

ESTADO DA ARTE DE IMPLEMENTAÇÕES DE LÓGICA MODAL EM COQ¹

Miguel Alfredo Nunes², Karina Girardi Roggia³, Ariel Agne da Silveira⁴

¹ Vinculado ao projeto “Lógicas não Clássicas em COQ”

²Acadêmico (a) do Curso de Ciência da Computação – CCT – Bolsista PIPES

³ Orientador, Departamento de Ciência da Computação – CCT – karina.roggia@udesc.br

⁴ Acadêmico do Curso de Ciência da Computação – CCT

O objetivo deste trabalho é a análise do estado da arte de implementações de lógica modal no assistente de provas *Coq*. Lógica modal é, segundo Garson (2018), uma extensão da lógica proposicional clássica, com a adição dos conectivos modais de necessidade e possibilidade e da regra de necessitação. Um modelo semântico para a lógica modal é a semântica de Kripke que define validade de fórmulas com o conceito de mundos possíveis e com a relação de acessibilidade entre mundos. Em um dado mundo, há um conjunto de proposições consideradas válidas naquele mundo. Os conectivos modais de necessidade e possibilidade permitem expressar se fórmulas são necessariamente verdadeiras ou possivelmente verdadeiras em um mundo, através da relação de acessibilidade de mundos.

Segundo Wind (2001), são chamados de *Frames* os pares ordenados de um conjunto de mundos e uma relação entre estes, e são chamados de Modelos as tuplas de *Frames* e funções de valoração, definidas como uma função total binária que relaciona pares de proposições e mundos a um valor verdade. Podem ser impostas regras sobre a relação de acessibilidade de um *Frame* que restringem como esta deve se comportar, por exemplo, tornando necessário que todo mundo esteja relacionado com si próprio. Estas restrições geram diferentes sistemas da lógica modal, cada um possuindo um conjunto de axiomas que são satisfeitos pela relação de acessibilidade do *Frame*. Todo sistema é construído sobre o sistema básico K.

A lógica modal pode ser estendida alterando o significado dado aos operadores modais ou adicionando novos operadores, gerando assim outras lógicas modais. A lógica modal que contém somente os operadores modais de necessidade e possibilidade, sem alteração do significado destes é chamada de lógica alética. Um exemplo de lógica com alteração de significado é a lógica epistêmica. A lógica epistêmica é um tipo de lógica modal que lida com conhecimento, ela diverge da lógica modal alética alterando o significado dos operadores modais de necessidade e possibilidade, estes passam a significar “há conhecimento” e “pode haver conhecimento”.

De acordo com (TEAM, 2019), *Coq* é um assistente de provas que foi desenvolvido no final da década de 80, baseado na linguagem *OCaml*, por pesquisadores do Instituto Nacional de Pesquisa em Informação e Automação (INRIA). Segundo Silva (2019), assistentes de provas são programas que auxiliam o desenvolvimento de provas formais, mas não as fazem diretamente, devido a isso, podem provar *a priori* qualquer resultado que pode ser provado por uma pessoa sem auxílio de computador. Segundo Paulin-Mohring (2011), *Coq* é um ambiente para desenvolvimento de fatos e provas matemáticas, que possibilita definições de objetos, declarações de predicados, conectivos lógicos, entre outros.

De acordo com Silva (2019), *Coq* tem capacidade de sucintamente expressar uma parte considerável da matemática, o que o torna ideal para expressar lógicas de ordem superior e provar problemas clássicos da matemática. Por exemplo, o Teorema das Quatro Cores foi proposto em 1852, mas foi provado somente em 1976, isso pois era inviável de ser provado sem alguma ferramenta de automação, devido ao grande número de casos a serem analisados.

A metodologia seguida neste trabalho foi um levantamento da literatura da área. Os artigos obtidos foram então comparados entre si para determinar quais apresentavam os resultados mais relevantes para a pesquisa. Ao fim, quatro artigos foram selecionados para estudo.

Estes artigos foram então comparados em cinco critérios: qual sistema da lógica é implementado; se houver, qual sistema dedutivo é implementado; que tipo de lógica é implementada; quais resultados são apresentados; outras características notáveis presentes no trabalho. Estes resultados foram compilados na Tabela 1.

Os artigos estudados apresentam certa variabilidade nas suas implementações da lógica modal. Wind (2001) e (BENZMÜLLER; PALEO, 2015) implementam a lógica modal utilizando a semântica de Kripke, mas (DOCZKAL; SMOLKA, 2011) utilizam conjuntos de Hintikka como seu sistema semântico e Lescanne (2004) não implementa um sistema semântico. Wind (2001) e (BENZMÜLLER; PALEO, 2015) representam os diferentes sistemas da lógica modal adicionando a condição sobre a relação de acessibilidade do sistema e, a partir desta, provando seu respectivo axioma, enquanto (DOCZKAL; SMOLKA, 2011) e Lescanne (2004) adicionam os axiomas dos diferentes sistemas sem provar a sua respectiva condição sobre a relação de acessibilidade.

Wind (2001), (BENZMÜLLER; PALEO, 2015) e (DOCZKAL; SMOLKA, 2011) apresentam implementações da lógica modal que podem ser modificadas para contextos diferentes do proposto originalmente, sem grandes alterações, Lescanne (2004) necessita de grandes modificações da implementação para viabilizar o uso em contextos muito diferentes daquele proposto originalmente. Wind (2001) e Lescanne (2004) apresentam o mesmo resultado, a solução de dois puzzles. São eles, o puzzle dos três homens sábios, onde três homens recebem chapéus de cores diferentes e devem descobrir qual a cor de seu chapéu, e o puzzle das crianças enlameadas, onde crianças em um grupo devem descobrir se estão sujas de lama ou não.

Dentre os trabalhos obtidos no levantamento, havia grande diversidade de justificativas para a implementação da lógica modal em *Coq*. Muitos deles tinham fins matemáticos, como provas ou formalizações de teoremas, mas uma pequena porção deles tinha fins computacionais, como raciocinar sobre programas ou verificação de algoritmos. Isso é uma evidência do quanto abrangente é esta área e quantas possíveis aplicações podem ser desenvolvidas.

Permeando este trabalho de pesquisa bibliográfica, está em desenvolvimento uma implementação de lógica modal em *Coq* dentro do projeto de pesquisa. O intuito é o de integrar a equipe executora desta ação, incluindo exemplos, sistemas e outras características interessantes obtidas a partir do levantamento aqui realizado.

Tabela 1. Comparação dos Artigos Estudados.

Trabalhos	Sistema(s) da Lógica	Sistema Dedutivo	Tipo de Lógica	Resultados Apresentados	Outras Características
Doczkal e Smolka (2011)	K, K*	Não Implementado	Alética	Decidibilidade computacional das relações de satisfazibilidade, equivalência e validade.	Utilizam Conjuntos de Hintikka como modelo semântico.
Benzmüller e Paleo (2015)	K, T, B, 4, S5	Dedução Natural	Alética	Formalização da versão de Scott do argumento ontológico de Gödel para existência de Deus.	Utiliza semântica de Kripke como modelo semântico. Cria táticas da linguagem Ltac para auxiliar em provas dentro do sistema.
Lescanne (2004)	K, T, S5, S5 ⁿ	Axiomatização de Hilbert	Epistêmica	Resolução do <i>puzzle</i> dos três homens sábios. Resolução do <i>puzzle</i> das crianças enlameadas	Não utiliza nenhum modelo semântico.
Wind (2001)	K, T, S4, S5, S5 ⁿ	Dedução Natural	Alética e Epistêmica	Resolução do <i>puzzle</i> dos três homens sábios. Resolução do <i>puzzle</i> das crianças enlameadas	Utiliza semântica de Kripke como modelo semântico. Cria táticas da linguagem Ltac para auxiliar em provas dentro do sistema

Referências:

GARSON, J. Modal Logic. In: ZALTA, E. N. (Ed.). The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Fall 2018. [S.I.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018

PAULIN-MOHRING, C. Introduction to the coq proof-assistant for practical software verification. In: SPRINGER. LASER Summer School on Software Engineering. [S.I.], 2011. p. 45–95.

TEAM, T. C. development. The Coq proof assistant reference manual. [S.I.], 2019. Version 8.9.0. Disponível em: <<http://coq.inria.fr>>.

WIND, P. de. Modal logic in coq. Dissertação (Mestrado) - Vrije Universiteit, 2001.

BENZMÜLLER, C.; PALEO, B. W. Interacting with modal logics in the coq proof assistant. In: SPRINGER. International Computer Science Symposium in Russia. [S.I.], 2015. p. 398–411.

DOCZKAL, C.; SMOLKA, G. Constructive formalization of classical modal logic. 2011.

LESCANNE, P. Mechanizing epistemic logic with Coq. 2004.

SILVA, Rafael Castro Gonçalves. Uma certificação em COQ do algoritmo W monádico. 2019. 78 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada, Joinville, 2019.

Palavras-chave: Lógica Modal. Coq. Estado da Arte.