Métodos Quantitativos em Economia

Questões de Prova

Ementa: *Equações de diferenças de primeira ordem e de ordem mais alta e aplicações à Economia. Equações diferenciais lineares de primeira ordem, equações diferenciais exatas, equações separáveis. Equações lineares de segunda ordem e de ordem mais alta. Diagramas de fase. Aplicações econômicas de equações diferenciais e equações de diferenças.*

QUESTÃO 1 - Equações diferenciais exatas

FONTE: CHIANG, Alpha C.; WAINWRIGHT, Kevin. Matemática para economistas. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006. Pag. 467

ENUNCIADO: Resolva a EDO exata:

$$2yt\,dy + y^2\,dt = 0.$$

GABARITO:

Escrevendo na forma $M(y,t)\,dy + N(y,t)\,dt = 0$:

$$M(y,t) = 2yt, N(y,t) = y^2$$

Verificando a exatidão:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 2y \qquad \frac{\partial N}{\partial y} = 2y$$

Como são iguais, a equação é exata.

Procuramos uma função potencial $\Phi(y,t)$ tal que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = M = 2yt$$

Integramos em relação a y:

$$\Phi(y,t) = \int 2yt\,dy = 2t\int y\,dy = 2t\cdot\frac{y^2}{2} = ty^2 + g(t),$$

onde $g(t)$é função apenas de t.

Agora usamos $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = N = y^2$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = y^2 + g'(t) = y^2.$$

Logo $g'(t) = 0 \Rightarrow g(t) =$ constante.

Portanto, a solução implícita é

$$\Phi(y,t) = ty^2 = C,$$

onde C é constante real.

Desta forma, a solução explícita:

$$y^2 = \frac{C}{t} \Rightarrow y(t) = \pm\sqrt{\frac{C}{t}}$$

QUESTÃO 2 -

ENUNCIADO:

A partir da Equação Diferencial Não-Linear de 1ª Ordem:

$$\frac{d}{dt}k(t) = sk(t)^{\alpha} - \delta k(t)$$

dado que $0 < s, \delta, \alpha < 1$, resolva:

a) Solução geral;

b) Estado Estacionário de k;

c) Classifique a estabilidade dinâmica do equilíbrio.

RESOLUÇÃO:

FONTE: CHIANG, Alpha C.; WAINWRIGHT, Kevin. Matemática para economistas. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006. Pag. 480-81

a) $k(t) = \left[Ae^{-(1-\alpha)\delta t} + \frac{s}{\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$

b) $\bar{k} = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

c) $k(t)$ apresenta uma trajetória dinâmica convergente para $\bar{k}$ de maneira monotônica.

QUESTÃO 3 -

ENUNCIADO:

Para cada uma das equações diferenciais de segunda ordem lineares a seguir, pede-se:

- Solução particular;
- Função complementar;
- Solução geral;
- Classifique a estabilidade dinâmica do equilíbrio.

a) $6y''(t) - y'(t) - y(t) = 4$

b) $4y''(t) - 4y'(t) + y(t) = 3$

RESOLUÇÃO:

Resolução: Considere a equação diferencial de segunda ordem:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b.$$

Sua solução geral, se $a_2 \neq 0$, é dada por:

$$y(t) = \begin{cases} A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \frac{b}{a_2}, & \text{(raízes reais distintas)} \\ A_3 e^{rt} + A_4 t e^{rt} + \frac{b}{a_2}, & \text{(raízes reais repetidas)} \\ e^{ht}(A_5 \cos(vt) + A_6 \text{sen}(vt)) + \frac{b}{a_2} & \text{(raízes complexas)} \end{cases}$$

onde $h = -\frac{a_1}{2}$ e $v = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$.

a)

O polinômio característico associado à esta EDO de segunda ordem é dado por:

$$6r^2 - r - 1 = 0.$$

As raízes do polinômio característico são:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + \sqrt{1 + 24}}{12} = \frac{1}{2}, \\ r_2 &= \frac{1 - \sqrt{1 + 24}}{12} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

A solução geral é, portanto:

$$y(t) = A_1 e^{\frac{1}{2}t} + A_2 e^{-\frac{1}{3}t} - 4.$$

A trajetória dinâmica diverge ($r_1 > 0$) de maneira monotônica (raízes reais) com relação ao equilíbrio intertemporal $y_p = -4$.

b)

O polinômio característico associado à esta EDO de segunda ordem é dado por:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0.$$

As raízes do polinômio característico são:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{4 + \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2}, \\ r_2 &= \frac{4 - \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A solução geral é, portanto:

$$y(t) = A_3 e^{\frac{1}{2}t} + A_4 t e^{\frac{1}{2}t} + 3.$$

A trajetória dinâmica diverge $(r_1, r_2 > 0)$ de maneira monotônica (raízes reais) com relação ao equilíbrio intertemporal $y_p = 3$.

QUESTÃO 4 -

ENUNCIADO:

Solucione as seguintes equações de diferenças e, em cada caso, determine se a trajetória dinâmica é convergente ou divergente e monotônica ou oscilatória (assuma que $x_t = x_0$ em $t = 0$):

a) $x_t = -3x_{t-1} + 4.$
b) $x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} + 3.$

RESOLUÇÃO:

a) $x_t = -3x_{t-1} + 4.$

A equação de diferenças é dada por:

$$x_t + 3x_{t-1} = 4.$$

Solução particular. $x_t = x_{t-1} = x_p$, substituindo na equação obtemos:

$$x_p + 3x_p = 4,$$

portanto: $x_p = 1$.
Função complementar. A função complementar é dada por:

$$x_c = A(-a)^t,$$

onde A é uma constante arbitrária e a, neste caso, é igual à 3. Portanto:

$$x_c = A(-3)^t.$$

Solução geral. A solução geral é dada por:

$$x_t = x_c + x_p = A(-3)^t + 1.$$

Solução definida. Assumindo que $x_t = x_0$ em $t = 0$, temos que:

$$x_0 = A + 1,$$

portanto: $A = x_0 - 1$, substituindo o valor de A na solução geral, obtemos a solução definida, que será dada por:

$$x_t = (x_0 - 1)(-3)^t + 1.$$

Temos, portanto, que a trajetória dinâmica do equilíbrio será divergente ($|b| > 1$) e oscilatória ($b < 0$).[3]

[3]Lembrando que $b = -a$. Portanto, neste caso, $b = -3$.

b) $x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} + 3.$

A equação de diferenças é dada por:

$$x_t - \frac{1}{2}x_{t-1} = 3.$$

Solução particular. $x_t = x_{t-1} = x_p$, substituindo na equação obtemos:

$$x_p - \frac{1}{2}x_p = 3,$$

portanto: $x_p = 6$.
Função complementar. A função complementar é dada por:

$$x_c = A(-a)^t,$$

onde A é uma constante arbitrária e a, neste caso, é igual à $-1/2$. Portanto:

$$x_c = A\left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

Solução geral. A solução geral é dada por:

$$x_t = x_c + x_p = A\left(\frac{1}{2}\right)^t + 6.$$

Solução definida. Assumindo que $x_t = x_0$ em $t = 0$, temos que:

$$x_0 = A + 6,$$

portanto: $A = x_0 - 6$, substituindo o valor de A na solução geral, obtemos a solução definida, que será dada por:

$$x_t = (x_0 - 6)\left(\frac{1}{2}\right)^t + 6.$$

Temos, portanto, que a trajetória dinâmica do equilíbrio será convergente ($|b| < 1$) e monotônica ($b > 0$).[4]

QUESTÃO - 5

ENUNCIADO:

Suponha que um depósito de $100 é feito no **começo de cada ano**, começando em $t = 0$, em uma conta bancária que rende juros de 10% ao ano, pede-se:

(a) Derive uma expressão que mostre o montante disponível nesta conta no começo de cada ano t.

(b) Encontre a solução definida da equação em diferenças de primeira ordem derivada no item anterior.

(c) Classifique a estabilidade dinâmica do equilíbrio intertemporal para a equação em diferenças obtida no item (a).

RESOLUÇÃO:

a)

Sabemos que a cada período t o investidor faz um depósito de $100 em sua conta bancária e, além disso, a taxa de juros anual que incide sobre o montante disponível em conta, em cada período, é de 10%. Portanto, no período t, o montante disponível em conta para este investidor é dado pelo rendimento de juros incidente sobre o montante disponível no período anterior $(1+r)y_{t-1}$ (sendo r a taxa de juros e y_{t-1} o montante disponível no período $t-1$) somado ao novo depósito realizado de $100. Ou seja:

$$y_t = (1+r)y_{t-1} + 100 = 1,1y_{t-1} + 100,$$

para uma taxa anual de juros igual de 10%.[1]

b)

Consideraremos, então, a equação de diferenças de primeira ordem:

$$y_t - 1,1y_{t-1} = 100.$$

Solução particular. $y_t = y_{t-1} = y_p$, substituindo na equação obtemos:

$$y_p - 1,1y_p = 100,$$

portanto: $y_p = \frac{100}{1-1,1}$.

Função complementar. A função complementar é dada por:

$$x_c = A(-a)^t,$$

onde A é uma constante arbitrária e a, neste caso, é igual à -1,1. Portanto:

$$y_c = A(1,1)^t.$$

Solução geral. A solução geral é dada por:

$$y_t = y_c + y_p = A(1,1)^t + \frac{100}{1-1,1}.$$

Solução definida. Assumindo que $y_t = y_0$ em $t = 0$, temos que:

$$y_0 = A + \frac{100}{1-1,1},$$

portanto: $A = y_0 - \frac{100}{1-1,1}$, substituindo o valor de A na solução geral, obtemos a solução definida, que será dada por:

$$y_t = \left(y_0 - \frac{100}{1-1,1}\right)(1,1)^t + \frac{100}{1-1,1}.$$

Podemos reorganizar a equação anterior e usar o fato que $y_0 = 100$ para obter:

$$y_t = 100(1,1)^t + 100\left(\frac{1-(1,1)^t}{1-1,1}\right).$$

c)

Vimos que a solução definida para a equação de diferenças obtida é dada por:

$$y_t = 100(1,1)^t + 100\left(\frac{1-(1,1)^t}{1-1,1}\right).$$

Temos, portanto, que a trajetória dinâmica do equilíbrio será divergente ($|b| > 1$) e monotônica ($b > 0$).[2]

Assinaturas do documento

Código para verificação: **25HK94VJ**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

PAULO VICTOR DA FONSECA (CPF: 016.XXX.076-XX) em 24/11/2025 às 14:00:50
Emitido por: "SGP-e", emitido em 15/07/2021 - 08:10:54 e válido até 15/07/2121 - 08:10:54.
(Assinatura do sistema)

ANALUCIA VIEIRA FANTIN (CPF: 891.XXX.590-XX) em 24/11/2025 às 14:13:22
Emitido por: "SGP-e", emitido em 13/07/2018 - 13:16:58 e válido até 13/07/2118 - 13:16:58.
(Assinatura do sistema)

ADRIANO DE AMARANTE (CPF: 887.XXX.659-XX) em 24/11/2025 às 15:50:15
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:44:23 e válido até 30/03/2118 - 12:44:23.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwNDc0NzdfNDc1MDhfMjAyNV8yNUhLOTRWSg== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00047477/2025** e o código **25HK94VJ** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.