PROJETO DE ENSINO

CURSO DE MATEMÁTICA BÁSICA

2020

PROFESSORAS

CLEIDE VIEIRA

FERNANDA PERAZZOLO DISCONZI

Acadêmico:

____

SUMÁRIO

1 NÚMEROS E OPERAÇÕES

1.1 Conjuntos Numéricos

1.1.1 Conjunto dos números Naturais

São todos os números inteiros positivos e inclusive o zero.

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

1.1.2 Conjunto dos números Inteiros

São todos os números inteiros positivos e negativos inclusive o zero.

Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

1.1.3 Conjunto dos números Racionais

São todos os números que podem ser escrito sob a forma de fração $\frac{a}{b}$, com a e $b \in Z$ e $b \neq 0$.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,\ b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

onde $\frac{a}{b} = \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$.

1.1.4 Conjunto dos números Irracionais

É um número que não pode ser escrito sob a forma de fração. Os números irracionais têm infinitos decimais não-periódicos. Encontramos esses números nas **raízes não exatas**, no **número** π (pi) e na **exponencial** e**.**

Por exemplo:

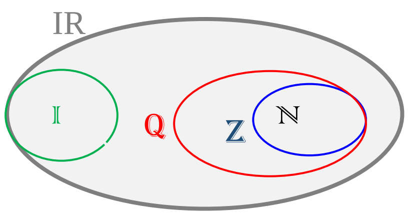
$\sqrt{2}$ = 1,414213562 **...**

π = 3,14159265 **...**

$e = 2{,}718281828...$

1.1.5 Conjunto dos números Reais

A união dos conjuntos dos números racionais com o conjunto dos números irracionais constitui o conjunto dos números reais, representado pela letra IR.



1.2 Operações Numéricas

1.2.1 Adição e Subtração

Sinais iguais: *Somam-se os valores e dá-se o sinal comum.*
Sinais diferentes: *Subtraem-se os valores e dá-se o sinal do valor maior.*

Exercícios resolvidos:

a) 2 + 4 = 6
b) – 2 – 4 = – 6
c) 5 – 3 = + 2 = 2
d) – 5 + 3 = – 2

1.2.2 Multiplicação e Divisão

Sinais iguais → resposta positiva
Sinais diferentes → resposta negativa

$(+) . (+) = (+)$	$(+) : (+) = (+)$
$(-) . (-) = (+)$	$(-) : (-) = (+)$
$(+) . (-) = (-)$	$(+) : (-) = (-)$
$(-) . (+) = (-)$	$(-) : (+) = (-)$

Exercícios resolvidos:

a) 12 . 3 = 36
b) (-12) . (-3) = 36
c) 7 . (-5) = - 35
d) (-2) . 9 = - 18
e) 22 : 2 = 11
f) 20 : (- 5) = - 4
g) $\frac{-20}{-5}$ = + 4 = 4
h) $\frac{-20}{5}$ = - 4

1.2.3 Potenciação

Existe uma forma abreviada de escrever uma multiplicação de fatores iguais. No caso

Expoente

$$\underbrace{7 . 7 . 7}_{\text{3 fatores iguais a 7}} = 7^3$$

Base

Nessa operação, que é denominada **potenciação**, temos:

★ **potência**, indica um produto de fatores iguais;
★ **base**, o fator que se repete;
★ **expoente**, indica quantas vezes a base se repete como fator.

Assim:

★ $2^3 = 2 . 2 . 2 = 8$ $\therefore$ $2^3 = 8$

★ $(-1)^4 = (-1) . (-1) . (-1) . (-1) = 1$ $\therefore$ $(-1)^4 = 1$

CASOS PARTICULARES:

a) A potência de expoente 1 (1º grau) é igual à base:

$a^1 = a$ $\quad$ $2^1 = 2$

b) Toda potência de base 1 é igual a 1:

$1^2 = 1$ $\quad$ $1^{17} = 1$

c) Toda potência de base 0 é igual a 0:

$0^2 = 0$ $\quad$ $0^9 = 0$

d) Toda potência de *expoente par* é positiva:

$(-2)^4 = 16$ $\quad$ $2^4 = 16$ $\quad$ $(-3)^2 = 9$ $\quad$ $3^2 = 9$

e) Toda potência de *expoente ímpar* mantém o sinal da base:

$3^3 = 27$ $\quad$ $(-3)^3 = -27$

$(+2)^5 = 32$ $\quad$ $(-2)^5 = -32$

f) Toda potência de base diferente de zero *e expoente zero* é igual a uma unidade.

$$a^0 = 1, \text{ com } a \neq 0$$

$$5^0 = 1$$

$$(-72)^0 = 1$$

Realmente: $\begin{cases} a^4 : a^4 = a^{4-4} = a^0 \\ a^4 : a^4 = 1 \end{cases} \rightarrow \quad a^0 = 1$

g) Toda potência de *expoente negativo* é igual ao **inverso da base**:

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$$

$$\left(-\frac{1}{7}\right)^{-2} = (-7)^2 = 49$$

h) Toda *potência de base 10*, escrevemos à direita da unidade tantos zeros quantas forem às unidades do expoente.

a) $10^2 = 100$

b) $200 = 2 . 100 = 2 . 10^2$

c) $300\,000 = 3 . 100000 = 3 . 10^5$

d) $3 . 10^8 = 300\,000\,000$

e) $10^7 = 10\,000\,000$

f) $4000 = 4 . 10^3$

Propriedades da Potenciação:

$$\begin{cases} a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ a^m : a^n = a^{m-n} \text{ (com } a \neq 0) \\ (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\ a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \\ \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \text{ (com } b \neq 0) \end{cases}$$

Operações com potências

i) **Multiplicação de potências de mesma base:**

Mantém-se a base comum e somam-se os expoentes.

$$2^3 . 2^2 = \underbrace{\underbrace{2.2.2}_{3\text{ vezes}} . \underbrace{2.2}_{2\text{ vezes}}}_{5\text{ vezes}} = 2^{3+2} = 2^5$$

ii) Divisão de potências de mesma base:

Mantém-se a base comum e diminuem-se os expoentes.

$$\frac{5^6}{5^4} = \frac{\overbrace{5.5.5.5.5.5}^{6\text{ vezes}}}{\underbrace{5.5.5.5}_{4\text{ vezes}}} = 5^{6-4} = 5^2$$

iii) Multiplicação de potências de mesmo grau:

Multiplicam-se as bases e conserva-se o expoente comum.

$$2^2 . 7^2 = 2 . 2 . 7 . 7 = (2 . 7)^2$$

iv) Divisão de potências de mesmo grau:

Dividem-se as bases e conserva-se o expoente comum.

$$\frac{2^2}{7^2} = \frac{2.2}{7.7} = \frac{2}{7} . \frac{2}{7} = \left(\frac{2}{7}\right)^2$$

v) Potenciação de potência:

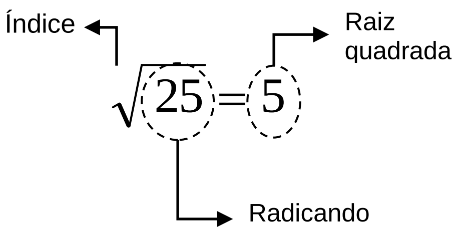
Eleva-se a base ao produto dos expoentes.

$$(2^3)^2 = \underbrace{2^3 \, . \, 2^3}_{\text{2 vezes}} = 2^{3+3} = 2^6$$

$$(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6$$

1.2.4 Radicais

Dizemos que 9 é uma raiz quadrada de 81 porque 9 . 9 = 81. Representamos a raiz pelo símbolo $\sqrt{}$.



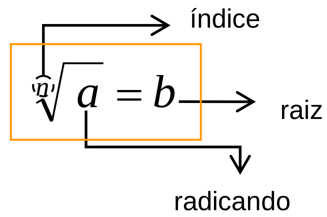
Assim:

- ★ $\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$
- ★ $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$
- ★ $\sqrt[4]{-81} \notin IR$

De modo geral podemos escrever:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a \quad n \in N^* \; e \; n \geq 2.}$$

onde



a) Propriedades dos radicais

i) $\sqrt[n]{a^n} = a$

Exemplo:

a) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4^3 = 64$

ii) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$

Exemplos:

a) $\sqrt{5x^2} = \sqrt{5}.\sqrt{x^2} = x\sqrt{5}$

b) $\sqrt{7}.\sqrt{2} = \sqrt{14}$

iii) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Exemplos:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $\sqrt{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

iv) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$

Exemplo:

a) $\sqrt[8]{x^6} = \sqrt[8:2]{x^{6:2}} = \sqrt[4]{x^3}$

v) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{3}}} = \sqrt[24]{3}$

vi) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Expoente fracionário:

Uma potência com expoente fracionário pode ser convertida numa raiz, cujo radicando é a base, o índice é o denominador do expoente, sendo o numerador o expoente do radicando.

Exemplos:

a) $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{10^1} = \sqrt{10}$

b) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

c) $9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

vii) $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{m.p}}$

Potenciação de radicais:

Eleva-se o radicando à potência indicada e conserva-se o índice.

Exemplos:

a) $\left(\sqrt{7}\right)^2 = \sqrt{7^2} = 7$

b) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^3 = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$

c) $\left(\sqrt[5]{2^2 . 3}\right)^2 = \sqrt[5]{\left(2^2 . 3\right)^2} = \sqrt[5]{2^4 . 3^2}$

b) Simplificação de radicais

Simplificar um radical significa obter uma expressão mais simples equivalente ao radical dado. Para isso utilizamos as propriedades já citadas. Observe:

Fatoramos: $12 = 2^2.3$

$$\sqrt{12x^3} = \sqrt{2^2.3.x^2.x^1} = \sqrt{2^2}.\sqrt{3}.\sqrt{x^2}.\sqrt{x} = 2x\sqrt{3x}$$

Aplicamos *o produto de potências de mesma base* para extrair fatores do radicando.

Exercícios resolvidos:

a) $\sqrt{(x+5)^3} = \sqrt{(x+5)^2.(x+5)} = (x+5)\sqrt{(x+5)}$

b) $\sqrt{180x^5} = \sqrt{2^2 . 3^2 . 5.x^2.x^2.x} = 2.3.x.x\sqrt{5x} = 6x^2\sqrt{5x}$

c) $\sqrt[4]{3^8} = \sqrt[4]{3^4.3^4} = 3^2 = 9$

Reciprocamente, para introduzir um fator no radical, *multiplica-se o expoente do fator pelo índice do radical*. Observe:

i) $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 . 2}$

ii) $6x^2.\sqrt{5x} = \sqrt{6^2.(x^2)^2.5x} = \sqrt{180x^5}$

c) Operações com os radicais.

★ **Adição e subtração de radicais semelhantes**

Radicais de mesmo *índice* e mesmo *radicando* são semelhantes. Na adição e subtração de radicais semelhantes, operam-se os coeficientes e conserva-se o radical. Observe:

Coeficientes

$$11\sqrt{5x} - 7\sqrt{5x} + \sqrt{5x} = (11 - 7 + 1)\sqrt{5x} = 5\sqrt{5x}$$

Exercícios resolvidos:

a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

b) $3\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

★ **Multiplicação e divisão de radicais de mesmo índice**

Multiplicam-se ou dividem-se os radicandos e os coeficientes entre si e dá-se ao produto ou quociente *o índice comum*. Observe:

$$\sqrt[3]{5x} . (-2y.\sqrt[3]{4x^2}) . y\sqrt[3]{x} = -2y^2.\sqrt[3]{20x^4}$$

Exercícios resolvidos:

a) $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{2.3} = \sqrt{6}$

b) $\frac{-4\sqrt{6}}{8\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{6}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $(-2a.\sqrt[4]{3}) . 3a\sqrt[4]{5} . (-a.\sqrt[4]{2}) = 6a^3 . \sqrt[4]{30}$

d) $\frac{\sqrt[4]{5} . \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{15}{2}}$

d) Racionalização de denominadores

A fração $\frac{5}{\sqrt{3}}$ tem no seu denominador um *número irracional.* A racionalização de denominadores consiste na obtenção de uma fração com denominador racional, equivalente. A essa transformação, damos o nome de *racionalização de denominadores*.

Para racionalizar o denominador de uma fração devemos multiplicar os termos dessa fração por uma expressão com radical, denominado *fator racionalizante*, de modo a obter uma nova fração equivalente com denominador sem radical.

1º Caso: O denominador é um radical de índice 2. Neste caso, o *fator racionalizante* é o próprio radical do denominador. Observe:

Fator racionalizante

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} . \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

Exercícios resolvidos:

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{-7}{2\sqrt{3}} = \frac{-7}{2\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-7\sqrt{3}}{2\sqrt{9}} = \frac{-7\sqrt{3}}{2 . 3} = \frac{-7\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} . \sqrt{6}}{5\sqrt{6} . \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{12}}{5\sqrt{36}} = \frac{2\sqrt{12}}{5 . 6} = \frac{2\sqrt{12}}{30} = \frac{\sqrt{12}}{15}$

2º Caso: O denominador é uma soma ou diferença de dois termos em que um deles, ou ambos, são radicais. Neste caso, o fator racionalizante será *a expressão conjugada do denominador*, onde a expressão conjugada de **(a + b)** é **(a – b)**. Observe:

O fator racionalizante é
a expressão conjugada
do denominador.

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

$$\sqrt{5}+\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{5}-\sqrt{2}$$

Na racionalização aparecerá no denominador um produto notável do tipo (a + b)(a – b) = a² - b². Por exemplo:

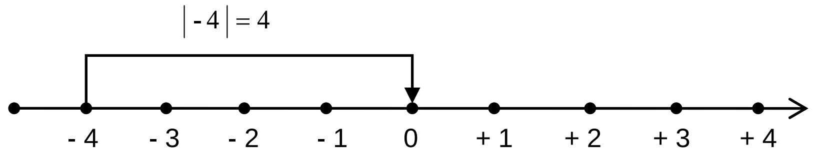
1. $(5 + 3x)(5 - 3x) = 5^2 - (3x)^2 = 25 - 9x^2$
2. $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 5 - 2 = 3$

Exercício resolvido:

a) $\frac{5}{2+\sqrt{3}} = \frac{5}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{5.\left(2-\sqrt{3}\right)}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{5.\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3} = \frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{1} = 5\left(2-\sqrt{3}\right)$

1.3 Valor absoluto ou Módulo

Observe a reta numérica, onde estão representados alguns números inteiros:



À distância entre um número e o zero na reta, chamamos de *módulo* ou *valor absoluto* do número. Indicamos o módulo de um número pelo símbolo $|\ |$.

Por exemplo, a distância do – 4 até a origem é 4 unidades, ou seja, o módulo do – 4 é 4.

Exercícios Resolvidos:

a) $|-9| = 9$

b) $|+5| = 5$

c) $|0| = 0$

1.4 Operações com frações

1.4.1 Adição e Subtração

FRAÇÕES COM DENOMINADORES IGUAIS

"Para *adicionar* ou *subtrair* frações com mesmo denominador, devemos adicionar ou subtrair os numeradores e conservar o denominador".

Exercício Resolvido

1) Joaquim gasta $\frac{4}{9}$ do seu salário com aluguel e $\frac{1}{9}$ com alimentação. Pergunta-se:

a) Que fração do salário Joaquim gastou no total?

b) Que fração do salário sobrou?

Resolução

a) Adicionando os gastos, temos: $\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$

b) O salário de Joaquim corresponde a um inteiro $\left[\frac{9}{9}=1\right]$

$$1-\frac{5}{9}=\frac{9}{9}-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

Portanto, Joaquim gastou $\frac{5}{9}$ do salário e sobraram $\frac{4}{9}$.

1.4.2 Fatoração

A decomposição de um número em um produto de fatores primos é feita por meio do dispositivo prático que será mostrado nos exemplos a seguir.

Exercícios resolvidos:

1) 30 = 2 . 3 . 5

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array} \rightarrow \text{Fatoração multiplicação}$$

2) 45 = 3^2 . 5

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 3^2 \cdot 5 \end{array}$$

OBS: Número primo é um número que possui apenas dois divisores: o *próprio número* e o *número 1*. Veja os primeiros números primos:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

1.4.3 Mínimo múltiplo comum (m.m.c.)

O mínimo múltiplo comum de vários números é o menor número divisível por todos eles.

Exercício resolvido:

1) Calcular o m.m.c. (12, 16, 8) = 48

$$\begin{array}{ccc|c} 12, & 16, & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 48 \end{array}$$

FRAÇÕES COM DENOMINADORES DIFERENTES

Exercícios Resolvidos

1) $\frac{9}{2}+\frac{5}{6}=\frac{27+5}{6}=\overset{:2}{\frac{\cancel{32}}{\cancel{6}}}=\frac{16}{3}$ mmc (2, 6) = 6

2) Joaquim e Francisco estão pintando um muro. Joaquim já pintou $\frac{3}{4}$ do muro, e Francisco $\frac{1}{8}$.

a) Que parte do muro eles já pintaram no total?

b) Quanto que Joaquim pintou a mais que Francisco?

Resolução

a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{6+1}{8}=\frac{7}{8}$

b) $\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{6-1}{8}=\frac{5}{8}$

Portanto, eles pintaram juntos $\frac{7}{8}$ do muro e Joaquim pintou $\frac{5}{8}$ a mais que Francisco.

1.4.4 Multiplicação

Para *multiplicar* as frações, devemos multiplicar numeradores com numeradores e denominadores com denominadores.

Exercícios Resolvidos

1) $\left(-\frac{3}{7}\right).\left(-\frac{5}{2}\right)=+\frac{15}{14}$

2) $4.\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{3}$

1.4.5 Divisão:

Para *dividir* uma fração por outra fração, devemos multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda fração.

Exercícios Resolvidos

Inverter a segunda fração

1) $-\frac{5}{3} : \left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = +\frac{\cancel{45}}{\cancel{6}}\overset{:3}{=} \frac{15}{2}$

2) $-\frac{1}{3} : 8 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{24}$

3) $\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{1} = -\frac{4}{3}$

4) $\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

1.4.6 Potenciação

Exercícios Resolvidos

1) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{25}$

2) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$

3) $\left(\frac{17}{9}\right)^0 = 1$

1.4.7 Radiciação

Exercícios Resolvidos

1) $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$

2) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

3) $\sqrt{-\frac{1}{4}} \notin IR$

4) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$

Exercícios - MÓDULO I

1) Simplifique as expressões numéricas:

a) 9 + 3 . 2 =

b) 8 . 7 – 18 =

c) 6 . 12 + 6 . 8 =

d) 9 . 15 – 6 .15 =

e) 8 . 3 – 20 + 4 . 2 =

f) 100 – 3 . 24 =

g) 256 – 2 . 72 – 2 . 36 =

h) 9 . 7 – 7 . 9 + 1 =

i) 40 . 8 : 2 =

j) 28 : 4 . 7 =

l) 45 : 5 – 45 : 9 =

m) 48 : 16 + 3 . 2 =

n) 98 : 7 – 6 : 3 =

o) 42 : 6 – 5 =

p) 27 : 3 : 3 : 3 . 10 =

q) 45 – 15 : 5 . 3 =

r) 100 – 0 : 4 . 10 =

s) 0 : 12 + 3 . 9 =

2) Calcule:

a) 9(10 + 2) =

b) 9(2 + 5) – 10(6 – 2) =

c) 54 : (9 . 3 – 3 . 3) + 3 . 1 =

d) 6(42 : 7 – 4) – 0 : 3 =

e) (4 . 8 : 2) : 8 + 2 . 5 =

f) 256 : (32 : 2 : 2 : 2) : 4 =

g) [15 + 2(3 + 4)] =

h) [45 – (3 . 5 – 2)] : 8 =

i) 6[(36 : 9 – 3) . (8 : 2)] : 3 =

j) 6 . 8 + [48 : 12 – 48 : (4 + 12)] =

l) 48 – 2[125 : 5 – (8 – 36 : 6)] : 2 =

m) 100 – {2[25 – (27 : 9 + 24 – 7)]} : 2 =

n) 6{48 : [6 . 6 – (16 : 4 + 8)]5} =

o) 200 : {3[3 . 10 : 30] + (2 . 1)} =

p) {54 + [72 : 2 + (7 . 9 – 6 : 2)] + 3} : 9 =

3) Simplifique as expressões numéricas:

a) $30^2 : [2^3 . 2^2 – (9^2 : 3^2) + 2 . \sqrt{16} - 1] =$

b) $4^4 – [96 : (2^2 . \sqrt{9}) + 8^2 : \sqrt{64}]2^4 =$

c) $\sqrt{16} . 3^3 – [11^2 – (\sqrt{9} . \sqrt{49})1^{100}] + 2^3 =$

d) $12^2 - 12^2 : [(9^2 - \sqrt[3]{1}) : \sqrt{100}\,]7 =$

e) $6^3 : \sqrt{81} : 2^2 - \sqrt[3]{8} =$

f) $\sqrt[4]{16}\,[10^3 : 5^2 - (7^2 - 3^2) : \sqrt{100}\,] : 9 =$

4) Calcule o valor de cada expressão numérica:

a) $\sqrt{4} + \sqrt{81} =$

b) $\sqrt{81 - 72} =$

c) $\sqrt{100} - \sqrt{64} =$

d) $\sqrt{100 - 64} =$

e) $\sqrt{13^2 - 12^2} =$

f) $\sqrt{5^2 - 4^2} =$

g) $\sqrt{5^2 + 12^2} =$

h) $\left(\sqrt{100}\right)^2 =$

i) $3\sqrt{81} - \sqrt{4} =$

j) $\sqrt{52 - 3} + 2\sqrt{64} =$

l) $\sqrt{4^2 + 2^3 + 3^2 + 3^1} =$

m) $\sqrt{100 : 10 - 1} =$

n) $\left(\sqrt{81}\right)^2 =$

o) $-\left(-\sqrt{49}\right)^2 =$

p) $\sqrt{5^2 - 3^2} =$

q) $-\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} =$

r) $\sqrt{(-10)^2 - (-8)^2} =$

s) $-\sqrt{5^2 - (-4)^2} =$

t) $\sqrt{(-3)^2 - 4(+7)(-4)} =$

5) Simplifique as expressões numéricas:

a) 2 + 3 – 1 =

b) – 2 – 5 + 8 =

c) – 1 – 3 – 8 + 2 – 5 =

d) – 15 + (- 25) – (- 81) =

e) 18 + (- 29) – (+ 45) =

f) 104 – 45 – 28 =

g) (- 73) + (- 98) =

h) + (+ 9 – 5 + 1) – (- 4 – 3 + 2) =

i) – (+ 10 – 20) + (- 40 + 50 – 60) =

6) Calcule:

a) – 8 – (2 + 3) =

b) – 20 – (5 – 1) =

c) – 16 – 9 – (4 + 3) – (-12 + 7) =

d) (- 3 + 6 – 11) – (- 1 2 – 15 + 16) + (17 – 20 + 3) =

e) – (- 8 + 1) – (- 9 – 3) =

f) (-1 – 2 – 3) – (+7 -6 +8) =

g) (-5 + 3 – 10) – (-16 + 8 - 9) =

7) Calcule:

a) o triplo de – 2:

b) o quádruplo de -1:

c) o dobro de – 4 adicionado a – 5:

d) o triplo de + 2 adicionado a – 10:

e) o dobro de – 2 adicionado ao triplo de – 1:

f) o quádruplo de -3 adicionado ao dobro de 12:

8) Efetue as multiplicações:

a) – 2 . 8 =

b) (+ 5) . (- 3) =

c) – 6 . (+ 1,75) =

d) (+ 5) . (- 4) =

e) 10 . (- 9) =

f) (- 1,2) . (-1,5) =

g) 4 . (- 15) =

h) -10 . (+ 10) =

i) (- 0,7) . (+ 0,8) =

j) 100 . 10 =

l) (- 15) . (+ 16) =

m) (- 0,5) . (- 0,5) =

n) 2 . (- 2) . (- 2) =

o) (- 3) . (- 4) . (- 1) =

p) – 1. (+ 5) . (- 10) =

q) (+ 6) . (- 6) . (+ 2) . (- 2) =

r) (- 10) . (- 1) .(+ 4) . (+ 17) . 0 =

9) Calcule os quocientes:

a) 30 : (- 6) =

b) – 50 : (+ 2) =

c) 30 : (+ 5) =

d) – 121 : (- 11) =

e) 20 : (- 20) =

f) – 20 : (- 1) =

g) [(- 16) : (- 2)] : (- 2) =

h) [(- 4) : (- 1)] . [(- 20) : (- 4)] =

i) [(+ 8) : (- 4)] : [(- 20) : (- 10)] =

j) $\dfrac{(+7).(-3)}{(-4):(+4)} =$

l) $\dfrac{-100:(-5):(-5)}{-2.1} =$

m) $\dfrac{(-2)^3-(-5)^3}{(-2)^2+(-2)(-5)+(-5)^2} =$

n) $\dfrac{4}{-2} =$

o) $\dfrac{-8}{2} =$

p) $\dfrac{-20}{-5} =$

q) $\dfrac{(-4).(-1)}{-2} =$

r) $\dfrac{(-1+3-5).(2-7)}{-1} =$

s) $\dfrac{(2+3.4-2.5-3)}{-1} =$

10) Calcule:

a) a metade de – 80:

b) a terça parte de 60:

c) a quarta parte de – 20:

d) a quinta parte de 100:

e) a metade de -10 multiplicado por 4:

f) o dobro de - 8 dividido por - 4:

g) a terça parte de + 60 dividida por -10:

h) a quarta parte de – 100 adicionada à metade de – 18:

11) Calcule as potências:

a) $1^3 =$

b) $0^4 =$

c) $(-2)^3 =$

d) $(-4)^3 =$

e) $(-2)^4 =$

f) $(-4)^4 =$

g) $2^3 . 2^5 =$

h) $2 . 3^{-1} =$

i) $3^5 : 3^4 =$

j) $3^4 : 3^2 . 3^5 =$

l) $2^4 . 5^4 =$

m) $(2 . 3^2)^0 =$

n) $15^3 : 3^3 =$

o) $(-4)^6 : 2^6 =$

p) $(3^3)^2 =$

q) $(-2^2)^5 =$

r) $(-3^3)^2 =$

s) $\dfrac{2}{3^{-4}} =$

t) $(2 \cdot 3)^3 =$

u) $(3^2 \cdot 5 \cdot 2)^{-1} =$

v) $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^5 =$

x) $\left(-\dfrac{2}{3^4}\right)^2 =$

z) $4^{-2} =$

12) Calcule:

a) o quadrado de – 9:

b) o cubo de – 1:

c) a quarta potência de – 2:

d) a quinta potência de zero:

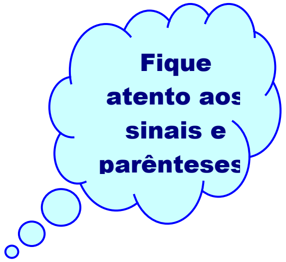
e) o quadrado de – 5 adicionado ao cubo de -1:

f) a terça parte do cubo de – 3:

g) o cubo de – 1 multiplicado pelo quadrado de 6:

h) a quarta parte do quadrado de – 6:

13) Use os símbolos de > (maior), < (menor) ou = (igual) e compare as potências:



a) -5^3 ___ $(-5)^3$

b) $(-2)^2$ ___ -2^2

c) -4^3 ___ $(-4)^3$

d) -1^4 ___ $(-1)^4$

e) $(-3)^2$ ___ $(-3)^3$

f) $(-4)^1$ ___ $(-4)^0$

g) -4^2 ___ $(-2)^3$

h) -5^2 ___ -5^{-2}

i) $\dfrac{1}{3^{-3}}$ ___ 3^{-3}

14) O produto dos resultados das três expressões representa o número de anos que durou a construção de um castelo na Espanha. Se ele começou a ser construído no ano 250 a.C., em que ano terminou a construção?

1ª $\{(-2) + (-3)(-9) + 4(-5) - [-5.(-1)]\}(-2) - 5$

2ª $[6(-6)(-3) + 100(-1)](-3) + 19$

3ª $\{-100 + (-64)(-2) - (-2)(-2)(-2)(-2) - 1.17\}(-1)$

15) Reduza a expressão com uma única potência de base – 3. Depois, efetue a potenciação.

a) $[(-3)^5]^2 : (-3)^8 =$

b) $[(-3)^1]^2(-3)^3 : (-3)^4 =$

c) $(-3)^{10}(-3)^6 : [(-3)^2]^8 =$

d) $(-3)^6 : (-3)^2 : [(-3)^1]^0 =$

e) $\dfrac{[(-3^8)]^3 : [(-3)^6]^3}{(-3)^0(-3)^3} =$

f) $\dfrac{(-3)^{10}(-3)^5}{[(-3)^2]^5} =$

16) Determine o mínimo múltiplo comum de 8 e 12.

17) Qual é o mmc do 10 e 18?

18) Calcule as operações com as frações:

a) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{6}=$

b) $\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{12}=$

c) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{6}{9}=$

d) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{10}{15}=$

e) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{9}=$

f) $\dfrac{5}{6}-\dfrac{2}{5}=$

g) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{7}{15}=$

h) $\dfrac{13}{14}-\dfrac{5}{7}=$

i) $\dfrac{1}{12}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{3}-2=$

j) $\dfrac{7}{3}+\dfrac{5}{4}-4=$

19) Determine cada produto e escreva na forma mais simples:

a) $\left(-\frac{8}{6}\right).\left(+\frac{3}{4}\right)=$

b) $\left(-\frac{5}{2}\right).\left(-\frac{10}{7}\right)=$

c) $-6.\left(-\frac{2}{3}\right).\left(+\frac{5}{2}\right)=$

d) $\left(+\frac{3}{4}\right).\left(-\frac{8}{6}\right)=$

e) $\left(-\frac{2}{5}\right).\left(-\frac{7}{10}\right)=$

f) $4.\left[\left(-\frac{4}{3}\right).\left(+\frac{3}{2}\right)\right]=$

g) $\frac{1}{2}\ .\left(-\frac{3}{5}\right)=$

h) $\left(-\frac{1}{4}\right)\ .\frac{1}{2}=$

i) $-\frac{11}{4}\ .\ \left(+\frac{16}{5}\right)=$

j) $-\frac{1}{3}.\frac{2}{5}=$

l) $\left(-\frac{3}{7}\right).\left(+\frac{1}{3}\right).\left(-\frac{2}{5}\right)=$

m) $\left(-\frac{1}{6}\right).\left(-\frac{2}{5}\right)=$

20) Efetue e simplifique se possível:

a) $+\frac{3}{4}:\left(+\frac{9}{2}\right)=$

b) $-\frac{1}{2}:\left(+\frac{1}{8}\right)=$

c) $0{,}5:\frac{1}{3}=$

d) $-4:\frac{1}{5}=$

e) $\frac{7}{6}:2=$

f) $\left(-\frac{1}{2}\right):(-2)=$

g) $\dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}}=$

h) $\dfrac{-5}{\frac{2}{3}}=$

i) $\dfrac{\frac{13}{3}}{-\frac{9}{4}}=$

21) Calcule:

a) $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}.\frac{1}{4}=$

b) $2.\left(-\frac{2}{5}\right):\frac{1}{5}=$

c) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\right):\frac{1}{2}=$

d) $\dfrac{1+\dfrac{1}{3}}{3} =$

e) $\dfrac{1+\dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}} =$

f) $\dfrac{1+\dfrac{1}{1+1}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}} =$

g) $\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}} : \left(\dfrac{9}{17}+1\right) =$

22) Efetue as operações:

a) 2,31 + 4,08 + 3,2 =

b) 4,03 + 200 + 51,2 =

c) 32,4 – 21,3 =

d) 48 – 33,45 =

e) 2,1 . 3,2 =

f) 48,2 . 0,031 =

g) 3,21 . 2,003 =

h) 8,4708 : 3,62 =

i) 682,29 : 0,513 =

j) 2803,5 : 4450 =

l) (FUVEST) $\dfrac{0{,}2 \,.\, 0{,}3}{3{,}2-2{,}0} =$

m) 0,041 . 21,32 . 401,05 $\cong$

n) 0,0281 : 0,432 $\cong$

o) $\dfrac{2{,}31 \,.\, 4{,}82}{5{,}1} \cong$

p) $\dfrac{0{,}021 \,.\, 4{,}32}{0{,}285} \cong$

23) Qual é a soma do dobro de – 4,75 e o triplo de -1,2?

24) Calcule:

a) o quádruplo de 1,3:

b) o dobro de -5,2:

25) Rafaela apostou que 1,6 **.** (- 0,25) é $-\frac{4}{10}$. Ele ganhou a aposta?

26) Calcule o módulo do resultado da expressão $2\,.\left(-\frac{1}{3}\right)-2$.

27) Decomponha o radicando em fatores primos e simplifique os radicais:

a) $\sqrt[8]{64} =$

b) $\sqrt{288} =$

c) $\sqrt[3]{40} =$

d) $-5\sqrt{320} =$

e) $\sqrt{\frac{16x^6y^4}{xy}} =$

f) $\sqrt[3]{a^4b^3c^7} =$

g) $\sqrt[3]{9a^6b^4} =$

h) $2\sqrt[3]{\frac{a^4b^3}{16x^4}} =$

28) Calcule:

a) $\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 10\sqrt{5} =$

b) $\sqrt{32} + 3\sqrt{2} - \sqrt{8} =$

c) $3\sqrt{3} + \sqrt{3} =$

d) $-12\sqrt[3]{5} - 8\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} =$

e) $\sqrt{32} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75} + 3\sqrt{72} =$

f) $3\sqrt{8a} - 5\sqrt{2a} + 2\sqrt{32a} - \sqrt{128a} =$

29) Efetue:

a) $\sqrt{3}\,.\,\sqrt{6} =$

b) $\left(-\sqrt[3]{2}\right).\left(-\sqrt[3]{4}\right) =$

c) $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2}} =$

d) $\sqrt[5]{\frac{x^4}{y^3}}\,.\,\sqrt[5]{\frac{2x}{y^2}} =$

e) $6\sqrt[3]{ab}\,.\,2\sqrt[3]{a^2b^2}\,.\,5\sqrt[3]{a^5b^7} =$

f) $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) =$

g) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{8}\right) =$

h) $\left(2\sqrt{3}-5\right)\left(2\sqrt{3}+5\right) =$

i) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6 =$

j) $\left(\sqrt[3]{2.3^2}\right)^2 =$

l) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} =$

m) $\sqrt{\sqrt[3]{2}} =$

n) $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+2}} =$

o) $\dfrac{48\sqrt{x^2y}}{6\sqrt{xy}} =$

30) Dar a resposta sob forma de radical, das expressões seguintes:

a) $2^{\frac{3}{4}} =$

b) $2^{-\frac{1}{2}} =$

c) $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} =$

d) $\left(\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{6}} =$

e) $5^{-\frac{2}{3}} =$

31) Racionalizar o denominador das frações seguintes:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{7}} =$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{7}} =$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} =$

d) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-2} =$

e) $\dfrac{5}{4-\sqrt{11}} =$

f) $\dfrac{6}{\sqrt{2}+1} =$

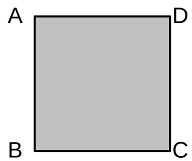
g) $\dfrac{9}{3\sqrt{3}-2} =$

32) Encontre o valo numérico da expressão $2x^2 - 4x$, para $x = 4\sqrt{2}+1$.

33) Calcule o valor da expressão $4y^{\frac{3}{4}}$, para y = 16.

34) Calcule o valor da expressão $10a^{-\frac{1}{4}}$, para a = 625.

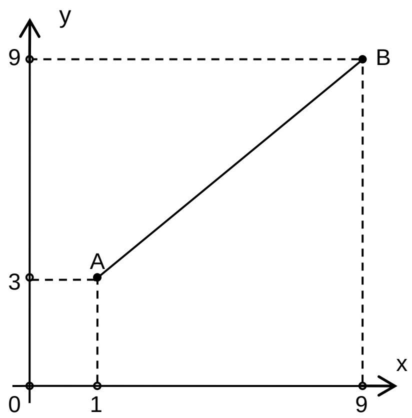
35) Um encanador quer colocar um cano condutor de água ligando os pontos A e C do terreno quadrangular indicado na figura ao lado. Sabendo que a área do terreno é de 484 m^2, quantos reais o encanador gastará na compra do cano, se o metro custa R$ 5,00.



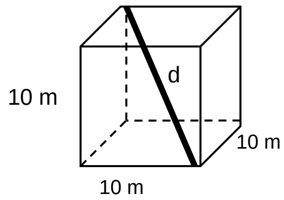
36) Quanto mede a diagonal do quadrado de lado $\sqrt{5}$ cm?
(Sugestão: Use o teorema de Pitágoras)

37) Qual é a altura de um triângulo equilátero de lado igual a $\sqrt{3}$ cm?
(Sugestão: Use o teorema de Pitágoras)

38) Qual é a distância entre os pontos A(1, 3) e B(9, 9)?



39) O cubo é um prisma em que todas as faces são quadradas. Determine a medida da diagonal do cubo da figura dada abaixo.



Respostas:

1) a.15 b.38 c.120 d.45 e.12 f.28 g.40 h.1 i.160 j.49 l.4 m.9 n.12 o.2 p.10 q.36 r.100 s.27

2) a.108 b.23 c.6 d.12 e.12 f.16 g.29 h.4 i.8 j.49 l.25 m. 95 n. 60 o.40 p. 17

3) a.30 b.0 c.16 d.18 e.4 f. 8

4) a.11 b.3 c.2 d.6 e.5 f.3 g.13 h.100 i.25 j.23 l.6 m.3 n.81 o.-49 p.4 q.-5 r.6 s.-3 t.11

5) a.4 b.1 c.-15 d.41 e.-56 f.31 g.-171 h.-4 i.-40

6) a.- 13 b.- 24 c.- 27 d.3 e.19 f.- 15 g.5

7) a.- 6 b.- 4 c.- 13 d.- 4 e.- 7 f.12

8) a.-16 b.-15 c.-10,5 d.-20 e.-90 f.1,8 g.-60 h.-100 i.-0,56 j.1000 l.-240 m.0,25 n. 8 o. -12 p. 50 q.144 r.0

9) a.-5 b.-25 c.6 d.11 e.-1 f.20 g.-4 h.20 i.-1 j.21 l.2 m.3 n.-2 o.-4 p.4 q.-2 r.-12 s.-1

10) a.-40 b.20 c.-5 d.20 e.-20 f.4 g.-2 h.-34

11) a.1 b.0 c.-8 d.-64 e.+16 f.256 g.256 h. $\frac{2}{3}$ i.3 j.2187 l.10000

m.1 n.125 o.64 p.729 q.-1024 r.729 s.162 t.216 u. $\frac{1}{90}$ v. $-\frac{3125}{243}$

x. $\frac{4}{6561}$ z. $\frac{1}{16}$

12) a.81 b.-1 c.16 d.0 e.24 f.-9 g.-36 h.9

13) a.= b.> c.= d.< e.> f.< g.< h.< i.>

14) 1ª.-5 2ª.-5 3ª.5 R.125a.C.

15) a.$(-3)^2 = 9$ b.$(-3)^1 = 3$ c.$(-3)^0 = 1$ d.$(-3)^4 = 81$ e.$(-3)^3 = -27$ f.$(-3)^5 = -243$

16) mmc(8, 12) = 24

17) mmc(10, 18) = 90

18) a. $\frac{5}{3}$ b. $\frac{4}{9}$ c. $\frac{3}{2}$ d. $\frac{4}{3}$ e. $\frac{5}{18}$ f. $\frac{13}{30}$ g. $\frac{17}{60}$ h. $\frac{3}{14}$ i. $-\frac{3}{4}$ j. $-\frac{5}{12}$

19) a.-1 b. $\frac{25}{7}$ c.10 d.-1 e. $\frac{7}{25}$ f.-8 g. $-\frac{3}{10}$ h. $-\frac{1}{8}$ i. $-\frac{44}{5}$ j. $-\frac{2}{15}$

l. $\frac{2}{35}$ m. $\frac{1}{15}$

20) a. $\frac{1}{6}$ b.-4 c. $\frac{3}{2}$ d.-20 e. $\frac{7}{12}$ f. $\frac{1}{4}$ g. $\frac{3}{2}$ h. $-\frac{15}{2}$ i. $-\frac{52}{27}$

21) a. $\frac{3}{16}$ b.-4 c. $\frac{5}{3}$ d. $\frac{4}{9}$ e. $\frac{7}{2}$ f. $\frac{9}{10}$ g. $\frac{1}{2}$

22) a.9,59 b.255,23 c.11,1 d.14,55 e.6,72 f.1,4942 g.6,43 h.2,34
i.1,33 j.0,63 l.0,05 m.350,57 n.0,065 o.2,18 p.0,32

23) -13,1

24) a.5,2 b.-10,4

25) Sim

26) $\frac{8}{3}$

27) a. $\sqrt[4]{2^3}$ **b.** $12\sqrt{2}$ **c.** $2\sqrt[3]{5}$ **d.** $-40\sqrt{5}$ **e.** $4x^2y\sqrt{xy}$ **f.** $abc^2\sqrt[3]{ac}$

g. $a^2b\sqrt[3]{9b}$ **h.** $\frac{ab}{x}\sqrt[3]{\frac{a}{2x}}$

28) a. $9\sqrt{5}$ **b.** $5\sqrt{2}$ **c.** $4\sqrt{3}$ **d.** $-19\sqrt[3]{5}$ **e.** $22\sqrt{2}-9\sqrt{3}$ **f.** $\sqrt{2a}$

29) a. $3\sqrt{2}$ **b. 2 c.** $\sqrt{2}$ **d.** $\frac{x}{y}\sqrt[5]{2}$ **e.** $60a^2b^3\sqrt[3]{a^2b}$ **f. 4 g. -1 h. -13**

i. 4 j. $3\sqrt[3]{12}$ **l.** $\sqrt[9]{3}$ **m.** $\sqrt[6]{2}$ **n.** $\sqrt{x-2}$ **o. 8** $\sqrt{x}$

30) a. $\sqrt[4]{2^3}$ **b.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **c.** $\sqrt[4]{2}$ **d.** $\sqrt[12]{6}$ **e.** $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

31) a. $\frac{\sqrt{7}}{7}$ **b.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ **c.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$ **d.** $2.(\sqrt{5}+2)$ **e.** $(4+\sqrt{11})$

f. $6(\sqrt{2}-1)$ **g.** $\frac{9(3\sqrt{3}+2)}{23}$

32) 62

33) 32

34) 2

35) R$ 155,56

36) d = $\sqrt{10}$ **cm**

37) h = $\frac{3}{2}$ **cm**

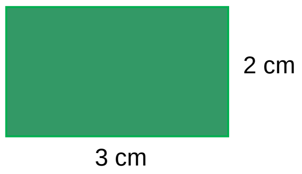
38) d = 10 unid.

39) d = $10\sqrt{3}$ cm

2 Álgebra

Introdução

A Álgebra é considerada a aritmética simbólica porque emprega letras para representar números. Observe o retângulo:



A área desse retângulo é A = 3.2 = 6 cm^2. Agora, como representaríamos, algebricamente, a área do retângulo?

De modo geral, podemos representar por *b* a base do retângulo qualquer e por *h* a sua altura, escrevemos por meio de uma expressão o cálculo de área:

A = b . h ou A = bh

onde as letras *b* e *h* são chamadas de *variáveis*.

Observe o exemplo:

★ Qual é o número cujo dobro adicionado a 5 dá como resultado 25?

Solução

Representamos o número desconhecido por ***x***, então:

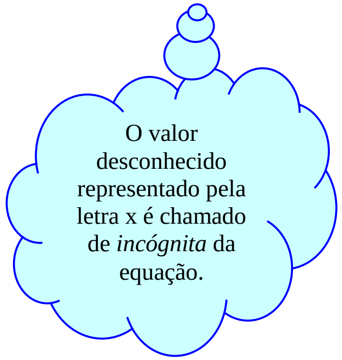
$2 . x + 5 = 25$

$2x = 25 – 5$

$2x = 20$

$x = \frac{20}{2}$

$x = 10$



Portanto o número desconhecido é o número 10.

Expressões algébricas

Expressões matemáticas formadas por *somente letras* ou *números e letras* são chamadas de expressões algébricas.

Por exemplo: – $7a^2b$

A expressão algébrica – $7a^2b$ é formada por um *termo* ou *monômio*.

$-7\ a^2\ b$

Variável ou parte literal: $a^2\ b$

Coeficiente numérico: - 7

Dois ou mais monômios que possuem a mesma parte literal são chamados *monômios ou termos semelhantes*. Por exemplo:

a) $-8a$ e $12a$

b) $3xy^2$ e $\frac{5}{7}xy^2$

c) $-a^2b^3$, $9a^2b^3$ e $11a^2b^3$

Uma expressão algébrica formada por um monômio ou por uma soma de monômios chama-se *polinômio*.

Valor Numérico

Valor numérico de uma expressão é o número obtido quando se substituem as variáveis por números e se efetuam as operações indicadas.

Exercício resolvido:

a) Qual é o valor numérico da expressão $x^2 - 5x + 6$ para $x = -3$?

$(-3)^2 - 5.(-3) + 6$

$9 + 15 + 6$

30

2.1 Operações algébricas

2.1.1 Adição e Subtração

Somente é possível somar ou subtrair termos semelhantes. Quando estamos adicionando ou subtraindo os termos semelhantes de uma expressão, dissemos que estamos *simplificando* ou *reduzindo* os termos semelhantes. Para isso, repete-se a parte literal e opera-se com os coeficientes.

Exercício resolvido:

a) $3x^2y - 4xy^2 + 7xy^2 + 5x^2y = 8x^2y + 3xy^2$

b) $3x + 7x - x - 10x = -x$

c) $(x^2 - 5x + 6) - (3x^2 + x - 1) = x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x + 1$

$= -2x^2 - 6x + 7$

2.1.2 *Multiplicação*

Multiplicam-se os coeficientes e, a seguir, multiplicam-se as partes literais. Para a multiplicação das partes literais, usamos a propriedade da potência:

$$\mathbf{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

Exercícios resolvidos:

a) $(-3a^2y) \cdot (+2ay) = -6a^3y^2$

Usamos aqui a propriedade *distributiva*

b) $2x \cdot (5x + 4) = 10x^2 + 8x$

c) $(2x + 1) \cdot (4x - 3) = 8x^2 - 6x + 4x - 3 = 8x^2 - 2x - 3$

2.1.3 Divisão

1º Caso: *Divisão de monômios.* Divide-se o coeficiente numérico e a parte literal correspondentes. Para dividir as partes literais, usamos a propriedade da potência:

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad (\text{com } a \neq 0)$$

Exercícios resolvidos:

a) $(+6x^3) : (-2x) = -3x^2$

b) $(-8a^4b^3c) : (-12a^2b^2c) = \overset{:4}{\frac{-\cancel{8}}{-\cancel{12}}}\, a^2b = \frac{2}{3}\, a^2b$

c) $(+42a^3bx^4) : (+7ax^2) = 6a^2bx^2$

Ao dividirmos um monômio por outro, o quociente obtido nem sempre é um novo monômio. Observe:

$$(-6x) : 2x^2 = \frac{-6x}{2x^2} = -\frac{3}{x}$$

$$\frac{14ay^2}{4a^2y} = \frac{7y}{2a}$$

$$\frac{-3m^5p^2}{-3mp^5} = \frac{m^4}{p^3}$$

★ Esses resultados são expressões fracionárias chamadas de ***frações algébricas***.

2º Caso: *Divisão de polinômio por monômio*: Divide-se cada termo do polinômio pelo monômio.

Exercícios resolvidos:

a) $(6x^2 + 8x)$ **:** $(-2x) = -3x - 4$

b) $(9a^2b^2 - ab^3 + 6a^3b^5) : 3ab^2 = 3a - \frac{1}{3}b + 2a^2b^3$

3º Caso: *Divisão de polinômio por polinômio*:

Exercícios resolvidos:

a) $(2x^2 - 5x + 8) : (x - 1) = 2x - 3$ e resto: 5
b) $(9x^2 - 36) : (3x + 6) = 3x - 6$

a)
$$\begin{array}{rr|l} & 2x^2 - 5x + 8 & x - 1 \\ \cline{3-3} & -2x^2 + 2x & 2x - 3 \\ \cline{2-2} & 0 \quad -3x + 8 & \\ & +3x - 3 & \\ \cline{2-2} & 0 + 5 & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rr|l} & 9x^2 + 0x - 36 & 3x + 6 \\ \cline{3-3} & -9x^2 - 18x & 3x - 6 \\ \cline{2-2} & 0 \quad -18x - 36 & \\ & +18x + 36 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

2.2 Produtos notáveis

Existem produtos de polinômio muito importantes no cálculo algébrico, que são conhecidos por *produtos notáveis*. Vele a pena reconhecê-los e resolvê-los de forma imediata.

2.2.1 Quadrado da soma de dois termos:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

1º Termo

2º Termo

Quadrado do primeiro termo.

+ o dobro do produto do 1º pelo 2º termo.

+ quadrado do segundo termo

Podemos dizer que:

" O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo. "

Exercícios resolvidos:

a) $(2 + x)^2 = 2^2 + 2 . 2.x + x^2 = 4 + 4x + x^2$

b) $(7x + 2y)^2 = 49x^2 + 28xy + 4y^2$

2.2.2 Quadrado da diferença de dois termos:

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Podemos dizer que:

" O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo."

Exercícios resolvidos:

a) $(x – 3) = x^2 + 2 . x . (- 3) + (- 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

b) $(7x - 2y)^2 = 49x^2 - 28xy + 4y^2$

2.2.3. Produto da soma pela diferença de dois termos:

$(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2$

Podemos dizer que:

" O produto da soma de dois termos por sua diferença é igual ao quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo."

Exercícios resolvidos:

a) $(1 - \sqrt{3}) . (1 + \sqrt{3}) = 1^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 - 3 = -2$

b) $(7x + 2y) . (7x - 2y) = 49x^2 - 4y^2$

2.3 Fatoração

Fatorar um polinômio é escrevê-lo sob a forma de um produto.

1° CASO: Fator comum

$$ax + bx = x.\left(\frac{ax}{x} + \frac{bx}{x}\right) = x(a + b)$$

Na expressão fatorada, **x** é o *fator comum* colocado em evidência. Por exemplo:

a) $4c - 18 = 2.\left(\frac{4c}{2} - \frac{18}{2}\right) = 2(2c - 9)$

Na expressão fatorada, **2** é o *máximo divisor comum* dos coeficientes numéricos 4 e 18, logo é *o fator comum* colocado em evidência.

b) $7ax^3 + x^2 = x^2.\left(\frac{7ax^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right) = x^2(7ax + 1)$

Na expressão fatorada, **x^2** é a parte literal de *menor grau*, logo é *o fator comum* colocado em evidência. Podemos ter as três situações em uma única expressão. Veja:

c) $8a^5b + 12a^3 = 4a^3(2a^2b + 3)$

d) $4ax^2 + 8a^2x^3 + 2a^3x = 2ax(2x + 4ax^2 + a^2)$

2° CASO: Fatoração por agrupamento

a) $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$
$= (x + y)(a + b)$

b) $2mx - 5ny - 2nx + 5my = -n(5y + 2x) + m(2x + 5y)$
$= (5y + 2x)(m - n)$

Na expressão fatorada, os quatro termos não apresentam um fator comum. Logo agrupamos os termos de dois em dois, onde ***a*** é o fator comum do primeiro grupo e ***b*** é o fator comum do segundo grupo. E fatoramos novamente.

3° CASO: Diferença entre dois quadrados

a) $a^2 - 9 = (a-3)(a+3)$

$\sqrt{a^2}$ $\quad$ $\sqrt{9}$

b) $16m^2 - 25n^4 = (4m - 5n^2)(4m + 5n^2)$

4° CASO: Trinômio Quadrado Perfeito

a) $x^2 + 20x + 100 = (x + 10)^2$

$\sqrt{x^2} = x$ $\quad$ $\sqrt{100}$

Sinal do perfeito

2.x.10 = 20x
perfeito

b) $9x^2 - 48xy + 64y^2 = (3x - 8y)^2$

2.4 Frações Algébricas

Frações algébricas são expressões escritas na forma de **fração,** em que ao menos uma das variáveis aparece no denominador. Como não existe divisão por zero, o denominador de uma fração algébrica necessariamente tem que ser diferente de zero. Caso contrário, ela não representa um número real. Observe:

$$\frac{x}{y} \qquad \frac{2x+1}{y-4} \qquad \frac{9a^2-7}{a+1}$$

O conjunto dos números reais para os quais o denominador de uma fração algébrica é *diferente de zero* é denominado ***domínio*** ou ***campo de existência*** da fração.

Assim, para a fração $\frac{x^2+y^2}{x-3}$, o *campo de existência* é qualquer número real diferente de 3, já que a fração não tem nenhum significado quando x = 3, pois anula o seu denominador.

Dada uma fração algébrica, vamos considerar que sempre estão excluídos os números reais que, colocados no lugar das letras, anulam o seu denominador. Logo:

★ A fração $\frac{7}{x}$, devemos ter $x \neq 0$.

★ A fração $\frac{x^3+4}{x^2-9}$, devemos ter $x \neq 3$ e $x \neq -3$.

2.4.1 Simplificação de frações Algébricas.

Exercícios resolvidos:

1. $\dfrac{24x^4y^3z}{18x^2y^4} = \dfrac{4x^2z}{3y}$

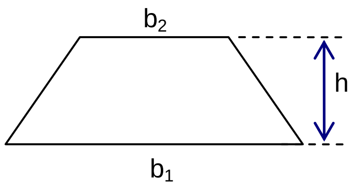
2. $\dfrac{x^2+x}{2x+2} = \dfrac{x(x+1)}{2(x+1)} = \dfrac{x}{2}$

3. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2} = \dfrac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2} = \dfrac{a+b}{a-b}$

Exercícios – MÓDULO II

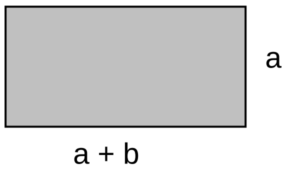
1) Ache o valor numérico da expressão 4x + 2y –3 para x=5 e y= -2.

2) A área do trapézio da figura é dada pela fórmula $A = \dfrac{(b_1 + b_2).h}{2}$, em que b_1 e b_2 representam suas bases e h sua altura.



Determine a área do trapézio, sendo b_1 = 12 cm, b_2 = 8 cm e h = 3,5 cm.

3) Escreva a expressão algébrica que representa a área da figura.

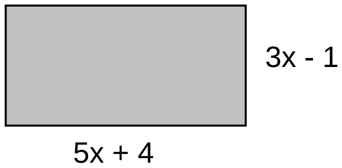


4) Calcule o valor numérico de $9x^3 - x^2 + \dfrac{1}{3}$ para $x = -\dfrac{1}{3}$.

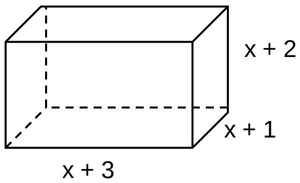
5) Se a expressão algébrica a^3 representa o volume de um cubo de aresta a = 8 cm, qual é o volume desse cubo?

6) Encontre o valor numérico da expressão $\frac{3}{4}(2a+b+c)$ para a = 9, b = 12 e c = - 12.

7) Ache a expressão algébrica que representa a área do retângulo.



8) Que polinômio representa o volume do paralelepípedo?



9) calcule o valor numérico para $x^4 - 8x^3 + x^2 - x$, para:

a) x = 3

b) x = -2

10) Reduza os termos semelhantes:

a) (4a – 7) + (-2a + 9) =

b) (13x – 1) + (2x – 1) =

c) $(2x^2 - 3x - 2) + (2x^2 - 5x + 2) =$

d) $(-4y^2 + 5y - 3) + (4y^2 + 3) =$

e) $(8y^3 - 6y^2 + 16y - 1) + (- 8y^3 - 6y^2 + 16y - 1) =$

f) (4y – 2) – (2y + 3) + (- 2y + 4) =

g) $(b^2 - 3b + 2) - (- b^2 + 3b - 2) - (2b^2 - 4b + 1) =$

h) $(4x - 2) - (3x^2 + 7x - 2) + (- x^2 + 1) =$

i) $(x^3 - y^3) + (2x^3 - 4x^2y + xy^2) - (x^3 - 8) =$

11) Efetue as multiplicações:

a) $3x^2 \,.\, 4x^3 =$

b) $-2a^4 \,.\, 5a =$

c) $6pq^2 \,.\, (- 2p^3q^2) =$

d) $-ab \,.\, (- a^2b^3) =$

e) $3(2x^2 - 5x + 1) =$

f) $-4(a^3 - a^2 + 2a - 3) =$

g) $2x^2(3x^2 - 4x + 5) =$

h) $- a(a^3 - a^2 - 2) =$

i) $\frac{1}{2}x^2y\ (2x^3 - xy + 4y^2) =$

j) $(x^2 - 5x + 6)(x + 3) =$

l) (2x + 3)(x – 2)(4x – 1) =

m) (2x + 1)(4x + 3) =

n) (2y – 6)(3y + 5) =

12) Calcule as divisões:

a) $x^7 : x^2 =$

b) $y^4 : y^2 =$

c) $4n^4 : (-n) =$

d) $-a^6 : (-a^{10}) =$

e) $\dfrac{b}{-2b^6} =$

f) $\dfrac{5x^3y^{10}}{10xy^7} =$

g) $\dfrac{-9n^4p^3}{27n^4p^4} =$

h) $\dfrac{4a^3b^5}{8b^5a^3} =$

13) Efetue as divisões:

a) $(16x^3 - 4x^2 + 8x) : (-4x) =$

b) $(m^4 - 2m^3 + m^2) : (-m) =$

c) $(a^m - a^{2m} + a^{3m}) : (+a^m) =$

d) $(6a^4b^2 - 9a^3b + ab) : ab =$

e) $(20a^3 - 15a^2 + 30a) : 5a =$

f) $(7m^8 - 14m^6 + 28m^5) : 7m^4 =$

14) Simplifique $\dfrac{(2x+8)(x^3-6x^2)}{2x^2}$.

15) Efetue $[(y^2 - 2y + 4)(y + 2) + (y^2 + 2y + 4)(y - 2)] : y^2$.

16) Calcule:

a) $(x^2 - 7x + 10) : (x - 2) =$

b) $(2y^2 - 3y - 2) : (y - 2) =$

c) $(2n^2 - 5n + 7) : (n - 3) =$

d) $(10a^2 - 3a - 7) : (a - 1) =$

e) $(x^2 - 81) : (x + 9) =$

f) $(81 - 18y + y^2) : (-y + 9) =$

g) $(k^3 - 3k^2 + 3k - 2) : (k - 1) =$

h) $(8b^3 + 12b^2 + 6b + 1) : (2b + 1) =$

17) Determine $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4x + 4}$.

18) Efetue:

a) $(x + y)^2 =$

b) $(a + 3)^2 =$

c) $(5x + 2)^2 =$

d) $(-3 + 4x)^2 =$

e) $(2x + y)^2 =$

f) $(5a + 2b)^2 =$

g) $(3a + 4b)^2 =$

h) $(x - 5)^2 =$

i) $(2a - 7)^2 =$

j) $(6x - 2y)^2 =$

l) $(11x - y)^2 =$

m) $(a - 3)^2 =$

19) Fatore as expressões algébricas:

a) $5x + 5y =$

b) $ba – bc =$

c) $7a + 7b – 7c =$

d) $8x – 10y =$

e) $27m + 3n =$

f) $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y =$

g) $\frac{2}{5}b - \frac{8}{3}bx =$

h) $\frac{6}{5}x + \frac{12}{15}y =$

i) $24x^2 – 8x^3 =$

j) $a^3m^4 – 3a^2m^3 + \frac{1}{2}a^2m =$

l) $5x^3 + 5ax^6 =$

m) $12a^3b^4 – 16b^3a^4 =$

n) $14x^2y – 21x^3z =$

o) $8a^5b + 12a^3 =$

20) Fatore a expressão $2ax + 2bx + ay + by$.

21) Fatore os polinômios:

a) $4x^2 + 36x + 81 =$

b) $16 – 40x + 25x^2 =$

c) $1 – 20y + 100y^2 =$

d) $121x^2 – 25 =$

e) $64x^2 – 36y^2 =$

f) $\frac{4a^2}{25} - \frac{b^2}{49} =$

g) $49x^2 + 42xy + 9y^2 =$

h) $m^2n^2 – 2mn + 1 =$

i) $\frac{x^2}{4} - \frac{9y^2}{25} =$

22) Fatore:

a) $3x^2 + 30x + 75 =$

b) $-3ax^2 + 18ax – 27a =$

c) $\frac{-5y^2m}{4} + \frac{45x^2m}{16} =$

d) $1000 – 10x^2 =$

e) $3x^2 – 27 =$

23) Qual é a expressão fatorada de $5m + 5n – m^2 – 2mn – n^2$?

24) Simplifique as frações algébricas:

a) $\dfrac{x^2+6x+9}{2x+6} =$

b) $\dfrac{36x^2-9y^2}{36x^2+36xy+9y^2} =$

c) $\dfrac{5x-15}{x^2-9} =$

d) $\dfrac{14m^2+28mn+14n^2}{7m^2-7n^2} =$

e) $\dfrac{-12x^2y}{6xy-8y+2y^2} =$

f) $\dfrac{3a^2-3}{a+1} =$

g) $\dfrac{9x^2-1}{9x-3} =$

h) $\dfrac{ab-4b}{3b^2} =$

i) $\dfrac{3ax+6a}{6ax^2-24a} =$

j) $\dfrac{3x^3-12x}{6x+12} =$

l) $\dfrac{8d^3-8dm^2}{5d^3-5dm^2} =$

25) Qual é a forma mais simples de escrever a fração $\dfrac{a^3-a^2}{4a^2-4a}$?

26) Simplifique $\dfrac{x^2-a^2}{x^2-2ax+a^2}$.

27) Qual é o domínio da fração:

a) $\dfrac{3x}{x-8}$

b) $\dfrac{5x+1}{4x-1}$

c) $\dfrac{a+1}{-4+a^2}$

28) Efetue:

a) $\dfrac{9ax}{y}+\dfrac{2ax}{y}+\dfrac{3ax}{y} =$

b) $\dfrac{y-1}{a+3}-\dfrac{y+5}{a+3} =$

c) $\dfrac{2}{5x}+\dfrac{3}{4y}-\dfrac{1}{2x} =$

d) $\frac{1}{2a}+5a=$

29) Obtenha o valor da expressão $(\sqrt{3}-2)^2+(2\sqrt{3}+1)^2$.

30) Efetue as operações e simplifique se possível:

a) $\sqrt{\frac{9x^3}{x-y}.\frac{x}{x-y}}=$

b) $\sqrt{\frac{4x}{x+y}.\frac{xy^2}{x+y}}=$

c) $\frac{x+3}{x^2-x}:\frac{x^2-9}{x^2-3x}=$

d) $\frac{x^2}{xy-y^2}.\frac{x^2-y^2}{x^2+xy}=$

e) $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}=$

f) $\frac{x^2-10x+25}{4x+8}:\frac{x^2-25}{x^2+7x+10}=$

g) $\frac{3a-3b+ax-bx}{a^3+a-a^2-1}.\frac{a^2+1}{a-b}=$

h) $\frac{4a^2+4ab+b^2}{ab}:\frac{4a^2b+2ab^2}{2(a-b)}=$

31) Efetue a expressão $\left(a+\frac{b-a}{1+ab}\right):\left(1-\frac{ab-a^2}{1+ab}\right)$ e simplifique se possível.

32) Encontre o valor numérico da expressão $\left(x+\frac{y-x}{1+xy}\right):\left(1+\frac{x^2-xy}{1+xy}\right)$, para x = $\sqrt{17}$ e y = 53.

Respostas:

1) 13 **2) 35 cm^2** **3) a(a + b)** **4) $-\frac{1}{9}$** **5)512 cm^3**

6) $\frac{27}{2}$ **7) 15x^2 + 7x – 4** **8) x^3 + 6x^2 + 11x + 6** **9) a.-129 b. 86**

10) a. 2a + 2 b. 15x – 2 c. 4x^2 – 8x d. 5y e. -12y^2 + 32y – 2
f. -1 g. -2b + 3 h. -4x^2 – 3x + 1 i. 2x^3 – 4x^{2}y + xy^2 – y^3 + 8

11) a. 12x^5 b. -10a^5 c. – 12p^{4}q^4 d. a^{3}b^4 e. 6x^2 – 15x +3
f. -4a^3 + 4a^2 - 8a + 12 g. 6x^4 – 8x^3 + 10x^2 h. – a^4 + a^3 + 2a
i. $x^5y-\frac{1}{2}x^3y^2+2x^2y^3$ j. x^3 – 2x^2 – 9x + 18 l. 8x^3 – 6x^2 – 23x + 6
m. 8x^2 + 10x + 3 n. 6y^2 – 8y – 30

12) a. x^5 b. y^2 c. $-4n^3$ d. $\frac{1}{a^4}$ e. $-\frac{1}{2b^5}$ f. $\frac{1x^2y^3}{2}$ g. $-\frac{1}{3p}$ h. $\frac{1}{2}$

13) a. $-4x^2 + x - 2$ b. $-m^3 + 2m^2 - m$ c. $1 - a^m + a^{2m}$
d. $6a^3b - 9a^2 + 1$ e. $4a^2 - 3a + 6$ f. $m^4 - 2m^2 + 4m$

14) $x^2 - 2x - 24$ **15)** $2y$

16) a. $x - 5$ b. $2y + 1$ c. $2n + 1$, resto: 10 d. $10a + 7$
e. $x - 9$ f. $-y + 9$ g. $k^2 - 2k + 1$, resto: -1 h. $4b^2 + 4b + 1$

17) $x - 2$

18) a. $x^2 + 2xy + y^2$ b. $a^2 + 6a + 9$ c. $25x^2 + 20x + 4$
d. $9 - 24x + 16x^2$ e. $4x^2 + 4xy + y^2$ f. $25a^2 + 20ab + 4b^2$
g. $9a^2 + 24ab + 16b^2$ h. $x^2 - 10x + 25$

19) a. $5(x + y)$ b. $b(a - c)$ c. $7(a + b - c)$ d. $2(4x - 5y)$ e. $3(9m + n)$
f. $\frac{1}{4}(x+y)$ g. $b\left(\frac{2}{5}-\frac{8}{3}x\right)$ h. $\frac{6}{5}\left(x+\frac{2}{3}y\right)$ i. $8x^2(3 - x)$
j. $a^2m(am^3 - 3m^2 + \frac{1}{2})$ l. $5x^3(1 + ax^3)$ m. $4a^3b^3(3b - 4a)$ n. $7x^2(2y - 3xz)$
o. $4a^3(2a^2b + 3)$

20) $(a + b)(2x + y)$

21) a. $(2x + 9)^2$ b. $(4 - 5x)^2$ c. $(1 - 10y)^2$ d. $(11x - 5)(11x + 5)$
e. $(8x - 6y)(8x + 6y)$ f. $\left(\frac{2a}{5}+\frac{b}{7}\right)\left(\frac{2a}{5}-\frac{b}{7}\right)$ g. $(7x + 3y)^2$ h. $(mn - 1)^2$
i. $\left(\frac{x}{2}-\frac{3y}{5}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{5}\right)$

22) a. $3(x + 5)^2$ b. $-3a(x - 3)^2$ c. $-5m\left(\frac{y}{2}+\frac{3x}{4}\right)\left(\frac{y}{2}-\frac{3x}{4}\right)$
d. $10(10 - x)(10 + x)$ e. $3(x - 3)(x + 3)$

23) $(m + n)(5 - m - n)$

24) a. $\frac{x+3}{2}$ b. $\frac{2x-y}{2x+y}$ c. $\frac{5}{x+3}$ d. $\frac{2(m+n)}{m-n}$ e. $\frac{-6x^2}{3x-4+y}$ f. $3(a - 1)$
g. $\frac{3x+1}{3}$ h. $\frac{a-4}{3b}$ i. $\frac{1}{2x-4}$ j. $\frac{x(x-2)}{2}$ l. $\frac{8}{5}$

25) $\frac{a}{4}$ **26)** $\frac{x+a}{x-a}$

27) a. $\Re$ - [8] b. $\Re$ - $\left[\frac{1}{4}\right]$ c. $\Re$ - [-2 ou +2]

28) a. $\frac{14ax}{y}$ b. $-\frac{6}{a+3}$ c. $\frac{15x-2y}{20xy}$ d. $\frac{1+10a^2}{2a}$

29) 20

30) a. $\frac{3x^2}{x-y}$ b. $\frac{2xy}{x+y}$ c. $\frac{1}{x-1}$ d. $\frac{x}{y}$ e. $\frac{a-b}{a+b}$ f. $\frac{x-5}{4}$ g. $\frac{3+x}{a-1}$ h. $\frac{a-b}{a^2b^2}$

31) b **32)** 53

3 Equações e Inequações

Introdução

Equações são nada mais do que uma igualdade entre as expressões, que as transformam em uma *identidade* numérica, para um ou para mais valores atribuídos as suas variáveis. Observe:

$2x - 1 = x + 3$	$4a^3 - a^2 + 3a - 2 = 0$	$2y^2 - 5y = 0$
Equação Polinomial do 1º Grau na incógnita **x**.	Equação Polinomial do 3º Grau na incógnita **a**.	Equação Polinomial do 2º Grau na incógnita **y**.

A *incógnita* é o valor que precisamos achar para encontrar a solução para a equação. A *variável* que não conhecemos (incógnita) costumamos representá-la na equação pelas letras ***x**, **y*** e ***z***.

Os termos localizados à esquerda do sinal de igualdade formam o *1º membro* da equação, e os localizados à direita formam o *2º membro*. Observe:

$$\underbrace{2x - 1}_{1^{\circ}\text{ membro}} = \underbrace{x + 3}_{2^{\circ}\text{ membro}}$$

O valor atribuído à incógnita **x** para esta equação que torna verdadeira a igualdade é x = 4. Logo o 4 é a solução da equação, denominado *raiz da equação*.

3.1 Equação do 1º Grau

Denomina-se *equação do 1º Grau* na incógnita **x**, toda equação da forma:

$$\boxed{\mathbf{ax + b = 0}\text{ , com a e b} \in \text{IR e a} \neq 0}$$

3.1.1 Solução da equação do 1º Grau.

Resolver uma equação do 1º Grau significa determinar a sua raiz, ou seja, o valor da variável ***x***. Observe:

Exercícios resolvidos:

a) $2x - 1 = x + 3$

$2x - x = 3 + 1$

$x = 4$

$\therefore S = \{ 4 \}$

b) $2(-3 - y) + 4 = y + 6$

$-6 - 2y + 4 = y - 6$

$-2y - y = +6 - 4 + 6$

$-3y = +8$ **. (- 1)**

$3y = -8$

$$y = -\frac{8}{3}$$

$$\therefore S = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$$

c) $\frac{3x - 2}{2} - \frac{3x + 1}{3} = \frac{4x - 6}{5}$

m.m.c. (2, 3, 5) = 30

$$\frac{15.(3x-2)-10.(3x+1)=6.(4x-6)}{30}$$

15(3x – 2) – 10(3x + 1) = 6(4x – 6)

45x – 30 – 30x – 10 = 24x – 36

45x – 30x – 24x = - 36 + 30 + 10

-9x = 4 **.(- 1)**

$x = -\frac{4}{9}$ $\therefore$ S = $\left\{-\frac{4}{9}\right\}$

VERIFICAÇÃO OU "PROVA REAL"

Substitui-se a raiz encontrada em cada um dos membros da equação dada. Os valores numéricos devem ser iguais. De acordo com o exemplo ***a*** anterior:

2**x** - 1 = **x** + 3

2 . **4** – 1 = **4** + 3

8 – 1 = 7

7 = 7

Logo a solução para x = 4 é verdadeira.

d) Qual é o número cujo dobro aumentado de 9 é igual ao seu quádruplo diminuído de 21?

Representamos o número desconhecido por x. Então,

2x + 9 = 4x – 21

2x – 4x = - 21 – 9

- 2x = - 30 .(- 1)

2x = 30

$x = \frac{30}{2}$

x = 15 $\therefore$ S = {15}

3.2 Equação do 2º Grau

Denomina-se *equação do 2º Grau* na incógnita ***x***, toda equação da forma:

$$\boxed{\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}\text{ , com a, b e c} \in \text{IR e a} \neq 0}$$

Nas equações escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, chamamos de a, b e c de *coeficientes*. E a equação está na forma reduzida.

Observe:

- ★ $x^2 - 5x + 6 = 0$ — a = 1, b = - 5 e c = 6
- ★ $7x^2 - x = 0$ — a = 7, b = 1 e c = 0
- ★ $x^2 - 36 = 0$ — a = 1, b = 0 e c = - 36

3.2.1 Solução de Equações de 2º Grau

Resolver uma equação do 2º Grau significa determinar as suas raízes. Observe os casos:

1º Caso. Se b = 0 e c = 0, dizemos que a equação é incompleta. Observe:

$$\boxed{\mathbf{a\,x^2 = 0}}$$

Exercício resolvido:

1) $3\,x^2 = 0$

$$x^2 = \frac{0}{3}$$

$$x = 0 \qquad \therefore\ S = \{0\}$$

2º caso: Se c = 0 e b ≠ 0, dizemos que a equação é incompleta. Observe:

$$\boxed{\mathbf{a\,x^2 + bx = 0}}$$

Exercício resolvido:

1) $3\,x^2 - 12\,x = 0$

$$x\,.\,(3\,x - 12) = 0$$

$$x' = 0 \quad \text{ou} \quad 3\,x - 12 = 0$$

$$3\,x = 12$$

$$x'' = 4 \qquad \therefore\ S = \{0, 4\}$$

3º caso: Se b = 0 e c ≠ 0, dizemos que a equação é incompleta. Observe:

$$\boxed{\mathbf{ax^2 + c = 0}}$$

Exercício resolvido:

1) $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x' = 2$ ou $x'' = -2$ $\therefore S = \{-2, 2\}$

4º caso: Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, dizemos que a equação é completa. Observe:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

A resolução da *equação completa* de 2º grau é obtida através de uma fórmula que foi demonstrado por Bhaskara, matemático hindu nascido em 1114. Por meio dela sabemos que o valor da incógnita satisfaz a igualdade:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

Denominamos *discriminante* o radicando $b^2 - 4.a.c$ que é representado pela letra grega Δ (delta). Assim, $\Delta = b^2 - 4.a.c$

Podemos escrever a fórmula de Bhaskara como: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

De acordo com o discriminante, temos três casos a considerar:

$\Delta > 0 \rightarrow$ têm-se duas raízes reais e *diferentes;*

$\Delta = 0 \rightarrow$ têm-se duas raízes reais e *iguais*;

$\Delta < 0 \rightarrow$ têm-se duas raízes *imaginárias*.

OBS: Nunca teremos a = 0, pois se houver, não existirá a equação de segundo grau visto que o x² seria anulado.

Exercício resolvido:

1) $x^2 - 9x + 20 = 0$ $\quad a = 1$, $b = -9$, $c = 20$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4.1.20}}{2.1}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{9 \pm 1}{2} \qquad x' = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \qquad x'' = \frac{9-1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$\therefore S = \{4, 5\}$

3.2.2 Relação entre os Coeficientes e as Raízes.

A relação entre os coeficientes ***b*** e ***c*** e as raízes ***x'*** e ***x''***, permitem obter a soma e o produto sem aplicar a fórmula de Bhaskara. Denominamos essas relações de *Girard*.

★ Soma das raízes (S) → **S** = x' + x"

★ Produto das raízes (P) → **P** = x' . x"

Logo, a equação será → ax^2 **- S**x + **P** = 0

Importante: Esta relação só é verdadeira para a = 1.

Exercícios resolvidos:

1) Se x' = 4 e x" = 5 a equação será:

S = 4 + 5 = 9

P = 4 . 5 = 20

Logo a equação será $x^2 – 9x + 20 = 0$

2) Se $x^2 – 8x - 9 = 0$, as raízes da equação serão:

S = 9 – 1 = 8

P = 9 . (-1) = -9

Logo as raízes serão x' = -1 e x" = 9

3.2.3 Fatorando um trinômio do 2º Grau

Podemos expressar um trinômio do 2º Grau $ax^2 + bx + c$, com a ≠ 0, como um produto de binômios. Para fatorar, basta encontrar as raízes da equação.

$$ax^2 + bx + c = a.(x – x').(x – x'')$$

Exercícios resolvidos:

1) Fatorar o trinômio do 2º Grau $x^2 – 7x + 10$.

As raízes da equação $x^2 – 7x + 10 = 0$ pela relação SP são:

S = 2 + 5 = 7

P = 2 . 5 = 10

Logo x' = 2 e x" = 5. Como a = 1, temos a seguinte fatoração:

1.(x – 2)(x – 5) = (x – 2)(x – 5)

2) Fatorar o trinômio $2x^2 – 5x – 3$.

As raízes da equação $2x^2 – 5x – 3 = 0$ pela fórmula de Bhaskara são:

x' = 3 e x" = $-\frac{1}{2}$ e como a = 2, temos a seguinte fatoração:

$$2.(x-3)\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2.(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

3.2.4 Equações Irracionais

Uma equação é denominada irracional quando apresenta incógnita sob radical ou incógnita com expoente fracionário.

Resolução de uma equação irracional

Exercícios Resolvidos:

1) Determinar as raízes da equação: $\sqrt{x-5}-4=0$.

$$\sqrt{x-5}=4$$
$$\left(\sqrt{x-5}\right)^2=4^2$$
$$x-5=16$$
$$x=21$$

Verificação:

$$\sqrt{21-5}-4=0$$
$$\sqrt{16}-4=0$$
$$0=0$$

Logo, S = {21}

2) Determinar as raízes da equação: $\sqrt{x+4}-2=x$.

$$\sqrt{x+4}=x+2$$
$$\left(\sqrt{x+4}\right)^2=(x+2)^2$$
$$x+4=x^2+4x+4$$
$$x^2+3x=0$$

As raízes da equação do 2º grau são:

$$x(x+3)=0 \quad e \quad x+3=0$$
$$x'=0 \qquad x''=-3$$

Verificando as raízes na equação irracional:

$$\sqrt{x+4}-2=x$$

Para x' = 0

$$\sqrt{0+4}-2=0$$
$$2-2=0$$
$$0=0$$

Para x'' = - 3

$$\sqrt{-3+4}-2=-3$$
$$\sqrt{1}-2=-3$$
$$1-2\neq-3$$
$$-1\neq-3$$

Observe que apenas x = 0 verifica a igualdade, assim a raiz da equação original é S = {0}.

3.3 Inequações do 1° grau

Uma inequação é uma sentença matemática aberta expressa por uma desigualdade.

Os símbolos de desigualdades são:

a ≠ b (**a** é diferente de **b**)
a > b (**a** é maior do que **b**)
a < b (**a** é menor do que **b**)
a ≥ b (**a** é maior ou igual a **b**)
a ≤ b (**a** é menor ou igual a **b**)

Inequações do 1° grau podem ser escritas nas seguintes formas:

ax + b < 0 ax + b > 0

ax + b ≤ 0 ax + b ≥ 0, com a e b ∈ IR e a ≠ 0.

Resolver uma inequação do 1º grau significa encontrar todos os números que tornem a inequação verdadeira.

Por exemplo, vamos determinar o conjunto solução da inequação 3x + 2 < 8.

$$\underbrace{3x+2}_{1^{o}\ membro} < \underbrace{8}_{2^{o}\ membro}$$

3x + 2 < 8

3x < 8 – 2

3x < 6

$$x < \frac{6}{3}$$

x < 2

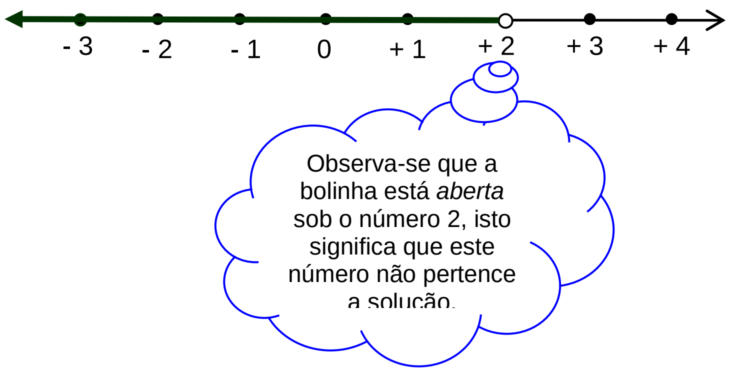
Verificação:
para x = 1
3x + 2 < 8
3 . 1 + 2 < 8
5 < 8 (**V**)

Verificação:
x = 0
3x + 2 < 8
3 . 0 + 2 < 8
2 < 8 (**V**)

Observa-se que as soluções são satisfeitas para os números menores que 2.

logo, S = { x ∈ IR | x < 2}

Geometricamente, essa solução é representada na reta real da seguinte forma:



Exercício resolvido:

1) $-5x + 6 \geq 3(1 - x) + 9$

$-5x + 6 \geq 3 - 3x + 9$

$-5x + 3x \geq 3 + 9 - 6$

$-2x \geq 6 \quad \mathbf{.(-1)}$

$2x \leq -6$

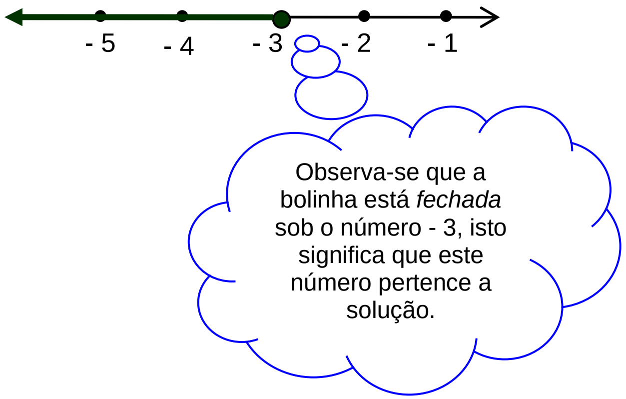
$x \leq \dfrac{-6}{2}$

$x \leq -3$

$\therefore S = \{x \in IR \mid x \leq -3\}$

Sempre que multiplicar ou dividir a inequação por um número negativo, devemos *inverter* o sinal da desigualdade.

Geometricamente a solução será:



3.4 Inequação do 2º grau

As inequações do 2º Grau na variável ***x*** podem ser escritas nas seguintes formas:

$ax^2 + bx + c \geq 0$,

$ax^2 + bx + c > 0$,

$ax^2 + bx + c \leq 0$ e

$ax^2 + bx + c < 0$, com a, b, e c $\in$ IR e $a \neq 0$.

Para resolver uma inequação do 2º Grau devemos proceder do seguinte modo:

★ Realizar um estudo do sinal da função $y = ax^2 + bx + c$;

★ Determinar os valores de ***x*** que atendam a desigualdade da inequação.

Exercício resolvido:

1) Resolver a inequação $x^2 - 5x + 4 \geq 0$.

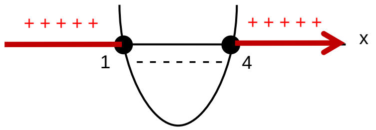
Solução:

i) As raízes da equação são $x' = 4$ e $x'' = 1$;

ii) Traçar um esboço do gráfico e fazer o estudo do sinal;

iii) Como o sinal de desigualdade é $\geq$, temos *bolinha fechada*;

iv) Como o sinal de desigualdade é ≥, ou seja, maior ou igual, queremos os **sinais positivos**;



S = { $x \in IR$ | $x \leq 1$ ou $x \geq 4$}

2) Resolver a inequação $x^2 - 5x + 4 < 0$.

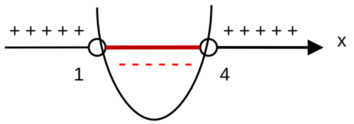
Solução:

i) As raízes da equação são x' = 4 e x" = 1;

ii) Traçar um esboço do gráfico e fazer o estudo do sinal;

iii) Como o sinal de desigualdade é <, temos *bolinha aberta*;

iv) Como o sinal de desigualdade é **<**, ou seja, menor, queremos os **sinais negativos**;



∴ S = { $x \in IR$ | $1 < x < 4$}

Exercícios – MÓDULO III

1) Resolver as seguintes equações do 1º Grau:

a) $4x = 8$

b) $-5x = 10$

c) $7 + x = 8$

d) $3 - 2x = -7$

e) $16 + 4x - 4 = x + 12$

f) $8 + 7x - 13 = x - 27 - 5x$

g) $\frac{2x}{3} = \frac{3}{4}$

h) $\frac{1}{4} = \frac{3x}{10}$

i) $9x + 2 - (4x + 5) = 4x + 3$

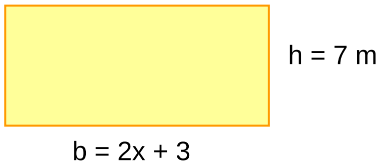
j) $3.(2 - x) - 5.(7 - 2x) = 10 - 4x + 5$

l) $\frac{x-2}{3} - \frac{12-x}{2} = \frac{5x-36}{4} - 1$

m) $\frac{5x+3}{8} - \frac{3-4x}{3} + \frac{x}{2} = \frac{31}{2} - \frac{9-5x}{6}$

2) Resolva a equação literal 5x – 3a = 2x + 11a na incógnita x.

3) A área A de um retângulo é dada pela equação A = b . h, em que b é a medida da base e h é a medida da altura. Se o retângulo tem 91 m^2 de área, qual a medida, em metros, da base b?



4) Calcule x de modo que $\frac{3x}{x+2} + \frac{4}{x+2} = -3$.

5) Resolva as equações:

a) $\frac{2}{y} + \frac{9}{2y} = -\frac{13}{4}$

b) $\frac{4}{b} + \frac{2}{3} = 2$

c) $10 - \frac{5}{x} = 15$

6) Determinar as raízes das seguintes equações quadráticas:

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$

b) $x^2 + 3x - 28 = 0$

c) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

d) $16x^2 + 16x + 3 = 0$

e) $4x^2 - 16 = 0$

f) $2x^2 - 18 = 0$

g) $3x^2 = 5x$

h) $2x^2 + 8x = 0$

i) $(2x-3)^2 = (4x-3)^2$

j) $x(x-1) = x(2x-1) - 18$

7) Use a relação do SP e determinar mentalmente as raízes das equações:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $x^2 + 2x - 15 = 0$

c) $x^2 - 4x - 12 = 0$

d) $x^2 - 10x + 21 = 0$

e) $x^2 + 5x - 50 = 0$

8) Fatore os trinômios:

a) $x^2 - 6x + 8 =$

b) $y^2 - 2y - 8 =$

c) $x^2 + 7x + 6 =$

d) $3x^2 - 12x + 9 =$

e) $4y^2 - 3y - 10 =$

f) $9x^2 - 12x + 4 =$

9) Resolva as equações:

a) $6(x - 10) = 0$

b) $-9(1 - 4y) = 0$

c) $(4x - 8)(x + 1) = 0$

d) $(3 - y)(3 + y) = 0$

e) $\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{m}{2} - 1\right) = 0$

f) $y(2y - 3)(y - 8) = 0$

g) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

h) $(m + 4)(m^2 - 9) = 0$

i) $3(x - 2)^2 = 12$

10) Resolva as equações incompletas:

a) $x^2 + 9x = 0$

b) $y^2 - 7y = 0$

c) $-8x^2 + 2x = 0$

d) $\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} = 0$

e) $2y^2 - 32 = 0$

f) $3x^2 - 4 = 0$

g) $2x^2 - \frac{1}{50} = 0$

11) Resolva as equações irracionais:

a) $x^{\frac{1}{2}} - 4 = 0$

b) $\sqrt{x+1} - 2 = 0$

c) $x - 2x^{\frac{1}{2}} = 15$

d) $x - \sqrt{9 - x^2} = 3$

e) $\sqrt{\sqrt{5x+1}} = 3$

f) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = 0$

g) $\sqrt{x+9} - \sqrt{x} = \sqrt{x-15}$

h) $\sqrt{2\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$

12) Simplifique as frações algébricas:

a) $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}=$

b) $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+x-6}=$

c) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}=$

d) $\dfrac{x^2-5x}{3x^2-18x+15}=$

e) $\dfrac{x^2-8x+15}{2x^2-4x-6}=$

f) $\dfrac{-x^2+7x-12}{x^2-8x+16}=$

13) Quais são as raízes da equação biquadrada $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$?

14) Resolver as seguintes inequações do 1º Grau:

a) $2(\mathrm{x}+1)+3\mathrm{x}>5-7\mathrm{x}$

b) $\dfrac{2}{5}\mathrm{x}-\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{4\mathrm{x}}{5}-1$

c) $\dfrac{7x}{3}-7\leq x+\dfrac{2}{3}$

d) $5x-2(x+2)\geq 1-(3-4x)$

e) $\dfrac{3(x+1)}{2}-\dfrac{x-1}{4}\leq\dfrac{1}{2}$

f) $\dfrac{5(3x+1)}{2}-\dfrac{3x}{4}>\dfrac{5(1-3x)}{8}+\dfrac{18}{3}$

g) $\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{4(1-x)}{2}>\dfrac{x}{4}+\dfrac{2-x}{6}$

15) Determine o conjunto solução das inequações:

a) $x^2 - 3x \geq 0$

b) $-2x^2 - 10x \leq 0$

c) $-x^2 + 16 > 0$

d) $2x^2 - 16 < 0$

e) $x^2 - 5x + 6 > 0$

f) $x^2 + 5x + 4 \leq 0$

g) $\dfrac{x^2-4}{3}-\dfrac{x-2}{2}\leq 0$

h) $(2x-5)(x-4)-7\geq(x-2)(x-3)$

i) $4x^2 + (x+2)^2 < 1$

16) Determine os valores inteiros de x que satisfazem a inequação $4x(x-1)(3-x)\left(\dfrac{x}{2}+1\right) > 0$.

Respostas:

1) a. {2} b. {-2} c. {1} d. {5} e. {0} f. {-1} g. $\left\{\frac{9}{8}\right\}$ h. $\left\{\frac{5}{6}\right\}$ i. {6}

j . {4} l. {8} m. {9}

2) $\left\{\frac{14a}{3}\right\}$ **3)** b = 13m **4)** $\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

5) a. {- 2} b. {3} c. {-1}

6) a. {1, 6} b. {-7, 4} c. $\left\{\frac{2}{3},1\right\}$ d. $\left\{-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right\}$ e. {-2, 2} f. {-3, 3}

g. $\left\{0,\frac{5}{3}\right\}$ h. {-4, 0} i. {-1, 0} j. $\left\{-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right\}$

7) a. {1, 5} b. {-5, 3} c. {-2, 6} d. {3, 7} e. {-10, 5}

8) a. (x – 4)(x – 2) b. (y – 4)(y + 2) c. (x + 1)(x + 6) d. 3(x – 3)(x – 1)

e. 4(y – 2)$\left(y+\frac{5}{4}\right)$ f. 9$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$

9) a.{10} b. $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ c. {-1, 2} d. {-3, 3} e. $\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ f. $\left\{0, \frac{3}{2}, 8\right\}$

g. {1, 2, 3} h. {-4, -3, 3} i. {0, 4}

10) a. {-9, 0} b. {0, 7} c. {0, $\frac{1}{4}$} d. {-6, 0} e. {-4, 4} f. $\left\{-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$ g. $\left\{-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right\}$

11) a. S = {16} b. S = {3} c. S = {25} d. S = {3} e. S = {16} f. ∅

g. S = {16} h. {9}

12) a. $\frac{x-1}{x+1}$ b. $\frac{x+5}{x+3}$ c. $\frac{x-2}{x+2}$ d. $\frac{x}{3(x-1)}$ e. $\frac{x-5}{2(x+1)}$ f. $\frac{3-x}{x-4}$

13) S = $\left\{\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}\right\}$

14) a. { $x \in \Re$ | $x > \frac{1}{4}$} b. { $x \in \Re$ | $x \le \frac{5}{4}$} c. { $x \in \Re$ | $x \le \frac{23}{4}$}

d. { $x \in \Re$ | x ≤ - 2} e. { $x \in \Re$ | x ≤ - 1} f. { $x \in \Re$ | $x > \frac{11}{23}$}

g. { $x \in \Re$ | $x < \frac{16}{21}$}

15) a. { $x \in \Re$ | x ≤ 0 ou x ≥ 3} b. { $x \in \Re$ | x ≤ - 5 ou x ≥ 0}

c. { $x \in \Re$ | - 4 < x < 4} d. { $x \in \Re$ | $-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$ }

e. { $x \in \Re$ | x < 2 ou x > 3} f. { $x \in \Re$ | - 4 ≤ x ≤ -1 }

g. { $x \in \Re$ | $-\frac{1}{2} \le x \le 2$ } h. { $x \in \Re$ | x ≤ 1 ou x ≥ 7} i. ∅

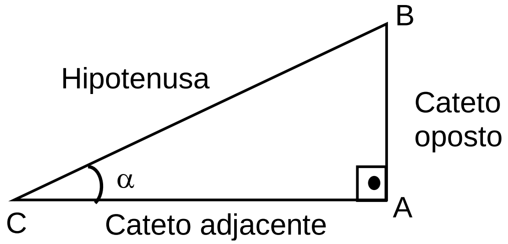
16) x = -1 ou x = 2

4 Trigonometria

A trigonometria é uma ferramenta matemática bastante utilizada no cálculo de distâncias envolvendo triângulos retângulos.

4.1 Relações trigonométricas no triângulo retângulo

Considere um triângulo retângulo ABC representado abaixo:



- Hipotenusa ($\overline{BC}$) é o lado oposto ao ângulo reto;
- Cateto oposto ($\overline{AB}$) é o lado oposto ao ângulo agudo α;
- Cateto adjacente ($\overline{AC}$) é o lado que forma o ângulo agudo α.

A trigonometria estabelece relações entre o ângulo agudo do triangulo retângulo e as medidas de seus lados. Observe:

$$sen\,\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$cos\,\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

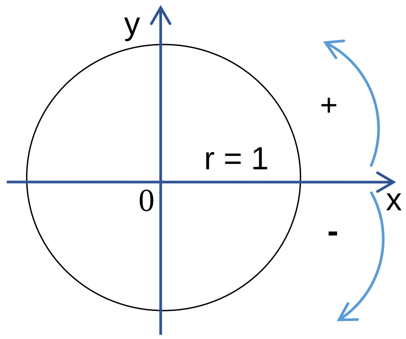
$$tg\,\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

4.2 Ciclo trigonométrico

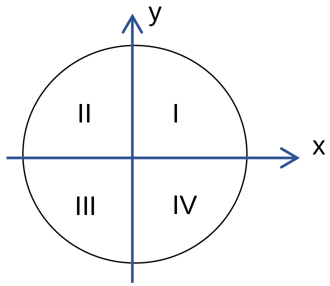
O ciclo trigonométrico é um ente matemático que possibilita o cálculo de medidas trigonométricas (seno, cosseno, tangente, etc.) para **qualquer ângulo**. O ciclo é uma circunferência de raio 1 e centrada na origem.

Circunferência orientada

A Figura abaixo (a), ilustra a circunferência orientada de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas de raio um (r=1), que é denominada circunferência trigonométrica. É estabelecido o sentido positivo (+) para o sentido *anti-horário* e o sentido negativo (-), o sentido *horário*. A Figura abaixo (b), ilustra os quadrantes que são divididos pelas retas *x* e *y*.



(a)

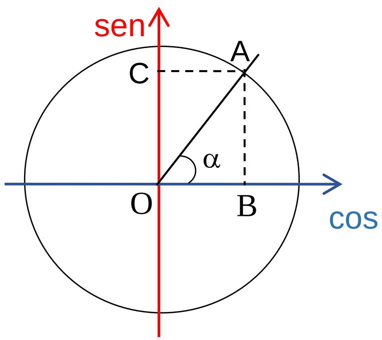


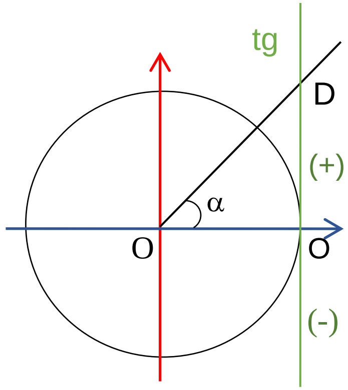
(b)

4.3 Relações trigonométricas

O círculo trigonométrico, também chamado de ciclo, é utilizado para auxiliar nas relações trigonométricas: o eixo da abscissa *x* corresponde ao cosseno (cos), o eixo das ordenadas *y* ao seno (sen). Ainda temos as relações da tangente (tg), secante (sec), cossecante (cosec) e cotangente (cotg).

Consideramos os ciclos trigonométricos dado abaixo.





i) Definimos seno do ângulo α, a distância do ponto O até C, $\overline{OC}$:

$$sen\ \alpha = \overline{OC}$$

ii) Definimos cosseno do ângulo α, a distância $\overline{OB}$:

$$\cos \alpha = \overline{OB}$$

iii) Definimos tangente do ângulo α, a medida $\overline{OD}$:

$$tg\ \alpha = \overline{OD}$$

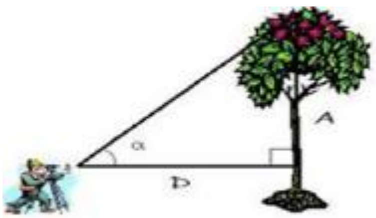
Assim, no círculo trigonométrico podemos representar as razões trigonométricas de um ângulo qualquer entre $0 \leq \alpha \leq 360°$.

Chamamos de **ângulos notáveis** aqueles mais conhecidos 30°, 45° e 60°. A tabela abaixo, apresenta os valores de sen, cos e tg dos ângulos notáveis.

	30º	**45º**	**60º**
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Por exemplo:

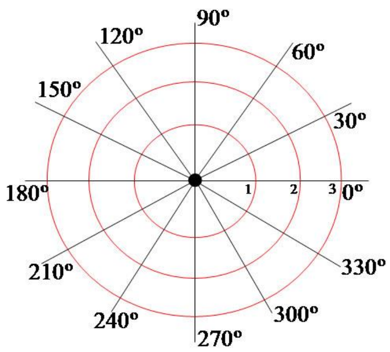
1) Um homem de 1,80 m encontra-se a 2,5 m de distância de uma árvore, conforme ilustração a seguir. Sabendo-se que o ângulo α é de 42°, determine a altura dessa árvore.



4.4 Unidades de medidas

Grau

Um grau é definido como a medida do ângulo central subtendido por um arco igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco, como ilustrado abaixo. Símbolo: Grau (º)

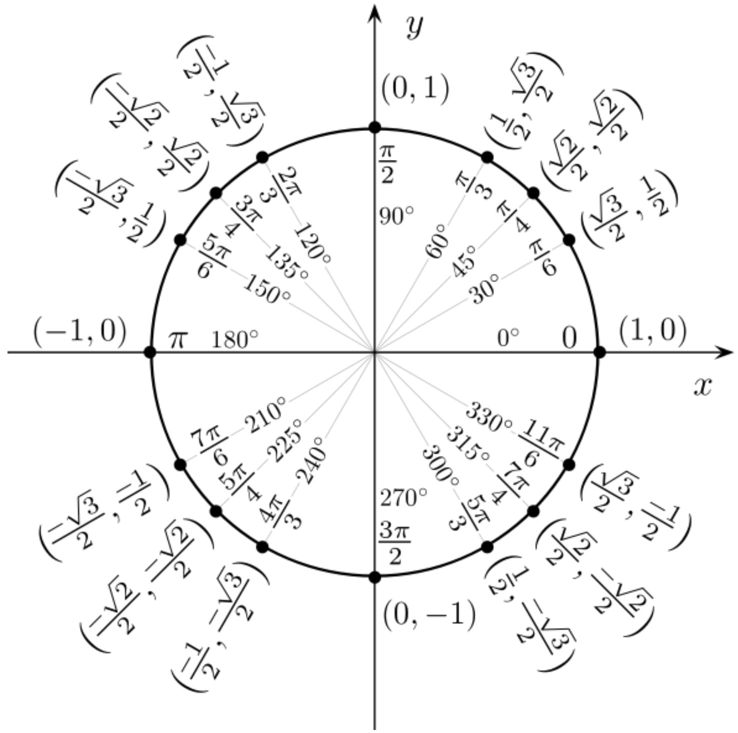


Radianos

O radiano (rad) é definido como a medida de um ângulo central subtendido por um arco igual ao raio da circunferência que contém o arco. A tabela abaixo, apresenta algumas relações entre grau e radianos.

GRAUS	0	90°	180°	270°	360°
RADIANOS	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

A figura abaixo, ilustra o ciclo trigonométrico, relacionando as medidas dos arcos em graus e radianos, para as medidas do cos e sen, nesta ordem.



Por exemplo:

a) $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $sen\ 30° = \frac{1}{2}$

4.5 Funções trigonométricas

★ Função seno

A função seno é uma função periódica e seu período é **2π**. Ela é expressa por:

f(x) = sen x

Características:

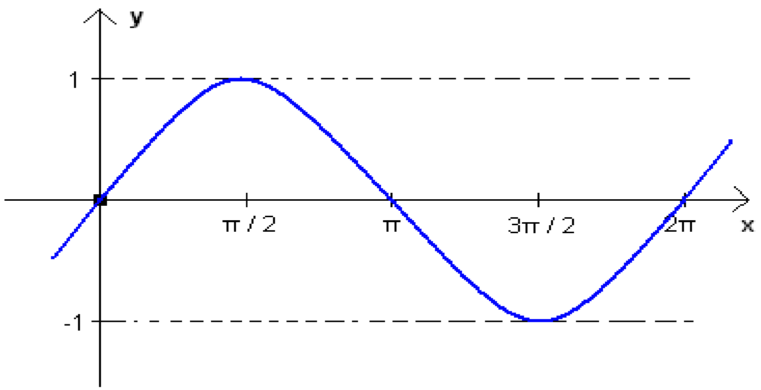
i) O sinal da função seno é positivo quando x ∈ I e II quadrantes, ou seja, $0 < x < 180°$;

ii) O sinal é negativo quando *x* ∈ III e IV quadrantes, ou seja, $180° < x < 360°$;

iii) O domínio da função é D = x ∈ IR;

iv) A imagem da função é Im = [-1, 1];

v) O gráfico da função seno *f(x) = sen x* é uma curva chamada de **senoide.**



★ Função cosseno

A função cosseno é uma função periódica e seu período é **2π**. Ela é expressa por:

f(x) = cos x

Características:

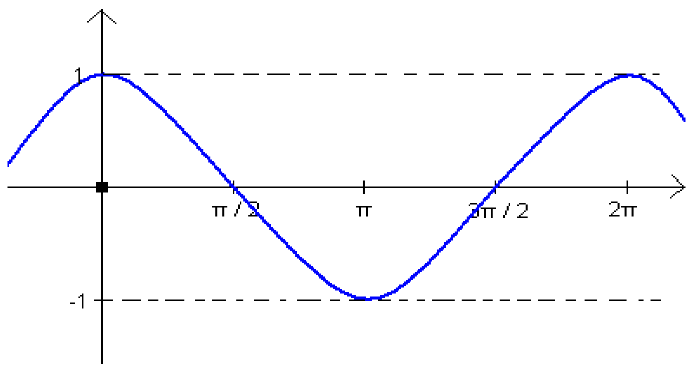
i) O sinal da função cosseno é *positivo* quando x ∈ I e IV quadrantes, ou seja, $0 < x < 90°$ ou $270° < x < 360°$

ii) O sinal é negativo quando *x* ∈ II e III quadrantes, ou seja, $90° < x < 270°$;

iii) O domínio da função é D = x ∈ IR;

iii) A imagem da função é Im = [-1, 1];

iv) O gráfico da função seno *f(x) = cos x* é uma curva chamada de **cossenoide.**



★ Função tangente

A função tangente é uma função periódica e seu período é **π**.

Ela é expressa por:

f(x) = tg x

Características:

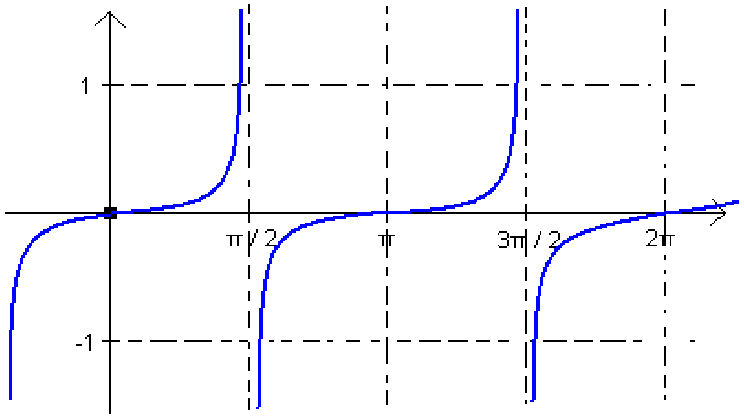
i) O sinal da função tangente é *positivo* quando $x \in$ I e III quadrantes, ou seja, $0 < x < 90°$ ou $180° < x < 270°$

ii) O sinal é negativo quando $x \in$ II e IV quadrantes, ou seja, $90° < x < 180°$ ou $270° < x < 360°$

iii) O domínio da função é D={x ∈ IR│x ≠ de π/2 + kπ; k ∈ Z}

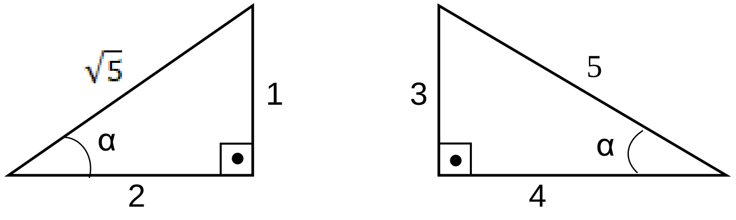
iii) A imagem da função é Im = IR;

iv) O gráfico da função seno *f(x) = cos x* é uma curva chamada de **tangentoide.**



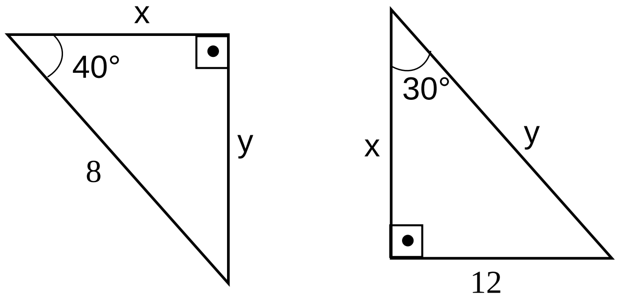
Exercícios – MÓDULO IV

1) Calcule $sen\ \alpha,\ cos\ \alpha\ e\ tg\ \alpha$.



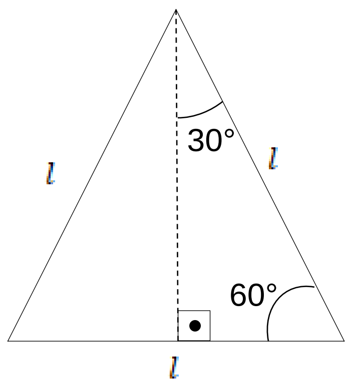
(a) (b)

2) Calcule o valor de *x* e *y* no triângulo dado abaixo.



(a) (b)

3) Considere o triângulo equilátero e calcule as medidas de $sen\ 30°, \cos 30°, tg\ 30°,\ \ sen\ 60°,\ \cos 60°\ e\ tg\ 60°$.



4) Expresse em radianos:

a) 60º
b) 210º
c) 350º
d) 150º
e) 12º
f) 2º

5) Expresse em graus:

a) $\frac{10\pi}{9}$
b) $\frac{11\pi}{18}$
c) $\frac{\pi}{9}$
d) $\frac{\pi}{20}$
e) $\frac{4\pi}{3}$
f) $\frac{3}{5}\pi$

6) Quantas voltas completas dá o ângulo abaixo e em que quadrante o ângulo se situa:

a) 1810º
b) $\frac{25\pi}{4}$
c) -1200º

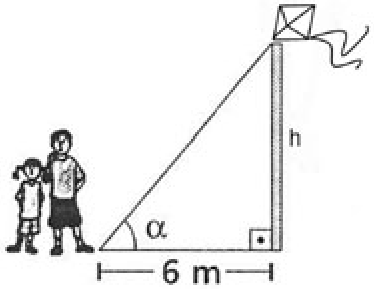
7) Construa o gráfico das seguintes funções, no intervalo $[0, 2\pi]$. Identifique o Domínio e a Imagem.

a) $y = 3sen\ x$
b) $y = sen\ 2x$
c) $y = \cos 6x$
d) $y = -2\cos x$

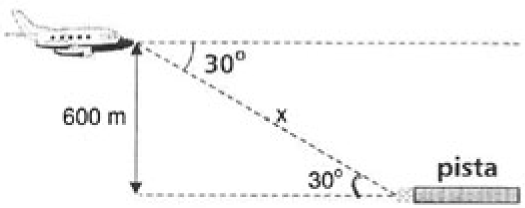
8) Determine o valor das seguintes funções:

a) $sen\ 900°$
b) $sen\ (-2130°)$
c) $sen\ 765°$
d) $\cos 6\pi$
e) $\cos 11\pi$
f) $\cos\frac{7\pi}{2}$
g) $tg\ (-540°)$
h) $tg\ \frac{13\pi}{3}$
i) $tg\ 1500°$

9) Ao empinar uma pipa, João percebeu que estava a uma distância de 6m do poste onde a pipa engalhou. O ângulo formado entre a linha da pipa e a rua era de 60°, como ilustrado na figura abaixo. Calcule a altura do poste.



10) Um avião está a 600m de altura quando se vê a cabeceira da pista sob um ângulo de declive de 30°. A que distância o avião está da cabeceira da pista?



Respostas:

1) $a.\ sen\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5},\ \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5},\ tg\,\alpha = \frac{1}{2}$

$b.\ sen\,\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\alpha = \frac{4}{5},\ tg\,\alpha = \frac{3}{4}$

2) $a.\ x = 6{,}08\ e\ y = 5{,}12$

$b.\ x = 20{,}6$

3) Ver tabela das razões trigonométricas

4) $a.\frac{\pi}{3}\quad b.\frac{7\pi}{6}\quad c.\frac{35\pi}{18}\quad d.\frac{5\pi}{6}\quad e.\frac{\pi}{15}\quad f.\frac{\pi}{90}$

5) $a.200°\quad b.110°\quad c.20°\quad d.9°\quad e.240°\quad f.108°$

6) a. 5 voltas/ IQ b. 3voltas/ IQ c. 3voltas/ IIIQ

8) a. 0 b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d. 1 e. -1 f. 0 g. 0 h. $\sqrt{3}$ i. $\sqrt{3}$

9) $h = 6\sqrt{3}m$

10) x = 1200m

Referências Bibliográficas

AXLER, Sheldon. **Pré-cálculo:** uma preparação para o cálculo com manual de soluções para o estudante. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

DEMANA, Franklin D. et al. **Pré-cálculo.** 2.ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

MEDEIROS, Valéria Zuma. **Pré-cálculo.** 2. ed. rev. e atual. São Paulo: Cengage Learning, 2010

RATTAN, Kuldip S.; KLINGBEIL, Nathan W. **Matemática básica para aplicações de engenharia.** Rio de Janeiro: LTC, 2017.

SAFIER, Fred. **Pré-cálculo.** 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

SCHWERTL, Simone Leal. **Matemática básica.** 2. ed. Blumenau: Ed. da FURB, 2010

SENAI-SP EDITORA. **MATEMATICA BASICA.** [S.l.]: SENAI-SP EDITORA, 2014.

SILVA, Sebastião Medeiros da; SILVA, Elio Medeiros da; SILVA, Ermes Medeiros da. **Matemática básica para cursos superiores.** 2. ed. São Paulo: Atlas, 2018