

PROCESSO SELETIVO N° 04/2026

Área de Conhecimento: Matemática (A)

PROVA ESCRITA – Padrão de respostas

Questão 1: Suponha que a fabricação de um produto requer x horas por máquina e y horas por pessoa e que o custo de produção seja dado por

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 500$$

Determine o número de máquinas-hora e pessoas-hora necessárias para que o custo seja mínimo.

Resolução:

- Domínio da função: $x \geq 0, y \geq 0$.
- Pontos críticos:

Como a função é polinomial, ela e todas suas derivadas são diferenciáveis em todo seu domínio, ou seja

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 6x^2 - 6y = 0 \\ x^2 &= y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -6x + 2y = 0 \\ y &= 3x\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^2 = y \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = x(x - 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \ (y = 0) : \text{Contradição} \\ x = 3 \ (y = 9) \end{cases}$$

- Decidindo se o ponto é de máximo ou mínimo local através do discriminante:

$$D(3,9) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,9) \right] \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,9) \right] - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,9) \right]^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3, 9) = 36 > 0 \quad (*)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3, 9) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3, 9) = -6$$

$$D(3, 9) = (36)(2) - (-6)^2 > 0 \quad (**)$$

Por (*) e (**), o ponto (3, 9) é um ponto de mínimo absoluto.

Assim, serão necessárias 3 horas por máquina e 9 horas por pessoa.

Questão 2: Calcule a área interna do laço maior e externa ao laço menor do limaçon $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$.

Resolução:

Para determinar a área interna ao laço maior e externa ao laço menor, é necessário esboçar o gráfico. Assim,

- Zeros:

$$r(0) = 1 + 2 \operatorname{sen} 0 = 1$$

$$r = 0 \Rightarrow 1 + 2 \operatorname{sen} \theta = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} \text{ e } \theta = \frac{7\pi}{6}$$

- Máximos e mínimos:

$$r(\theta) = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta \Rightarrow r'(\theta) = 2 \operatorname{cos} \theta$$

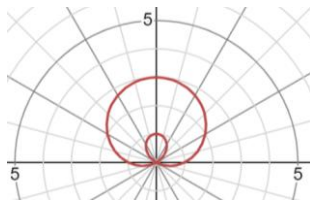
$$r'(\theta) = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{cos} \theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ e } \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$r(\pi/2) = 1 + 2 = 3$$

$$r(-\pi/2) = 1 - 2 = -1$$

- Simetria em $\theta \leftrightarrow \pi/2 - \theta$ (eixo $\theta = \pi/2$)



O laço menor começa em $\theta = -\pi/2$ e termina em $\theta = -\pi/6$.

- Área do laço maior:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2\text{sen}\theta)^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/2} 1 + 4\text{sen}\theta + 4\text{sen}^2\theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/2} 1 + 4\text{sen}\theta + 2(1 - \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/2} 3 + 4\text{sen}\theta - 2\cos 2\theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2} [3\theta - 4\cos\theta - \text{sen}2\theta]_{-\pi/6}^{\pi/2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[3 \left(\frac{\pi}{2} \right) - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \text{sen}2\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[2\pi + 4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[2\pi + 4\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

- Área do laço menor:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{-\pi/6} (1 + 2\text{sen}\theta)^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{2} [3\theta - 4\cos\theta - \text{sen}2\theta]_{-\pi/2}^{-\pi/6} \\
 &= \frac{1}{2} \left[3\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \text{sen}2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\pi - 4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

- Área do laço maior menos a área do laço menor:

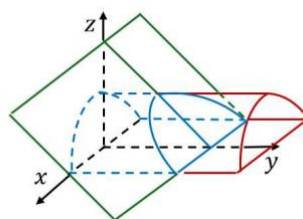
$$A = \left(\pi + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

- Multiplicando por 2:

$$A_t = 2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = \pi + 3\sqrt{3}$$

Questão 3: Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + (y^2 + e^{xz^2})\vec{j} + \text{sen}(xy)\vec{k}$ e S é a superfície da região E delimitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$.

Resolução:



O campo vetorial é uma função bastante complicada de ser integrada, particularmente a componente da direção \vec{j} . Entretanto, a parcela mais complicada dessa componente não depende de y . Assim, o seu divergente é uma função bem mais simples de ser integrada. De fato,

$$\text{div}(\vec{F}) = y + 2y + 0 = 3y$$

Por outro lado, S é suave por partes e simples. Supondo que S está orientada positivamente, e tomando E como sendo o sólido delimitado por S ,

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z\}$$

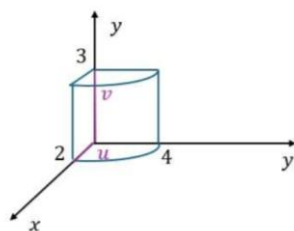
Pelo Teorema da Divergência,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \text{div}(\vec{F}) dV = \iiint_E 3y dV$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} y \, dy \, dz \, dx \\
 &= 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} y \, dy \, dz \, dx = \frac{184}{35}
 \end{aligned}$$

Questão 4: Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ se $\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{i} + xy\vec{j} + y^2\vec{k}$ e C é a fronteira orientada da superfície que consiste na parte do cilindro $z = 4 - x^2$ no primeiro octante que é delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $y = 3$.

Resolução:



Para calcular a integral de linha, teria que dividir C em vários caminhos, uma vez que C não é suave, mas suave por partes. Por outro lado, supondo que C está orientada positivamente, e sabendo que o campo \vec{F} possui derivadas parciais contínuas, podemos aplicar o Teorema de Stokes, tomando S a superfície delimitada por C , orientada positivamente.

$$\begin{aligned}
 \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} \\
 &= \iint_{[0,2] \times [0,3]} \text{rot}(\vec{F})(\vec{r}) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, dA
 \end{aligned}$$

Parametrizando S :

$$S : \vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (4 - u^2)\vec{k}, \quad 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 3.$$

$$\vec{r}_u(u, v) = 1\vec{i} + 0\vec{j} + (-2u)\vec{k}$$

$$\vec{r}_v(u, v) = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v(u, v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & (-2u) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2u\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$$

Agora calculando o rotacional de \vec{F}

$$\text{rot}(\vec{F})(x, y, z) = \vec{\nabla} \times \vec{F} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz & xy & y^2 \end{vmatrix} = 2y\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$$

$$\text{rot}(\vec{F})(\vec{r}(u, v)) = 2v\vec{i} + u\vec{j} + v\vec{k}$$

Por fim, calculando o produto escalar

$$\text{rot}(\vec{F})(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v(u, v)) =$$

Segue que

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^2 \int_0^3 4uv + vdvdu = \int_0^2 \left[2uv^2 + \frac{v^2}{2} \right]_{v=0}^{v=3} du = \int_0^2 18u + \frac{9}{2} du = \\ &= \left[9u^2 + \frac{9}{2}u \right]_{u=0}^{u=2} = 36 + 9 = 45. \end{aligned}$$

Presidente da Banca Examinadora