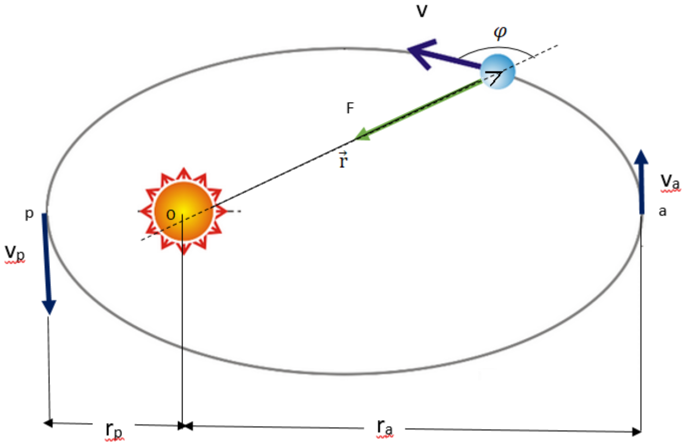
Processo Seletivo nº 05/2022

Área: Física
Prova Escrita - Gabarito

1. A 2ª lei de Kepler afirma que para um planeta qualquer orbitando uma estrela, o segmento que liga o planeta a estrela varre áreas iguais da órbita em tempos iguais. Demonstre essa lei a partir de princípios da mecânica clássica.

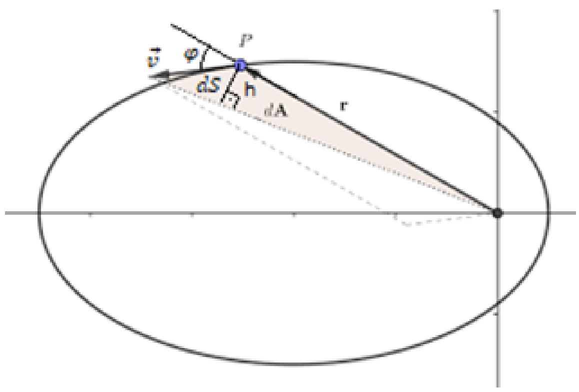
Pelas leis de Kepler, a órbita de um planeta ao redor de uma estrela é elíptica de forma que a estrela fica localizada em um dos focos desta elipse. A força gravitacional sobre o planeta aponta na direção da estrela, sendo uma força central com relação a órbita, como mostra a figura abaixo:



Considerando a origem das coordenadas na posição da estrela, o vetor força fica paralelo ao vetor posição em toda a órbita, de modo que o torque gerado por esta força é nulo:

$$\vec{r} \parallel \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{l} = cte$$

$$|\vec{l}| = m|\vec{r} \times \vec{v}| = mrv\,\text{sen}(\varphi) = cte$$



A velocidade areolar do planeta é dada por $v_{ar} = \frac{dA}{dt}$ e $v = \frac{dS}{dt}$. Tomando o limite a área pode ser aproximada para um triângulo, de modo que:

$$dA = \frac{1}{2}rh \qquad h \approx rd\theta = dS\,\text{sen}(\varphi) \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

$$v_{ar} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r\frac{dS}{dt}\text{sen}(\varphi) = \frac{rv\,\text{sen}(\varphi)}{2} = \frac{|\vec{l}|}{2m} = cte$$

2. Um corpo oscila preso a uma mola seguindo a equação de um oscilador harmônico amortecido unidimensional:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Onde m é a massa do corpo, b a constante de amortecimento da mola e k sua constante elástica. Resolva a equação e avalie as características dos diferentes regimes que o movimento pode apresentar dependendo dos valores das constantes m, b e k.

É comum começar a solução dividindo todos os termos pela massa, o que resulta na equação

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Onde $\gamma = \frac{b}{m}$ é o fator de amortecimento e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência natural do oscilador. Um método de solução desta EDO é através da equação característica:

$$y^2 + \gamma y + \omega_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

$$x(t) = K_1 e^{y_+ t} + K_2 e^{y_- t}$$

As constantes K_1 e K_2 dependem das condições iniciais do problema e as características do movimento dependem da avaliação do termo $\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$.

Quando a raiz é real $\left(\frac{\gamma}{2} > \omega_0\right)$:

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(K_1 e^{\beta t} + K_2 e^{-\beta t}\right)$$

Como $\frac{\gamma}{2} > \beta$, o movimento tem o comportamento de uma exponencial negativa que converge para 0 no limite $t \to \infty$. Quanto menor a diferença entre $\frac{\gamma}{2}$ e β, mais lentamente o oscilador converge para zero (ponto de equilíbrio do oscilador). O amortecimento é chamado de supercrítico.

Quando a raiz é nula $\left(\frac{\gamma}{2} = \omega_0\right)$ o termo $te^{-\frac{\gamma}{2}t}$ também é solução da EDO. A solução geral do movimento pode ser escrita como:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(K_1 + K_2 t)$$

Como há apenas uma exponencial negativa na expressão, o movimento converge mais rapidamente para zero do que o caso anterior e o amortecimento é chamado de crítico.

Finalmente, quando a raiz é imaginária $\left(\frac{\gamma}{2} < \omega_0\right)$:

$$\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = i\omega \quad \text{onde } \omega = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(K_1 e^{i\omega t} + K_2 e^{-i\omega t}\right) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t))$$

Neste caso o movimento também converge para o ponto de equilíbrio devido a exponencial negativa, mas oscila ao redor deste ponto ao longo do tempo devido às funções harmônicas em $x(t)$. A convergência é mais lenta que no caso crítico pois o fator de amortecimento é menor que no caso anterior e o amortecimento é chamado de subcrítico.

3. Uma harpa de um músico tem 43 cordas com comprimentos que variam entre $1,6\,m$ e $5\,cm$. Sabendo que as notas musicais desta harpa estão no intervalo de seis oitavas (cada vez que uma escala musical sobe uma oitava sua frequência musical dobra) e que todas as cordas são tensionadas com a mesma força e feitas do mesmo material, qual a razão entre as espessuras da maior e da menor corda da harpa? Se o som da maior corda tem uma frequência de aproximadamente $40\,Hz$, qual a velocidade de propagação do som nesta corda?

Como a diferença entre as frequências é de seis oitavas e a cada oitava a frequência dobra:

$$\frac{f_2}{f_1} = 2^6 = 64$$

Onde f_1 corresponde a frequência da maior corda e f_2 a frequência da menor corda. As ondas que se propagam nas cordas são, estacionárias, transversais e devem obedecer a condição de contorno das pontas fixas.

Seja a função de onda $y(x,t)$, onde y é a direção de oscilação e x a direção de propagação, t o tempo e l o comprimento da corda, vale:

$$y(x,t) = A\,\text{sen}(kx)\,\text{sen}(\omega t) \qquad y(0,t) = y(l,t) = 0$$

$$y(l,t) = A\,\text{sen}(kl)\,\text{sen}(\omega t) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{sen}(kl) = 0 \quad \rightarrow \quad kl = n\pi$$

Aqui n indica o harmônico da corda. A frequência principal do som da corda corresponde ao primeiro harmônico ($n = 1$) e neste caso $k = \frac{\pi}{l}$. Como k é o número de onda, é possível escrever a relação entre o comprimento da corda e do primeiro harmônico:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{l} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 2l$$

Onde λ corresponde ao comprimento de onda do primeiro harmônico. Pela equação da velocidade de propagação de uma onda:

$$v = \lambda f \qquad \rightarrow \qquad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2l}$$

Voltando a razão entre as frequências:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\frac{v_2}{2l_2}}{\frac{v_1}{2l_1}} = \frac{v_2 l_1}{v_1 l_2}, \qquad \frac{l_1}{l_2} = \frac{160}{5} = 32 \quad \rightarrow \quad 64 = 32\frac{v_2}{v_1} \quad \rightarrow \quad \frac{v_2}{v_1} = 2$$

A velocidade de propagação de uma onda numa corda é dada pela relação $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ onde T é a tensão na corda e μ a densidade linear de massa. A relação entre a densidade linear e volumétrica da corda é dada por

$$\mu = \rho\frac{\pi D^2}{4}$$

Onde ρ é a densidade volumétrica do material e D o diâmetro (espessura) da corda. Como a T e ρ são iguais para todas as cordas, obtem-se a relação

$$\frac{v_2}{v_1} = 2 = \sqrt{\frac{\frac{T}{\rho\frac{\pi D_2^2}{4}}}{\frac{T}{\rho\frac{\pi D_1^2}{4}}}} = \sqrt{\frac{D_1^2}{D_2^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{D_1}{D_2} = 2$$

Ou seja a corda maior tem o dobro da espessura da corda menor.

Com relação a velocidade de propagação do som na corda maior:

$$v_1 = \lambda f_1 = 2l_1 f_1 = 2\cdot 1,6\cdot 40 = 128,0\,m/s$$

4. A equação que descreve a transformação adiabática de um gás ideal é dada por $pV^{\gamma} = cte$ onde o expoente $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ é a razão entre a capacidade térmica molar do gás a pressão constante e a capacidade térmica molar do gás a volume constante. Demonstre esta última relação para um gás ideal.

Primeiramente é preciso lembrar da 1ª lei da termodinâmica:

$$Q = W + \Delta U$$

Onde Q é o calor, $W = \int p dV$ o trabalho e ΔU a variação da energia interna. Para uma transformação isométrica não há variação do volume e portanto não há trabalho. Neste caso:

$$Q = 0 + \Delta U = nC_V \Delta T \qquad \rightarrow \qquad \Delta U = nC_V \Delta T$$

Já para uma transformação isobárica a pressão é constante e vale

$$Q = W + \Delta U = \int p dV + nC_V \Delta T = p\Delta V + nC_V \Delta T = nC_P \Delta T$$

A partir da lei dos ideais, para uma isobárica:

$$pV = nRT \qquad \rightarrow \qquad p\Delta V = nR\Delta T \qquad \Rightarrow \qquad nR\Delta T + nC_V \Delta T = nC_P \Delta T$$

$$n(R + C_V)\Delta T = nC_P \Delta T \qquad \rightarrow \qquad C_P = C_V + R$$

Para determinar o fator γ pode-se usar a 1ª lei da termodinâmica na forma diferencial e considerar que numa transformação adiabática $Q = 0$:

$$dQ = 0 = dW + dU \qquad \rightarrow \qquad dW = -dU$$

$$dW = pdV, \qquad dU = nC_V dT \qquad \Rightarrow \qquad pdV = -nC_V dT$$

Escrevendo a lei dos gases na forma diferencial:

$$d(pV) = pdV + Vdp = nRdT \qquad \rightarrow \qquad Vdp = -pdV + nRdT = n(C_V + R)dT = nC_P dT$$

$$\frac{Vdp}{pdV} = \frac{nC_P dT}{-nC_V dT} = -\frac{C_P}{C_V} \qquad \rightarrow \qquad \frac{dp}{p} = -\frac{C_P}{C_V}\frac{dV}{V}$$

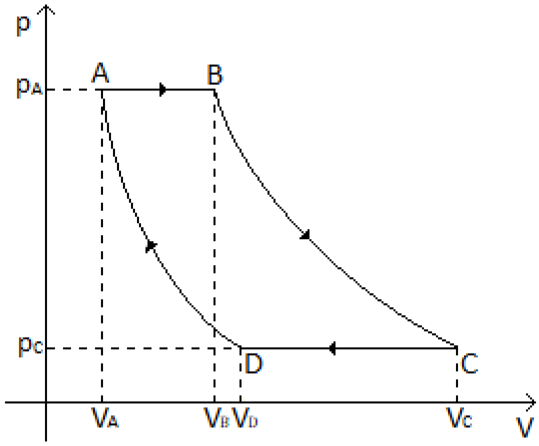
Seja uma transformação adiabática que vai de um ponto inicial 1 a um ponto final 2, pode-se integrar a última relação dos dois lados entre estes pontos

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{C_P}{C_V}\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \qquad \rightarrow \qquad \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -\frac{C_P}{C_V}\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \ln\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\left(-\frac{C_P}{C_V}\right)}\right]$$

Igualando os argumentos dos logaritmos

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\left(-\frac{C_P}{C_V}\right)} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\left(\frac{C_P}{C_V}\right)} \qquad \rightarrow \qquad p_1 V_1^{\left(\frac{C_P}{C_V}\right)} = p_2 V_2^{\left(\frac{C_P}{C_V}\right)} = cte \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

5. Uma máquina térmica opera seguindo o ciclo de Joule, que pode ser observado no diagrama PV da figura abaixo:



Neste ciclo, $A \to B$ e $C \to D$ são transformações isobáricas, enquanto $B \to C$ e $D \to A$ são transformações adiabáticas. Determine o rendimento do ciclo em função das temperaturas nos pontos A, B, C e D e mostre ser inferior ao rendimento de uma maquina de Carnot de mesmas temperaturas extremas. Mostre que a variação da entropia do universo após a máquina completar um ciclo é maior do que zero.

O rendimento de uma máquina de Carnot é $\eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_q}$, onde T_f e T_q são a temperatura mais fria e mais quente no ciclo, respectivamente. Na comparação com o ciclo deste problema então

$$\eta_C = 1 - \frac{T_D}{T_B}$$

Como $p_A = p_B$ e $p_C = p_D$, pela lei dos gases combinada vale que

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_B V_B}{T_B} \quad \to \quad \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B} \qquad\qquad \frac{p_C V_C}{T_C} = \frac{p_D V_D}{T_D} \quad \to \quad \frac{V_C}{V_D} = \frac{T_C}{T_D}$$

Para as curvas adiabáticas é possível chegar a relação

$$p_A V_A^\gamma = p_D V_D^\gamma \qquad p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma$$

$$\frac{p_B V_B^\gamma}{p_A V_A^\gamma} = \frac{p_C V_C^\gamma}{p_D V_D^\gamma} \quad \to \quad \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\gamma = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^\gamma \quad \to \quad \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \quad \to \quad \frac{T_B}{T_A} = \frac{T_C}{T_D}$$

O rendimento de uma máquina térmica é dado pela expressão

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Onde Q_1 é o calor retirado da fonte quente em $A \to B$ e Q_2 o calor cedido à fonte fria em $C \to D$. Dessa forma:

$$Q_1 = nC_P \Delta T_{AB} = nC_P(T_B - T_A) \qquad Q_2 = -nC_P \Delta T_{CD} = nC_P(T_C - T_D)$$

$$\eta_J = 1 - \frac{nC_P(T_C - T_D)}{nC_P(T_B - T_A)} = 1 - \frac{(T_C - T_D)}{(T_B - T_A)}$$

Da relação anterior entre temperaturas pode-se substituir

$$T_C = \frac{T_B T_D}{T_A} \quad \to \quad \eta_J = 1 - \frac{\left(\frac{T_B T_D}{T_A} - T_D\right)}{(T_B - T_A)} = 1 - \frac{T_D}{T_A}\left(\frac{T_B - T_A}{T_B - T_A}\right) \quad \to \quad \eta_J = 1 - \frac{T_D}{T_A}$$

Como $T_B > T_A$ e a única diferença entre as duas expressões de rendimento é a razão entre as frações então obrigatoriamente $\eta_C > \eta_J$.

Para calcular a variação da entropia do universo é preciso lembrar que quando o ciclo é completado a variação da entropia do gás é nula, de forma que apenas as fontes quentes e fria tem uma variação de entropia diferente de zero. A máquina térmica mais eficiente possível é aquela cuja temperatura da fonte quente é igual a maior temperatura do ciclo (T_B) e a temperatura da fonte fria é igual a menor temperatura do ciclo (T_D).

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T}$$

$$\Delta S_{FQ} = \int_i^f \frac{dQ}{T_{FQ}} = \frac{1}{T_B}\int_i^f dQ = -\frac{Q_1}{T_B} \qquad \Delta S_{FF} = \int_i^f \frac{dQ}{T_{FF}} = \frac{1}{T_D}\int_i^f dQ = \frac{Q_2}{T_D}$$

$$\Delta S_u = \Delta S_{FQ} + \Delta S_{FF} = -\frac{Q_1}{T_B} + \frac{Q_2}{T_D} = nC_P\left(\frac{T_A - T_B}{T_B} + \frac{T_C - T_D}{T_D}\right) = nC_P\left(\frac{T_A}{T_B} + \frac{T_C}{T_D} - 2\right)$$

Como mostrado anteriormente, $\frac{T_B}{T_A} = \frac{T_C}{T_D}$, portanto

$$\Delta S_u = nC_P\left(\frac{T_A}{T_B} + \frac{T_B}{T_A} - 2\right) = nC_P\left(\frac{T_A^2 + T_B^2 - 2T_A T_B}{T_A T_B}\right) = \frac{nC_P\,(T_B - T_A)^2}{T_A T_B} > 0$$

Pois todos os termos da última expressão são obrigatoriamente positivos.

Assinaturas do documento

Código para verificação: **7YJG24M6**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

OSEIAS ALVES PESSOA (CPF: 920.XXX.989-XX) em 12/12/2022 às 15:27:30
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:37:38 e válido até 30/03/2118 - 12:37:38.
(Assinatura do sistema)

DAMIANNI SEBRAO (CPF: 817.XXX.959-XX) em 12/12/2022 às 15:36:50
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:44:17 e válido até 30/03/2118 - 12:44:17.
(Assinatura do sistema)

RAFAEL RODRIGUES FRANCISCO (CPF: 358.XXX.878-XX) em 12/12/2022 às 15:52:05
Emitido por: "SGP-e", emitido em 13/07/2018 - 14:58:45 e válido até 13/07/2118 - 14:58:45.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwNTYyODRfNTYzNzFfMjAyMl83WUpHMjRNNg== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00056284/2022** e o código **7YJG24M6** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.