

INTRODUÇÃO À INTEGRAÇÃO

Neste capítulo introduziremos a integral. Em primeiro lugar, trataremos da integração indefinida, que consiste no processo inverso da derivação. Em seguida, veremos a integral definida, que é a integral propriamente dita, e sua relação com o problema de determinar a área de uma figura plana. Por fim, apresentaremos o Teorema Fundamental do Cálculo, que é a peça chave de todo Cálculo Diferencial e Integral, pois estabelece a ligação entre as operações de derivação e integração.

6.1 INTEGRAL INDEFINIDA

6.1.1 Definição. Uma função $F(x)$ é chamada uma primitiva da função $f(x)$ em um intervalo I (ou simplesmente uma primitiva de $f(x)$), se para todo $x \in I$, temos

$$F'(x) = f(x).$$

Observamos que, de acordo com nossa definição, as primitivas de uma função $f(x)$ estão sempre definidas sobre algum intervalo. Quando não explicitamos o intervalo e nos referimos a duas primitivas da mesma função f , entendemos que essas funções são primitivas de f no mesmo intervalo I .

6.1.2 Exemplos

(i) $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva da função $f(x) = x^2$, pois

$$F'(x) = 1/3 \cdot 3x^2 = x^2 = f(x).$$

(ii) As funções $G(x) = x^3/3 + 4$, $H(x) = 1/3 (x^3 + 3)$ também são primitivas da função $f(x) = x^2$, pois $G'(x) = H'(x) = f(x)$.

(iii) A função $F(x) = 1/2 \sin 2x + c$, onde c é uma constante, é primitiva da função $f(x) = \cos 2x$.

(iv) A função $F(x) = 1/2x^2$ é uma primitiva da função $f(x) = -1/x^3$ em qualquer intervalo que não contém a origem, pois para todo $x \neq 0$, temos $F'(x) = f(x)$.

Os exemplos anteriores nos mostram que uma mesma função $f(x)$ admite mais que uma primitiva. Temos as seguintes proposições.

6.1.3 Proposição. Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, se c é uma constante qualquer, a função $G(x) = F(x) + c$ também é primitiva de $f(x)$.

Prova. Como $F(x)$ é primitiva de $f(x)$, temos que $F'(x) = f(x)$. Assim,

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x),$$

o que prova que $G(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

6.1.4 Proposição. Se $f'(x)$ se anula em todos os pontos de um intervalo I , então f é constante em I .

Prova. Sejam $x, y \in I$, $x < y$. Como f é derivável em I , f é contínua em $[x, y]$ e derivável em (x, y) . Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (x, y)$, tal que

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Como $f'(z) = 0$, vem que $f(y) - f(x) = 0$ ou $f(y) = f(x)$. Sendo x e y dois pontos quaisquer de I , concluímos que f é constante em I .

6.1.5 Proposição. Se $F(x)$ e $G(x)$ são funções primitivas de $f(x)$ no intervalo I , então existe uma constante c tal que $G(x) - F(x) = c$, para todo $x \in I$.

Prova. Seja $H(x) = G(x) - F(x)$. Como F e G são primitivas de $f(x)$ no intervalo I , temos $F'(x) = G'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$. Assim,

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \text{ para todo } x \in I.$$

Pela proposição 6.1.4, existe uma constante c , tal que $H(x) = c$, para todo $x \in I$. Logo, para todo $x \in I$, temos

$$G(x) - F(x) = c.$$

Da proposição 6.1.5, concluímos que se $F(x)$ é uma particular primitiva de f , então toda primitiva de f é da forma

$$G(x) = F(x) + c,$$

onde c é uma constante. Assim o problema de determinar as primitivas de f , se resume em achar uma primitiva particular.

6.1.6 Exemplo. Sabemos que $(\sin x)' = \cos x$. Assim, $F(x) = \sin x$ é uma primitiva da função $f(x) = \cos x$ e toda primitiva de $f(x) = \cos x$ é da forma

$$G(x) = \sin x + c,$$

para alguma constante c .

6.1.7 Definição. Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + c$ é chamada *integral indefinida* da função $f(x)$ e é denotada por

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

De acordo com esta notação o símbolo $\int$ é chamado *senal de integração*, $f(x)$ *função integrando* e $f(x) dx$ *integrando*. O processo que permite achar a integral indefinida de uma função é chamado *integração*. O símbolo dx que aparece no integrando serve para identificar a variável de integração.

Da definição da integral indefinida, decorre que:

$$(i) \quad \int f(x) dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

(ii) $\int f(x) dx$ representa uma família de funções (a família de todas as primitivas da função integrando).

Propriedades da Integral Indefinida

6.1.8 Proposição. Sejam $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ e K uma constante. Então:

$$(i) \quad \int K f(x) dx = K \int f(x) dx.$$

$$(ii) \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Prova.

(i) Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$. Então $K F(x)$ é uma primitiva de $K f(x)$, pois $(K F(x))' = K F'(x) = K f(x)$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \int K f(x) dx &= K F(x) + c = K F(x) + K c_1 \\ &= K [F(x) + c_1] = K \int f(x) dx. \end{aligned}$$

(ii) Sejam $F(x)$ e $G(x)$ funções primitivas de $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. Então, $F(x) + G(x)$ é uma primitiva da função $(f(x) + g(x))$, pois $[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\int (f(x) + g(x)) dx &= [F(x) + G(x)] + c \\&= [F(x) + G(x)] + c_1 + c_2, \text{ onde } c = c_1 + c_2 \\&= [F(x) + c_1] + [G(x) + c_2] \\&= \int f(x) dx + \int g(x) dx.\end{aligned}$$

O processo de integração exige muita intuição, pois conhecendo apenas a derivada de uma dada função nós queremos descobrir a função. Podemos obter uma tabela de integrais, chamadas imediatas, a partir das derivadas das funções elementares.

6.1.9 Exemplos

(i) Sabemos que $(\sin x)' = \cos x$. Então $\int \cos x dx = \sin x + c$.

(ii) Como $(-\cos \theta)' = \sin \theta$, então $\int \sin \theta d\theta = -\cos \theta + c$.

(iii) $\int e^x dx = e^x + c$, pois $(e^x)' = e^x$.

(iv) $\int x^{2/3} dx = \frac{3}{5} x^{5/3} + c$, pois $(3/5 x^{5/3})' = x^{2/3}$.

(v) $\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + c$, pois $(2\sqrt{t})' = 1/\sqrt{t}$.

6.1.10 Tabela de Integrais Imediatas

$$(1) \int du = u + c$$

$$(2) \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$$

$$(3) \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \text{ é constante } \neq -1)$$

$$(4) \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

$$(5) \int e^u du = e^u + c$$

$$(6) \int \sin u du = -\cos u + c$$

$$(7) \int \cos u du = \sin u + c$$

$$(8) \int \sec^2 u du = \tan u + c$$

$$(9) \int \operatorname{cosec}^2 u du = -\cotg u + c \quad \int \frac{1}{\sin x} = -\cotg x + C$$

$$(10) \int \sec u \cdot \tg u du = \sec u + c$$

$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \int \sec x \cdot \lg x dx = \sec x + c$

$$(11) \int \operatorname{cosec} u \cdot \cotg u du = -\operatorname{cosec} u + c$$

$$(12) \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc} \sin u + c$$

$$(13) \int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc} \tg u + c$$

$$(14) \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - 1}} = \operatorname{arc} \sec u + c$$

$$*(15) \int \sinh u \, du = \cosh u + c$$

$$(16) \int \cosh u \, du = \sinh u + c$$

$$(17) \int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tgh} u + c$$

$$(18) \int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\operatorname{cotgh} u + c$$

$$(19) \int \operatorname{sech} u \cdot \operatorname{tgh} u \, du = -\operatorname{sech} u + c$$

$$*(20) \int \operatorname{cosech} u \cdot \operatorname{cotgh} u \, du = -\operatorname{cosech} u + c$$

$$(21) \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \arg \sinh u + c = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + 1} \right| + c$$

$$(22) \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \arg \cosh u + c = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - 1} \right| + c$$

$$(23) \int \frac{du}{1 - u^2} = \begin{cases} \arg \operatorname{tgh} u + c, & \text{se } |u| < 1 \\ \arg \operatorname{cotgh} u + c, & \text{se } |u| > 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| + c$$

$$(24) \int \frac{du}{u \sqrt{1 - u^2}} = -\arg \operatorname{sech} |u| + c$$

$$(25) \int \frac{du}{u \sqrt{1 + u^2}} = -\arg \operatorname{cosech} |u| + c.$$

Usando as propriedades da integral indefinida e a tabela de integrais, podemos calcular a integral indefinida de algumas funções.

6.1.11 Exemplos. Calcular as integrais indefinidas.

(i) $\int (3x^2 + 5 + \sqrt{x}) \, dx.$

Usando as propriedades da integral indefinida e a tabela de integrais, temos

$$\begin{aligned} \int (3x^2 + 5 + \sqrt{x}) \, dx &= 3 \int x^2 \, dx + 5 \int dx + \int x^{1/2} \, dx \\ &= 3 \frac{x^3}{3} + 5x + \frac{x^{3/2}}{3/2} + c \\ &= x^3 + 5x + \frac{2}{3} x^{3/2} + c. \end{aligned}$$

(ii) $\int (3 \sec x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{cosec}^2 x) \, dx.$

Temos,

$$\begin{aligned} \int (3 \sec x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{cosec}^2 x) \, dx &= 3 \int \sec x \operatorname{tg} x \, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx \\ &= 3 \sec x - \cotg x + c. \end{aligned}$$

(iii) $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec} x} \, dx.$

Neste caso, temos

$$\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec} x} \, dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \sec x \, dx = \sec x + c.$$

$$(iv) \int (\sqrt[3]{x^2} + 1/3x) dx.$$

Temos,

$$\begin{aligned} \int (\sqrt[3]{x^2} + 1/3x) dx &= \int \sqrt[3]{x^2} dx + \int 1/3x dx \\ &= \int x^{2/3} dx + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^{5/3}}{5/3} + \frac{1}{3} \ln |x| + c \\ &= \frac{3}{5} x^{5/3} + \frac{1}{3} \ln |x| + c. \end{aligned}$$

$$(v) \int \frac{x^4 + 3x^{-1/2} + 4}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

Temos,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 3x^{-1/2} + 4}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \left(\frac{x^4}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3x^{-1/2}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} \right) dx \\ &= \int (x^{11/3} + 3x^{-5/6} + 4x^{-1/3}) dx \\ &= \int x^{11/3} dx + 3 \int x^{-5/6} dx + 4 \int x^{-1/3} dx \\ &= \frac{x^{14/3}}{14/3} + 3 \cdot \frac{x^{1/6}}{1/6} + 4 \cdot \frac{x^{2/3}}{2/3} + c \\ &= \frac{3}{14} x^{14/3} + 18x^{1/6} + 6x^{2/3} + c. \end{aligned}$$

$$(vi) \int \left(2 \cos x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx .$$

Temos,

$$\begin{aligned} \int \left(2 \cos x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int 2 \cos x \, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= 2 \int \cos x \, dx + \int x^{-1/2} \, dx \\ &= 2 \operatorname{sen} x + \frac{x^{1/2}}{1/2} + c \\ &= 2 \operatorname{sen} x + 2\sqrt{x} + c . \end{aligned}$$

$$(vii) \int \left(2 e^x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{2}{x^7} \right) dx .$$

Temos,

$$\begin{aligned} \int \left(2 e^x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{2}{x^7} \right) dx &= \int 2 e^x \, dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \, dx + \int \frac{2 \, dx}{x^7} \\ &= 2 \int e^x \, dx - \int \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx + 2 \int x^{-7} \, dx \\ &= 2e^x - \sec x + 2 \cdot \frac{x^{-6}}{-6} + c \\ &= 2e^x - \sec x - \frac{1}{3x^6} + c . \end{aligned}$$

6.2 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 10, calcular a integral e, em seguida, derivar as respostas para conferir os resultados.

$$1. \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}$$

$$2. \int \left(9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^3}} \right) dt$$

$$3. \int (ax^4 + bx^3 + 3c) dx$$

$$4. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{3} \right) dx$$

$$5. \int (2x^2 - 3)^2 dx$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$7. \int \left(\sqrt{2y} - \frac{1}{\sqrt{2y}} \right) dy$$

$$8. \int \frac{\sqrt{2} dt}{3t^2 + 3}$$

$$9. \int x^3 \sqrt{x} dx$$

$$10. \int \frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4} dx$$

Nos exercícios de 11 a 30, calcular as integrais indefinidas.

$$11. \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$$

$$12. \int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx$$

$$13. \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$14. \int \sqrt{\frac{9}{1 - x^2}} dx$$

$$15. \int \sqrt{\frac{4}{x^4 - x^2}} dx$$

$$16. \int \frac{8x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 2x + 1}{x^2} dx$$

$$17. \int \left(\frac{e^t}{2} + \sqrt{t} + \frac{1}{t} \right) dt$$

$$18. \int \cos \theta \cdot \operatorname{tg} \theta d\theta \quad \text{sen } \theta + C //$$

$$19. \int (e^x - e^{-x}) dx$$

$$20. \int (t + \sqrt{t} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[4]{t} + \sqrt[5]{t}) dt$$

21. $\int \frac{x^{-1/3} - 5}{x} dx$

22. $\int (2^t - \sqrt{2} e^t + \cosh t) dt$

23. $\int \sec^2 x (\cos^3 x + 1) dx$

24. $\int \frac{dx}{(ax)^2 + a^2}$, $a \neq 0$, constante.

25. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$

26. $\int \sqrt[3]{8(t-2)^6(t+\frac{1}{2})^3} dt$

27. $\int (e^t - \sqrt[4]{16t} + \frac{3}{t^3}) dt$

28. $\int \frac{\ln x}{x \ln x^2} dx$

29. $\int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{cosec}^2 x dx$

30. $\int (x-1)^2(x+1)^2 dx$

31. $\int \frac{dt}{(n-1/2)t^n}$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

32. Encontrar uma primitiva F , da função $f(x) = x^{2/3} + x$, que satisfaça $F(1) = 1$.

33. Determinar a função $f(x)$ tal que

$$\int f(x) dx = x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + c.$$

34. Encontrar uma primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ que se anule no ponto $x = 2$.

35. Sabendo que a função $f(x)$ satisfaz a igualdade

$$\int f(x) dx = \sin x - x \cos x - \frac{1}{2} x^2 + c, \text{ determinar } f(\pi/4).$$

36. Encontrar uma função f tal que $f'(x) + \sin x = 0$ e $f(0) = 2$.

6.3 MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO OU MUDANÇA DE VARIÁVEL PARA INTEGRAÇÃO

Algumas vezes, é possível determinar a integral de uma dada função, aplicando uma das fórmulas básicas depois de ser feita uma mudança de variável. Este processo é análogo à regra da cadeia para derivação e pode ser justificado como segue.

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funções tais que $F'(x) = f(x)$. Suponhamos que g seja outra função derivável tal que a imagem de g esteja contida no domínio de F . Podemos considerar a função composta $F \circ g$.

Pela regra da cadeia, temos

$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$, isto é, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Temos, então

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c. \quad (I)$$

Fazendo $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$ e substituindo em (I), vem

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c.$$

Na prática, devemos então definir uma função $u = g(x)$ conveniente, de tal forma que a integral obtida seja mais simples.

6.3.1 Exemplos. Calcular as integrais:

$$(i) \int \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

Fazemos $u = 1 + x^2$. Então, $du = 2x dx$. Temos,

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|1+x^2| + C$$

Handwritten notes:
 $\frac{du}{dx} = 2x$
 $du = 2x dx$

$$= \ln |u| + c$$

$$= \ln(1+x^2) + c.$$

$$(ii) \int \sin^2 x \cos x \, dx.$$

Se fizermos $u = \sin x$, então $du = \cos x \, dx$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos x \, dx &= \int u^2 \, du \\ &= \frac{u^3}{3} + c \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} + c. \end{aligned}$$

$$(iii) \int \sin(x+7) \, dx.$$

Fazendo $u = x + 7$, temos $du = dx$. Então,

$$\begin{aligned} \int \sin(x+7) \, dx &= \int \sin u \, du \\ &= -\cos u + c \\ &= -\cos(x+7) + c. \end{aligned}$$

$$(iv) \int \operatorname{tg} x \, dx.$$

$$\text{Podemos escrever } \int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx.$$

Fazendo $u = \cos x$, temos $du = -\sin x \, dx$ e então $\sin x \, dx = -du$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x \, dx &= \int \frac{-du}{u} = - \int \frac{du}{u} = - \ln |u| + c \\ &= - \ln |\cos x| + c.\end{aligned}$$

(v) $\int \frac{dx}{(3x - 5)^8}.$

Fazendo $u = 3x - 5$, temos $du = 3 \, dx$ ou $dx = 1/3 \, du$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(3x - 5)^8} &= \int \frac{1/3 \, du}{u^8} = \frac{1}{3} \int u^{-8} \, du = \frac{1}{3} \frac{u^{-7}}{-7} + c \\ &= \frac{-1}{21 (3x - 5)^7} + c.\end{aligned}$$

(vi) $\int (x + \sec^2 3x) \, dx.$

Podemos escrever,

$$\begin{aligned}\int (x + \sec^2 3x) \, dx &= \int x \, dx + \int \sec^2 3x \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \int \sec^2 3x \, dx.\end{aligned} \tag{I}$$

Para resolver $\int \sec^2 3x \, dx$ fazemos a substituição $u = 3x$. Temos, então $du = 3dx$ ou $dx = 1/3 \, du$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \sec^2 3x \, dx &= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{3} \, du = \frac{1}{3} \int \sec^2 u \, du \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{tg} u + c = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + c.\end{aligned}$$

Substituindo em (I), obtemos

$$\int (x + \sec^2 3x) \, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + c.$$

$$\text{X(vii)} \int \frac{du}{u^2 + a^2}, \quad (a \neq 0).$$

Como $a \neq 0$, podemos escrever a integral dada na forma

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \int \frac{\frac{du}{a^2}}{\frac{u^2 + a^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{\frac{u^2}{a^2} + 1}.$$

Fazemos a substituição $v = u/a$. Temos então, $dv = 1/a \, du$ ou $du = a \, dv$.
Portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{u^2 + a^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a \, dv}{v^2 + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{dv}{v^2 + 1} \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} v + c \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{a} + c.\end{aligned}$$

$$(viii) \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}.$$

Para resolver esta integral devemos completar o quadrado do denominador. Escrevemos,

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 13 &= x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 13 \\ &= (x + 3)^2 + 4. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 4}.$$

Fazendo $u = x + 3$, $du = dx$ e usando o exemplo anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} &= \int \frac{du}{u^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{2} + c \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 3}{2} + c. \end{aligned}$$

$$(ix) \int \frac{\sqrt{x - 2}}{x + 1} dx.$$

Neste caso, fazemos a substituição $u = \sqrt{x - 2}$. Então, $u^2 = x - 2$ ou $x = u^2 + 2$, ou ainda, $dx = 2u \, du$.

Substituindo na integral, vem

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x - 2}}{x + 1} dx &= \int \frac{u}{u^2 + 2 + 1} \cdot 2u \, du \\ &= \int \frac{2u^2 \, du}{u^2 + 3} = 2 \int \frac{u^2 \, du}{u^2 + 3}. \end{aligned}$$

Efetuada a divisão dos polinômios, temos

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1} dx &= 2 \int \left(1 + \frac{-3}{u^2+3} \right) du \\
 &= 2 \left[\int du - 3 \int \frac{du}{u^2+3} \right] \\
 &= 2u - 6 \int \frac{du}{u^2+3} \\
 &= 2u - \frac{6}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{\sqrt{3}} + c \\
 &= 2\sqrt{x-2} - \frac{6}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3}} + c.
 \end{aligned}$$

$$(x) \int \sqrt{t^2 - 2t^4} dt.$$

Escrevemos,

$$\int \sqrt{t^2 - 2t^4} dt = \int \sqrt{t^2 (1 - 2t^2)} dt = \int t \sqrt{1 - 2t^2} dt.$$

Fazendo $u = 1 - 2t^2$, temos $du = -4t dt$ e então $t dt = \frac{-du}{4}$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{t^2 - 2t^4} dt &= \int u^{1/2} \cdot \frac{-du}{4} = -\frac{1}{4} \int u^{1/2} du \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{u^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{1}{6} (1 - 2t^2)^{3/2} + c.
 \end{aligned}$$

6.4 EXERCÍCIOS

Calcular as integrais seguintes usando o método da substituição.

1. $\int (2x^2 + 2x - 3)^{10} (2x + 1) dx$

2. $\int (x^3 - 2)^{1/7} x^2 dx$

3. $\int \frac{x dx}{\sqrt[5]{x^2 - 1}}$

4. $\int 5x \sqrt{4 - 3x^2} dx$

5. $\int \sqrt{x^2 + 2x^4} dx$

6. $\int (e^{2t} + 2)^{1/3} e^{2t} dt$

7. $\int \frac{e^t dt}{e^t + 4}$

8. $\int \frac{e^{1/x} + 2}{x^2} dx$

9. $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x dx$

10. $\int \sin^4 x \cos x dx$

11. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^5 x} dx$

12. $\int \frac{2 \operatorname{sen} x - 5 \cos x}{\cos x} dx$

13. $\int e^x \cos 2 e^x dx$

14. $\int \frac{x}{2} \cos x^2 dx$

15. $\int \operatorname{sen} (5\theta - \pi) d\theta$

16. $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} y}{2 \sqrt{1 - y^2}} dy$

17. $\int \frac{2 \sec^2 \theta}{a + b \operatorname{tg} \theta} d\theta$

18. $\int \frac{dx}{16 + x^2}$

19. $\int \frac{dy}{y^2 - 4y + 4}$

20. $\int \sqrt[3]{\operatorname{sen} \theta} \cos \theta d\theta$

$$21. \int \frac{\ln x^2}{x} dx \quad (\ln x)^2 = e$$

$$22. \int (e^{ax} + e^{-ax})^2 dx$$

$$23. \int \sqrt{3t^4 + t^2} dt$$

$$24. \int \frac{4 dx}{4x^2 + 20x + 34}$$

$$25. \int \frac{3 dx}{x^2 - 4x + 1}$$

$$26. \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 16}$$

$$27. \int \frac{\sqrt{x+3}}{x-1} dx$$

$$28. \int \frac{3 dx}{x \ln^2 3x}$$

$$29. \int (\sin 4x + \cos 2\pi) dx$$

$$30. \int 2^{x^2+1} x dx$$

$$31. \int x e^{3x^2} dx$$

$$32. \int \frac{dt}{(2+t)^2}$$

$$33. \int \frac{dt}{t \ln t}$$

$$34. \int 8x \sqrt{1-2x^2} dx$$

$$35. \int (e^{2x} + 2)^5 e^{2x} dx$$

$$36. \int \frac{4t dt}{\sqrt{4t^2 + 5}}$$

$$37. \int \frac{\cos x}{3 - \sin x} dx$$

$$38. \int \frac{dv}{\sqrt{v} (1 + \sqrt{v})^5}$$

$$39. \int x^2 \sqrt{1+x} dx$$

$$40. \int x^4 e^{-x^5} dx$$

$$41. \int t \cos t^2 dt$$

$$42. \int 8x^2 \sqrt{6x^3 + 5} dx$$

$$43. \int \sin^{1/2} 2\theta \cos 2\theta d\theta$$

$$44. \int \sec^2 (5x + 3) dx$$

$$45. \int \frac{\operatorname{sen} \theta \, d\theta}{(5 - \cos \theta)^3}$$

$$46. \int \operatorname{cotg} u \, du$$

$$47. \int (1 + e^{-at})^{3/2} e^{-at} \, dt, \quad a > 0$$

$$48. \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$49. \int t \sqrt{t-4} \, dt$$

$$50. \int x^2 (\operatorname{sen} 2x^3 + 4x) \, dx$$

6.5 MÉTODO DE INTEGRAÇÃO POR PARTES

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis no intervalo I . Temos,

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

ou,

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - g(x) \cdot f'(x).$$

Integrando ambos os lados dessa equação, obtemos

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = \int [f(x) \cdot g(x)]' \, dx - \int g(x) \cdot f'(x) \, dx,$$

ou ainda,

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \, dx. \quad (I)$$

Observamos que na expressão (I) deixamos de escrever a constante de integração, já que no decorrer do desenvolvimento aparecerão outras. Todas elas podem ser representadas por uma única constante c , que introduziremos no final do processo.

Na prática, costumamos fazer

$$u = f(x) \quad \Rightarrow \quad du = f'(x) \, dx$$

e

$$v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x) dx.$$

Substituindo em (I), vem

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

que é a fórmula de integração por partes.

6.5.1 Exemplos

(i) Calcular $\int x e^{-2x} dx$.

Antes de resolver esta integral, queremos salientar que a escolha de u e dv são feitas convenientemente.

Neste exemplo, escolhemos $u = x$ e $dv = e^{-2x} dx$. Temos,

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = \int e^{-2x} dx = \frac{-1}{2} e^{-2x}.$$

Aplicamos então a fórmula

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

e obtemos

$$\int x e^{-2x} dx = x \cdot \left(\frac{-1}{2} \right) e^{-2x} - \int \frac{-1}{2} e^{-2x} dx.$$

Calculando a última integral, vem

$$\int x \cdot e^{-2x} dx = \frac{-1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + c.$$

Observamos que se tivéssemos escolhido $u = e^{-2x}$ e $dv = x dx$, o processo nos levaria a uma integral mais complicada.

(ii) Calcular $\int \ln x dx$.

Seja

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = 1/x dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dx = x.$$

Integrando por partes, vem

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= (\ln x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + c. \end{aligned}$$

(iii) Calcular $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^2 &= 2x \Rightarrow U = -(\cos x) \\ x^2 &= U \Rightarrow dU = 2x dx \end{aligned}$$

Neste exemplo, vamos aplicar o método duas vezes. Seja

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x.$$

Integrando por partes, vem

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \operatorname{sen} x \, dx &= x^2 (-\cos x) - \int (-\cos x) 2x \, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx.\end{aligned}$$

A integral $\int x \cos x \, dx$ deve ser resolvida também por partes. Fazemos,

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x.$$

Temos,

$$\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx &= -x^2 \cos x + 2 [x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx] \\ &= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + c.\end{aligned}$$

(iv) Calcular $\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$.

Este exemplo ilustra um artifício para o cálculo, que envolve também duas aplicações da fórmula de integração por partes.

Seja

$$u = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad du = 2 e^{2x} \, dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x.$$

Aplicando a integração por partes, vem

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx &= e^{2x} (-\cos x) - \int (-\cos x) 2e^{2x} \, dx \\ &= -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx.\end{aligned}$$

Resolvendo $\int e^{2x} \cos x \, dx$ por partes, fazendo $u = e^{2x}$ e $dv = \cos x \, dx$, encontramos

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx &= -e^{2x} \cos x + 2 [e^{2x} \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot 2 e^{2x} \, dx] \\ &= -e^{2x} \cos x + 2 e^{2x} \operatorname{sen} x - 4 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx.\end{aligned}\quad (2)$$

Observamos que a integral do 2º membro é exatamente a integral que queremos calcular. Somando $4 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$ a ambos os lados de (2), obtemos

$$5 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx = -e^{2x} \cos x + 2 e^{2x} \operatorname{sen} x.$$

Logo,

$$\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{5} (2 e^{2x} \operatorname{sen} x - e^{2x} \cos x) + c.$$

(v) Calcular $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$.

Neste caso, fazemos

$$u = \operatorname{sen}^2 x \quad \Rightarrow \quad du = 2 \operatorname{sen} x \cos x \, dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x.$$

note: $\cos x = v \Rightarrow dv = -\operatorname{sen} x \, dx$

$$-\int u^2 \, dv = -\frac{v^3}{3} = -\frac{\cos^3 x}{3}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{sen}^3 x \, dx &= \operatorname{sen}^2 x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x \, dx \\
 &= -\operatorname{sen}^2 x \cos x + 2 \int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx \\
 &= -\operatorname{sen}^2 x \cos x - 2 \frac{\cos^3 x}{3} + c.
 \end{aligned}$$

6.6 EXERCÍCIOS

Resolver as seguintes integrais usando a técnica de integração por partes.

1. $\int x \operatorname{sen} 5x \, dx$
2. $\int \ln(1 - x) \, dx$
3. $\int t e^{4t} \, dt$
4. $\int (x + 1) \cos 2x \, dx$
5. $\int x \ln 3x \, dx$
6. $\int \cos^3 x \, dx$
7. $\int e^x \cos \frac{x}{2} \, dx$
8. $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$
9. $\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx$
10. $\int x^2 \cos ax \, dx$
11. $\int x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$
12. $\int \operatorname{arc} \cotg 2x \, dx$

13. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx$

14. $\int \frac{\ln(ax + b)}{\sqrt{ax + b}} \, dx$

15. $\int x^3 \sqrt{1 - x^2} \, dx$

16. $\int \ln^3 2x \, dx$

17. $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} ax \, dx$

18. $\int x^3 \operatorname{sen} 4x \, dx$

19. $\int (x - 1) e^{-x} \, dx$

20. $\int x^2 \ln x \, dx$

21. $\int x^2 e^x \, dx$

22. $\int \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, dx$

23. $\int (x - 1) \sec^2 x \, dx$

24. $\int e^{3x} \cos 4x \, dx$

25. $\int x^n \ln x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}$

26. $\int \ln(x^2 + 1) \, dx$

27. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \, dx$

28. $\int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$

29. $\int x^5 e^{x^2} \, dx$

30. $\int x \cos^2 x \, dx$

31. $\int (x + 3)^2 e^x \, dx$

32. $\int x \sqrt{x + 1} \, dx$

33. $\int \cos(\ln x) \, dx$

34. $\int \operatorname{arc} \cos x \, dx$

35. $\int \sec^3 x \, dx$

36. $\int \frac{1}{x^3} e^{1/x} \, dx.$

6.7 ÁREA

Desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocupam com o problema de determinar a área de uma figura plana. O procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas.

Como exemplo, podemos citar o círculo. Para definir sua área, consideramos um polígono regular inscrito de n lados, que denotamos por P_n (Figura 6.1(a)).

Seja A_n a área do polígono P_n . Então, $A_n = n \cdot A_{T_n}$, onde A_{T_n} é a área do triângulo de base l_n e altura h_n (Figura 6.1(b)).

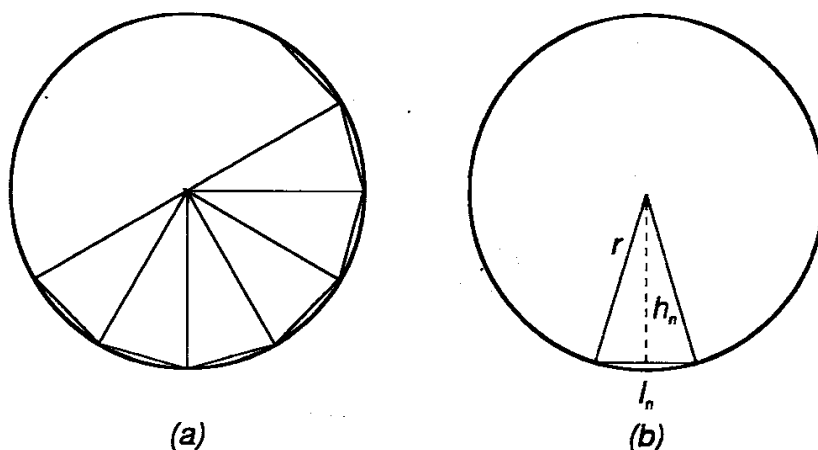


Figura 6-1

Como $A_{T_n} = \frac{l_n \cdot h_n}{2}$ e o perímetro do polígono P_n é dado por $p_n = nl_n$, vem

$$A_n = n \cdot \frac{l_n \cdot h_n}{2} = \frac{p_n h_n}{2}.$$

Fazendo n crescer cada vez mais, isto é, $n \rightarrow +\infty$, o polígono P_n torna-se uma aproximação do círculo. O perímetro p_n aproxima-se do comprimento do círculo $2\pi r$ e a altura h_n aproxima-se do raio r .

Temos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2, \text{ que é a área do círculo.}$$

Para definir a área de uma figura plana qualquer, procedemos de forma análoga. Aproximamos a figura por polígonos cujas áreas possam ser calculadas pelos métodos da geometria elementar.

Consideremos agora o problema de definir a área de uma região plana S , delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa f , pelo eixo dos x e por duas retas $x = a$ e $x = b$ (ver Figura 6.2).

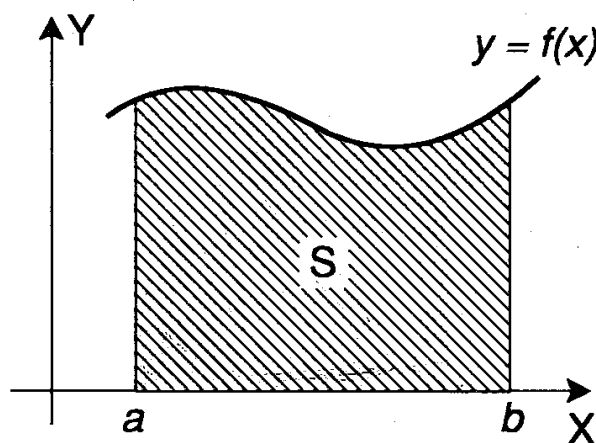


Figura 6-2

Para isso, fazemos uma partição do intervalo $[a, b]$, isto é, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, escolhendo os pontos

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Em cada um destes intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto qualquer c_i .

Para cada i , $i = 1, \dots, n$, construímos um retângulo de base Δx_i e altura $f(c_i)$ (ver Figura 6.3).

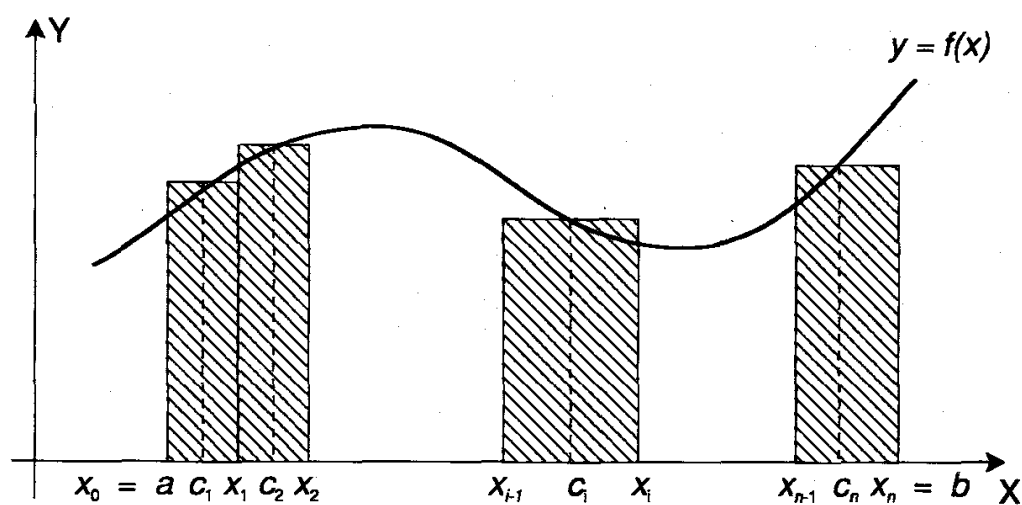


Figura 6-3

A Figura 6.4 ilustra esses retângulos nos casos $n = 4$ e $n = 8$.

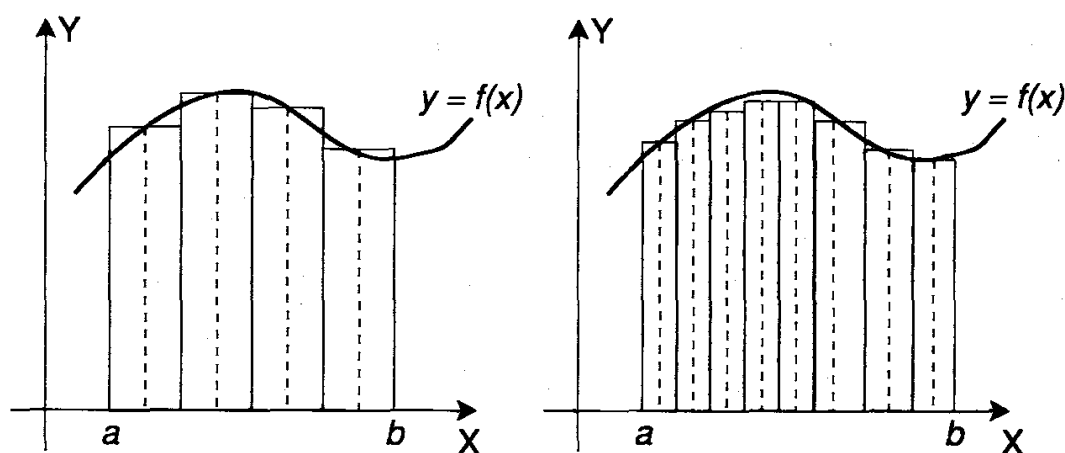


Figura 6-4

A soma das áreas dos n retângulos, que representamos por S_n , é dada por:

$$\begin{aligned} S_n &= f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i. \end{aligned}$$

Esta soma é chamada *soma de Riemann* da função $f(x)$.

Podemos observar que a medida que n cresce muito e cada Δx_i , $i = 1, \dots, n$, torna-se muito pequeno, a soma das áreas retangulares aproxima-se do que intuitivamente entendemos como a área de S .

6.7.1 Definição. Seja $y = f(x)$ uma função contínua, não negativa em $[a, b]$. A área sob a curva $y = f(x)$, de a até b , é definida por

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

onde para cada $i = 1, \dots, n$, c_i é um ponto arbitrário do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

É possível provar que o limite desta definição existe e é um número não negativo.

6.8 INTEGRAL DEFINIDA

A integral definida está associada ao limite da definição 6.7.1. Ela nasceu com a formalização matemática dos problemas de áreas. De acordo com a terminologia introduzida na seção anterior, temos a seguinte definição.

6.8.1 Definição. Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a, b]$. A *integral definida* de f de a até b , denotada por

$$\int_a^b f(x) dx,$$

é dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

desde que o limite do 2º membro exista.

Se $\int_a^b f(x) dx$ existe, dizemos que f é *integrável* em $[a, b]$.

Na notação $\int_a^b f(x) dx$, os números a e b são chamados *limites de integração* (a = limite inferior e b = limite superior).

Se f é integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(s) ds ,$$

isto é, podemos usar qualquer símbolo para representar a variável independente.

Quando a função f é contínua e não negativa em $[a, b]$, a definição da integral definida coincide com a definição da área (Definição 6.7.1). Portanto, neste caso, a integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

é a área da região sob o gráfico de f de a até b .

Sempre que utilizamos um intervalo $[a, b]$, supomos $a < b$. Assim, em nossa definição não levamos em conta os casos em que o limite inferior é maior que o limite superior.

6.8.2 Definição

(a) Se $a > b$, então

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx ,$$

se a integral à direita existir.

(b) Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então

$$\int_a^a f(x) dx = 0 .$$

É muito importante saber quais funções são integráveis. Uma ampla classe de funções usadas no Cálculo é a classe das funções contínuas. O teorema abaixo, cuja demonstração será omitida, garante que elas são integráveis.

6.8.3 Teorema. Se f é contínua sobre $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

Propriedades da Integral Definida

6.8.4 Proposição. Se f é integrável em $[a, b]$ e k é um número real arbitrário, então kf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

Prova. Como f é integrável em $[a, b]$, existe o

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

e portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_a^b kf(x) dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(c_i) \Delta x_i \\ &= k \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= k \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

6.8.5 Proposição. Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Prova. Se f é integrável em $[a, b]$, existe o limite

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \text{ que é a } \int_a^b f(x) dx.$$

Se g é integrável em $[a, b]$, existe o limite

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i) \Delta x_i, \text{ que é a } \int_a^b g(x) dx.$$

Escrevemos então,

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(c_i) + g(c_i)) \Delta x_i \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Observamos que esta proposição pode ser estendida para um número finito de funções, ou seja,

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx.$$

Vale também para o caso de termos diferença de funções, isto é,

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

6.8.6 Proposição. Se $a < c < b$ e f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Prova. Consideremos uma partição no intervalo $[a, b]$ de tal forma que o ponto c ($a < c < b$) seja um ponto da partição, isto é, $c = x_i$, para algum i .

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & | & | & | & | & | \\ a & x_1 & x_2 & \dots & c & \dots & b \\ \text{"} & & & & \text{"} & & \text{"} \\ x_0 & & & & x_i & & x_n \end{array}$$

Podemos dizer que o intervalo $[a, c]$ ficou dividido em r subintervalos e $[c, b]$ em $(n - r)$ subintervalos. Escrevemos as respectivas somas de Riemann

$$\sum_{i=1}^r f(c_i) \Delta x_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=r+1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Então,

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^r f(c_i) \Delta x_i + \sum_{i=r+1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Usando a definição de integral definida, vem

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) \, dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\
 &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^r f(c_i) \Delta x_i + \sum_{i=r+1}^n f(c_i) \Delta x_i \right) \\
 &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r f(c_i) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=r+1}^n f(c_i) \Delta x_i \\
 &= \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx .
 \end{aligned}$$

Esta propriedade pode ser generalizada: “Se f é integrável em um intervalo fechado e se a, b, c são pontos quaisquer desse intervalo, então

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx .”$$

A Figura 6.5 ilustra a proposição 6.8.6, para o caso em que $f(x) > 0$. A área do trapézóide $ABCD$ adicionada à área do trapézóide $BEFC$ é igual à área do trapézóide $AEFD$.

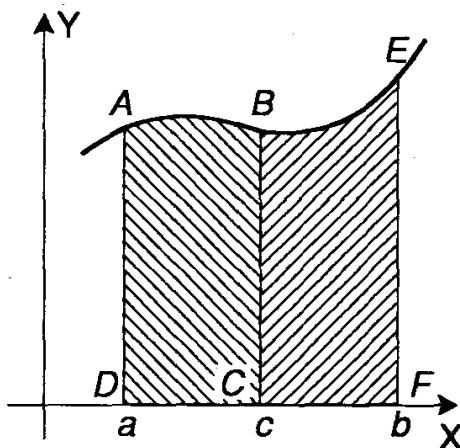


Figura 6-5

6.8.7 Proposição. Se f é integrável e se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0.$$

Prova. Como $f(c_i) \geq 0$ para todo c_i em $[x_{i-1}, x_i]$, segue que

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \geq 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \geq 0$$

e dessa forma $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$.

6.8.8 Proposição. Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Prova. Fazemos

$$I = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx.$$

Devemos mostrar que $I \geq 0$. Usando a proposição 6.8.5, podemos escrever

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx. \end{aligned}$$

Como $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ temos que $f(x) - g(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$.

Usando a proposição 6.8.7, concluímos que $I \geq 0$.

6.8.9 Proposição. Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Prova. Se f é contínua em $[a, b]$, então

- a) f é integrável em $[a, b]$;
- b) $|f|$ é contínua em $[a, b]$;
- c) $|f|$ também é integrável em $[a, b]$.

Sabemos que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Usando a proposição 6.8.8, escrevemos

$$\int_a^b -|f(x)| \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Pela proposição 6.8.4, vem

$$-\int_a^b |f(x)| \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Usando a propriedade 1.3.3(i), segue que

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Na proposição a seguir, cuja demonstração será omitida, apresentamos o Teorema do Valor Médio para integrais.

6.8.10 Proposição. Se f é uma função contínua em $[a, b]$, existe um ponto c entre a e b tal que

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a) f(c).$$

Se $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, podemos visualizar geometricamente esta proposição. Ela nos diz que a área abaixo da curva $y = f(x)$, entre a e b , é igual à área de um retângulo de base $b - a$ e altura $f(c)$ (ver Figura 6.6).

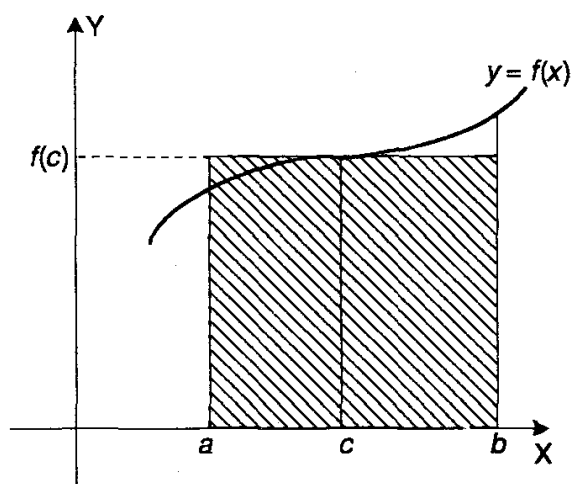


Figura 6-6

6.9 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O teorema fundamental do Cálculo nos permite relacionar as operações de derivação e integração. Ele nos diz que, conhecendo uma primitiva de uma função contínua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, podemos calcular a sua integral definida $\int_a^b f(t) dt$. Com isso, obtemos uma maneira rápida e simples de resolver inúmeros problemas práticos que envolvem o cálculo da integral definida.

Para apresentar formalmente o teorema, inicialmente vamos definir uma importante função auxiliar, como segue.

Tomamos a integral definida

$$\int_a^b f(t) dt ,$$

fixamos o limite inferior a e fazemos variar o limite superior. Então, o valor da integral dependerá desse limite superior variável, que indicaremos por x . Fazendo x variar no intervalo $[a, b]$, obtemos uma função $G(x)$, dada por

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt .$$

Intuitivamente, podemos compreender o significado de $G(x)$, através de uma análise geométrica. Conforme vimos na seção 6.8, se $f(t) \geq 0, \forall t \in [a, b]$, a integral

$$\int_a^b f(t) dt$$

representa a área abaixo do gráfico de f entre a e b (ver Figura 6.7(a)).

Da mesma forma,

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

nos dá a área abaixo do gráfico de f entre a e x (ver Figura 6.7(b)). Podemos observar que $G(a) = 0$ e $G(b)$ nos dá a área da Figura 6.7(a).

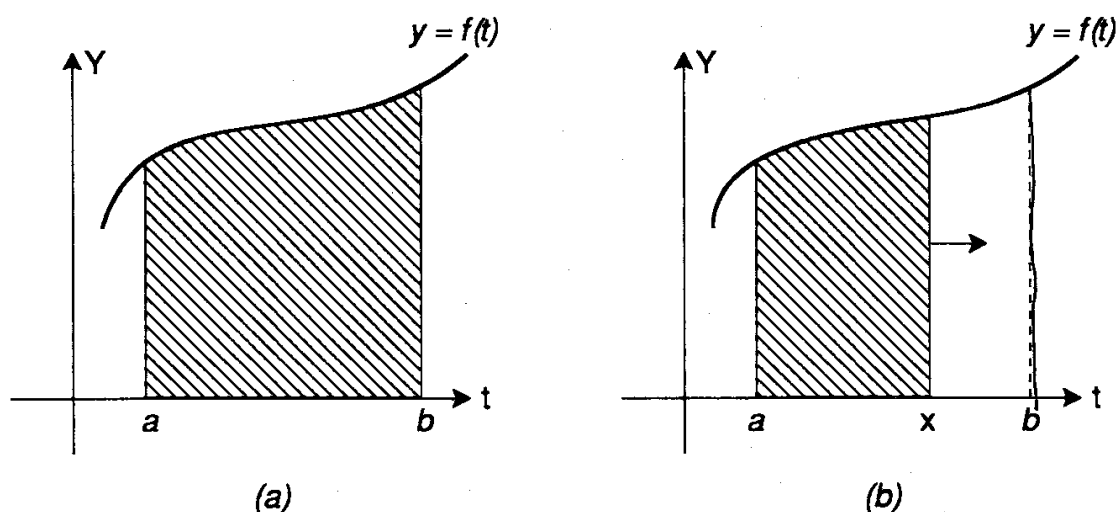


Figura 6-7

Vamos agora, determinar a derivada da função $G(x)$. Temos a seguinte proposição.

6.9.1 Proposição. Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$. Então a função $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt ,$$

tem derivada em todos os pontos $x \in [a, b]$ que é dada por

$$G'(x) = f(x), \text{ ou seja,}$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) .$$

Prova. Vamos determinar a derivada $G'(x)$, usando a definição

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} .$$

Temos,

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt ;$$

$$G(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt ;$$

$$G(x + \Delta x) - G(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt .$$

Usando a proposição 6.8.6, podemos escrever

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

e então,

$$\begin{aligned} G(x + \Delta x) - G(x) &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt . \end{aligned}$$

Como f é contínua em $[x, x + \Delta x]$, pela proposição 6.8.10, existe um ponto $\bar{x}$ entre x e $x + \Delta x$ tal que

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt &= (x + \Delta x - x) f(\bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) \Delta x . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}) \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}).\end{aligned}$$

Como $\bar{x}$ está entre x e $x + \Delta x$, segue que $\bar{x} \rightarrow x$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Como f é contínua, temos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} f(\bar{x}) = f(x).$$

Logo,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = f(x), \text{ ou seja,}$$

$$G'(x) = f(x).$$

Observamos que quando x é um dos extremos do intervalo $[a, b]$, os limites usados na demonstração serão limites laterais. $G'(a)$ será uma derivada à direita e $G'(b)$ uma derivada à esquerda.

Uma importante consequência desta proposição é que toda função $f(x)$ contínua num intervalo $[a, b]$ possui uma primitiva que é dada por

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Outro resultado importante obtém-se da análise geométrica. Voltando à Figura 6.7, podemos dizer que a taxa de variação da área da Figura 6.7(b) com relação a t é igual ao lado direito da região.

Podemos agora, estabelecer formalmente o Teorema Fundamental do Cálculo.

6.9.2 Teorema. Se f é contínua sobre $[a, b]$ e se F é uma primitiva de f neste intervalo, então

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) .$$

Prova. Como f é contínua sobre $[a, b]$, pela proposição 6.9.1, segue que

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma primitiva de f nesse intervalo.

Seja $F(x)$ uma primitiva qualquer de f sobre $[a, b]$. Pela proposição 6.1.5, temos que

$$F(x) = G(x) + C, \forall x \in [a, b].$$

Como $G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ e $G(b) = \int_a^b f(t) dt$, calculando a diferença $F(b) - F(a)$, obtemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + c) - (G(a) + c) \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t) dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t) dt . \end{aligned}$$

Observamos que a diferença $F(b) - F(a)$ usualmente é denotada por $F(t) \Big|_a^b$. Também escrevemos,

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) .$$

6.9.3 Exemplos. Calcular as integrais definidas:

$$(i) \int_1^3 x \, dx.$$

Sabemos que $F(x) = \frac{1}{2} x^2$ é uma primitiva de $f(x) = x$. Portanto,

$$\int_1^3 x \, dx = \left. \frac{1}{2} x^2 \right|_1^3 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$

$$(ii) \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt.$$

A função $F(t) = \sin t$ é uma primitiva de $f(t) = \cos t$. Logo,

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \left. \sin t \right|_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

$$(iii) \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 1) \, dx.$$

Usando as propriedades da integral definida e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 1) \, dx &= \int_0^1 x^3 \, dx - 4 \int_0^1 x^2 \, dx + \int_0^1 dx \\ &= \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 - 4 \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left. x \right|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{4} - 0 \right) - \left(\frac{4}{3} - 0 \right) + (1 - 0) \\ &= -1/12. \end{aligned}$$

$$(iv) \int_0^1 \frac{x \, dx}{x^2 + 1}.$$

Vamos primeiro, encontrar a integral indefinida

$$I = \int \frac{x \, dx}{x^2 + 1}.$$

Para isso, fazemos a substituição $u = x^2 + 1$. Temos então, $du = 2x \, dx$ ou $x \, dx = \frac{du}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du/2}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + c. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x \, dx}{x^2 + 1} &= \left. \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Observamos que, para resolver esta integral, também podemos fazer a mudança de variáveis na integral definida, desde que façamos a correspondente mudança nos limites de integração.

Ao efetuarmos a mudança de variável fazendo $u = x^2 + 1$, vemos que:

$$x = 0 \Rightarrow u = 1;$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2.$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x \, dx}{x^2 + 1} &= \int_1^2 \frac{du/2}{u} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2.\end{aligned}$$

$$(v) \quad \int_1^2 x e^{-x^2+1} \, dx.$$

Calculamos primeiro a integral indefinida $I = \int x e^{-x^2+1} \, dx$.

Fazendo $u = -x^2 + 1$, temos $du = -2x \, dx$ ou $x \, dx = -\frac{du}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned}I &= \int e^u \cdot \frac{-du}{2} = \frac{-1}{2} \int e^u \, du = \frac{-1}{2} e^u + c \\ &= \frac{-1}{2} e^{-x^2+1} + c.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_1^2 x e^{-x^2+1} \, dx = \frac{-1}{2} e^{-x^2+1} \Big|_1^2 = \frac{-1}{2} e^{-4+1} + \frac{1}{2} e^{-1+1} = \frac{-1}{2} e^{-3} + \frac{1}{2}.$$

6.10 EXERCÍCIOS

1. Calculando as integrais $I_1 = \int_1^2 x^2 \, dx$, $I_2 = \int_1^2 x \, dx$ e $I_3 = \int_1^2 dx$,

obtemos $I_1 = 7/3$, $I_2 = 3/2$ e $I_3 = 1$. Usando estes resultados, encontrar o valor de:

$$a) \int_1^2 (6x - 1) dx$$

$$b) \int_1^2 2x(x + 1) dx$$

$$c) \int_1^2 (x - 1)(x - 2) dx$$

$$d) \int_1^2 (3x + 2)^2 dx.$$

2. Sem calcular a integral, verificar as seguintes desigualdades:

$$a) \int_1^3 (3x^2 + 4) dx \geq \int_1^3 (2x^2 + 5) dx$$

$$b) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} \leq \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{4} \right) dx$$

$$c) \int_0^{\pi} \sin x dx \geq 0$$

$$d) \int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\cos x dx \geq 0.$$

3. Se $\int_0^1 \sqrt[5]{x^2} dx = \frac{5}{7}$, calcular $\int_1^0 \sqrt[5]{t^2} dt$. $-\frac{5}{7}$

4. Se $\int_0^{\pi/2} 9 \cos^2 t dt = \frac{9\pi}{4}$, calcular $\int_0^{\pi/2} -\cos^2 \theta d\theta$. $-\frac{9\pi}{4}$

5. Verificar se o resultado das seguintes integrais é positivo, negativo ou zero, sem calculá-las.

$$a) \int_0^{20} \frac{dx}{x+2}$$

$$b) \int_0^{2\pi} \sin t dt$$

$$c) \int_2^3 (2x + 1) dx$$

$$d) \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx.$$

6. Determinar as seguintes derivadas:

$$a) \frac{d}{dx} \int_2^x \sqrt{t+4} dt$$

$$b) \frac{d}{dy} \int_3^y \frac{2x}{x^2+9} dx$$

$$c) \frac{d}{d\theta} \int_{-1}^{\theta} t \sin t dt$$

7. Em cada um dos itens abaixo, calcular a integral da função no intervalo dado e esboçar seu gráfico.

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & -1 \leq x < 0 \\ 5 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} ; \text{ em } [-1, 1]$$

$$b) \quad f(x) = |\sin x| ; \text{ em } [-\pi, \pi]$$

$$c) \quad f(x) = 2|x| ; \text{ em } [-1, 1]$$

$$d) \quad f(x) = x - \frac{|x|}{2} ; \text{ em } [-1, 1]$$

$$e) \quad f(x) = \sin x + |\sin x| ; \text{ em } [-\pi, \pi]$$

$$f) \quad f(x) = \sin x + |\cos x| ; \text{ em } [-\pi, \pi].$$

8. Mostrar que:

$$a) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 5x \, dx = 0$$

$$b) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 3x \, dx = 0$$

$$c) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin 5x \cos 2x \, dx = 0$$

(Sugestão: Usar as fórmulas

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m - n) x - \cos (m + n) x] ,$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m + n) x + \sin (m - n) x] \text{ e}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m + n) x + \cos (m - n) x] ,$$

onde m e n são dois inteiros quaisquer.)

9. Se $f(x)$ é contínua e $f(x) \leq M$ para todo x em $[a, b]$, provar que

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq M (b - a) . \text{ Ilustrar graficamente, supondo } f(x) \geq 0 .$$

10. Se $f(x)$ é contínua e $m \leq f(x)$ para todo x em $[a, b]$, provar que

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx. \text{ Ilustrar graficamente, supondo } m > 0.$$

11. Aplicar os resultados dos exercícios 9 e 10, para encontrar o menor e o maior valor possível das integrais dadas a seguir:

a) $\int_3^4 5x \, dx$

b) $\int_{-2}^4 2x^2 \, dx$

c) $\int_1^4 |x - 1| \, dx$

d) $\int_{-1}^4 (x^4 - 8x^2 + 16) \, dx.$

Nos exercícios de 12 a 34, calcular as integrais.

12. $\int_{-1}^2 x(1 + x^3) \, dx$

13. $\int_{-3}^0 (x^2 - 4x + 7) \, dx$

14. $\int_1^2 \frac{dx}{x^6}$

15. $\int_4^9 2t \sqrt{t} \, dt$

16. $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{3y+1}}$

17. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin x \cos x \, dx$

18. $\int_{-1}^1 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^3+9}}$

19. $\int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx$

20. $\int_{-2}^5 |2t - 4| \, dt$

21. $\int_0^4 |x^2 - 3x + 2| \, dx$

22. $\int_0^4 \frac{4}{\sqrt{x^2+9}} \, dx;$

23. $\int_{-2}^0 \frac{v^2 \, dv}{(v^3 - 2)^2}$

24. $\int_1^5 \sqrt{2x-1} \, dx$

25. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}$

$$26. \int_0^3 x \sqrt{1+x} \, dx$$

$$27. \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$$

$$28. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^5} \, dx$$

$$29. \int_0^4 (2x + 1)^{-1/2} \, dx$$

$$30. \int_0^2 \sqrt{2x} (\sqrt{x} + \sqrt{5}) \, dx$$

$$31. \int_1^2 \frac{5x^3 + 7x^2 - 5x + 2}{x^2} \, dx$$

$$32. \int_1^2 x \ln x \, dx$$

$$33. \int_{-3}^{-2} \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 \, dt$$

$$34. \int_0^{-1} \frac{x^3 + 8}{x + 2} \, dx.$$

35. Seja f contínua em $[-a, a]$. Mostrar que:

a) Se f é par então $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$

b) Se f é ímpar então $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$

36. Usar o resultado do exercício 35 para calcular:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin x \, dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\pi} \, dx$

c) $\int_{-1}^1 (x^4 + x^2) \, dx.$

6.11 CÁLCULO DE ÁREAS

O cálculo de área de figuras planas pode ser feito por integração. Vejamos as situações que comumente ocorrem.

6.11.1 Caso I. Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f , pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x , onde f é contínua e $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ (ver Figura 6.8).

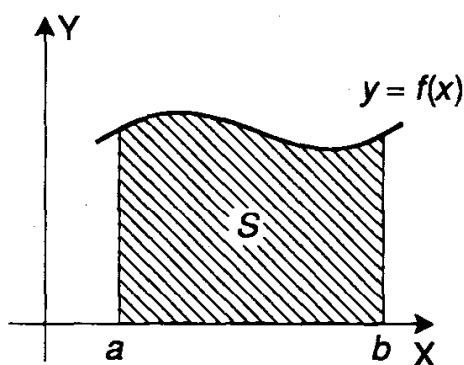


Figura 6-8

Neste caso, a área é dada por

$$A = \int_a^b f(x) \, dx .$$

6.11.2 Exemplo. Encontre a área limitada pela curva $y = 4 - x^2$ e o eixo dos x .

A curva $y = 4 - x^2$ intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissa -2 e 2 (ver Figura 6.9).

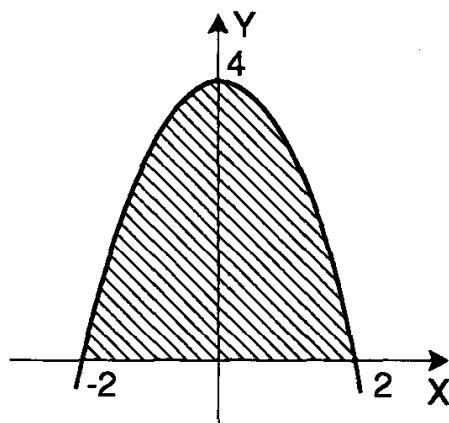


Figura 6-9

No intervalo $[-2, 2]$, $y = 4 - x^2 \geq 0$. Assim, a área procurada é a área sob o gráfico de $y = 4 - x^2$ de -2 até 2 . Temos,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 \\ &= \left[(8 - 8/3) - \left(-8 - \frac{(-2)^3}{3} \right) \right] = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, $A = 32/3$ u · a ($32/3$ unidades de área).

6.11.3 Caso II. Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f , pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x , onde f é contínua e $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$ (ver Figura 6.10).

É fácil constatar que neste caso basta tomar o módulo da integral

$\int_a^b f(x) dx$, ou seja,

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

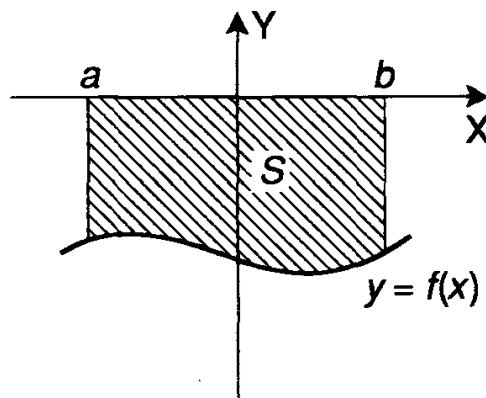


Figura 6-10

6.11.4 Exemplos.

(i) Encontre a área limitada pela curva $y = -4 + x^2$ e o eixo dos x .

A curva $y = x^2 - 4$ intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissa -2 e 2 (ver Figura 6.11).

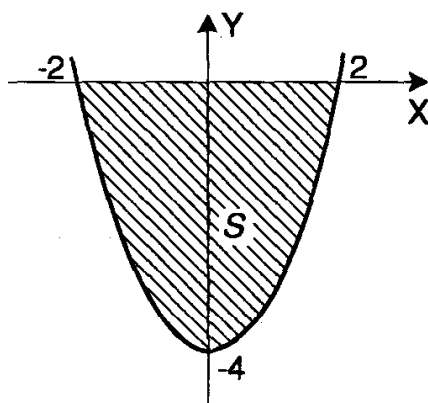


Figura 6-11

No intervalo $[-2, 2]$, $y = x^2 - 4 \leq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx \right| \\ &= \left| \frac{-32}{3} \right| = \frac{32}{3} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

(ii) Encontre a área da região S , limitada pela curva $y = \sin x$ e pelo eixo dos x de 0 até 2π .

Precisamos dividir a região S em duas subregiões S_1 e S_2 (ver Figura 6.12).

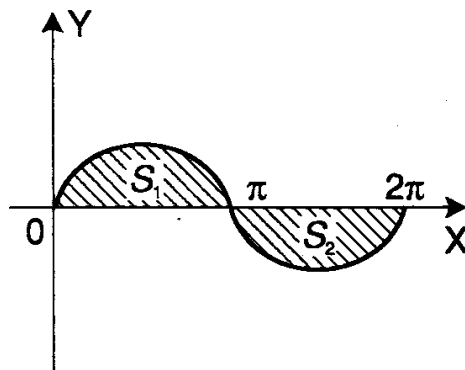


Figura 6-12

No intervalo $[0, \pi]$, $y = \text{sen } x \geq 0$ e no intervalo $[\pi, 2\pi]$, $y = \text{sen } x \leq 0$. Portanto, se A_1 é a área de S_1 e A_2 é a área de S_2 , temos

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 \\
 &= \int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x \, dx \right| \\
 &= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| \\
 &= -\cos \pi + \cos 0 + | -\cos 2\pi + \cos \pi | \\
 &= -(-1) + 1 + | -1 + (-1) | \\
 &= 4 \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

6.11.5 Caso III. Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de f e g , pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Neste caso pode ocorrer uma situação particular onde f e g assumem valores não negativos para todo $x \in [a, b]$ (ver Figura 6.13).

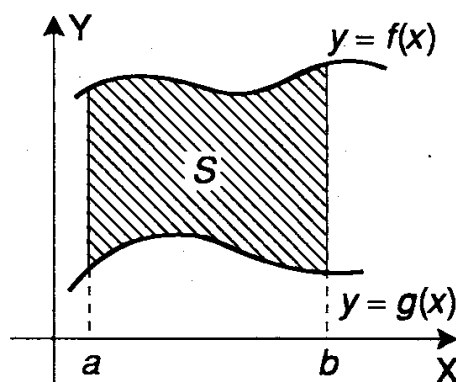


Figura 6-13

Então a área é calculada pela diferença entre a área sob o gráfico de f e a área sob o gráfico de g , ou ainda,

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx. \end{aligned}$$

Para o caso geral, obtemos o mesmo resultado. Basta imaginar o eixo dos x deslocado de tal maneira que as funções se tornem não-negativas, $\forall x \in [a, b]$.

Observando a Figura 6.14, concluímos que

$$\begin{aligned} A' &= A = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x)) \, dx \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx. \end{aligned}$$

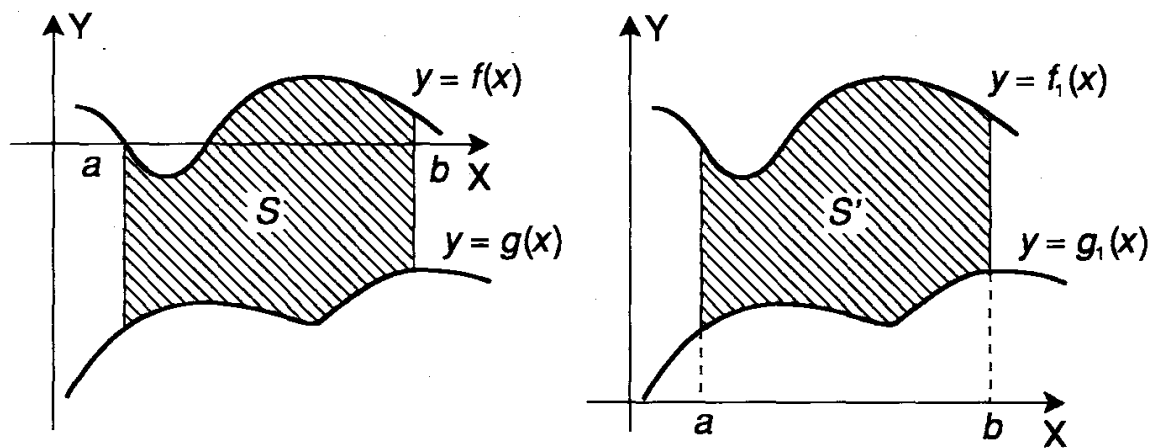


Figura 6-14

6.11.6 Exemplos

- (i) Encontre a área limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$.

As curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1 e 2 (ver Figura 6.15).

No intervalo $[-1, 2]$, temos $x + 2 \geq x^2$. Então,

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) \, dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 \\
 &= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) \\
 &= \frac{9}{2} \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

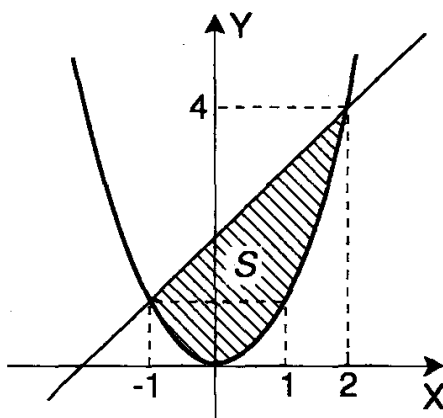


Figura 6-15

(ii) Encontre a área limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$.

As curvas $y = x^3$ e $y = x$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1 , 0 e 1 (ver Figura 6.16).

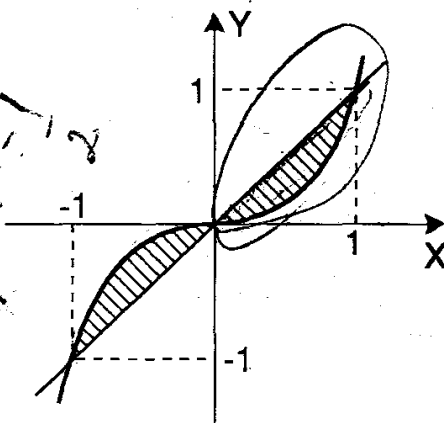


Figura 6-16

No intervalo $[-1, 0]$, $x < x^3$ e no intervalo $[0, 1]$, $x > x^3$. Logo,

$$A = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \text{ u.a.}$$

Observamos que poderíamos ter calculado a área da seguinte forma:

$$A = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{2} \text{ u.a. },$$

pois a área à esquerda do eixo dos y é igual a que se encontra à sua direita.

(iii) Encontre a área da região limitada pelas curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$.

As curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1 e 2 (ver Figura 6.17).

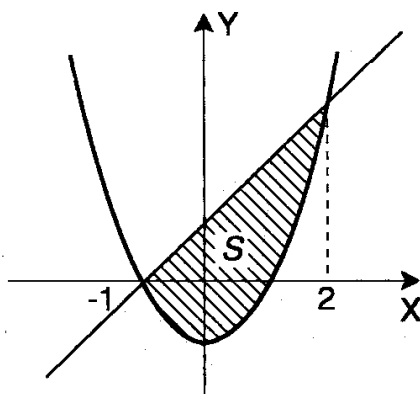


Figura 6-17

No intervalo $[-1, 2]$, $x + 1 \geq x^2 - 1$. Logo,

$$A = \int_{-1}^2 [(x + 1) - (x^2 - 1)] dx$$

$$= \int_{-1}^2 (x - x^2 + 2) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-1}^2$$

$$= 9/2 \text{ u.a.}$$

(iv) Encontre a área da região S limitada pelas curvas $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$.

Devemos dividir a região em duas subregiões S_1 e S_2 (ver Figura 6.18).

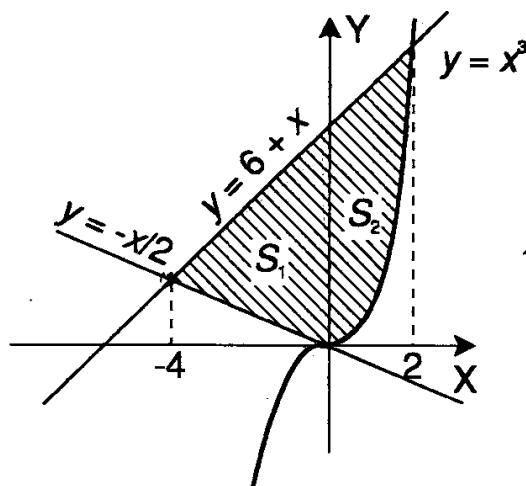


Figura 6-18

No intervalo $[-4, 0]$, a região está compreendida entre os gráficos de $y = \frac{-x}{2}$ e $y = 6 + x$ (região S_1).

No intervalo $[0, 2]$, está entre os gráficos de $y = x^3$ e $y = x + 6$ (região S_2).

Se A_1 é a área de S_1 e A_2 é a área de S_2 , então a área A procurada é dada por $A = A_1 + A_2$.

Cálculo de A_1 : No intervalo $[-4, 0]$, $6 + x \geq -\frac{x}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-4}^0 [(6 + x) - (-x/2)] \, dx \\ &= \int_{-4}^0 \left(6 + \frac{3x}{2} \right) dx \end{aligned}$$

$$= \left(6x + \frac{3x^2}{4} \right) \Big|_{-4}^0$$

$$= 12 \text{ u.a.}$$

Cálculo de A_2 : No intervalo $[0, 2]$, $6 + x \geq x^3$. Então,

$$A_2 = \int_0^2 [(6 + x) - x^3] dx$$

$$= \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2$$

$$= 10 \text{ u.a.}$$

Portanto, $A = A_1 + A_2 = 12 + 10 = 22 \text{ u.a.}$

6.12 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 29 encontrar a área da região limitada pelas curvas dadas.

1. $x = 1/2$, $x = \sqrt{y}$ e $y = -x + 2$

3. $y = 5 - x^2$ e $y = x + 3$

5. $y = 1 - x^2$ e $y = -3$

7. $x = y^2$, $y - x = 2$, $y = -2$ e $y = 3$

9. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$

2. $y^2 = 2x$ e $x^2 = 2y$

4. $y = \frac{1}{6}x^2$ e $y = 6$

6. $x + y = 3$ e $y + x^2 = 3$

8. $y = x^3 - x$ e $y = 0$

10. $x = y^3$ e $x = y$

11. $y = \ln x$, $y = 0$ e $x = 4$

12. $y = \ln x$, $x = 1$ e $y = 4$

13. $y = \sin x$ e $y = -\sin x$, $x \in [0, 2\pi]$

14. $y = \cos x$ e $y = -\cos x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

15. $y = \cosh x$, $y = \sinh x$, $x = -1$ e $x = 1$

16. $y = \operatorname{tg} x$, $x = 0$ e $y = 1$

17. $y = e^{-x}$, $y = x + 1$ e $x = -1$

18. $y = \sin 2x$, $y = x + 2$, $x = 0$ e $x = \pi/2$

19. $y = -1 - x^2$, $y = -2x - 4$

20. $y = \cos x$, $y = \frac{-3}{5\pi}x + \frac{3}{10}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}\right]$

21. $y = \frac{1}{|x-1|}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 2x + 1$ e $x = -3$

22. $x = y^2$ e $y = -\frac{1}{2}x$

23. $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 - 14$

24. $x = y^2 + 1$ e $x + y = 7$

25. $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$ e $y = 4$

26. $y = \arcsin x$, $y = \pi/2$ e $x = 0$

27. $y = 2 \cosh \frac{x}{2}$, $x = -2$, $x = 2$ e $y = 0$

28. $y = |x - 2|$ e $y = 2 - (x - 2)^2$

29. $y = e^x - 1$, $y = -x$ e $x = 1$.

30. Encontrar a área das regiões S_1 e S_2 , vistas na figura a seguir

$$S_1 = 0 \cdot 0$$

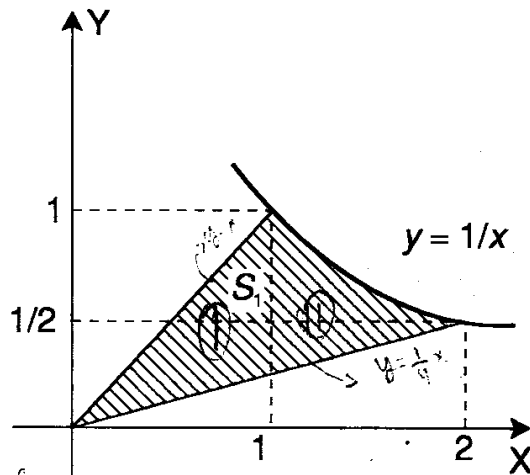
$$\textcircled{1} \Rightarrow \int (x - \frac{1}{4}x) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{8} \right) \Big|_0^2 =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\textcircled{1} \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x \right) dx = \left(\ln|x| - \frac{1}{8}x^2 \right) \Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{8} - \left(\ln 1 - \frac{1}{8} \right) = \ln 2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \ln 2$$

$$S_1 = \ln 2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \ln 2$$



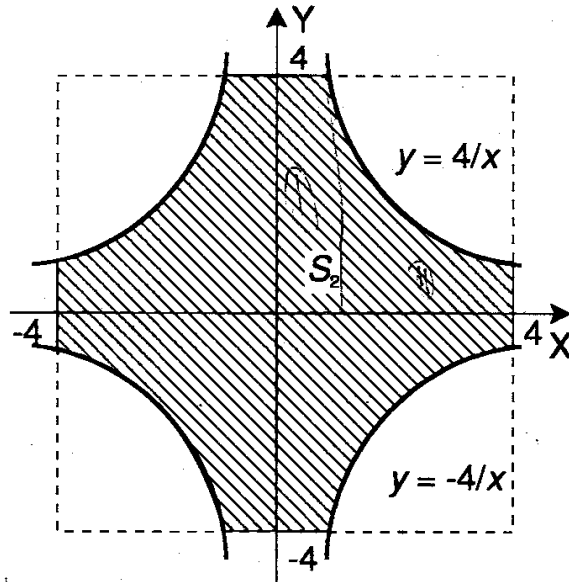
$$S_2 = 0 \cdot 0$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow y = 4/x \Rightarrow y = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{4}{y}$$

$$\textcircled{1} = 4 \cdot 1 = 4 \cdot 0 = 0$$

$$\textcircled{1} \int_1^4 \frac{4}{x} dx = 4 \ln 4$$

$$\textcircled{1} S_2 = 4 \ln 4 = 4 \ln 2^2 = 8 \ln 2$$



MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos, inicialmente, alguns métodos utilizados para resolver integrais envolvendo funções trigonométricas.

A seguir veremos a integração por substituição trigonométrica e a integração de funções racionais por frações parciais.

Finalmente, abordaremos as integrais racionais de seno e cosseno usando a substituição universal e as integrais envolvendo raízes quadradas de trinômios do segundo grau.

7.1 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

7.1.1 As integrais $\int \sin u \, du$ e $\int \cos u \, du$.

As integrais indefinidas da função seno e da função cosseno estão indicadas na tabela da Seção 6.1.9. Temos,

$$\int \sin u \, du = -\cos u + C \quad \text{e}$$

$$\int \cos u \, du = \sin u + C.$$

7.1.2 Exemplos. Calcular as integrais:

$$(i) \quad \int (x + 1) \operatorname{sen} (x + 1)^2 dx.$$

Usando o método da substituição (Seção 6.3), fazemos $u = (x + 1)^2$. Então, $du = 2(x + 1) dx$. Temos,

$$\begin{aligned} \int (x + 1) \operatorname{sen} (x + 1)^2 dx &= \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} u \, du \\ &= -\frac{1}{2} \cos u + C \\ &= -\frac{1}{2} \cos (x + 1)^2 + C. \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \int_0^1 e^{2x} \cos (e^{2x}) dx.$$

Vamos primeiro, encontrar a integral indefinida

$$I = \int e^{2x} \cos (e^{2x}) dx.$$

Para isso, fazemos a substituição $u = e^{2x}$. Temos então, $du = 2e^{2x} dx$. Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2} \cos u \, du \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} u + C \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} (e^{2x}) + C. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{2x} \cos(e^{2x}) dx &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}(e^{2x}) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{sen} e^2 - \operatorname{sen} 1) .\end{aligned}$$

7.1.3 As integrais $\int \operatorname{tg} u \, du$ e $\int \operatorname{cotg} u \, du$.

As integrais indefinidas da função tangente e da função cotangente são resolvidas usando o método da substituição, como foi visto no exemplo 6.3.1(iv). Temos,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} u \, du &= \int \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} du \\ &= -\ln |\cos u| + C \\ &= \ln |(\cos u)^{-1}| + C \\ &= \ln |\sec u| + C ;\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cotg} u \, du &= \int \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} du \\ &= \ln |\operatorname{sen} u| + C .\end{aligned}$$

7.1.4 Exemplos. Calcular as integrais

$$(i) \quad \int \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx .$$

Fazemos $u = \sqrt{x}$. Então, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$. Temos,

$$\int \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \ln |\sec \sqrt{x}| + C.$$

$$(ii) \int \frac{\operatorname{cotg} (\ln x)}{x} dx.$$

Fazemos $u = \ln x$. Então, $du = 1/x dx$. Temos,

$$\int \frac{\operatorname{cotg} (\ln x)}{x} dx = \ln |\operatorname{sen} (\ln x)| + C.$$

7.1.5 As integrais $\int \sec u du$ e $\int \operatorname{cosec} u du$.

Nestas integrais usamos um artifício de cálculo para podermos aplicar o método da substituição.

Na integral da secante, multiplicamos e dividimos o integrando por $\sec u + \operatorname{tg} u$. Temos,

$$\int \sec u du = \int \frac{\sec u (\sec u + \operatorname{tg} u)}{\sec u + \operatorname{tg} u} du.$$

Fazemos $v = \sec u + \operatorname{tg} u$. Então, $dv = (\sec u \cdot \operatorname{tg} u + \sec^2 u) du$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \sec u du &= \int \frac{dv}{v} \\ &= \ln |v| + C \\ &= \ln |\sec u + \operatorname{tg} u| + C. \end{aligned}$$

Na integral da cossecante, multiplicamos e dividimos o integrando por $\operatorname{cosec} u - \cotg u$. Temos,

$$\int \operatorname{cosec} u \, du = \int \frac{\operatorname{cosec} u (\operatorname{cosec} u - \cotg u)}{\operatorname{cosec} u - \cotg u} \, du.$$

Fazemos $v = \operatorname{cosec} u - \cotg u$. Então,

$$\begin{aligned} dv &= [-\operatorname{cosec} u \cdot \cotg u - (-\operatorname{cosec}^2 u)] \, du \\ &= (\operatorname{cosec}^2 u - \operatorname{cosec} u \cdot \cotg u) \, du. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cosec} u \, du &= \int \frac{dv}{v} \\ &= \ln |v| + C \\ &= \ln |\operatorname{cosec} u - \cotg u| + C. \end{aligned}$$

7.1.6 Exemplos. Calcular as integrais

$$(i) \int \sec (5x - \pi) \, dx.$$

V: $5x - \pi$ $\Rightarrow$ $du = 5dx$

Fazemos $u = 5x - \pi$. Então, $du = 5dx$. Portanto,

$\frac{1}{5} \int \sec u \, du$

$$\int \sec (5x - \pi) \, dx = \int \frac{1}{5} \sec u \, du$$

$\frac{1}{5} \ln |\sec(5x - \pi) + \tan(5x - \pi)| + C$

$$= \frac{1}{5} \ln |\sec (5x - \pi) + \tg (5x - \pi)| + C.$$

$$(ii) \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}.$$

Vamos primeiro, encontrar a integral indefinida

$$I = \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}.$$

Para isso, fazemos $u = 2\theta$. Então, $du = 2d\theta$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} &= \int \operatorname{cosec} 2\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec} u \, du \\ &= \frac{1}{2} \ln |\operatorname{cosec} 2\theta - \operatorname{cotg} 2\theta| + C. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} &= \frac{1}{2} \ln |\operatorname{cosec} 2\theta - \operatorname{cotg} 2\theta| \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{cotg} \frac{2\pi}{3} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} - \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

7.2 INTEGRAÇÃO DE ALGUMAS FUNÇÕES ENVOLVENDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

7.2.1 As integrais $\int \sin^n u \, du$ e $\int \cos^n u \, du$, onde n é um número inteiro positivo.

Nestas integrais, podemos usar artifícios de cálculo com auxílio das identidades trigonométricas

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1)$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (2)$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad (3)$$

visando a aplicação do método da substituição. Os exemplos que seguem ilustram os dois possíveis casos: n é um número ímpar ou n é um número par.

Estas integrais também podem ser resolvidas com auxílio das fórmulas de redução ou recorrência, conforme veremos na Seção 7.2.11.

7.2.2 Exemplos. Calcular as integrais

$$(i) \int \cos^5 x \, dx.$$

Vamos inicialmente preparar o integrando para a aplicação do método da substituição. Observamos que o artifício que usaremos é válido sempre que n for um número ímpar.

Fatorando convenientemente o integrando e aplicando a identidade (1), temos

$$\begin{aligned} \cos^5 x &= (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x \\ &= (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x) \cos x \\
 &= \cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x + \operatorname{sen}^4 x \cos x.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int \cos^5 x \, dx &= \int (\cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x + \operatorname{sen}^4 x \cos x) \, dx \\
 &= \int \cos x \, dx - 2 \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx + \int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx \\
 &= \operatorname{sen} x - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x + C.
 \end{aligned}$$

(ii) $\int \operatorname{sen}^3 2\theta \, d\theta$.

Handwritten notes: $\operatorname{sen}^3 2\theta = \operatorname{sen}^2 2\theta \cdot \operatorname{sen} 2\theta$
 $\int \operatorname{sen}^2 2\theta \cdot \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta$

Usando o mesmo raciocínio do exemplo anterior, temos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}^3 2\theta &= \operatorname{sen}^2 2\theta \cdot \operatorname{sen} 2\theta \\
 &= (1 - \cos^2 2\theta) \cdot \operatorname{sen} 2\theta \\
 &= \operatorname{sen} 2\theta - \cos^2 2\theta \operatorname{sen} 2\theta.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{sen}^3 2\theta \, d\theta &= \int (\operatorname{sen} 2\theta - \cos^2 2\theta \operatorname{sen} 2\theta) \, d\theta \\
 &= \int \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta - \int \cos^2 2\theta \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{6} \cos^3 2\theta + C.
 \end{aligned}$$

$$(iii) \int \operatorname{sen}^4 x \, dx.$$

Neste exemplo n é um número par. Na preparação do integrando, usamos agora as identidades (2) e (3). Temos,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^4 x &= (\operatorname{sen}^2 x)^2 \\ &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C. \end{aligned}$$

Observamos que o raciocínio usado neste exemplo é válido para as potências pares.

7.2.3 A integral $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u \, du$, onde m e n são inteiros positivos.

Nestas integrais, a preparação do integrando deve ser feita visando à aplicação do método da substituição, da mesma forma que foi feito em 7.2.1 e 7.2.2.

Quando pelo menos um dos expoentes é ímpar usamos a identidade (1) e quando os dois expoentes são pares usamos (2) e (3) e, eventualmente, também (1).

7.2.4 Exemplos. Calcular as integrais

$$(i) \int \operatorname{sen}^5 x \cdot \cos^2 x \, dx.$$

Preparando o integrando, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x &= (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x \\ &= (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x \\ &= (1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x \cos^2 x \\ &= \cos^2 x \operatorname{sen} x - 2 \cos^4 x \operatorname{sen} x + \cos^6 x \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx &= \int (\cos^2 x \operatorname{sen} x - 2 \cos^4 x \operatorname{sen} x + \cos^6 x \operatorname{sen} x) \, dx \\ &= \int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx - 2 \int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx \\ &\quad + \int \cos^6 x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + C. \end{aligned}$$

$$(ii) \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx.$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Preparando o integrando, temos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x &= \operatorname{sen}^2 x \cdot (\cos^2 x)^2 \\
 &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{8} (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) \\
 &= \frac{1}{8} \left[1 + \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} - (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x \right] \\
 &= \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{8} \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{8} \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x \right) dx \\
 &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C.
 \end{aligned}$$

$$(iii) \int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx.$$

Quando m e n são iguais, também podemos usar a identidade

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x. \quad (4)$$

Temos,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x &= \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right)^4 \\
 &= \frac{1}{16} (\operatorname{sen}^2 2x)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 \\
&= \frac{1}{64} (1 - 2 \cos 4x + \cos^2 4x) \\
&= \frac{1}{64} \left(1 - 2 \cos 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2} \right) \\
&= \frac{3}{128} - \frac{1}{32} \cos 4x + \frac{1}{128} \cos 8x.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{3}{128} - \frac{1}{32} \cos 4x + \frac{1}{128} \cos 8x \right) dx \\
&= \frac{3}{128} x - \frac{1}{128} \sin 4x + \frac{1}{1024} \sin 8x + C.
\end{aligned}$$

7.2.5 As integrais $\int \operatorname{tg}^n u \, du$ e $\int \operatorname{cotg}^n u \, du$, onde n é inteiro positivo.

Na preparação do integrando, usamos as identidades

$$\operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u - 1 \quad \text{e} \quad (5)$$

$$\operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u - 1. \quad (6)$$

Os artifícios são semelhantes aos usados nas seções anteriores. Temos,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^n u &= \operatorname{tg}^{n-2} u \cdot \operatorname{tg}^2 u \\
&= \operatorname{tg}^{n-2} u (\sec^2 u - 1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\cotg^n u &= \cotg^{n-2} u \cdot \cotg^2 u \\ &= \cotg^{n-2} u (\operatorname{cosec}^2 u - 1).\end{aligned}$$

7.2.6 Exemplos. Calcular as integrais

(i) $\int \operatorname{tg}^3 3\theta \, d\theta.$

Preparando o integrando, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^3 3\theta &= \operatorname{tg} 3\theta \cdot \operatorname{tg}^2 3\theta \\ &= \operatorname{tg} 3\theta (\sec^2 3\theta - 1) \\ &= \operatorname{tg} 3\theta \sec^2 3\theta - \operatorname{tg} 3\theta.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^3 3\theta \, d\theta &= \int (\operatorname{tg} 3\theta \sec^2 3\theta - \operatorname{tg} 3\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{tg}^2 3\theta + \frac{1}{3} \ln |\cos 3\theta| + C.\end{aligned}$$

(ii) $\int \cotg^4 2x \, dx.$

Preparando o integrando, temos

$$\begin{aligned}\cotg^4 2x &= \cotg^2 2x \cdot \cotg^2 2x \\ &= \cotg^2 2x (\operatorname{cosec}^2 2x - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cotg^2 2x \cdot \operatorname{cosec}^2 2x - \cotg^2 2x \\
 &= \cotg^2 2x \cdot \operatorname{cosec}^2 2x - (\operatorname{cosec}^2 2x - 1) \\
 &= \cotg^2 2x \cdot \operatorname{cosec}^2 2x - \operatorname{cosec}^2 2x + 1.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int \cotg^4 2x \, dx &= \int (\cotg^2 2x \cdot \operatorname{cosec}^2 2x - \operatorname{cosec}^2 2x + 1) \, dx \\
 &= -\frac{1}{6} \cotg^3 2x + \frac{1}{2} \cotg 2x + x + C.
 \end{aligned}$$

7.2.7 As integrais $\int \sec^n u \, du$ e $\int \operatorname{cosec}^n u \, du$, onde n é inteiro positivo.

Estas integrais, para o caso de n ser um número par, são resolvidas utilizando as identidades (5) e (6). Temos,

$$\begin{aligned}
 \sec^n x &= (\sec^2 x)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \sec^2 x \\
 &= (\tg^2 x + 1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \sec^2 x
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \operatorname{cosec}^n x &= (\operatorname{cosec}^2 x)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \operatorname{cosec}^2 x \\
 &= (\cotg^2 x + 1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \operatorname{cosec}^2 x.
 \end{aligned}$$

Quando n for ímpar, devemos aplicar o método da integração por partes visto na Seção 6.5.

7.2.8 Exemplos. Calcular as integrais

$$(i) \int \operatorname{cosec}^6 x \, dx.$$

Preparando o integrando, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}^6 x &= (\operatorname{cosec}^2 x)^2 \cdot \operatorname{cosec}^2 x \\ &= (\cotg^2 x + 1)^2 \cdot \operatorname{cosec}^2 x \\ &= (\cotg^4 x + 2 \cotg^2 x + 1) \operatorname{cosec}^2 x \\ &= \cotg^4 x \operatorname{cosec}^2 x + 2 \cotg^2 x \operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec}^2 x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cosec}^6 x \, dx &= \int (\cotg^4 x \operatorname{cosec}^2 x + 2 \cotg^2 x \operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec}^2 x) \, dx \\ &= -\frac{1}{5} \cotg^5 x - \frac{2}{3} \cotg^3 x - \cotg x + C. \end{aligned}$$

$$(ii) \int \sec^3 x \, dx.$$

Nesta integral, vamos usar o método de integração por partes. Seja

$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad du = \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx$$

$$dv = \sec^2 x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x.$$

Então,

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \cdot \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx$$

$$\begin{aligned} &= \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, dx \\ &= \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx. \end{aligned}$$

Adicionando $\int \sec^3 x \, dx$ a cada membro, obtemos

$$\begin{aligned} 2 \int \sec^3 x \, dx &= \sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x \, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \end{aligned}$$

ou

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

7.2.9 As integrais $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u \, du$ e $\int \cotg^m u \operatorname{cosec}^n u \, du$, onde m e n são inteiros positivos.

Quando m for ímpar ou n for par, podemos preparar o integrando para aplicar o método da substituição.

Quando m for par e n for ímpar a integral deve ser resolvida por integração por partes. Os exemplos que seguem ilustram os diversos casos.

7.2.10 Exemplos. Calcular as integrais

(i) $\int \operatorname{tg}^7 x \sec^6 x \, dx.$

Neste exemplo n é par. Podemos, então, preparar o integrando para aplicar o método da substituição. Temos,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}^7 x \sec^6 x &= \operatorname{tg}^7 x (\sec^2 x)^2 \sec^2 x \\
 &= \operatorname{tg}^7 x (\operatorname{tg}^2 x + 1)^2 \sec^2 x \\
 &= \operatorname{tg}^7 x (\operatorname{tg}^4 x + 2 \operatorname{tg}^2 x + 1) \sec^2 x \\
 &= \operatorname{tg}^{11} x \sec^2 x + 2 \operatorname{tg}^9 x \sec^2 x + \operatorname{tg}^7 x \sec^2 x.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{tg}^7 x \sec^6 x \, dx &= \int (\operatorname{tg}^{11} x \sec^2 x + 2 \operatorname{tg}^9 x \sec^2 x + \operatorname{tg}^7 x \sec^2 x) \, dx \\
 &= \frac{1}{12} \operatorname{tg}^{12} x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^{10} x + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^8 x + C.
 \end{aligned}$$

$$(ii) \int \operatorname{tg}^7 x \sec^5 x \, dx.$$

Neste exemplo m é ímpar. Podemos, então, preparar o integrando como segue

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}^7 x \sec^5 x &= (\operatorname{tg}^2 x)^3 \operatorname{tg} x \sec^4 x \sec x \\
 &= (\sec^2 x - 1)^3 \sec^4 x \sec x \operatorname{tg} x \\
 &= (\sec^{10} x - 3 \sec^8 x + 3 \sec^6 x - \sec^4 x) \sec x \operatorname{tg} x.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{tg}^7 x \sec^5 x \, dx &= \int (\sec^{10} x - 3 \sec^8 x + 3 \sec^6 x - \sec^4 x) \sec x \operatorname{tg} x \, dx \\
 &= \frac{1}{11} \sec^{11} x - \frac{1}{3} \sec^9 x + \frac{3}{7} \sec^7 x - \frac{1}{5} \sec^5 x + C.
 \end{aligned}$$

Observamos que, no exemplo (i), poderíamos preparar o integrando de forma idêntica à preparação do exemplo (ii), pois $m = 7$, isto é, m é ímpar. Os resultados seriam equivalentes.

$$(iii) \int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 x \, dx.$$

Reescrevendo o integrando, temos

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x \, dx \\ &= \int (\sec^5 x - \sec^3 x) \, dx \\ &= \int \sec^5 x \, dx - \int \sec^3 x \, dx. \end{aligned}$$

Recaímos em duas integrais que devem ser resolvidas por partes, como foi feito no exemplo 7.2.8(ii). Temos,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 x \, dx &= \int \sec^5 x \, dx - \int \sec^3 x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x - \frac{1}{8} \sec x \operatorname{tg} x \\ &\quad - \frac{1}{8} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C. \end{aligned}$$

Observamos que as integrais $\int \sec^5 x \, dx$ e $\int \sec^3 x \, dx$ também podem ser calculadas usando a fórmula de recorrência que será dada na seção seguinte.

7.2.11 Fórmulas de Redução ou Recorrência.

O método de integração por partes pode ser usado para obtermos fórmulas de redução ou recorrência. A idéia é reduzir uma integral em outra mais simples do mesmo tipo. A aplicação repetida dessas fórmulas nos levará ao cálculo da integral dada.

As mais usadas são:

$$\int \operatorname{sen}^n u \, du = \frac{-1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \, du; \quad (7)$$

$$\int \cos^n u \, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \, \text{sen } u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du; \quad (8)$$

$$\int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \, \text{tg } u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du; \quad (9)$$

$$\int \text{cosec}^n u \, du = \frac{-1}{n-1} \text{cosec}^{n-2} u \, \text{cotg } u + \frac{n-2}{n-1} \int \text{cosec}^{n-2} u \, du. \quad (10)$$

Prova de (7). Seja

$$u^* = \text{sen}^{n-1} u \quad \Rightarrow \quad du^* = (n-1) \text{sen}^{n-2} u \cos u \, du$$

$$dv = \text{sen } u \, du \quad \Rightarrow \quad v = \int \text{sen } u \, du = -\cos u.$$

Integrando por partes, vem

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^n u \, du &= \text{sen}^{n-1} u (-\cos u) - \int (-\cos u) \cdot (n-1) \cdot \text{sen}^{n-2} u \cdot \cos u \, du \\ &= -\text{sen}^{n-1} u \cos u + (n-1) \int \text{sen}^{n-2} u \cos^2 u \, du \\ &= -\text{sen}^{n-1} u \cos u + (n-1) \int \text{sen}^{n-2} u (1 - \text{sen}^2 u) \, du \\ &= -\text{sen}^{n-1} u \cos u + (n-1) \int (\text{sen}^{n-2} u - \text{sen}^n u) \, du \\ &= -\text{sen}^{n-1} u \cos u - (n-1) \int \text{sen}^n u \, du \\ &\quad + (n-1) \int \text{sen}^{n-2} u \, du. \end{aligned}$$

Somando $(n - 1) \int \operatorname{sen}^n u \, du$ em ambos os membros, obtemos

$$n \int \operatorname{sen}^n u \, du = -\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + (n - 1) \int \operatorname{sen}^{n-2} u \, du$$

ou,

$$\int \operatorname{sen}^n u \, du = \frac{-1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \, du,$$

o que prova (7).

7.2.12 Exemplo. Aplicar uma fórmula de recorrência para calcular a integral

$$\int \operatorname{sen}^5 2x \, dx.$$

Fazendo $u = 2x$, temos $du = 2 \, dx$. Então,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^5 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}^5 u \, du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{5} \operatorname{sen}^4 u \cos u + \frac{4}{5} \int \operatorname{sen}^3 u \, du \right] \\ &= \frac{-1}{10} \operatorname{sen}^4 u \cos u + \frac{2}{5} \left[\frac{-1}{3} \operatorname{sen}^2 u \cos u + \frac{2}{3} \int \operatorname{sen} u \, du \right] \\ &= \frac{-1}{10} \operatorname{sen}^4 u \cos u - \frac{2}{15} \operatorname{sen}^2 u \cos u - \frac{4}{15} \cos u + C \\ &= \frac{-1}{10} \operatorname{sen}^4 2x \cos 2x - \frac{2}{15} \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x - \frac{4}{15} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

7.2.13 Integração de funções envolvendo seno e cosseno de arcos diferentes.

As identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} (a + b) + \operatorname{sen} (a - b)] \quad (11)$$

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2} [\cos (a - b) - \cos (a + b)] \quad (12)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)] \quad (13)$$

auxiliam na resolução de integrais envolvendo seno e cosseno de arcos diferentes. Os exemplos seguintes ilustram alguns casos.

7.2.14 Exemplos. Calcular as integrais

$$(i) \quad \int \operatorname{sen} 4x \cos 2x \, dx .$$

Usando (11), vamos preparar o integrando. Temos,

$$\operatorname{sen} 4x \cos 2x = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 2x] .$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen} 4x \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 2x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int \operatorname{sen} 6x \, dx + \int \operatorname{sen} 2x \, dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} (-\cos 6x) + \frac{1}{2} (-\cos 2x) \right] + C \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} \cos 6x + \cos 2x \right] + C. \end{aligned}$$

(ii) $\int \sin 5x \sin 2x \, dx.$

Usando (12), temos

$$\begin{aligned} \int \sin 5x \sin 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos 3x - \cos 7x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int \cos 3x \, dx - \int \cos 7x \, dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{7} \sin 7x \right] + C. \end{aligned}$$

(iii) $\int \cos 5x \cos 3x \, dx.$

Usando (13), temos

$$\begin{aligned} \int \cos 5x \cos 3x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos 8x + \cos 2x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int \cos 8x \, dx + \int \cos 2x \, dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} \sin 8x + \frac{1}{2} \sin 2x \right] + C \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \sin 8x + \sin 2x \right] + C. \end{aligned}$$

7.3 INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Muitas vezes, substituições trigonométricas convenientes nos levam à solução de uma integral. Se o integrando contém funções envolvendo as expressões

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \sqrt{a^2 + u^2} \text{ ou } \sqrt{u^2 - a^2}, \text{ onde } a > 0,$$

é possível fazermos uma substituição trigonométrica adequada.

As Figuras 7.1 (a), (b) e (c) nos sugerem tal substituição.

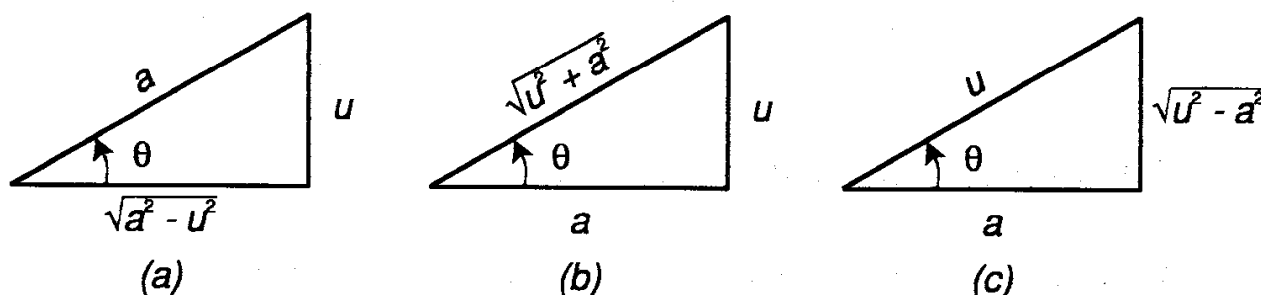


Figura 7-1

(i) A função integrando envolve $\sqrt{a^2 - u^2}$.

Neste caso, usamos $u = a \sin \theta$. Então, $du = a \cos \theta d\theta$. Supondo que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \\ &= a \cos \theta. \end{aligned}$$

(ii) A função integrando envolve $\sqrt{u^2 + a^2}$.

Neste caso, usamos $u = a \operatorname{tg} \theta$. Então, $du = a \sec^2 \theta d\theta$. Supondo que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + u^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} \\ &= a \sec \theta.\end{aligned}$$

(iii) A função integrando envolve $\sqrt{u^2 - a^2}$.

Neste caso, usamos $u = a \sec \theta$. Então, $du = a \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta$. Supondo θ tal que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{u^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} \\ &= \sqrt{a^2 (\sec^2 \theta - 1)} \\ &= \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \\ &= a \operatorname{tg} \theta.\end{aligned}$$

7.3.1 Exemplos. Calcular as integrais

(i) $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{2x^2} dx.$

Neste exemplo, usamos $x = 3 \operatorname{sen} \theta$. Então, $dx = 3 \cos \theta d\theta$. Assim,

$$\sqrt{9 - x^2} = 3 \cos \theta, \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{3 \cos \theta}{9 \sin^2 \theta} \cdot 3 \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int \cotg^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} (-\cotg \theta - \theta) + C.
 \end{aligned}$$

Devemos agora, escrever este resultado em termos da variável original x .

Sabemos que, se $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, então $\theta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{3}$.

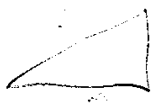
Observando a Figura 7.1(a), vemos que

$$\cotg \theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}.$$

Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2} dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{3} \right) + C.$$

$$(ii) \int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}} dx.$$



Neste exemplo, usamos $x = 2 \operatorname{tg} \theta$. Então, $dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$. Assim,

$$\sqrt{x^2+4} = 2 \sec \theta, \text{ para } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{4 \operatorname{tg}^2 \theta}{2 \sec \theta} \cdot 2 \sec^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int \operatorname{tg}^2 \theta \sec \theta d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int (\sec^3 \theta - \sec \theta) d\theta.
 \end{aligned}$$

Usando a fórmula de recorrência 7.2.11(9), vem

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}} dx &= \frac{4}{3} \left[\frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} \int \sec \theta d\theta - \int \sec \theta d\theta \right] \\
 &= \frac{2}{3} \sec \theta \operatorname{tg} \theta - \frac{2}{3} \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C.
 \end{aligned}$$

Vamos agora, escrever este resultado em termos da variável original x . Observando a Figura 7.1(b), escrevemos

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} \text{ e } \operatorname{tg} \theta = \frac{x}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}} dx &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} \cdot \frac{x}{2} - \frac{2}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C \\
 &= \frac{1}{6} x \sqrt{x^2+4} - \frac{2}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+4} + x}{2} \right| + C.
 \end{aligned}$$

Este resultado poderia ainda ser escrito como

$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}} dx = \frac{1}{6} x \sqrt{x^2+4} - \frac{2}{3} \ln(\sqrt{x^2+4} + x) + D,$$

onde $D = C + \frac{2}{3} \ln 2$.

$$(iii) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-16}}.$$

Neste exemplo, usamos $x = 4 \sec \theta$. Então, $dx = 4 \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta$. Assim,

$$\sqrt{x^2-16} = 4 \operatorname{tg} \theta, \text{ para } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-16}} &= \int \frac{4 \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta}{64 \cdot \sec^3 \theta \cdot 4 \cdot \operatorname{tg} \theta} \\ &= \frac{1}{64} \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta} \\ &= \frac{1}{64} \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{64} \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{128} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{128} \left(\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) + C. \end{aligned}$$

Vamos agora, escrever este resultado em termos da variável original x . Observando a Figura 7.1(c), escrevemos

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x}; \quad \cos \theta = \frac{4}{x}.$$

Da identidade trigonométrica

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta = \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

vem que

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} \cdot \frac{4}{x}.$$

Para substituírmos o valor de θ , devemos tomar algum cuidado. Inicialmente, observamos que a função integrando está definida para valores de $x > 4$ e $x < -4$.

Para $x > 4$, temos que $\sec \theta = \frac{x}{4} > 1$ e portanto, $\theta = \operatorname{arc} \sec \frac{x}{4}$,
 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

Para $x < -4$, temos que $\sec \theta = \frac{x}{4} < -1$ e sua inversa $\left(\operatorname{arc} \sec \frac{x}{4} \right)$ toma valores entre $\frac{\pi}{2}$ e π (ver Seção 2.15.4).

Como ao fazermos a substituição $x = 4 \sec \theta$, assumimos que $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$ e como $\sec(2\pi - a) = \sec a$, para $x < -4$, podemos escrever $\theta = 2\pi - \operatorname{arc} \sec \frac{x}{4}$,
 $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Portanto, para $x > 4$, temos

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 16}} = \frac{1}{128} \left(\operatorname{arc\,sec} \frac{x}{4} + \frac{4 \sqrt{x^2 - 16}}{x^2} \right) + C$$

e para $x < -4$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 16}} &= \frac{1}{128} \left(2\pi - \operatorname{arc\,sec} \frac{x}{4} + \frac{4 \sqrt{x^2 - 16}}{x^2} \right) + C_1 \\ &= \frac{1}{128} \left(-\operatorname{arc\,sec} \frac{x}{4} + \frac{4 \sqrt{x^2 - 16}}{x^2} \right) + C, \end{aligned}$$

onde $C = \frac{\pi}{64} + C_1$.

7.4 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 35, calcular a integral indefinida.

1. $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

2. $\int \cos x \cdot \cos (\operatorname{sen} x) dx$

3. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x} dx$

4. $\int x \operatorname{tg} (x^2 + 1) dx$

5. $\int \frac{\operatorname{cotg} (1/x)}{x^2} dx$

6. $\int \sec (x + 1) dx$

7. $\int \operatorname{sen} (\omega t + \theta) dt$

8. $\int x \operatorname{cosec} x^2 dx$

9. $\int \cos x \cdot \operatorname{tg} (\operatorname{sen} x) dx$

10. $\int \operatorname{sen}^3 (2x + 1) dx$

11. $\int \cos^5 (3 - 3x) \, dx$
12. $\int 2x \operatorname{sen}^4 (x^2 - 1) \, dx$
13. $\int e^{2x} \cos^2 (e^{2x} - 1) \, dx$
14. $\int \operatorname{sen}^3 2\theta \cos^4 2\theta \, d\theta$
15. $\int \operatorname{sen}^3 (1 - 2\theta) \cos^3 (1 - 2\theta) \, d\theta$
16. $\int \operatorname{sen}^{19} (t - 1) \cos (t - 1) \, dt$
17. $\int \frac{1}{\theta} \operatorname{tg}^3 (\ln \theta) \, d\theta$
18. $\int \operatorname{tg}^3 x \cos^4 x \, dx$
19. $\int \cos^4 x \, dx$
20. $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$
21. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x} \, dx$
22. $\int 15 \operatorname{sen}^5 x \, dx$
23. $\int 15 \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$
24. $\int 48 \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$
25. $\int \cos^6 3x \, dx$
26. $\int \frac{-3 \cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} \, dx$
27. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx$
28. $\int \operatorname{tg}^2 5x \, dx$
29. $\int \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t + \theta) \, dt$
30. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x} \, dx$
31. $\int \sec^4 t \operatorname{cotg}^6 t \operatorname{sen}^8 t \, dt$
32. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \operatorname{tg}^3 \sqrt{x^2 - 1} \, dx$
33. $\int \sec^3 (1 - 4x) \, dx$
34. $\int \operatorname{cosec}^4 (3 - 2x) \, dx$
35. $\int x \operatorname{cotg}^2 (x^2 - 1) \operatorname{cosec}^2 (x^2 - 1) \, dx$
36. Verificar as fórmulas de recorrência (8), (9) e (10) da Seção 7.2.11.

37. Verificar as fórmulas:

$$(a) \int \operatorname{tg}^n u \, du = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} u - \int \operatorname{tg}^{n-2} u \, du$$

$$(b) \int \operatorname{cotg}^n u \, du = \frac{-1}{n-1} \operatorname{cotg}^{n-1} u - \int \operatorname{cotg}^{n-2} u \, du$$

38. Calcular a área limitada pela curva $y = \cos x$, pelas retas $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ e o eixo dos x .

39. Calcular a área limitada por $y = 2|\operatorname{sen} x|$, $x = 0$, $x = 2\pi$ e o eixo dos x .

40. Calcular a área da região limitada por $y = \operatorname{tg}^3 x$, $y = 1$ e $x = 0$.

41. Calcular a área sob o gráfico de $y = \cos^6 x$, de 0 até π .

42. Calcular a área sob o gráfico de $y = \operatorname{sen}^6 x$, de 0 até π .

43. Calcular a área sob o gráfico de $y = \operatorname{sen}^3 x$, de 0 até π .

44. Calcular a área entre as curvas $y = \operatorname{sen}^2 x$ e $y = \cos^2 x$, de $\frac{\pi}{4}$ até $\frac{3\pi}{4}$.

Nos exercícios de 45 a 67, calcular a integral indefinida.

$$45. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 5}}$$

$$46. \int \frac{dt}{\sqrt{9 - 16t^2}}$$

$$47. \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 9}} \, dx$$

$$48. \int (1 - 4t^2)^{3/2} \, dt$$

$$49. \int x^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx$$

$$50. \int x^3 \sqrt{x^2 + 3} \, dx$$

$$51. \int \frac{5x + 4}{x^3 \sqrt{x^2 + 1}} \, dx$$

$$52. \int (x + 1)^2 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$$

$$53. \int \frac{t^5}{\sqrt{t^2 + 16}} \, dt$$

$$54. \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}} \, dx$$

55. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx$

56. $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}} dx$

57. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} dx$

58. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx$

59. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} dx$

60. $\int \frac{(x+1)}{\sqrt{4-x^2}} dx$

61. $\int \frac{(6x+5)}{\sqrt{9x^2+1}} dx$

62. $\int \frac{(x+3)}{\sqrt{x^2+2x}} dx$

63. $\int \sqrt{4-x^2} dx$

64. $\int \sqrt{x^2-4} dx$

65. $\int \sqrt{4+x^2} dx$

66. $\int (\sqrt{1+x^2} + 2x) dx$

67. $\int \left(\sin x + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$

Nos exercícios de 68 a 72, calcular a integral definida.

68. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$

69. $\int_0^{a/2b} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx, 0 < a < b$

70. $\int_1^2 \frac{dt}{t^4 \sqrt{4+t^2}}$

71. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2 \sqrt{9t^2+16}}$

72. $\int_6^7 \frac{dt}{(t-1)^2 \sqrt{(t-1)^2-9}}$

7.5 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS

No Capítulo 2, vimos que uma função racional $f(x)$ é definida como o quociente de duas funções polinomiais, ou seja,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios.

As integrais de algumas funções racionais simples, como por exemplo

$$\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^2 + 1}, \frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{1}{x^2 + 6x + 13}$$

são imediatas ou podem ser resolvidas por substituição e já foram vistas anteriormente.

Nesta seção, vamos apresentar um procedimento sistemático para calcular a integral de qualquer função racional. A idéia básica é escrever a função racional dada como uma soma de frações mais simples. Para isto, usaremos um resultado importante da Álgebra, que é dado na proposição seguinte.

7.5.1 Proposição. Se $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais, $p(x)$ pode ser expresso como um produto de fatores lineares e/ou quadráticos, todos com coeficientes reais.

7.5.2 Exemplos.

(i) O polinômio $q(x) = x^2 - 3x + 2$ pode ser escrito como o produto dos fatores lineares $x - 2$ e $x - 1$, ou seja, $q(x) = (x - 2)(x - 1)$.

(ii) O polinômio $q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ pode ser expresso como o produto do fator linear $x - 1$ pelo fator quadrático irredutível $x^2 + 1$, isto é,

$$q(x) = (x^2 + 1)(x - 1).$$

(iii) $p(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1)^2(x^2+3x+4)$ é uma decomposição do polinômio $p(x) = 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 7x + 4$.

A decomposição da função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ em frações mais simples, está subordinada ao modo como o denominador $q(x)$ se decompõe nos fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis. Vamos considerar os vários casos separadamente. As formas das respectivas frações parciais são asseguradas por resultados da Álgebra e não serão demonstradas.

Para o desenvolvimento do método, vamos considerar que o coeficiente do termo de mais alto grau do polinômio do denominador $q(x)$ é 1. Se isso não ocorrer, dividimos o numerador e o denominador da função racional $f(x)$ por esse coeficiente.

Vamos supor, também, que o grau de $p(x)$ é menor que o grau de $q(x)$. Caso isso não ocorra, devemos primeiro efetuar a divisão de $p(x)$ por $q(x)$.

As diversas situações serão exploradas nos exemplos.

1º Caso. *Os fatores de $q(x)$ são lineares e distintos.*

Neste caso, podemos escrever $q(x)$ na forma

$$q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

onde os a_i , $i = 1, \dots, n$, são distintos dois a dois.

A decomposição da função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ em frações mais simples é dada por

$$f(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n},$$

onde $A_1, A_2, \dots, A_n$ são constantes que devem ser determinadas.

7.5.3 Exemplos

(i) Calcular $I = \int \frac{x-2}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx$.

Solução. Temos,

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x^3 - 3x^2 - x + 3} &= \frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)} \\ &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-3}. \end{aligned}$$

Reduzindo novamente ao mesmo denominador, vem

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)} &= \frac{(x+1)(x-3)A_1 + (x-1)(x-3)A_2 + (x-1)(x+1)A_3}{(x-1)(x+1)(x-3)} \\ &= \frac{(x^2 - 2x - 3)A_1 + (x^2 - 4x + 3)A_2 + (x^2 - 1)A_3}{(x-1)(x+1)(x-3)} \\ &= \frac{(A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (-2A_1 - 4A_2)x + (-3A_1 + 3A_2 - A_3)}{(x-1)(x+1)(x-3)}. \end{aligned}$$

Eliminando os denominadores, obtemos

$$x - 2 = (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (-2A_1 - 4A_2)x + (-3A_1 + 3A_2 - A_3).$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x , segue que

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0 \\ -2A_1 - 4A_2 = 1 \\ -3A_1 + 3A_2 - A_3 = -2 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos

$$A_1 = \frac{1}{4}, A_2 = \frac{-3}{8} \text{ e } A_3 = \frac{1}{8}.$$

Portanto, a decomposição em frações parciais é dada por

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)} &= \frac{1/4}{x-1} + \frac{-3/8}{x+1} + \frac{1/8}{x-3} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x-3}, \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{3}{8} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x-3} \\ &= \frac{1}{4} \ln |x-1| - \frac{3}{8} \ln |x+1| + \frac{1}{8} \ln |x-3| + C. \end{aligned}$$

Observamos que existe outra maneira prática para determinar os valores das constantes A_1 , A_2 e A_3 . Eliminando os denominadores na igualdade

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-3},$$

obtemos

$$x-2 = (x+1)(x-3)A_1 + (x-1)(x-3)A_2 + (x-1)(x+1)A_3.$$

Podemos, agora, determinar A_1 , A_2 e A_3 tomando valores de x que anulem os diversos fatores, como segue:

$$x = 1 \rightarrow 1 - 2 = (1 + 1)(1 - 3)A_1 + (1 - 1)(1 - 3)A_2 + (1 - 1)(1 + 1)A_3$$

$$-1 = -4A_1$$

$$A_1 = \frac{1}{4};$$

$$x = -1 \rightarrow -1 - 2 = (-1 + 1)(-1 - 3)A_1 + (-1 - 1)(-1 - 3)A_2$$

$$+ (-1 - 1)(-1 + 1)A_3$$

$$-3 = 8A_2$$

$$A_2 = \frac{-3}{8};$$

$$x = 3 \rightarrow 3 - 2 = (3 + 1)(3 - 3)A_1 + (3 - 1)(3 - 3)A_2 + (3 - 1)(3 + 1)A_3$$

$$1 = 8A_3$$

$$A_3 = \frac{1}{8}.$$

$$(ii) \text{ Calcular } I = \int \frac{-4x^3}{2x^3 + x^2 - 2x - 1} dx.$$

Solução. Para resolvermos este exemplo, devemos inicialmente preparar o integrando.

Como o grau de $p(x)$ é igual ao grau de $q(x)$ efetuamos a divisão dos polinômios. Temos,

$$\frac{-4x^3}{2x^3 + x^2 - 2x - 1} = -2 + \frac{2x^2 - 4x - 2}{2x^3 + x^2 - 2x - 1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \int -2dx + \int \frac{2x^2 - 4x - 2}{2x^3 + x^2 - 2x - 1} dx \\ &= -2x + I_1, \end{aligned}$$

onde $I_1 = \int \frac{2x^2 - 4x - 2}{2x^3 + x^2 - 2x - 1} dx$.

Para resolver I_1 , ainda necessitamos preparar o integrando. Dividindo o numerador e o denominador da função integrando por 2, vem

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1/2 (2x^2 - 4x - 2)}{1/2 (2x^3 + x^2 - 2x - 1)} dx \\ &= \int \frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}} dx. \end{aligned}$$

Como as raízes de $q(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$ são $x = 1$, $x = -1/2$ e $x = -1$, temos

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1/2} + \frac{A_3}{x + 1}.$$

Eliminando os denominadores, obtemos

$$x^2 - 2x - 1 = (x + 1/2)(x + 1)A_1 + (x - 1)(x + 1)A_2 + (x - 1)(x + 1/2)A_3.$$

Substituindo x pelos valores $x = 1$, $x = -1/2$ e $x = -1$, vem

$$x = 1 \rightarrow -2 = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot A_1$$

$$A_1 = -\frac{2}{3};$$

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow 1/4 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_2$$

$$A_2 = -\frac{1}{3};$$

$$x = -1 \rightarrow 2 = -2 \cdot \frac{-1}{2} \cdot A_3$$

$$A_3 = 2.$$

Portanto,

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1/2} + 2 \cdot \frac{1}{x+1},$$

e então,

$$I_1 = -\frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1/2} + 2 \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= -\frac{2}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{3} \ln |x+1/2| + 2 \ln |x+1| + C_1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 I &= -2x - \frac{2}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{3} \ln |x+1/2| + 2 \ln |x+1| + C_1 \\
 &= -2x - \frac{2}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{3} \ln |2x+1| + \frac{1}{3} \ln 2 + 2 \ln |x+1| + C_1 \\
 &= -2x - \frac{2}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{3} \ln |2x+1| + 2 \ln |x+1| + C,
 \end{aligned}$$

onde $C = C_1 + \frac{1}{3} \ln 2$.

2º Caso. Os fatores de $q(x)$ são lineares sendo que alguns deles se repetem.

Se um fator linear $x - a_i$ de $q(x)$ tem multiplicidade r , a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma

$$\frac{B_1}{(x - a_i)^r} + \frac{B_2}{(x - a_i)^{r-1}} + \dots + \frac{B_r}{(x - a_i)},$$

onde $B_1, B_2, \dots, B_r$ são constantes que devem ser determinadas.

7.5.4 Exemplos

(i) Calcular $\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} dx$.

Solução. As raízes de $q(x)$ são $x = 2$, $x = -2$ e $x = 0$, sendo que $x = 0$ tem multiplicidade 2. Assim, o integrando pode ser escrito na forma

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} = \frac{x^3 + 3x - 1}{(x - 2)(x + 2)x^2}$$

$$= \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x}.$$

Eliminando os denominadores, obtemos

$$\begin{aligned} x^3 + 3x - 1 &= (x+2)x^2 A_1 + (x-2)x^2 A_2 + (x-2)(x+2)B_1 \\ &\quad + (x-2)(x+2)xB_2. \end{aligned}$$

Atribuindo a x os valores $x = 2$, $x = -2$ e $x = 0$, vem

$$x = 2 \rightarrow 13 = 4 \cdot 4 A_1, \quad A_1 = \frac{13}{16};$$

$$x = -2 \rightarrow -15 = -4 \cdot 4 A_2, \quad A_2 = \frac{15}{16};$$

$$x = 0 \rightarrow -1 = -2 \cdot 2 B_1, \quad B_1 = \frac{1}{4}.$$

Por esse procedimento não conseguimos determinar o valor de B_2 . Para determiná-lo, tomamos uma equação conveniente do sistema obtido igualando os coeficientes das mesmas potências de x . Usando a igualdade dos coeficientes de x^3 , obtemos

$$1 = A_1 + A_2 + B_2$$

$$1 = \frac{13}{16} + \frac{15}{16} + B_2$$

$$B_2 = -\frac{3}{4}.$$

Portanto,

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} = \frac{13}{16} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x},$$

e então,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} dx &= \frac{13}{16} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{15}{16} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2} - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x} \\ &= \frac{13}{16} \ln|x-2| + \frac{15}{16} \ln|x+2| - \frac{1}{4x} - \frac{3}{4} \ln|x| + C. \end{aligned}$$

(ii) Calcular $\int_1^2 \frac{x}{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1} dx$.

Vamos primeiro, encontrar a integral indefinida

$$I = \int \frac{x}{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1} dx.$$

Como o coeficiente do termo de mais alto grau do polinômio do denominador é diferente de 1, para resolvermos I , precisamos preparar o integrando. Dividindo o numerador e o denominador da função integrando por 8, vem

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x/8}{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}} dx \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{x}{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}} dx. \end{aligned}$$

O polinômio $q(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{1}{8}$ tem raiz $x = \frac{1}{2}$ com multiplicidade

3. Assim, o integrando pode ser escrito na forma

$$\frac{x}{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}} = \frac{A_1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{A_2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{A_3}{\left(x - \frac{1}{2}\right)}.$$

Eliminando os denominadores, vem

$$\begin{aligned} x &= A_1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)A_2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 A_3 \\ &= A_3 x^2 + (-A_3 + A_2)x + \frac{1}{4}A_3 - \frac{1}{2}A_2 + A_1. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x , segue que

$$\begin{cases} A_3 = 0 \\ A_2 - A_3 = 1 \\ A_1 - \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{4}A_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = 1 \quad \text{e} \quad A_3 = 0.$$

Portanto, a decomposição em frações parciais é dada por

$$\frac{x}{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}} = \frac{1}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2},$$

e então,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x - 1/2)^3} + \int \frac{dx}{(x - 1/2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x - 1/2)^2} - \frac{1}{x - 1/2} \right] + C \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x}{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1} dx &= \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{-1}{4(x - 1/2)^2} - \frac{1}{x - 1/2} \right] \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{-1}{4(2 - 1/2)^2} - \frac{1}{2 - 1/2} + \frac{1}{4(1 - 1/2)^2} + \frac{1}{1 - 1/2} \right] \\ &= \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Observamos que o procedimento prático adotado nos exemplos anteriores para calcular as constantes das frações parciais, não é eficiente neste exemplo, pois ele fornece apenas o valor de uma das constantes. No entanto, ele pode ser usado como ferramenta auxiliar.

3º Caso. *Os fatores de $q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis, sendo que os fatores quadráticos não se repetem.*

A cada fator quadrático $x^2 + bx + c$ de $q(x)$, corresponderá uma fração parcial da forma

$\frac{Cx + D}{x^2 + bx + c}.$

7.5.5 Exemplos

(i) Calcular $I = \int \frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} dx.$

O polinômio $q(x) = x^3 + x^2 + x - 3$ tem apenas uma raiz real, $x = 1$. Sua decomposição em fatores lineares e quadráticos é dada por

$$q(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 3).$$

Podemos, então, expressar o integrando na forma

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3}.$$

Eliminando os denominadores, vem

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x + 4 &= A(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)(x - 1) \\ &= (A + C)x^2 + (2A - C + D)x + 3A - D, \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{cases} A + C &= 2 \\ 2A - C + D &= 5 \\ 3A &- D = 4. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$A = \frac{11}{6} ; C = \frac{1}{6} \text{ e } D = \frac{9}{6}.$$

Portanto,

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} = \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{x+9}{x^2 + 2x + 3},$$

e dessa forma,

$$\begin{aligned} I &= \frac{11}{6} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{6} \int \frac{x+9}{x^2 + 2x + 3} dx \\ &= \frac{11}{6} \ln |x-1| + \frac{1}{6} I_1 + C, \end{aligned}$$

onde,

$$I_1 = \int \frac{x+9}{x^2 + 2x + 3} dx.$$

O integrando de I_1 é uma função racional cujo denominador é um polinômio quadrático irredutível. Integrais dessa forma, aparecem freqüentemente na integração das funções racionais e podem ser resolvidas completando o quadrado do denominador e fazendo substituições convenientes.

Temos,

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 &= (x^2 + 2x + 1) - 1 + 3 \\ &= (x+1)^2 + 2, \end{aligned}$$

e portanto,

$$I_1 = \int \frac{x + 9}{(x + 1)^2 + 2} dx.$$

Fazendo a substituição $u = x + 1$, temos $x = u - 1$ e $dx = du$. Então,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{u - 1 + 9}{u^2 + 2} du = \int \frac{u + 8}{u^2 + 2} du \\ &= \int \frac{u du}{u^2 + 2} + 8 \int \frac{du}{u^2 + 2} \\ &= \frac{1}{2} \ln (u^2 + 2) + \frac{8}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{\sqrt{2}} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln (x^2 + 2x + 3) + \frac{8}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

Logo,

$$I = \frac{11}{6} \ln |x - 1| + \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2} \ln (x^2 + 2x + 3) + \frac{8}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right] + C.$$

(ii) Calcular $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 4x + 5)}$

Vamos primeiro, calcular a integral indefinida

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 4x + 5)}.$$

O polinômio $q(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 4x + 5)$ não possui raízes reais e já se encontra decomposto em fatores quadráticos irredutíveis. Podemos, então, escrever o integrando na forma

$$\frac{1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 4x + 5)} = \frac{C_1x + D_1}{x^2 + x + 1} + \frac{C_2x + D_2}{x^2 + 4x + 5}.$$

Eliminando os denominadores, vem

$$\begin{aligned} 1 &= (C_1x + D_1)(x^2 + 4x + 5) + (C_2x + D_2)(x^2 + x + 1) \\ &= (C_1 + C_2)x^3 + (4C_1 + C_2 + D_1 + D_2)x^2 \\ &\quad + (5C_1 + C_2 + 4D_1 + D_2)x + 5D_1 + D_2, \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 4C_1 + C_2 + D_1 + D_2 = 0 \\ 5C_1 + C_2 + 4D_1 + D_2 = 0 \\ 5D_1 + D_2 = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$C_1 = -\frac{3}{13} ; C_2 = \frac{3}{13} ; D_1 = \frac{1}{13} \text{ e } D_2 = \frac{8}{13}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 4x + 5)} = \frac{1}{13} \cdot \frac{-3x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{13} \cdot \frac{3x + 8}{x^2 + 4x + 5},$$

e assim,

$$I = \frac{1}{13} \int \frac{-3x + 1}{x^2 + x + 1} dx + \frac{1}{13} \int \frac{3x + 8}{x^2 + 4x + 5} dx.$$

Completando os quadrados dos denominadores, vem

$$I = \frac{1}{13} \left[\int \frac{-3x + 1}{(x + 1/2)^2 + 3/4} dx + \int \frac{3x + 8}{(x + 2)^2 + 1} dx \right].$$

Fazendo a substituição $u = x + 1/2$ na primeira integral e $v = x + 2$ na segunda, obtemos

$$I =$$

$$= \frac{1}{13} \left[\int \frac{-3(u - 1/2) + 1}{u^2 + 3/4} du + \int \frac{3(v - 2) + 8}{v^2 + 1} dv \right]$$

$$= \frac{1}{13} \left[-3 \int \frac{u du}{u^2 + 3/4} + \frac{5}{2} \int \frac{du}{u^2 + 3/4} + 3 \int \frac{v dv}{v^2 + 1} + 2 \int \frac{dv}{v^2 + 1} \right]$$

$$= \frac{1}{13} \left[-\frac{3}{2} \ln(u^2 + 3/4) + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2}{\sqrt{3}} u + \frac{3}{2} \ln(v^2 + 1) + 2 \arctg v \right] + C$$

$$= \frac{1}{13} \left[-\frac{3}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{5\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4x + 5) + 2 \arctg(x + 2) \right] + C.$$

Logo,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 4x + 5)} = \frac{1}{13} \left[-\frac{3}{2} \ln 3 + \frac{5\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2} \ln 10 \right. \\ \left. + 2 \arctg 3 - \frac{5\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \ln 5 - 2 \arctg 2 \right].$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{13} \left[\frac{3}{2} \ln \frac{2}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{3} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3 - \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 \right] \\
&= \frac{1}{13} \left[\frac{3}{2} \ln \frac{2}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{18} \pi + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3 - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 \right].
\end{aligned}$$

4º Caso. Os fatores de $q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis sendo que alguns dos fatores quadráticos se repetem.

Se um fator quadrático $x^2 + bx + c$ de $q(x)$ tem multiplicidade s , a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma

$$\frac{C_1x + D_1}{(x^2 + bx + c)^s} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + bx + c)^{s-1}} + \dots + \frac{C_sx + D_s}{x^2 + bx + c}$$

7.5.6 Exemplos

(i) Calcular $I = \int \frac{x+1}{x(x^2+2x+3)^2} dx$.

O integrando pode ser escrito na forma

$$\frac{x+1}{x(x^2+2x+3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{C_1x + D_1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2+2x+3)}.$$

Eliminando os denominadores, vem

$$\begin{aligned}
x+1 &= A(x^2+2x+3)^2 + x(C_1x+D_1) + x(x^2+2x+3)(C_2x+D_2) \\
&= (A+C_2)x^4 + (4A+2C_2+D_2)x^3 + (10A+C_1+3C_2+2D_2)x^2 \\
&\quad + (12A+D_1+3D_2)x + 9A,
\end{aligned}$$

e então,

$$\begin{cases} A + C_2 = 0 \\ 4A + 2C_2 + D_2 = 0 \\ 10A + C_1 + 3C_2 + 2D_2 = 0 \\ 12A + D_1 + 3D_2 = 1 \\ 9A = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$A = \frac{1}{9}; C_1 = -\frac{1}{3}; D_1 = \frac{1}{3}; C_2 = -\frac{1}{9}; D_2 = -\frac{2}{9},$$

e assim,

$$\frac{x+1}{x(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-x+1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{-x-2}{x^2+2x+3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3} \int \frac{-x+1}{(x^2+2x+3)^2} dx - \frac{1}{9} \int \frac{x+2}{x^2+2x+3} dx \\ &= \frac{1}{9} \ln |x| + \frac{1}{3} I_1 - \frac{1}{9} I_2, \end{aligned}$$

$$\text{onde } I_1 = \int \frac{-x+1}{(x^2+2x+3)^2} dx \text{ e } I_2 = \int \frac{x+2}{x^2+2x+3} dx.$$

A integral I_2 é análoga às que foram resolvidas no decorrer dos exemplos do 3º Caso. Como naqueles exemplos, para resolvê-la, completamos o quadrado do denominador e fazemos uma substituição conveniente. Temos,

$$I_2 = \int \frac{x+2}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{x+2}{(x+1)^2+2} dx.$$

Fazendo a substituição $u = x + 1$; $x = u - 1$ e $dx = du$, vem

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{u + 1}{u^2 + 2} du \\
 &= \int \frac{u}{u^2 + 2} du + \int \frac{du}{u^2 + 2} \\
 &= \frac{1}{2} \ln (u^2 + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{\sqrt{2}} + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln (x^2 + 2x + 3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C.
 \end{aligned}$$

Uma integral como I_1 não foi vista anteriormente. Para calculá-la, inicialmente, completamos o quadrado do denominador e fazemos a mesma substituição que fizemos para calcular I_2 . Temos,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{-x + 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx \\
 &= \int \frac{-x + 1}{[(x + 1)^2 + 2]^2} dx \\
 &= \int \frac{-u + 2}{(u^2 + 2)^2} du \quad (\text{onde } u = x + 1) \\
 &= \int \frac{-u}{(u^2 + 2)^2} du + 2 \int \frac{du}{(u^2 + 2)^2} \\
 &= \frac{1}{2(u^2 + 2)} + 2 \int \frac{du}{(u^2 + 2)^2}.
 \end{aligned}$$

Para resolver a integral $\int \frac{du}{(u^2 + 2)^2}$, podemos recorrer a uma substituição trigonométrica como foi visto em 7.3. Fazemos $u = \sqrt{2} \operatorname{tg} \theta$. Então $du = \sqrt{2} \sec^2 \theta d\theta$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{du}{(u^2 + 2)^2} &= \int \frac{\sqrt{2} \sec^2 \theta \, d\theta}{(2 \operatorname{tg}^2 \theta + 2)^2} \\
 &= \int \frac{\sqrt{2} \sec^2 \theta \, d\theta}{4 \sec^4 \theta} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \cos^2 \theta \, d\theta \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{2} \cos \theta \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2} \theta \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{8} (\cos \theta \operatorname{sen} \theta + \theta).
 \end{aligned}$$

Para retornar à variável anterior u , observamos a Figura 7.2. Temos,

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + u^2}};$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{u}{\sqrt{2 + u^2}};$$

$$\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{\sqrt{2}}.$$

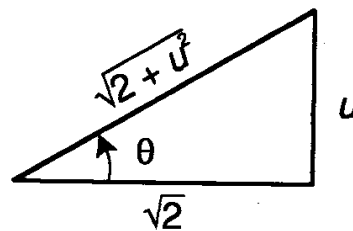


Figura 7-2

Portanto,

$$\int \frac{du}{(u^2 + 2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{8} \left[\frac{\sqrt{2} u}{2 + u^2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{\sqrt{2}} \right] + C$$

e então,

$$I_1 = \frac{1}{2(u^2 + 2)} + \frac{2\sqrt{2}}{8} \left[\frac{\sqrt{2}u}{2 + u^2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{\sqrt{2}} \right] + C.$$

Retornando à variável original x , vem

$$I_1 = \frac{1}{2(x^2 + 2x + 3)} + \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\frac{\sqrt{2}(x + 1)}{x^2 + 2x + 3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right] + C.$$

Substituindo os resultados obtidos para I_1 e I_2 na integral I , obtemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{9} \ln |x| + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2(x^2 + 2x + 3)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 3} + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{9} \left[\frac{1}{2} \ln (x^2 + 2x + 3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right] + C \\ &= \frac{1}{9} \ln |x| + \frac{x + 2}{6(x^2 + 2x + 3)} + \frac{\sqrt{2}}{36} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{18} \ln (x^2 + 2x + 3) + C. \end{aligned}$$

Na resolução das integrais de funções racionais que se enquadram no 4º Caso, normalmente aparecem integrais da forma

$$\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n}, \quad n \geq 1.$$

Se $n = 1$, esta integral nos dá arco tangente. No exemplo a seguir, encontramos uma fórmula de recorrência para esta integral, para $n > 1$.

(ii) Determinar uma fórmula de recorrência para $I_n = \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n}, \quad n > 1.$

Inicialmente, vamos escrever a integral dada na seguinte forma conveniente:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2 + u^2) - u^2}{(u^2 + a^2)^n} du \\ &= \frac{1}{a^2} \left[\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}} - \int \frac{u^2}{(u^2 + a^2)^n} du \right]. \end{aligned}$$

Agora, vamos usar integração por partes para resolver a segunda integral. Temos,

$$\int \frac{u^2}{(u^2 + a^2)^n} du = \int u \cdot \frac{u}{(u^2 + a^2)^n} du.$$

$$\text{Fazendo } u^* = u \quad \Rightarrow \quad du^* = du$$

$$dv = \frac{u du}{(u^2 + a^2)^n} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)},$$

vem

$$\begin{aligned} \int \frac{u^2}{(u^2 + a^2)^n} du &= \frac{u(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)} - \int \frac{(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)} du \\ &= \frac{u(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na expressão geral de I_n , obtemos

$$I_n = \frac{1}{a^2} \left[\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{u(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(1-n)} - \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^2} \left[\frac{u(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(n-1)} + \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)} \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}} \right] \\
&= \frac{1}{a^2} \left[\frac{u(u^2 + a^2)^{1-n}}{2(n-1)} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}} \right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{u(u^2 + a^2)^{1-n}}{2a^2(n-1)} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}}.$$

(iii) Calcular $I = \int \frac{dx}{(4x^2 + 8x + 13)^3}$.

A integral I pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{[4(x^2 + 2x + 1) + 9]^3} \\
&= \int \frac{dx}{[(2x + 2)^2 + 9]^3}.
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = 2x + 2$; $du = 2dx$, obtemos

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u^2 + 3^2)^3}.$$

Utilizando a fórmula de recorrência do exemplo anterior, vem

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{u(u^2 + 9)^{-2}}{2 \cdot 9 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 9 \cdot 2} \int \frac{du}{(u^2 + 9)^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{u}{36(u^2 + 9)^2} + \frac{3}{36} \left[\frac{u(u^2 + 9)^{-1}}{2 \cdot 9 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 1} \int \frac{du}{u^2 + 9} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{u}{36(u^2 + 9)^2} + \frac{3}{36} \left[\frac{u}{18(u^2 + 9)} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} \arctan \frac{u}{3} \right] \right\} + C \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2x + 2}{36(4x^2 + 8x + 13)^2} + \frac{3}{36} \left[\frac{2x + 2}{18(4x^2 + 8x + 13)} + \frac{1}{54} \arctan \frac{2x + 2}{3} \right] \right\} + C \\
&= \frac{x + 1}{36(4x^2 + 8x + 13)^2} + \frac{1}{12} \left[\frac{x + 1}{18(4x^2 + 8x + 13)} + \frac{1}{108} \arctan \frac{2x + 2}{3} \right] + C.
\end{aligned}$$

7.6 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 23, calcular a integral indefinida.

1. $\int \frac{2x^3}{x^2 + x} dx$

2. $\int \frac{2x + 1}{2x^2 + 3x - 2} dx$

3. $\int \frac{x - 1}{x^3 + x^2 - 4x - 4} dx$

4. $\int \frac{3x^2}{2x^3 - x^2 - 2x + 1} dx$

5. $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 2x + 1} dx$

6. $\int \frac{x - 1}{(x - 2)^2 (x - 3)^2} dx$

7. $\int \frac{(x^2 + 1)}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8} dx$

8. $\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2}$

9. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{2x^2 + 2} dx$

10. $\int \frac{5 dx}{x^3 + 4x}$

11. $\int \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1} dx$

12. $\int \frac{dx}{x^3 + 8}$

13. $\int \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx$

14. $\int \frac{dx}{x(x^2 - x + 1)^2}$

15. $\int \frac{4x^4}{x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8} dx$

16. $\int \frac{x^2}{3x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} dx$

17. $\int \frac{dx}{x^3 + 9x}$

18. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$

19. $\int \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} dx$

20. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 2)^2}$

21. $\int \frac{dx}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}$

22. $\int \frac{x dx}{(x - 1)^2 (x + 1)^2}$

23. $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)} dx$

24. Verificar a fórmula $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C$

25. Calcular a área da região limitada pelas curvas

$$y = \frac{1}{(x - 1)(x - 4)}, \quad y = \frac{1}{(1 - x)(x - 4)}, \quad x = 2 \text{ e } x = 3.$$

26. Calcular a área da região sob o gráfico de $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$, de $x = -2$ até $x = 2$.

27. Calcular a área da região sob o gráfico de $y = \frac{-1}{x^2 (x - 5)}$, de $x = 1$ até $x = 4$.

28. Calcular a área da região sob o gráfico de $y = \frac{1}{(x^2 + 3)^2}$, de $x = -2$ até $x = 2$.

7.7 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS DE SENO E COSSENO

Quando temos uma integral da forma

$$\int R(\cos x, \sin x) dx,$$

isto é, o integrando é uma função racional de $\sin x$ e $\cos x$, a integral dada pode ser reduzida a uma integral de uma função racional de uma nova variável t . Para isso, fazemos a substituição.

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi. \quad (I)$$

Para exprimir a função integrando em termos da nova variável t , precisamos encontrar $\cos x$, $\sin x$ e dx em função de t . Temos,

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) / \cos^2 \frac{x}{2}}{\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right) / \cos^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{2t}{1 + t^2}; \\
 \cos x &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{1} \\
 &= \frac{\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right) / \cos^2 \frac{x}{2}}{\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right) / \cos^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.
 \end{aligned}$$

Além disso, como $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, temos $x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$, e assim, $dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}$.

Portanto, quando fazemos a substituição $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, podemos utilizar as fórmulas

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{e} \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}. \quad (2)$$

Observamos que a substituição (1) transforma qualquer integral de função racional de seno e cosseno, numa integral de função racional de t . Por isso, ela também é conhecida como a “substituição universal” para a integração de expressões trigonométricas.

7.7.1 Exemplos

(i) Calcular $I = \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$.

Fazendo $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ e usando (2), vem

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2 dt}{1 + t^2}}{3 + 5 \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \\ &= \int \frac{\frac{2 dt}{1 + t^2}}{\frac{3 + 3t^2 + 5 - 5t^2}{1 + t^2}} \\ &= \int \frac{2 dt}{8 - 2t^2} \\ &= - \int \frac{dt}{t^2 - 4}. \end{aligned}$$

Resolvendo esta integral pelo método das frações parciais, vem

$$I = - \left[- \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t + 2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t - 2} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \ln |t + 2| - \frac{1}{4} \ln |t - 2| + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t + 2}{t - 2} \right| + C.$$

Finalmente, substituindo $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, obtemos

$$I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} \right| + C.$$

(ii) Calcular $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x + 2}.$

Usando a substituição $x = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ e (2), vem

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2 dt}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 2} \\ &= \int \frac{\frac{2 dt}{1 + t^2}}{\frac{2t + 1 - t^2 + 2 + 2t^2}{1 + t^2}} \\ &= \int \frac{2 dt}{t^2 + 2t + 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{t+1}{\sqrt{2}} \right) + C \\
&= \sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (t+1) \right] + C.
\end{aligned}$$

Substituindo $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, obtemos

$$I = \sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) \right] + C.$$

7.8 INTEGRAIS ENVOLVENDO EXPRESSÕES DA FORMA $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a \neq 0$)

Algumas integrais que envolvem a expressão $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, podem ser resolvidas usando-se uma substituição conveniente.

Podemos completar o quadrado do trinômio $ax^2 + bx + c$, para visualizar a substituição.

Os exemplos seguintes apresentam casos onde, após a substituição, a integral recai numa integral tabelada ou numa integral de um dos tipos apresentados anteriormente.

7.8.1 Exemplos

(i) Calcular $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}}$.

Vamos completar o quadrado do trinômio $x^2 + 8x + 15$. Temos,

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 4)^2 - 1.$$

Neste caso, a substituição conveniente é

$$u = x + 4 \ ; \ du = dx,$$

que transforma a integral I numa integral tabelada (ver 6.1.10 – (22)).

Temos,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} \\ &= \arg \cosh u + C \\ &= \ln \left| u + \sqrt{u^2 - 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I = \arg \cosh (x + 4) + C \quad \text{ou}$$

$$I = \ln \left| x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 15} \right| + C.$$

$$(ii) \quad \text{Calcular } I = \int \frac{3x + 2}{\sqrt{9 - 16x - 4x^2}} dx.$$

Temos,

$$9 - 16x - 4x^2 = 25 - (2x + 4)^2.$$

Logo,

$$I = \int \frac{3x + 2}{\sqrt{25 - (2x + 4)^2}} dx.$$

Para resolver esta integral, podemos usar uma substituição trigonométrica (ver Seção 7.3). Temos,

$$2x + 4 = 5 \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2};$$

$$dx = \frac{5}{2} \cos \theta \, d\theta \quad \text{e}$$

$$\sqrt{25 - (2x + 4)^2} = 5 \cos \theta.$$

Logo,

$$I = \int \frac{3 \left(\frac{5}{2} \operatorname{sen} \theta - 2 \right) + 2}{5 \cos \theta} \cdot \frac{5}{2} \cos \theta \, d\theta$$

$$= \int \left(\frac{15}{4} \operatorname{sen} \theta - 2 \right) d\theta$$

$$= -\frac{15}{4} \cos \theta - 2\theta + C.$$

Como $2x + 4 = 5 \operatorname{sen} \theta$, temos que $\operatorname{sen} \theta = \frac{2x + 4}{5}$; $\theta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{2x + 4}{5}$

$$\text{e } \cos \theta = \frac{1}{5} \sqrt{25 - (2x + 4)^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{5} \sqrt{25 - (2x + 4)^2} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{2x + 4}{5} \right) + C \\ &= -\frac{3}{4} \sqrt{9 - 16x - 4x^2} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{2x + 4}{5} \right) + C. \end{aligned}$$

A seguir apresentamos outras substituições usadas para a resolução deste tipo de integral.

Temos os seguintes casos:

(a) *O trinômio $ax^2 + bx + c$ apresenta $a > 0$.*

Neste caso, podemos usar

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a} x + t. \quad (1)$$

(b) *O trinômio $ax^2 + bx + c$ apresenta $c > 0$.*

Neste caso, podemos usar

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}. \quad (2)$$

(c) *O trinômio $ax^2 + bx + c$ tem raízes reais.*

Usamos, para este caso, a substituição

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - r) t, \quad (3)$$

onde r é qualquer uma das raízes do trinômio $ax^2 + bx + c$.

Os exemplos seguintes mostram esses casos.

7.8.2 Exemplos

(i) Calcular $I = \int \frac{dx}{x \sqrt{4x^2 + x - 3}}$.

Neste caso, o trinômio apresenta $a = 4 > 0$ e raízes reais. Portanto, podemos escolher entre as substituições dos casos (a) e (c).

Vamos escolher o caso (a), usando o sinal positivo de (I). Temos,

$$\sqrt{4x^2 + x - 3} = 2x + t.$$

Então,

$$4x^2 + x - 3 = (2x + t)^2$$

$$4x^2 + x - 3 = 4x^2 + 4xt + t^2$$

$$x - 4xt = t^2 + 3$$

$$x(1 - 4t) = t^2 + 3$$

$$x = \frac{t^2 + 3}{1 - 4t};$$

$$dx = \frac{-4t^2 + 2t + 12}{(1 - 4t)^2} dt$$

e

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + x - 3} &= 2 \cdot \frac{t^2 + 3}{1 - 4t} + t \\ &= \frac{-2t^2 + t + 6}{1 - 4t}. \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões na integral, vem

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\frac{-4t^2 + 2t + 12}{(1 - 4t)^2}}{\frac{t^2 + 3}{1 - 4t} \cdot \frac{-2t^2 + t + 6}{1 - 4t}} dt \\
 &= \int \frac{2}{t^2 + 3} dt \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + x - 3} - 2x}{\sqrt{3}} \right) + C.
 \end{aligned}$$

(ii) Calcular $I = \frac{dx}{(x + 4) \sqrt{x^2 + 4x + 9}}$.

O trinômio $x^2 + 4x + 9$ tem $a = 1 > 0$ e $c = 9 > 0$. Portanto, podemos escolher entre os casos (a) e (b).

Vamos usar (2) com o sinal positivo. Temos,

$$\sqrt{x^2 + 4x + 9} = xt + 3$$

$$x^2 + 4x + 9 = (xt + 3)^2$$

$$x = \frac{6t - 4}{1 - t^2};$$

$$dx = \frac{6t^2 - 8t + 6}{(1 - t^2)^2}$$

e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 4x + 9} &= \frac{6t - 4}{1 - t^2} t + 3 \\ &= \frac{3t^2 - 4t + 3}{1 - t^2}.\end{aligned}$$

Substituindo esses resultados na integral, vem

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{\frac{6t^2 - 8t + 6}{(1 - t^2)^2}}{\left(\frac{6t - 4}{1 - t^2} + 4\right) \cdot \frac{3t^2 - 4t + 3}{1 - t^2}} dt \\ &= \int \frac{dt}{-2t^2 + 3t} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 3/2 t}.\end{aligned}$$

Esta integral pode ser resolvida por frações parciais (ver Seção 7.5).

Como as raízes de $q(x) = t^2 - \frac{3}{2}t$ são $t = 0$ e $t = 3/2$, vem

$$\frac{1}{t^2 - \frac{3}{2}t} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t - \frac{3}{2}}.$$

Eliminando os denominadores, obtemos

$$1 = A_1(t - 3/2) + A_2 t.$$

Substituindo t pelos valores $t = 0$ e $t = 3/2$, vem

$$t = 0 \rightarrow 1 = -\frac{3}{2} A_1$$

$$A_1 = -\frac{2}{3};$$

$$t = \frac{3}{2} \rightarrow 1 = \frac{3}{2} A_2$$

$$A_2 = \frac{2}{3}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \left[\int \frac{-2/3}{t} dt + \int \frac{2/3}{t - 3/2} dt \right] \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \ln |t| - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \ln |t - 3/2| + C_1 \\ &= \frac{1}{3} \ln |t| - \frac{1}{3} \ln |2t - 3| + C. \end{aligned}$$

Voltando à variável x , temos

$$I = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 9} - 3}{x} \right| - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2\sqrt{x^2 + 4x + 9} - 3x - 6}{x} \right| + C.$$

(iii) Calcular $I = \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x - 6}}$.

Neste exemplo, $a = 1 > 0$ e o trinômio $x^2 + x - 6$ apresenta raízes reais $r_1 = 2$ e $r_2 = -3$. Podemos, então escolher entre (1) e (3). Escolhemos (3) com $r = 2$. Temos,

$$\sqrt{x^2 + x - 6} = (x - 2)t$$

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)^2 t^2$$

$$(x - 2)(x + 3) = (x - 2)^2 t^2$$

$$x + 3 = (x - 2)t^2$$

$$x = \frac{2t^2 + 3}{t^2 - 1};$$

$$dx = \frac{-10t}{(t^2 - 1)^2}$$

e

$$\sqrt{x^2 + x - 6} = \left(\frac{2t^2 + 3}{t^2 - 1} - 2 \right) \cdot t$$

$$= \frac{5t}{t^2 - 1}.$$

Substituindo em I , obtemos

$$I = \int \frac{\frac{-10t}{(t^2 - 1)^2}}{\frac{2t^2 + 3}{t^2 - 1} \cdot \frac{5t}{t^2 - 1}} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{-10t}{10t^3 + 15t} dt \\
&= \int \frac{-dt}{t^2 + \frac{3}{2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + C \\
&= -\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x - 6}}{x - 2} \right) + C.
\end{aligned}$$

7.9 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 14, calcular a integral indefinida.

1. $\int \frac{(1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)} dx$

2. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}$

3. $\int \frac{2 dx}{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}$

4. $\int \frac{dx}{4 + 5 \cos x}$

5. $\int \frac{dx}{3 + \cos x}$

6. $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$

7. $\int \frac{1 + \cos x}{1 - \operatorname{sen} x} dx$

8. $\int \frac{dx}{3 + \operatorname{sen} 2x}$

9. $\int \frac{\cos (2t - 1)}{2 - \cos (2t - 1)} dt$

10. $\int \frac{dt}{3 + \operatorname{sen} t + \cos t}$

11. $\int \frac{e^x dx}{4 \operatorname{sen} e^x - 3 \cos e^x}$

12. $\int \frac{\cos \theta d\theta}{1 + \cos \theta}$

13.
$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

14.
$$\int \frac{d\theta}{4 - \sin \theta + \cos \theta}$$

15. Calcular a área sob a curva $y = \frac{1}{2 + \sin x}$, de $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$.

16. Calcular a área limitada pelas curvas $y = \frac{1}{2 + \cos x}$ e $y = \frac{1}{2 - \cos x}$, entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Nos exercícios de 17 a 33, calcular a integral indefinida.

17.
$$\int \frac{dx}{x \sqrt{5x - x^2 - 6}}$$

18.
$$\int \frac{dx}{(x + 4) \sqrt{x^2 + 4x + 9}}$$

19.
$$\int \frac{dx}{x \sqrt{4x^2 + x - 3}}$$

20.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2}}$$

21.
$$\int \frac{dx}{x \sqrt{2 + x - x^2}}$$

22.
$$\int \frac{x + 1}{(2x + x^2) \sqrt{2x + x^2}} dx$$

23.
$$\int \frac{dx}{(x - 1) \sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

24.
$$\int \frac{1 - \sqrt{1 + x + x^2}}{2x^2 \sqrt{1 + x + x^2}} dx$$

25.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$$

26.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

27.
$$\int \frac{dx}{(2x + 1) \sqrt{4x^2 + 4x}}$$

28.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 12x + 5}}$$

29.
$$\int \frac{dx}{(2x - 1) \sqrt{x^2 - x + 5/4}}$$

30.
$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x - 3}}$$

31.
$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 4x - 4}}$$

32.
$$\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x}} dx$$

33.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$$