**PROCESSO SELETIVO N° 04/2026**

Área de Conhecimento: Matemática (B)

PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

Questão 1: Sejam $V$ um espaço vetorial e $W_1 \subset V$ um subespaço.

(a) Defina $V = W_1 \oplus W_2$

(b) Mostre que, se $V = W_1 \oplus W_2$, então todo vetor $v \in V$ pode ser escrito de maneira única como $v = w_1 + w_2$, com $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$.

(c) Mostre que, nesse caso, $\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

(a) O símbolo '$\oplus$' corresponde à soma direta entre os subespaços de $V$, $W_1$ e $W_2$. Dizemos que $V$ é soma direta de $W_1$ e $W_2$ se, qualquer que seja $v \in V$, existe $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ tais que $v = w_1 + w_2$ e $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, onde $0_V$ é o elemento neutro de $V$.

(b) Seja $v \in V$, com $V = W_1 \oplus W_2$. Então existe $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ tais que $v = w_1 + w_2$ e $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$.

Suponhamos por absurdo exista $w_1^* \in W_1$ e $w_2^* \in W_2$ diferentes de $w_1$ e $w_2*$ tais que $v = w_1^* + w_2^*$. Segue que

$$w_1 + w_2 = w_1^* + w_2^*.$$

Como $W_1$ e $W_2$ são supespaços vetoriais, existem $(-w_1^*) \in W_1$ e $(-w_2) \in W_2$ tais que

$$\begin{cases} w_1^* + (-w_1^*) = 0_V \\ w_2 + (-w_2) = 0_V \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= w_1^* + w_2^* \\ w_1 + w_2 + (-w_1^*) &= w_1^* + w_2^* + (-w_1^*) \\ w_1 - w_1^* + w_2 &= w_2^* + w_1^* - w_1^* \\ w_1 - w_1^* + w_2 + (-w_2) &= w_2^* + 0_V + (-w_2) \\ \underbrace{w_1 - w_1^*}_{\in W_1} &= \underbrace{w_2^* - w_2}_{\in W_2} \end{aligned}$$

–

Segue que

$$\left.\begin{array}{c}(w_1 - w_1^*), (w_2^* - w_2) \in W_1 \cap W_2 \\ W_1 \cap W_2 = 0_V\end{array}\right\} \Longrightarrow w_1 - w_1^* = w_2^* - w_2 = 0_V$$

Portanto, $w_1 = w_1^*$ e $w_2^* = w_2$: contradição.

Segue que a decomposição $v = w_1 + w_2$ é única.

(c) Se $B_1$ é uma base de $W_1$ e $B_2$ é uma base de $W_2$, então

$$\begin{cases} B_1 \subset V, & B_2 \subset V, \\ W_1 = [B_1], & W_2 = [B_2] \\ B_1 \text{ l.i,} & B_2 \text{ l.i} \end{cases}$$

Note que nenhum elemento não nulo de $v \in B_1$ pode ser escrito como combinação linear de elementos de $B_2$ porque, se o fosse, $v \in [B_2] = W_2$ e, portanto, $v \in W_1 \cap W_2$, o que é um absurdo. Portanto $B = B_1 \cup B_2$ forma um conjunto linearmente independente de $V$.

Suponhamos agora que existe $v^* \in V$ tal que $v^*$ não possa ser escrito como combinação linear dos elementos de $B$. Então existem $w_1^* \in W_1$ e $w_2^* \in W_2$ tais que $v^* = w_1^* + w_2^*$. Mas então $v^* \in [B_1 \cup B_2] = B$: contradição.

OBS: O candidato pode traçar gráficos ou exibir exemplos para ilustrar suas explicações.

*

Membros da Banca

| | |
|---|---|
| Membro 1 (nome e assinatura) | Membro 2 (nome e assinatura) |
| Membro 3 (nome e assinatura) | Presidente (nome e assinatura) |

Questão 2 Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ , $T: V \to V$ um operador linear definido e considere $u \in V$ não nulo tal que $Tu = \lambda u$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Explique o significado geométrico de $u$ e $\lambda$.

(b) Discuta a diferença entre multiplicidade algébrica e geométrica de um autovalor.

(c) Qual a informação que os autovalores e os autovetores de uma matriz nos dão sobre ela ser diagonalizável ou não?

(a) Um operador linear $T : V \to V$, de certa forma, modifica os vetores de $V$.

Agora, se $v$ é um vetor não nulo tal que $Tv = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, $v$ tem sua direção mantida por $T$, podendo ter seu módulo ou seu sentido modificados. Quem determina essas alterações é o $\lambda$:

- Se $|\lambda| > 1$, $T$ leva o vetor $v$ em um vetor de mesma direção, mas tamanho maior (alongamento).
- Se $|\lambda| < 1$, $T$ leva o vetor $v$ em um vetor de mesma direção, mas tamanho menor (contração).
- Se $|\lambda| = 1$, $T$ leva o vetor $v$ em um vetor de mesma direção e mesmo tamanho. Assim, $v$ é um vetor fixo.

- Se $\lambda > 0$, $T$ leva o vetor $v$ em um vetor de mesma direção e sentido.
- Se $\lambda < 0$, $T$ leva o vetor $v$ em um vetor de mesma direção, mas sentido oposto.
- Se $\lambda = 0$, $T$ leva o vetor $v$ no vetor nulo, ou seja, $v \in Ker(T)$.

(b) Dado $T : V \to V$ um operador linear de $\dim V = n$, para encontrarmos os autovalores de $T$, precisamos das raízes da equação característica

$$p_n(\lambda) = \det([T] - \lambda[I]) = 0,$$

onde $[T]$ é a matriz associada a $T$, $[I]$ é a matriz identidade, ambas de dimensão $n$ e $\lambda$ é a incógnita, correspondente aos autovalores de $T$.

Então

$$n_i(\lambda) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}, p \leq n$$

onde $n_i$ é a multiplicidade de cada $\lambda_i$, também chamada de multiplicidade algébrica de $\lambda_i$ e denotada por $m_a(\lambda_i) = n_i$.

Então para cada $\lambda_i$ encontra-se um subespaço vetorial $V_{\lambda_i}$ cuja dimensão $m_i$ é menor ou igual a $n_p$. Essa dimensão é chamada de multiplicidade geométrica de $\lambda$ e denotada por $m_g(\lambda_i)$. Então

$$1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i) \leq n.$$

(c) Se, para cada autovalor $\lambda_i$, a multiplicidade algébrica foi igual a multiplicidade geométrica, então $V$ pode ser escrito como a soma direta dos supespaços de autovetores $V_{\lambda_i}$. Nesse caso, a união dos geradores desses subespaços formam uma base $B$ de $V$, e a matriz $[T]$ é diagonalizável, sendo $[T]_{B,B}$ a matriz diagonal $B$.

OBS: O candidato pode traçar gráficos ou exibir exemplos para ilustrar suas afirmações.

Membros da Banca

| | |
|---|---|
| Membro 1 (nome e assinatura) | Membro 2 (nome e assinatura) |
| Membro 3 (nome e assinatura) | Presidente (nome e assinatura) |

Questão 3: Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto linearmente independente em um espaço vetorial $V$ munido de produto interno.

(a) Descreva o objetivo do processo de Gram-Schmidt.

(b) Explique por que o processo gera um conjunto ortogonal a partir de um conjunto l.i.

(c) Por que o processo falha se o conjunto inicial for l.d.?

(a) O objetivo do processo de Gram-Schmidt é construir, a partir de uma base qualquer $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de um espaço vetorial $V$ munido de produto interno, uma base ortogonal, isto é, $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ tal que

$$\langle u'_i, u'_j \rangle = 0$$

qualquer que sejam $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$ distintos entre si.

(b)Fixemos um dos vetores de $\mathcal{B}$, digamos $u_1$. Sabemos pela definição de produto interno que, como $u_1 \neq 0$ (pois pertence a uma base de $V$),

$$\langle u_1, u_1 \rangle \neq 0.$$

Tomando então $u'_1 = u_1$, o próximo passo será construir um vetor $u'_2$ não nulo que seja l.i. com $u'_1$ e ortogonal a ele. Vamos construir $v_2$ a partir de uma combinação linear de $u'_1$ e $u_2$:

$$u'_2 = u_2 + c.u'_1,$$

para algum $c \in \mathbb{R}$. Por outro lado, não basta ser l.i: queremos que os vetores sejam ortogonais. Então precisamos encontrar $c$ tal que $\langle u'_1, u'_2 \rangle = 0$

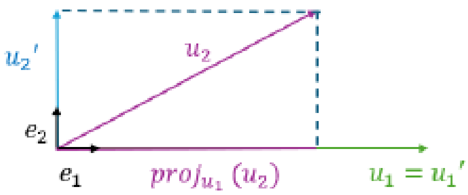
$$\begin{aligned}
\langle u'_1, u'_2 \rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \langle u'_1, u_2 + c.u'_1 \rangle = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \langle u'_1, u_2 \rangle + c\langle u'_1, u'_1 \rangle = 0 \\
&\Longrightarrow \quad c\,\underbrace{\langle u'_1, u'_1 \rangle}_{\neq 0} = -\langle u'_1, u_2 \rangle \\
&\Longrightarrow \quad c = -\frac{\langle u'_1, u_2 \rangle}{\langle u'_1, u'_1 \rangle}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$u'_2 = u_2 - \frac{\langle u'_1, u_2 \rangle}{\langle u'_1, u'_1 \rangle} u'_1$$

O que estamos fazendo então é descontar de $u_2$ a projeção de $u'_1$ sobre ele.

O que estamos fazendo então é descontar de $u_2$ a projeção de $u_1'$ sobre ele.




Para o terceiro vetor, descontamos de $u_3$ as projeções em relação a $u_1'$ e $u_2'$:

$$u_3' = u_3 - \frac{\langle u_1', u_3\rangle}{\langle u_1', u_1'\rangle}u_3 - \frac{\langle u_2', u_3\rangle}{\langle u_2', u_2'\rangle}u_3$$

e assim por diante.

Se desejarmos que essa base seja ortornormal, basta dividir cada vetor de $\mathcal{B}'$ por sua respectiva norma.

(c) Sejam dois vetores $u_1$ e $u_2$ linearmente dependentes. Isso significa que existe um número real $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u_1 = \lambda u_2$.

Utilizando o processo de Gram-Schmidt, consideremos $u_1' = u_1$ e vamos construir um vetor $u_2'$ descontando de $u_2$ a projeção do vetor $u_1'$:

$$\begin{aligned} u_2' &= u_2 - \frac{\langle u_1', u_2\rangle}{\langle u_1', u_1'\rangle}u_2 = u_2 - \frac{\langle(\lambda u_2), u_2\rangle}{\langle(\lambda u_2), (\lambda u_2)\rangle}u_2 = u_2 - \frac{\lambda\langle u_2, u_2\rangle}{\lambda\langle u_2, (\lambda u_2)\rangle}u_2 = u_2 - \frac{\cancel{\lambda}\cancel{\langle u_2, u_2\rangle}}{\lambda^{\cancel{2}}\cancel{\langle u_2, u_2\rangle}}u_2 = \\ &= u_2 - \frac{1}{\lambda}u_2 = \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right)u_2 \end{aligned}$$

Segue que $u_2'$, é portanto, linearmente dependente com $u_2$. Agora, se $u_2$ é l.d com $u_1 - u_1'$, segue que $u_2'$ é l.d. com $u_1'$, implicando em $\langle u_1', u_2'\rangle \neq 0$.

Membros da Banca

| | |
|---|---|
| Membro 1 (nome e assinatura) | Membro 2 (nome e assinatura) |
| Membro 3 (nome e assinatura) | Presidente (nome e assinatura) |

Questão 4 Explique por que a Desigualdade de Cauchy-Schwarz do produto escalar em $\mathbb{R}^2$ fornece uma medida de posição relativa entre dois vetores $u$ e $v$ reais.

Dado dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no plano cartesiano, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz é dada por

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$$

fornece uma medida de posição relativa entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

De fato, sabemos que o produto escalar entre dois vetores é definido como sendo

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |u||v| \cos\theta,$$

onde $\theta$ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Ou seja, o produto escalar mede quanto um vetor "aponta" na direção do outro (projeção de um sobre o outro).

Então

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |u||v| \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, segue que

$$\begin{array}{rcl} -1 \leq & \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|} & \leq 1 \\ -|\vec{u}||\vec{v}| \leq & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle & \leq |\vec{u}||\vec{v}| \\ & |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| & \leq |\vec{u}||\vec{v}| \end{array}$$

Assim, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz é uma relação algébrica que expressa uma relação geométrica. A mesma Desiqualdade, quando aplicada em um espaço vetorial $V$ munido de produto interno, permite então 'criar' a ideia de posição relativa entre dois vetores não nulos qualquer.

OBS: O candidato pode traçar gráficos ou exibir exemplos para ilustrar suas afirmações.

Membros da Banca

Membro 1 (nome e assinatura)

Membro 2 (nome e assinatura)

Membro 3 (nome e assinatura)

Presidente (nome e assinatura)

# Assinaturas do documento

Código para verificação: **ZK1XQ455**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

**DEBORA CRISTINA BRANDT** (CPF: 883.XXX.540-XX) em 23/06/2026 às 07:55:40
Emitido por: "SGP-e", emitido em 11/09/2025 - 12:53:09 e válido até 11/09/2125 - 12:53:09.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwMjM1ODlfMjM1OTRfMjAyNl9aSzFYUTQ1NQ== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00023589/2026** e o código **ZK1XQ455** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.