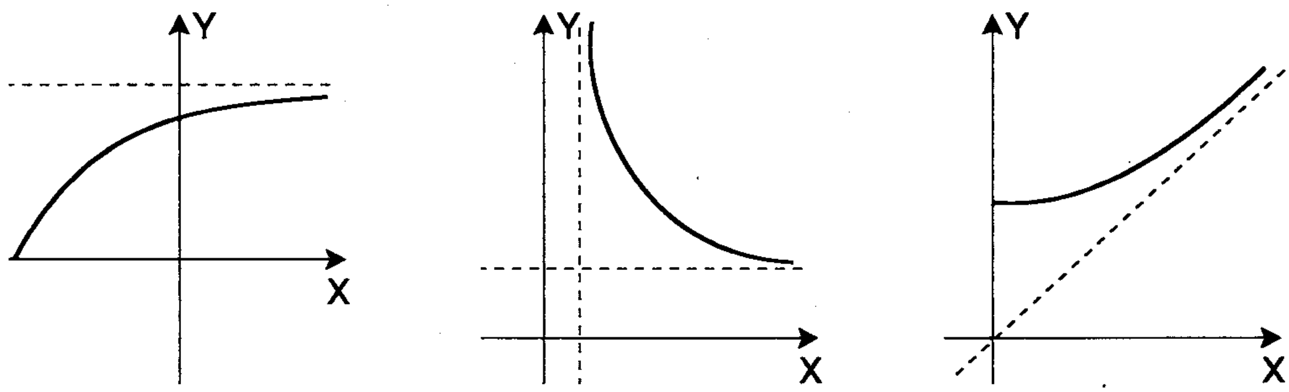


Figura 5-22

Estas retas são chamadas *assíntotas*.

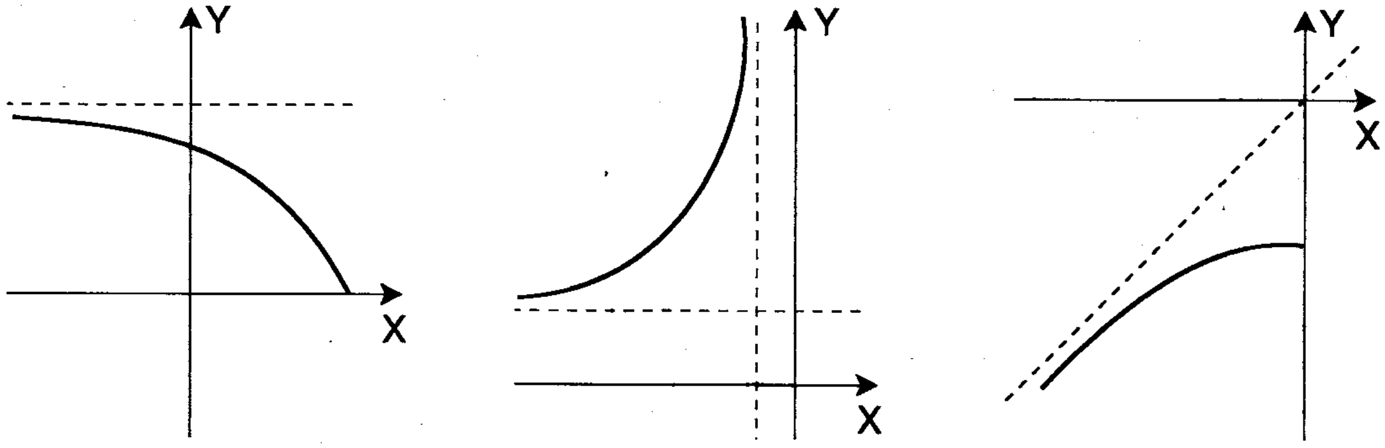


Figura 5-23

Particularmente, vamos analisar com um pouco mais de atenção as *assíntotas horizontais* e as *verticais*.

5.9.1 Definição. A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(*i*) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

(*ii*) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

(*iii*) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

(*iv*) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

5.9.2 Exemplo. A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico de

$$y = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

De fato, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, ou também,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty .$$

A Figura 5.24 ilustra este exemplo.

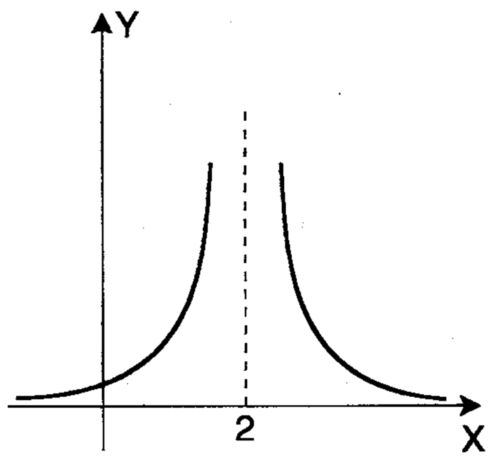


Figura 5-24

5.9.3 Definição. A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(*i*) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

(*ii*) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

5.9.4 Exemplo. As retas $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais do gráfico de

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}},$$

porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} = 1$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} = -1$ (ver Figura 5.25) .

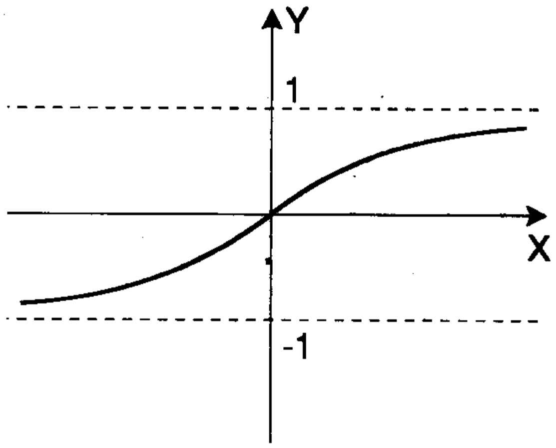


Figura 5-25

5.10 ESBOÇO DE GRÁFICOS

Utilizando todos os itens citados na análise do comportamento de uma função, podemos fazer um resumo de atividades que nos levarão ao esboço de gráficos.

ETAPAS	*PROCEDIMENTO*	*DEFINIÇÕES E TEOREMAS UTILIZADOS*
1ª	Encontrar $D(f)$	
2ª	Calcular os pontos de intersecção com os eixos. (Quando não requer muito cálculo.)	
3ª	Encontrar os pontos críticos	Seção 5.4.
4ª	Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$	Proposição 5.6.3.

ETAPAS	*PROCEDIMENTO*	*DEFINIÇÕES E TEOREMAS UTILIZADOS*
5ª	Encontrar os máximos e mínimos relativos.	Teoremas 5.7.1 ou 5.7.3.
6ª	Determinar a concavidade e os pontos de inflexão de f.	Proposição 5.8.3.
7ª	Encontrar as assíntotas horizontais e verticais se existirem.	Definições 5.9.1 e 5.9.3.
8ª	Esboçar o gráfico.	

5.10.1 Exemplos. Esboçar o gráfico das funções:

(*i*) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$.

Seguindo as etapas propostas temos:

1ª etapa. $D(f) = \mathbb{R}$.

2ª etapa. Intersecção com o eixo dos y.

$f(0) = 2$.

3ª etapa. $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$.

Resolvendo $12x^3 - 24x^2 + 12x = 0$, encontramos $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ que são os pontos críticos.

4ª etapa. Fazendo $f'(x) > 0$, obtemos que $12x^3 - 24x^2 + 12x > 0$ quando $x > 0$. Portanto, f é crescente para $x \geq 0$.

Fazendo $f'(x) < 0$, obtemos que $12x^3 - 24x^2 + 12x < 0$ quando $x < 0$. Portanto, f é decrescente para $x \leq 0$.

5ª etapa. Temos $f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$.

Como $f''(0) = 12 > 0$, temos que o ponto 0 é um ponto de mínimo e $f(0) = 2$ é um mínimo relativo de f.

Como $f''(1) = 0$, nada podemos afirmar.

6ª etapa. Fazendo $f''(x) > 0$, temos que $36x^2 - 48x + 12 > 0$ quando $x \in [(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)]$.

Então, f é côncava para cima em $(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)$.

Fazendo $f''(x) < 0$, temos que $36x^2 - 48x + 12 < 0$ para $x \in (1/3, 1)$. Então f é côncava para baixo em $(1/3, 1)$.

Os pontos de abscissa 1/3 e 1 são pontos de inflexão.

7ª etapa. Não existem assíntotas.

8ª etapa. Temos na Figura 5.26 o esboço do gráfico.

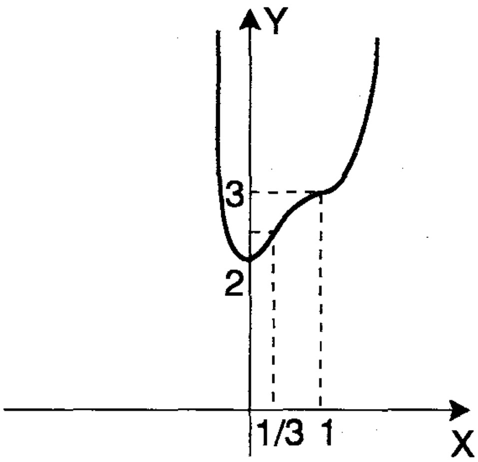


Figura 5-26

(*ii*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 3}$.

O domínio de f é $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

Temos,

$$f'(x) = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$$

e

$$f''(x) = \frac{18x-54}{(x-3)^4}.$$

Fazendo $f'(x) = 0$, temos

$$\frac{x(x-6)}{(x-3)^2} = 0$$

e então, $x = 0$ e $x = 6$ são pontos críticos.

Vemos que $f'(x) > 0$ quando $x \in [(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)]$. Assim, f é crescente em $(-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$. Fazendo $f'(x) < 0$, vemos que f é decrescente em $[0, 6]$.

Como $f''(0) < 0$, temos que 0 é ponto de máximo relativo e como $f''(6) > 0$, temos que 6 é ponto de mínimo relativo.

Ainda $f(0) = 0$ é o máximo relativo de f e $f(6) = 12$ é o mínimo relativo de f.

- Fazendo

$$f''(x) = \frac{18x-54}{(x-3)^4} > 0,$$

obtemos que f é côncava para cima em $(3, +\infty)$ e fazendo

$$f''(x) = \frac{18x-54}{(x-3)^4} < 0,$$

obtemos que f é côncava para baixo em $(-\infty, 3)$.

Determinando os limites

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

encontramos que $x = 3$ é assíntota vertical. Não existe assíntota horizontal.

A Figura 5.27 mostra o esboço do gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$.

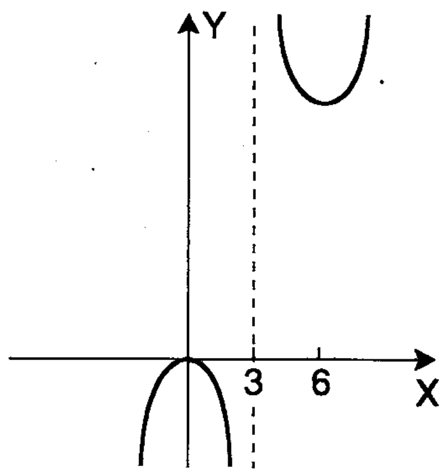


Figura 5-27

(*iii*) $f(x) = (x + 1)^{1/3}$.

O domínio de $f(x)$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

$f(x)$ corta o eixo dos y no ponto $y = 1$ já que $f(0) = 1$. Corta o eixo dos x em -1 já que resolvendo $(x + 1)^{1/3} = 0$, obtemos $x = -1$.

Fazendo

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x + 1)^{-2/3} = 0,$$

concluímos que não existe x que satisfaça $f'(x) = 0$. Como $f'(-1) \nexists$, o único ponto crítico de f é $x = -1$.

Como $f'(x)$ é sempre positiva concluímos que a função é sempre crescente. Não existem máximos nem mínimos.

Como

$$f''(x) = \frac{-2}{9}(x+1)^{-5/3},$$

concluímos que para $x < -1, f''(x) > 0$ e portanto f é côncava para cima em $(-\infty, -1)$. Quando $x > -1, f''(x) < 0$ e então f é côncava para baixo em $(-1, +\infty)$.

O ponto de abscissa $x = -1$ é um ponto de inflexão.

Não existem assíntotas.

A Figura 5.28 mostra o gráfico de $f(x)$.

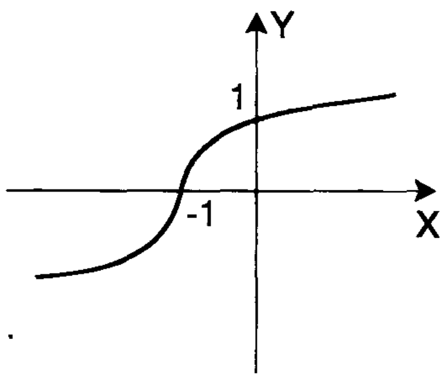


Figura 5-28

5.11 EXERCÍCIOS

1. Em cada um dos seguintes casos, verificar se o Teorema do Valor Médio se aplica. Em caso afirmativo, achar um número c em (a, b), tal que

$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interpretar geometricamente.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = 2$, $b = 3$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = -1$, $b = 3$.

c) $f(x) = x^3$; $a = 0$, $b = 4$.

d) $f(x) = x^3$; $a = -2$, $b = 0$.

e) $f(x) = \cos x$; $a = 0$, $b = \pi/2$.

f) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $a = \pi/4$, $b = 3\pi/4$.

g) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $a = 0$; $b = \pi/4$.

h) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $a = -1$, $b = 0$.

i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $a = -1$, $b = 1$.

j) $f(x) = |x|$; $a = -1$, $b = 1$.

2. A função $f(x) = x^{2/3} - 1$ é tal que $f(-1) = f(1) = 0$. Por que ela não verifica o Teorema de Rolle no intervalo $[-1, 1]$?

3. Seja $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$. Mostrar que f satisfaz as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[-3, 3]$ e determinar os valores de $c \in (-3, 3)$ que satisfaçam $f'(c) = 0$.

4. Usando o teorema do valor médio provar que:

a) $|\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \alpha| \leq |\theta - \alpha|$, $\forall\ \theta , \alpha \in \boldsymbol{R}$;

b) $\operatorname{sen} \theta \leq \theta$, $\theta \geq 0$.

5. Determinar os pontos críticos das seguintes funções, se existirem.

a) $y = 3x + 4$

b) $y = x^2 - 3x + 8$

c) $y = 2 + 2x - x^2$

d) $y = (x - 2)(x + 4)$

e) $y = 3 - x^3$

f) $y = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$

g) $y = x^4 + 4x^3$

h) $y = \operatorname{sen} x$

i) $y = \cos x$

j) $y = \operatorname{sen} x - \cos x$

k) $y = e^x - x$

l) $y = (x^2 - 9)^{2/3}$

m) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

n) $y = |2x - 3|$

o) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

6. Determinar os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = 3 - 5x$

c) $f(x) = 3x^2 + 6x + 7$

d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$

e) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$

f) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \operatorname{sen} x$

g) $f(x) = 2^x$

h) $f(x) = e^{-x}$

i) $f(x) = x e^{-x}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

k) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

l) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$, $x \in [0, 2\pi]$.

7. Determinar os máximos e mínimos das seguintes funções, nos intervalos indicados.

a) $f(x) = 1 - 3x$, $[-2, 2]$

b) $f(x) = x^2 - 4$, $[-1, 3]$

c) $f(x) = 4 - 3x + 3x^2$, $[0, 3]$

d) $f(x) = x^3 - x^2$, $[0, 5]$

e) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $[-2, 2]$

f) $f(x) = |x - 2|$, $[1, 4]$

g) $f(x) = \cosh x$, $[-2, 2]$

h) $f(x) = \operatorname{tgh} x$, $[-2, 2]$

i) $f(x) = \cos 3x$, $[0, 2\pi]$

j) $f(x) = \cos^2 x$, $[0, 2\pi]$

k) $f(x) = \text{sen}^3\, x - 1$, $[0, \pi/2]$.

8. Encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento, os máximos e os mínimos relativos das seguintes funções.

a) $f(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$

c) $g(x) = 4x^3 - 8x^2$

d) $h(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 5$

e) $f(t) = \dfrac{t-1}{t+1}$

f) $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$

g) $g(x) = x\,e^x$

h) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

i) $f(x) = |2 - 6x|$

j) $g(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq -2 \\ x^2 - 2, & x > -2 \end{cases}$

k) $h(t) = \begin{cases} 3 - 4t, & t > 0 \\ 4t + 3, & t \leq 0 \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < -1 \\ 1 - x^2, & x \geq -1 \end{cases}$

m) $g(x) = \begin{cases} 10 - (x-3)^2, & x \leq -2 \\ 5(x-1), & -2 < x \leq -1 \\ -\sqrt{91 + (x-2)^2}, & x > -1 \end{cases}$

9. Encontrar os pontos de máximo e mínimo relativos das seguintes funções, se existirem.

a) $f(x) = 7x^2 - 6x + 3$

b) $g(x) = 4x - x^2$

c) $h(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 9$

d) $h(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + 8$

e) $f(t) = \begin{cases} t^2, & t < 0 \\ 3t^2, & t \geq 0 \end{cases}$

f) $f(x) = 6x^{2/3} - 2x$

g) $f(x) = 5 + (x - 2)^{7/5}$

h) $f(x) = 3 + (2x + 3)^{4/3}$

i) $g(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$

j) $h(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x + 2}$

k) $f(x) = (x + 2)^2 (x - 1)^3$

l) $f(x) = x^2 \sqrt{16 - x}$.

10. Mostrar que $y = \dfrac{\log_a x}{x}$ tem seu valor máximo em $x = e$ (número neperiano) para todos os números $a > 1$.

11. Determinar os coeficientes a e b de forma que a função $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b$ tenha um extremo relativo no ponto $(-2, 1)$.

12. Encontrar a, b, c e d tal que a função $f(x) = 2ax^3 + bx^2 - cx + d$ tenha pontos críticos em $x = 0$ e $x = 1$. Se $a > 0$, qual deles é de máximo, qual é de mínimo?

13. Demonstrar que a função $y = a\,x^2 + b\,x + c$, $x \in \mathbb{R}$, tem máximo se, e somente se, $a < 0$; e mínimo se, e somente se, $a > 0$.

14. Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$

b) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x + 9$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x + 4}$

d) $f(x) = 2x\,e^{-3x}$

e) $f(x) = x^2 e^x$

f) $f(x) = 4\sqrt{x + 1} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x^2 - 1$

g) $f(t) = \dfrac{t^2 + 9}{(t - 3)^2}$

h) $f(t) = e^{-t} \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$

i) $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 2 \\ 4 - x^2, & x > 2 \end{cases}$

15. Determinar as assíntotas horizontais e verticais do gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{4}{x - 4}$

b) $f(x) = \dfrac{-3}{x + 2}$

c) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 3x + 2}$

d) $f(x) = \dfrac{-1}{(x - 3)(x + 4)}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 4}}$

f) $f(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x - 3}}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 16}}$

h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x - 12}}$

i) $f(x) = e^{1/x}$

j) $f(x) = e^x - 1$

k) $f(x) = \ln x$.

16. Esboçar o gráfico das seguintes funções:

a) $y = x^2 + 4x + 2$

b) $y = (x - 3)(x + 2)$

c) $y = \dfrac{-x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 2x + \dfrac{5}{6}$

d) $y = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 - 12x + 3$

e) $y = \dfrac{-1}{4}x^4 + \dfrac{5}{3}x^3 - 2x^2$

f) $y = x^4 - 32x + 48$

g) $y = x + \dfrac{2}{x}$

h) $y = \dfrac{2x}{x + 2}$

i) $y = \dfrac{3x + 1}{(x + 2)(x - 3)}$

j) $y = \dfrac{2}{x^2 - 2x - 3}$

k) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$

l) $y = \cosh x$

m) $y = x^{3/2}$

n) $y = e^{x - x^2}$

o) $y = \ln(2x + 3)$

p) $y = \ln(x^2 + 1)$.

5.12 PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO E MINIMIZAÇÃO

A seguir apresentamos alguns problemas práticos em diversas áreas, onde aplicamos o que foi visto nas Seções 5.4 e 5.7 sobre máximos e mínimos.

O primeiro passo para solucionar estes problemas é escrever precisamente qual a função que deverá ser analisada. Esta função poderá ser escrita em função de uma ou mais variáveis. Quando a função é de mais de uma variável devemos procurar expressar uma das variáveis em função da outra.

Com a função bem definida, devemos identificar um intervalo apropriado e então proceder a rotina matemática aplicando definições e teoremas.

5.12.1 Exemplos

(*1*) Na Biologia, encontramos a fórmula $\phi = V \cdot A$, onde ϕ é o fluxo de ar na traquéia, V é a velocidade do ar e A a área do círculo formado ao seccionarmos a traquéia (ver Figura 5.29).

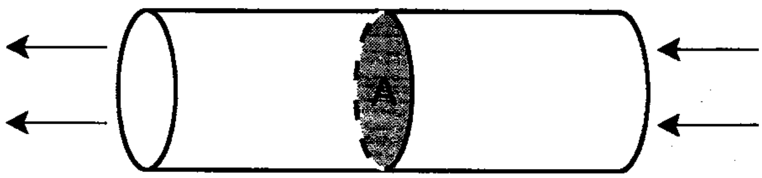


Figura 5-29

Quando tossimos, o raio diminui, afetando a velocidade do ar na traquéia. Sendo r_0 o raio normal da traquéia, a relação entre a velocidade V e o raio r da traquéia durante a tosse é dada por $V(r) = a \cdot r^2 (r_0 - r)$, onde a é uma constante positiva.

(a) Calcular o raio r em que é maior a velocidade do ar.

(b) Calcular o valor de r com o qual teremos o maior fluxo possível.

Solução.

(a) O raio r da traquéia contraída não pode ser maior que o raio normal r_0, nem menor que zero, ou seja, $0 \leq r \leq r_0$.

Neste item vamos encontrar o máximo absoluto da função $V(r)$ em $0 \leq r \leq r_0$.

Temos,

$$\begin{aligned} V(r) &= a\,r^2(r_0 - r); \\ V\,'(r) &= 2a\,r_0\,r - 3a\,r^2. \end{aligned}$$

Fazendo $V\,'(r) = 2a\,r_0\,r - 3a\,r^2 = 0$, obtemos os pontos críticos $r_1 = \dfrac{2}{3}\,r_0$ e $r_2 = 0$.

Temos $V\,''(r) = 2a\,r_0 - 6a\,r$. Como $V\,''(0) = 2a\,r_0 > 0$, concluímos que $r_2 = 0$ é um mínimo relativo. Como $V\,''(2/3\,r_0)$ é um valor negativo, concluímos que $r_1 = 2/3\,r_0$ é um valor máximo relativo.

Para $r \in [0, r_0]$, temos que o máximo absoluto é $V(2/3r_0) = 4a/27r_0^3$.

Diante deste resultado afirmamos que a velocidade do ar na traquéia é maior quando o raio r da mesma, é dois terços do raio r_0 da traquéia não contraída.

(b) Podemos escrever a função $\phi = V \cdot A$ em função do raio r da traquéia:

$\phi(r) = ar^2\,(r_0 - r) \cdot \pi\,r^2.$

Queremos encontrar o máximo absoluto da função $\phi(r)$ em $0 \leq r \leq r_0$.

Temos, $\phi'(r) = 4a\,\pi\,r_0\,r^3 - 5a\,\pi\,r^4$.

Fazendo $\phi'(r) = 4a\,\pi\,r_0\,r^3 - 5a\,\pi\,r^4 = 0$, obtemos $r_1 = 0$ e $r_2 = 4/5\,r_0$ como pontos críticos de $\phi(r)$.

Temos $\phi''(r) = 12a\,\pi\, r_0\, r^2 - 20a\,\pi\, r^3$.

Logo, $\phi''(0) = 0$ e $\phi''(4/5\ r_0) = -64/25\ a\,\pi\, r_0^3$. Concluímos que em $4/5\ r_0$ temos um ponto de máximo relativo.

O ponto $r_1 = 0$ é um ponto de mínimo relativo, pois a função $\phi(r)$ decresce em $(-\infty, 0]$ e cresce em $[0, 4/5\ r_0]$.

O máximo absoluto em $[0, r_0]$ será $\phi(4/5\ r_0)$ que é igual à $256/3125\ a\,\pi\, r_0^5$.

Portanto, o maior fluxo possível é obtido quando $r = 4/5\ r_0$.

(2) Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento situada à margem de um rio de 500 metros de largura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2000 metros abaixo da central. O custo da obra através do rio é de Cr$ 640,00 por metro, enquanto, em terra, custa Cr$ 312,00. Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável?

Solução. A Figura 5.30 esquematiza a função que dará o custo da obra:

$$f(x) = (2000 - x) \cdot 312{,}00 + \sqrt{x^2 + 500^2} \cdot 640{,}00.$$

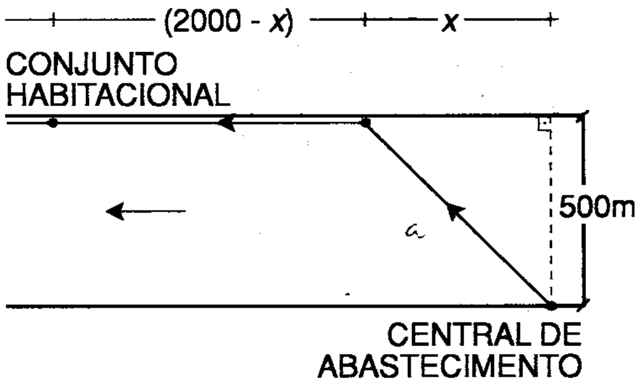


Figura 5-30

Nosso objetivo será calcular o mínimo absoluto dessa função para $0 \leq x \leq 2000$.

Temos,

$$f'(x) = -312{,}00 + \frac{640{,}00\,x}{\sqrt{x^2 + 500^2}}.$$

Resolvendo a equação

$$-312{,}00 + \frac{640{,}00x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} = 0,$$

obtemos que $x \cong 279{,}17$ m é um ponto crítico.

Temos,

$$f''(x) = \frac{500^2 \cdot 640{,}00}{(x^2 + 500^2)^{3/2}}.$$

Como $f''(279{,}17) > 0$, temos que $x = 279{,}17$ é um ponto de mínimo relativo. Resta-nos saber se este mínimo é absoluto no intervalo $0 \leq x \leq 2000$.

Como o único ponto crítico de f no intervalo aberto $(0, 2000)$ é $x \cong 279{,}17$, este ponto é mínimo absoluto neste intervalo. Como $f(0) > f(279{,}17)$ e $f(2000) > f(279{,}17)$, concluímos que a obra poderá ser realizada com o menor custo possível se a canalização de água alcançar o outro lado do rio 279,17 m abaixo da central de abastecimento.

(*3*) Um galpão deve ser construído tendo uma área retangular de 12100 m^2. A prefeitura exige que exista um espaço livre de 25 m na frente, 20 m atrás e 12 m em cada lado. Encontre as dimensões do lote que tenha a área mínima na qual possa ser construído este galpão.

Solução. A Figura 5.31 ajuda a definir a função que vamos minimizar.

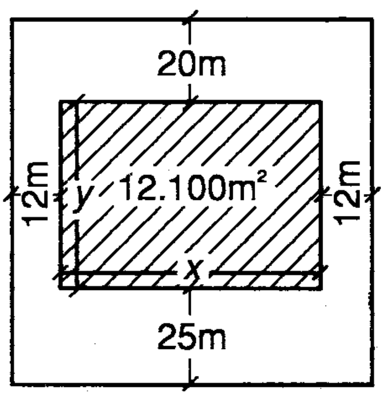


Figura 5-31

Sabemos que $A = 12100 \text{ m}^2 = x \cdot y$. (*1*)

A função que definirá a área do lote é

$$\begin{aligned} S &= (x+12+12)(y+25+20) \\ &= (x+24)(y+45). \end{aligned} \quad (2)$$

De (*1*), obtemos que $y = \dfrac{12100}{x}$. Substituindo em (2), vem

$$S(x) = (x + 24)\left(\frac{12100}{x} + 45\right).$$

Esta é a função que queremos minimizar.

Temos,

$$S'(x) = \frac{45x^2 - 290400}{x^2}.$$

Resolvendo a equação $= \dfrac{45x^2 - 290400}{x^2} = 0$, obtemos que $x = \dfrac{44\sqrt{30}}{3}$ é um ponto crítico. (x é uma medida e portanto consideramos só o valor positivo.)

Temos que $S''(x) = \dfrac{580800}{x^3}$ e portanto $S''\left(\dfrac{44\sqrt{30}}{3}\right) > 0$. $x = \dfrac{44\sqrt{30}}{3}$ é um ponto de mínimo.

Fazendo $x = \dfrac{44\sqrt{30}}{3} \cong 80{,}33 \text{ m}$, obtemos que

$$y = \frac{12100}{x} = \frac{12100}{44\sqrt{30}/3} \cong 150{,}62 \text{ m},$$

e então, a área mínima é obtida quando as dimensões do lote forem aproximadamente $(80{,}33 + 24) \text{ m} \times (150{,}62 + 45) \text{ m}$.

(*4*) Uma caixa sem tampa, de base quadrada, deve ser construída de forma que o seu volume seja 2500 m^3. O material da base vai custar Cr\$ 1200,00 por m^2 e o material dos lados Cr\$ 980,00 por m^2. Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.

Solução.

Observando a Figura 5.32, escrevemos a função que dá o custo do material:

$$C = x^2 \cdot 1200{,}00 + 4xy \cdot 980{,}00. \qquad (1)$$

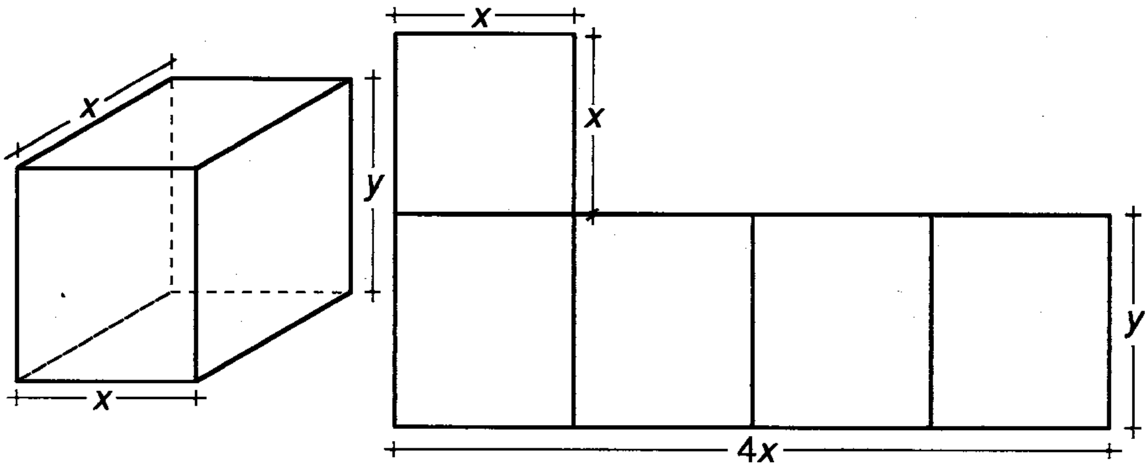


Figura 5-32

Como $V = x^2y = 2500$ cm^3, temos que a dimensão y pode ser escrita como $y = 2500/x^2$.

Substituindo esse resultado em (*1*), obtemos

$$C(x) = 1200{,}00 \cdot x^2 + 9.800.000{,}00/x,$$

que é a função que queremos minimizar.

Temos,

$$C'(x) = \frac{2400{,}00x^3 - 9.800.000{,}00}{x^2}.$$

Resolvendo a equação $\dfrac{2400{,}00x^3 - 9.800.000{,}00}{x^2} = 0$, encontramos

$x = 5 \sqrt[3]{\dfrac{98}{3}} \cong 15{,}983\,\text{m}$, que é o ponto crítico que nos interessa.

De fato, para $x \cong 15{,}983$ vamos ter um ponto de mínimo, já que $C''(15{,}983) > 0$.

Portanto, as dimensões da caixa de modo a obter o menor custo possível são $x \cong 15{,}983$ m e $y \cong 9{,}785$ m.

5.13 EXERCÍCIOS

1. Um fio de comprimento l é cortado em dois pedaços. Com um deles se fará um círculo e com o outro um quadrado.

   a) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pelas figuras seja mínima?

   b) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das áreas compreendidas seja máxima?

2. Determinar o ponto P situado sobre o gráfico da hipérbole $xy = 1$, que está mais próximo da origem.

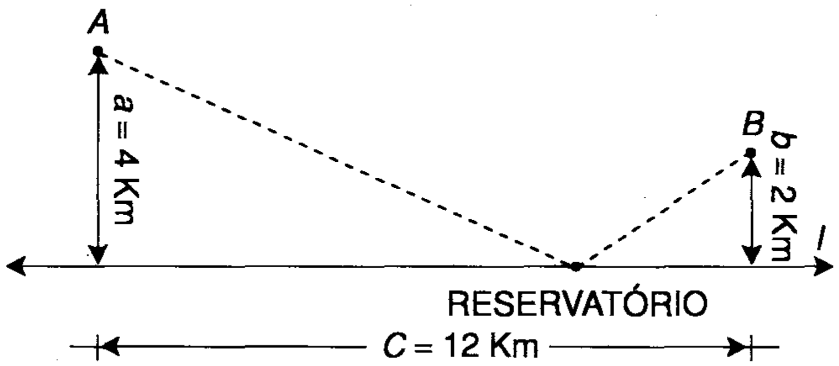
3. Um fazendeiro tem 200 bois, cada um pesando 300 kg. Até agora ele gastou Cr$ 380.000,00 para criar os bois e continuará gastando Cr$ 2,00 por dia para manter um boi. Os bois aumentam de peso a uma razão de 1,5 kg por dia. Seu preço de venda, hoje, é de Cr$ 18,00 o quilo, mas o preço cai 5 centavos por dia. Quantos dias deveria o fazendeiro aguardar para maximizar seu lucro?

4. Achar dois números positivos cuja soma seja 70 e cujo produto seja o maior possível.

5. Usando uma folha quadrada de cartolina, de lado a, deseja-se construir uma caixa sem tampa, cortando em seus cantos quadrados iguais e dobrando convenientemente a parte restante. Determinar o lado dos quadrados que devem ser cortados de modo que o volume da caixa seja o maior possível.

6. Determinar as dimensões de uma lata cilíndrica, com tampa, com volume V, de forma que a sua área total seja mínima.

7. Duas indústrias A e B necessitam de água potável. A figura a seguir esquematiza a posição das indústrias, bem como a posição de um encanamento retilíneo l, já existente. Em que ponto do encanamento deve ser instalado um reservatório de modo que a metragem de cano a ser utilizada seja mínima?



8. Qual é o retângulo de perímetro máximo inscrito no círculo de raio 12 cm?

9. Traçar uma tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 2$ de modo que a área do triângulo que ela forma com os eixos coordenados positivos seja mínima. Obter as coordenadas do ponto de tangência e a área mínima.

10. Mostrar que o volume do maior cilindro reto que pode ser inscrito num cone reto é 4/9 do volume do cone.

11. Um cone reto é cortado por um plano paralelo à sua base. A que distância da base deve ser feito esse corte, para que o cone reto de base na secção determinada, e de vértice no centro da base do cone dado, tenha volume máximo?

12. Determinar o ponto A da curva $y = x^2 + x$ que se encontra mais próximo de $(7, 0)$. Mostrar que a reta que passa por $(7, 0)$ e por A é normal à curva dada em A.

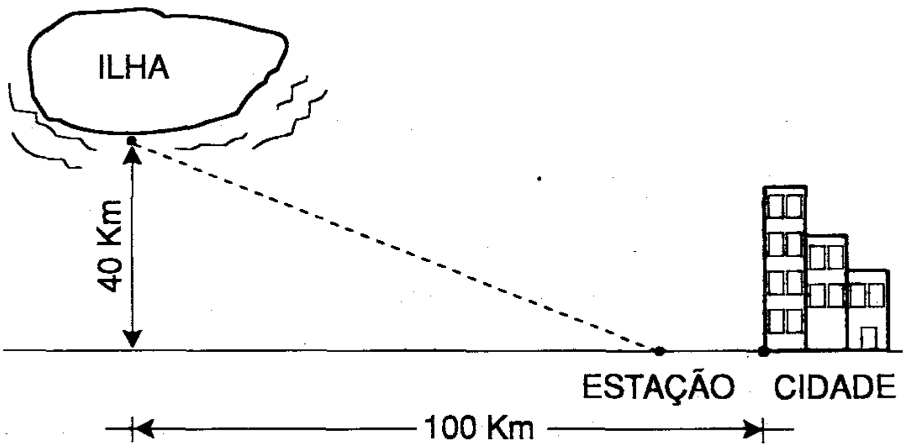
13. Uma folha de papel contém 375 cm^2 de matéria impressa, com margem superior de 3,5 cm, margem inferior de 2 cm, margem lateral direita de 2 cm e margem lateral esquerda de 2,5 cm.

Determinar quais devem ser as dimensões da folha para que haja o máximo de economia de papel.

14. Uma janela tem a forma de um retângulo encimado por um semi-círculo. Achar as dimensões de modo que o perímetro seja 3,2 m e a área a maior possível.

15. Um canhão, situado no solo, é posto sob um ângulo de inclinação α. Seja l o alcance do canhão, dado por $l = \dfrac{2v^2}{g}$ sen α cos α, onde v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo?

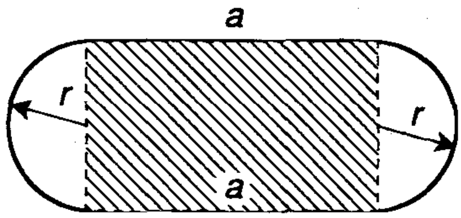
16. Uma agência de turismo está organizando um serviço de barcas, de uma ilha situada a 40 km de uma costa quase reta, para uma cidade que dista 100 km, como mostra a figura a seguir. Se a barca tem uma velocidade de 18 km por hora, e os carros tem uma velocidade média de 50 km/h, onde deverá estar situada a estação das barcas a fim de tornar a viagem a mais rápida possível?



17. Uma cerca de 1 m de altura está situada a uma distância de 1 m da parede lateral de um galpão. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apoiam na parede e no chão do lado de fora da cerca?

18. Seja s uma reta que passa pelo ponto (4, 3) formando um triângulo com os eixos coordenados positivos. Qual a equação de s para que a área desse triângulo seja mínima?

19. Uma pista de atletismo com comprimento total de 400 m, consiste de 2 semi-círculos e dois segmentos retos, conforme figura a seguir. Determinar as dimensões da pista, de tal forma que a área retangular, demarcada na figura, seja máxima.



20. Um cilindro circular reto está inscrito num cone circular reto de altura $H = 6$ m e raio da base $R = 3{,}5$ m. Determinar a altura e o raio da base do cilindro de volume máximo.

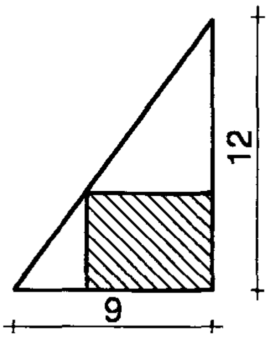
21. Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo de produção é dado por $C = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 60$, e o valor obtido na venda é dado por $V = 60x - 12x^2$, determinar o número ótimo de unidades mensais que maximiza o lucro $L = V - C$.

22. Um cilindro reto é inscrito numa esfera de raio R. Determinar esse cilindro, de forma que seu volume seja máximo.

23. Um fazendeiro deve cercar dois pastos retangulares, de dimensões a e b, com um lado comum a. Se cada pasto deve medir 400 m^2 de área, determinar as dimensões a e b, de forma que o comprimento da cerca seja mínimo.

24. Um fabricante, ao comprar caixas de embalagens, retangulares, exige que o comprimento de cada caixa seja 2 m e o volume 3 m^3. Para gastar a menor quantidade de material possível na fabricação das caixas, quais devem ser suas dimensões?

25. Um retângulo é inscrito num triângulo retângulo de catetos medindo 9 cm e 12 cm. Encontrar as dimensões do retângulo com maior área, supondo que sua posição é dada na figura a seguir.



5.14 REGRAS DE L'HOSPITAL

Nesta Seção apresentaremos um método geral para levantar indeterminações do tipo 0/0 ou ∞/∞. Esse método é dado pelas regras de L'Hospital, cuja demonstração necessita da seguinte proposição.

5.14.1 Proposição (Fórmula de Cauchy). Se f e g são duas funções contínuas em $[a, b]$, deriváveis em (a, b) e se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então existe um número $z \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Prova. Provemos primeiro que $g(b) - g(a) \neq 0$. Como g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), pelo teorema do valor médio, existe c e (a, b) tal que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}. \qquad (1)$$

Como, por hipótese, $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, temos $g'(c) \neq 0$ e assim, pela igualdade (*1*), $g(\mathrm{b}) - g(a) \neq 0$.

Consideremos a função

$$h(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right][g(x) - g(a)].$$

A função h satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle em $[a, b]$, pois:

(*i*) Como f e g são contínuas em $[a, b]$, h é contínua em $[a, b]$;

(*ii*) Como f e g são deriváveis em (a, b), h é derivável em (a, b);

(*iii*) $h(a) = h(b) = 0$.

Portanto, existe $z \in (a, b)$ tal que $h'(z) = 0$.

Como $h'(x) = f'(x) - \left[\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right] g'(x)$, temos

$$f'(z) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right] \cdot g'(z) = 0 . \tag{2}$$

Mas $g'(z) \neq 0$. Logo, podemos escrever (2) na forma

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} .$$

5.14.2 Proposição (Regras de L'Hospital). Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente, em um ponto $a \in I$. Suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em I.

(*i*) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L ;$$

(*ii*) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L .$$

Prova do item (*i*). Suponhamos que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tome a forma indeterminada 0/0 e que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Queremos provar que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Consideremos duas funções F e G tais que

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a \end{cases}$$

Então,

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 = F(a)$$

e

$$\lim_{x \to a} G(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 = G(a).$$

Assim, as funções F e G são contínuas no ponto a e portanto, em todo intervalo I.

Seja $x \in I$, $x \neq a$. Como para todo $x \neq a$ em I, f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$, as funções F e G satisfazem as hipóteses da fórmula de Cauchy no intervalo $[x, a]$ ou $[a, x]$. Segue que existe um número z entre a e x tal que

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}.$$

Como $F(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$, $F(a) = G(a) = 0$, $F'(z) = f'(z)$ e $G'(z) = g'(z)$, vem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Como z está entre a e x, quando $x \to a$ temos que $z \to a$. Logo,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = L.$$

Observamos que se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty,$$

e $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, a regra de L'Hospital continua válida, isto é

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty.$$

Ela também é válida para os limites laterais e para os limites no infinito.

A seguir apresentaremos vários exemplos, ilustrando como muitos limites que tomam formas indeterminadas podem ser resolvidos com o auxílio da regra de L'Hospital.

5.14.3 Exemplos

(*i*) Determinar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{e^x - 1}$.

Quando $x \to 0$, o quociente $\dfrac{2x}{e^x - 1}$ toma a forma indeterminada 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital, vem

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^0} = 2.$$

(*ii*) Determinar $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

O limite toma a forma indeterminada 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x + 1}{2x - 3} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2 - 3} = 5\,.$$

(*iii*) Determinar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{e^x + e^{-x} - 2}$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital uma vez, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}}\,.$$

Como o último limite ainda toma a forma indeterminada 0/0, podemos aplicar novamente a regra de L'Hospital. Temos,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{e^x + e^{-x}} = \frac{-0}{2} = 0\,.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{e^x + e^{-x} - 2} = 0\,.$

(*iv*) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^3 + 4x}$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo ∞/∞. Aplicando a regra de L'Hospital sucessivas vezes, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^3 + 4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2 + 4}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6}$$

$$= +\infty.$$

(v) Determinar $\lim_{x \to +\infty} (3x + 9)^{1/x}$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo ∞^0. Vamos transformá-la numa indeterminação do tipo ∞/∞ com o auxílio de logaritmos e em seguida aplicar a regra de L'Hospital.

Seja $L = \lim_{x \to +\infty} (3x + 9)^{1/x}$. Então, $\ln L = \ln \left[\lim_{x \to +\infty} (3x + 9)^{1/x} \right]$.

Aplicando a proposição 3.5.2(g) e as propriedades de logaritmos, vem

$$\ln L = \lim_{x \to +\infty} \ln (3x + 9)^{1/x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln (3x + 9)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln (3x + 9)}{x}.$$

Temos agora uma indeterminação do tipo ∞/∞. Aplicando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\ln L = \lim_{x \to +\infty} \frac{3/(3x + 9)}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{3x + 9} = 0.$$

Como $\ln L = 0$, temos $L = 1$ e dessa forma

$$\lim_{x \to +\infty} (3x + 9)^{1/x} = 1 .$$

(*vi*) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \operatorname{sen} 1/x$.

Neste caso temos uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Reescrevendo o limite dado na forma

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \operatorname{sen} 1/x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/x}{1/x},$$

temos uma indeterminação do tipo 0/0.

Aplicando a regra de L'Hospital, vem

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen} 1/x &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/x}{1/x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{-1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \cos 1/x \\
&= \cos 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(vii) Determinar $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2 + x} - \dfrac{1}{\cos x - 1} \right)$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Reescrevendo o limite dado, temos

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{\cos x - 1} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 - x^2 - x}{(x^2 + x)(\cos x - 1)}.$$

Temos então uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital, vem

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{\cos x - 1} \right) &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 - x^2 - x}{(x^2 + x)(\cos x - 1)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x - 2x - 1}{(x^2 + x) \cdot (-\operatorname{sen} x) + (\cos x - 1)(2x + 1)} \\
&= \frac{-1}{0} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

($viii$) Determinar $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x^2 + x)^x$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo 0^0. Com o auxílio de logaritmos, vamos transformá-la numa indeterminação da forma ∞/∞.

Seja $L = \lim\limits_{x \to 0^+} (2x^2 + x)^x$. Então,

$$\ln L = \ln \left[\lim_{x \to 0^+} (2x^2 + x)^x \right]$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\ln (2x^2 + x)^x \right]$$

$$= \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln (2x^2 + x)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln (2x^2 + x)}{1/x}.$$

Temos agora uma indeterminação do tipo ∞/∞. Aplicando a regra de L'Hospital, vem

$$\ln L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4x + 1}{2x^2 + x}}{\dfrac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(- \frac{4x^3 + x^2}{2x^2 + x} \right).$$

Aplicando novamente a regra de L'Hospital, obtemos

$$\ln L = \lim_{x \to 0^+} \left(- \frac{12x^2 + 2x}{4x + 1} \right)$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0.$$

Como $\ln L = 0$, temos $L = 1$. Logo,

$$\lim_{x \to 0^+} (2x^2 + x)^x = 1 .$$

(*ix*) Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^x$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo 1^∞. Usando logaritmos, vamos transformá-la numa indeterminação da forma 0/0.

Seja $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^x$. Então,

$$\begin{aligned}
\ln L &= \ln \left[\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \right] \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \right] \\
&= \lim_{x \to +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)}{1/x}.
\end{aligned}$$

Temos agora uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{-1}{2x^2} \Big/ \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)}{-1/x^2} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{1/2}{1 + \dfrac{1}{2x}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1/2}{1}$$

$$= 1/2.$$

Portanto, $\ln L = \dfrac{1}{2}$ e dessa forma $L = e^{1/2}$. Logo,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = e^{1/2}.$$

5.15 EXERCÍCIOS

Determinar os seguintes limites com auxílio das regras de L'Hospital.

1. $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$

2. $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3}$

3. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 6x}{x^3 + 7x^2 + 5x}$

4. $\displaystyle \lim_{x \to 1/2} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 4x + 1}$

5. $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{6 - 2x + 3x^2 - x^3}{x^4 - 3x^3 - x + 3}$

6. $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 1}$

7. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 6x + 7}{x^3 + 7x - 1}$

8. $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{5 - 5x^3}{2 - 2x^3}$

9. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{7x^5 - 6}{4x^2 - 2x + 4}$

10. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{5 - x + x^2}{2 - x - 2x^2}$

11. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

12. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{99}}{e^x}$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - \cos x}$

14. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 (e^{1/x} - 1)$

15. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{(x - \pi/2)^2}$

16. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{2^x - 1}$

17. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{2x - 4} - \dfrac{1}{x - 2} \right)$

18. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln \dfrac{x}{x + 1})$

19. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \left(\dfrac{x}{\operatorname{cotg} x} - \dfrac{\pi}{2 \cos x} \right)$

20. $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{tgh} x$

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{sen} x}$

22. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

23. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$

25. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) \operatorname{cotg} x$

26. $\lim\limits_{x \to 1} [\ln x \ln (x - 1)]$

27. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{1}{2 (1 - \sqrt{x})} - \dfrac{1}{3 (1 - \sqrt[3]{x})} \right]$

28. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{3}{x^4 + \ln x}}$

29. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

30. $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1 - x}}$

31. $\lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$

32. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \operatorname{sen} \pi/x$

33. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{2/3}}{(x^2 + 2)^{1/3}}$

34. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{senh} x}{x}$

35. $\lim_{x \to +\infty} (2x - 1)^{2/x}$

36. $\lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$

37. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln (\text{sen}\ a\,x)}{\ln (\text{sen}\ x)}$

38. $\lim_{x \to 3} \left(\dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{5}{x^2 - x - 6} \right)$

39. $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\text{tg}\ x}}$

40. $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{2}{2 + \ln x}}$

41. $\lim_{x \to \pi/4} (1 - \text{tg}\ x) \sec 2x$

42. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x \ln x}{x + \ln x}$

43. $\lim_{x \to 0} (e^x + x)^{1/x}$.

5.16 FÓRMULA DE TAYLOR

A Fórmula de Taylor consiste num método de aproximação de uma função por um polinômio, com um erro possível de ser estimado.

5.16.1 Definição. Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas até ordem n num ponto c do intervalo I. O *polinômio de Taylor* de ordem n de f no ponto c, que denotamos por $P_n(x)$, é dado por

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Observamos que no ponto $x = c$, $P_n(c) = f(c)$.

5.16.2 Exemplo. Determinar o polinômio de Taylor de ordem 4 da função $f(x) = e^x$ no ponto $c = 0$.

Temos, $f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(iv)}(x) = e^x$ e assim,

$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(iv)}(0) = e^0 = 1$.

Portanto,

$$P_4(x) = 1 + 1(x - 0) + \frac{1}{2!}(x - 0)^2 + \frac{1}{3!}(x - 0)^3 + \frac{1}{4!}(x - 0)^4$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!},$$

é o polinômio de Taylor de grau 4 da função $f(x) = e^x$ no ponto $c = 0$.

Dado o polinômio de Taylor de grau n de uma função $f(x)$, denotamos por $R_n(x)$ a diferença entre $f(x)$ e $P_n(x)$, isto é, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ (ver Figura 5.33).

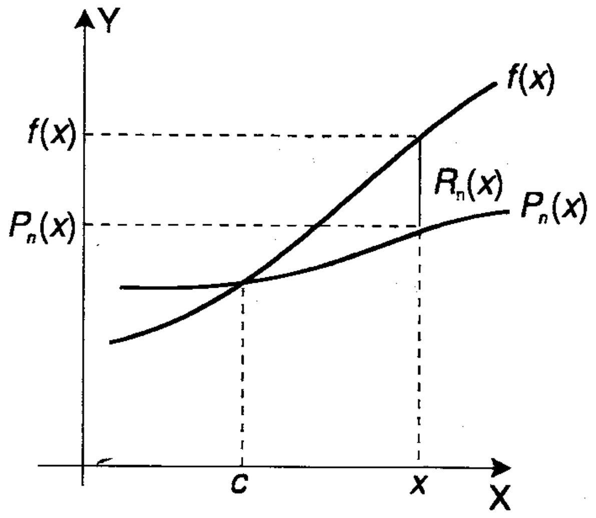


Figura 5-33

Temos então, $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, ou mais explicitamente,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x). \quad (1)$$

Para os valores de x nos quais $R_n(x)$ é "pequeno", o polinômio $P_n(x)$ dá uma boa aproximação de $f(x)$. Por isso, $R_n(x)$ chama-se *resto*. O problema, agora, consiste em determinar uma fórmula para $R_n(x)$ de tal modo que ele possa ser avaliado. Temos a seguinte proposição.

5.16.3 Proposição (Fórmula de Taylor). Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo $[a, b]$. Suponhamos que as derivadas $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ existam e sejam contínuas em $[a, b]$ e que $f^{(n+1)}$ exista em (a, b). Seja c um ponto qualquer fixado em $[a, b]$. Então, para cada $x \in [a, b]$, $x \neq c$, existe um ponto z entre c e x tal que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}. \qquad (2)$$

Quando $c = 0$, a Fórmula de Taylor fica

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

e recebe o nome de Fórmula de Mac-Laurin.

Prova. Faremos a demonstração supondo $x > c$. Para $x < c$, o procedimento é análogo.

Sejam $P_n(t)$ o polinômio de Taylor de grau n de f no ponto c e $R_n(t)$ o resto correspondente. Então, $f(t) = P_n(t) + R_n(t)$, para qualquer $t \in [a, b]$.

Portanto, no ponto x, temos

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x).$$

Para provar (2), devemos mostrar que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \text{ onde } z \text{ é um número entre } c \text{ e } x.$$

Para isso, vamos considerar a seguinte função auxiliar:

$g: [c, x] \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \dots$$

$$\dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - R_n(x) \cdot \frac{(x - t)^{n+1}}{(x - c)^{n+1}} .$$

Pelas propriedades das funções contínuas, segue que g é contínua em $[c, x]$. Pelas propriedades das funções deriváveis, segue que g é derivável em (c, x). Além disso, podemos verificar que $g(c) = g(x) = 0$.

Logo, g satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle em $[c, x]$ e portanto existe um ponto z, entre c e x, tal que $g'(z) = 0$.

Derivando a função g com o auxílio das regras de derivação e simplificando, obtemos

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - c)^{(n+1)},$$

e, conseqüentemente, a fórmula (2) fica provada.

Observando as fórmulas (*1*) e (2), vemos que na Fórmula de Taylor apresentada, o resto $R_n(x)$ é dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1} .$$

Essa forma para o *resto* é chamada *Forma de Lagrange do Resto* e a fórmula (2) é dita *Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange*. Existem outras formas para o resto, como a forma da integral, que não abordaremos aqui.

5.16.4 Exemplos

(*i*) Determinar os polinômios de Taylor de grau 2 e de grau 4 da função $f(x) = \cos x$, no ponto $c = 0$. Esboçar o gráfico de f e dos polinômios encontrados.

Usando o polinômio $P_4(x)$ para determinar um valor aproximado para $\cos \frac{\pi}{6}$, o que se pode afirmar sobre o erro cometido?

Solução. Para determinar os polinômios pedidos, necessitamos do valor de f e de suas derivadas até ordem 4, no ponto $c = 0$.

Temos,

$$
\begin{array}{lclllcl}
f(x) & = & \cos x, & f(0) & = & \cos 0 = & 1 \\
f'(x) & = & -\operatorname{sen} x, & f'(0) & = & -\operatorname{sen} 0 = & 0 \\
f''(x) & = & -\cos x, & f''(0) & = & -\cos 0 = & -1 \\
f'''(x) & = & \operatorname{sen} x, & f'''(0) & = & \operatorname{sen} 0 = & 0 \\
f^{iv}(x) & = & \cos x, & f^{iv}(0) & = & \cos 0 = & 1.
\end{array}
$$

O polinômio de Taylor de grau 2, no ponto c, é dado por

$$P_2(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2.$$

Como no nosso caso $c = 0$, vem

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\
&= 1 + 0 \cdot x + \frac{(-1)}{2!}x^2 \\
&= 1 - \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}
$$

O polinômio de Taylor de grau 4, no ponto c, é dado por

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(x)}{4!}x^4$$

$$= \ 1 + 0 \cdot x + \frac{(-1)}{2!}\,x^2 + \frac{0}{3!}\,x^3 + \frac{1}{4!}\,x^4$$

$$= \ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

A Figura 5.34 mostra o gráfico de $f(x)$, $P_2(x)$ e $P_4(x)$. Comparando esses gráficos, podemos observar que o gráfico de $P_4(x)$ está mais próximo do gráfico de $f(x)$. Se aumentarmos n, o gráfico de $P_n(x)$ se aproxima cada vez mais do gráfico de $f(x)$.

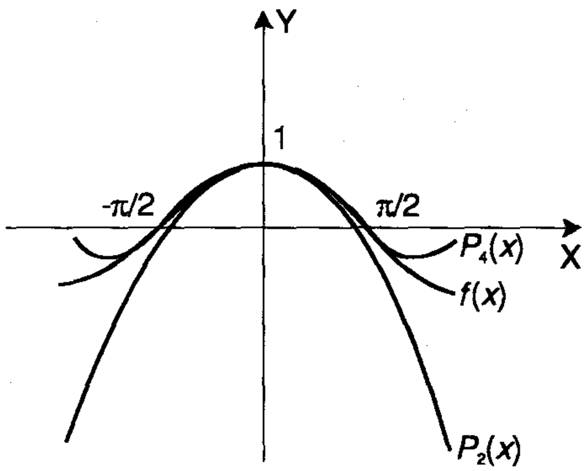


Figura 5-34

Usando o polinômio $P_4(x)$ para determinar um valor aproximado de $\cos \dfrac{\pi}{6}$, pela Fórmula de Taylor, temos

$$\cos \frac{\pi}{6} \ = \ P_4\ (\pi/6) + R_4\ (\pi/6)$$

$$= \ 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 + \frac{f^{(5)}(z)}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5,$$

onde z é um número entre 0 e $\pi/6$.

Como $f^{(v)}(x) = -\text{sen } x$ e $|-\text{sen } x| \leq 1$ para qualquer valor de x, podemos afirmar que o resto $R_4\left(\frac{\pi}{6}\right)$ satisfaz

$$|R_4(\pi/6)| = \frac{|-\text{sen } z|}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 \leq \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5$$

$$\cong 0{,}000327\,.$$

Logo, quando calculamos o valor de $\cos \frac{\pi}{6}$ pelo polinômio $P_4(x)$, temos

$$\cos\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{(\pi/6)^2}{2!} + \frac{(\pi/6)^4}{24}$$

$$\cong 0{,}86606$$

e podemos afirmar que o erro cometido, em módulo, é menor ou igual a 0,000327.

(*iii*) Determinar o polinômio de Taylor de grau 6 da função $f(x) = \text{sen } 2x$ no ponto $c = \frac{\pi}{4}$. Usar este polinômio para determinar um valor aproximado para $\text{sen } \frac{\pi}{3}$. Fazer uma estimativa para o erro.

Solução. Devemos calcular o valor da função e suas derivadas até ordem 6, no ponto $c = \frac{\pi}{4}$.

Temos,

$$\begin{array}{lllllll}
f(x) & = & \text{sen } 2x & , & f(\pi/4) & = \text{sen } \pi/2 & = 1 \\
f'(x) & = & 2\cos 2x & , & f'(\pi/4) & = 2\cos \pi/2 & = 0 \\
f''(x) & = & -4\,\text{sen } 2x & , & f''(\pi/4) & = -4 & \\
f'''(x) & = & -8\cos 2x & , & f'''(\pi/4) & = 0 &
\end{array}$$

$$f^{iv}(x) = 16 \text{ sen } 2x \quad , \quad f^{iv}(\pi/4) = 16$$

$$f^{v}(x) = 32 \cos 2x \quad , \quad f^{v}(\pi/4) = 0$$

$$f^{vi}(x) = -64 \text{ sen } 2x \quad , \quad f^{vi}(\pi/4) = -64.$$

O polinômio de Taylor de grau 6, no ponto $c = \pi/4$, é dado por

$$P_6(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f'(\pi/4))}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''(\pi/4)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(vi)}(\pi/4)}{6!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6$$

$$= 1 + 0 + \frac{(-4)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + 0 + \frac{16}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + 0 + \frac{(-64)}{6!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6$$

$$= 1 - \frac{2^2}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2^4}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{2^6}{6!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6.$$

Usando o polinômio $P_6(x)$ para determinar sen $\frac{\pi}{3}$, obtemos pela Fórmula de Taylor,

$$\text{sen } \frac{\pi}{3} = \text{sen } (2 \cdot \pi/6) = f(\pi/6) = P_6(\pi/6) + R_6(\pi/6)$$

$$= 1 - \frac{2^2}{2!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2^4}{4!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{2^6}{6!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^6 + \frac{f^{(vii)}(z)}{7!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^7.$$

$$\cong 0{,}86602526 + \frac{f^{(vii)}(z)}{7!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^7.$$

Como $f^{(vii)}(x) = -128 \cos 2x$ e $|\cos 2x| \leq 1$ para todo x, o resto $R_6\left(\frac{\pi}{6}\right)$ satisfaz

$$|R_6(\pi/6)| \leq \left|\frac{128}{7!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^7\right| \cong 2{,}1407 \times 10^{-6}.$$

Logo, usando o polinômio $P_6(x)$ obtemos sen $\frac{\pi}{3} = 0{,}86602526$e o erro cometido, em módulo, será inferior a $2{,}1407 \times 10^{-6}$.

Usando a Fórmula de Taylor, pode-se demonstrar a seguinte proposição que nos dá mais um critério para determinação de máximos e mínimos de uma função.

5.16.5 Proposição. Seja f: $(a, b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável n vezes e cujas derivadas, $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ são contínuas em (a, b). Seja $c \in (a, b)$ um ponto crítico de f tal que $f'(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$ e $f^{(n)}(c) \neq 0$. Então,

(*i*) se n é par e $f^{(n)}(c) \leq 0$, f tem um máximo relativo em c;

(*ii*) se n é par e $f^{(n)}(c) \geq 0$, f tem um mínimo relativo em c;

(*iii*) se n é ímpar, c é um ponto de inflexão.

5.16.6 Exemplos

(*i*) Determinar os extremos da função $f(x) = (x - 2)^6$.

Temos $f'(x) = 6(x - 2)^5$. Fazendo $f'(x) = 0$, obtemos $x = 2$, que é o único ponto crítico de f.

Calculando as derivadas seguintes no ponto $x = 2$, temos

$$f''(x) = 30(x-2)^4, \quad f''(2) = 0$$

$$f'''(x) = 120(x-2)^3, \quad f'''(2) = 0$$

$$f^{iv}(x) = 360(x-2)^2, \quad f^{iv}(2) = 0$$

$$f^{(v)}(x) = 720\,(x-2)\ ,\quad f^{(v)}(2) = 0$$
$$f^{(vi)}(x) = 720\ ,\quad f^{(vi)}(2) = 720 \neq 0.$$

Logo, $x = 2$ é um ponto de mínimo relativo.

(*ii*) Pesquisar máximos e mínimos da função $f(x) = x^5 - x^3$.

Fazendo $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 = 0$, obtemos os pontos críticos que são $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3/5}$ e $x_3 = -\sqrt{3/5}$.

Calculando o valor das derivadas seguintes no ponto $x_1 = 0$, temos

$$f''(x) = 20x^3 - 6x\ ,\quad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = 60x^2 - 6\ ,\quad f'''(0) = -6 \neq 0.$$

Como $f'''(0) \neq 0$, concluímos que 0 é um ponto de inflexão.

No ponto $x_2 = \sqrt{3/5}$, temos

$$\begin{aligned} f''(x) = 20x^3 - 6x\ ,\ f''(\sqrt{3/5}) &= 20\,(3/5)^{3/2} - 6\sqrt{3/5} \\ &= \sqrt{3/5}\left(20 \cdot \frac{3}{5} - 6\right) \\ &= 6\sqrt{3/5} > 0\,. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $x_1 = \sqrt{3/5}$ é um ponto de mínimo relativo.

No ponto $x_3 = -\sqrt{3/5}$, temos

$$f''(x) = 20x^3 - 6x \; , \; f''(-\sqrt{3/5}) = -20\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} - 6(-\sqrt{3/5})$$

$$= -6\sqrt{3/5} < 0 \, .$$

Logo, o ponto $x_3 = -\sqrt{3/5}$ é um ponto de máximo relativo.

5.17 EXERCÍCIOS

1. Determinar o polinômio de Taylor de ordem n, no ponto c dado, das seguintes funções:

   a) $f(x) = e^{x/2}$; $c = 0$ e 1; $n = 5$

   b) $f(x) = e^{-x}$; $c = -1$ e 2; $n = 4$

   c) $f(x) = \ln(1 - x)$; $c = 0$ e $1/2$; $n = 4$

   d) $f(x) = \text{sen}\, x$; $c = \pi/2$; $n = 8$

   e) $f(x) = \cos 2x$; $c = 0$ e $\pi/2$; $n = 6$

   f) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$; $c = 0$ e 1; $n = 4$.

2. Encontrar o polinômio de Taylor de grau n no ponto c e escrever a função que define o resto na forma de Lagrange, das seguintes funções:

   a) $y = \cosh x$; $n = 4$; $c = 0$

   b) $y = \text{tg}\, x$; $n = 3$; $c = \pi$

   c) $y = \sqrt{x}$; $n = 3$; $c = 1$

   d) $y = e^{-x^2}$; $n = 4$; $c = 0$.

3. Usando o resultado encontrado no exercício 1, item (*c*), com $c = 0$, determinar um valor aproximado para ln 0,5. Fazer uma estimativa para o erro.

4. Determinar o polinômio de Taylor de grau 6 da função $f(x) = 1 + \cos x$ no ponto $c = \pi$. Usar este polinômio para determinar um valor aproximado para cos $(5\pi/6)$. Fazer uma estimativa para o erro.

5. Demonstrar que a diferença entre sen $(a + h)$ e sen a + h cos a é menor ou igual a $\dfrac{1}{2}\, h^2$.

6. Um fio delgado, pela ação da gravidade, assume a forma da catenária $y = a \cosh \dfrac{x}{a}$. Demonstrar que para valores pequenos de $|x|$, a forma que o fio toma pode ser representada, aproximadamente, pela parábola $y = a + \dfrac{x^2}{2a}$.

7. Pesquisar máximos e mínimos das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x - 4$

b) $f(x) = 4 - 5x + 6x^2$

c) $f(x) = (x - 4)^{10}$

d) $f(x) = 4\,(x + 2)^7$

e) $f(x) = x^6 - 2x^4$

f) $f(x) = x^5 - \dfrac{125}{3}\,x^3$.