INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA ALGÉBRICA[1]

Pedro Meyer Tokoro[2], Sidnei Furtado Costa[3]

[1] Vinculado ao projeto "Estruturas Hiperbólicas em Variedades"
[2] Acadêmico do Curso de Licenciatura em Matemática – CCT – Bolsista PIVIC
[3] Orientador, Departamento de Matemática – CCT – sidnei.fc@udesc.br

A Topologia é uma área da matemática que estuda a maneira como os pontos de um conjunto estão distribuídos e conectados (ou não) entre si. Neste contexto, não é levada em consideração a forma exata dos objetos, mas sim, as propriedades que são preservadas quando, por exemplo, estes objetos são deformados. Para formalizar esta ideia, definimos uma estrutura chamada *espaço topológico*, que é um espaço no qual faz sentido falar em conjuntos abertos e fechados. A partir daí surge a noção de *função contínua*, que é uma função que é compatível com as estruturas topológicas de dois espaços. Quando uma certa propriedade de um espaço topológico é preservada por funções contínuas definidas neste espaço, damos a estas propriedades o nome de *invariantes topológicos*.

Uma classe particularmente importante de funções contínuas são os chamados *homeomorfismos,* que são deformações em um espaço topológico que podem ser revertidas. Por exemplo, se deformarmos uma esfera em uma elipsóide, podemos achatar este elipsóide novamente em uma esfera. Por outro lado, rasgar uma esfera em dois pedaços não é uma transformação contínua. Invariantes topológicos são um tema central na topologia, pois nos permitem analisar propriedades de objetos complexos utilizando objetos mais simples.

Um dos mais antigos invariantes topológicos conhecidos é a *característica de Euler*. Originalmente, era sabido que, para todo poliedro convexo, vale a seguinte relação: V-A+F=2, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro. Utilizando esta relação, prova-se que existem apenas 5 sólidos de Platão (poliedros regulares). Como todo poliedro é homeomorfo a uma esfera, definimos então como sendo 2 a característica de Euler da esfera. Para estender este conceito a outros objetos, utilizamos um procedimento que chamamos de triangulação. Construímos então uma superfície triangulada, que seja homeomorfa a uma dada superfície. Com isto, utilizamos a fórmula V-A+F = χ, onde χ é a chamada característica de Euler da superfície. Por este procedimento, calculamos a característica de Euler de um toro com n buracos (χ=2-2n), da garrafa de Klein (χ=0), dentre várias outras.

A Topologia Geral, como o nome indica, estuda conjuntos de maneira bastante genérica e abstrata. Por sua vez, a Topologia Algébrica possui um enfoque maior em curvas, superfícies e variedades (generalização de superfícies para n dimensões). Este trabalho teve como foco apenas as curvas e superfícies. Utilizamos então uma ferramenta da Álgebra chamada Teoria de Grupos. Um *grupo* é um conjunto não-vazio G munido de uma operação que é associativa, possui elemento neutro e cada elemento do conjunto possui um inverso em relação à operação definida. Um exemplo de grupo é o conjunto dos números inteiros com a operação de adição.

A ideia da Topologia Algébrica é definir uma estrutura algébrica sobre uma dada superfície. Neste trabalho, definimos então o que chamamos de *grupo fundamental*. Em uma superfície, definimos um ponto como base e consideramos todos os laços (curvas fechadas) que

Apoio: CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico; fapesc Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina; GOVERNO DE SANTA CATARINA

se iniciam e terminam neste ponto. Dizemos que dois laços são iguais caso possamos arrastar continuamente um laço até outro sobre a superfície. Definimos então a operação entre caminhos como a concatenação destes laços. De fato, é possível verificar que isto define uma estrutura de grupos no conjunto de todos os laços. Por exemplo, sobre uma esfera, qualquer par de caminhos fechados pode ser deformado para o outro. Por conta disso, o grupo fundamental da esfera tem apenas um único elemento. Por outro lado, sobre um toro, um caminho que passa em torno do buraco jamais poderá ser deformado em um caminho que dá a volta pela lateral do toro. Logo, temos uma superfície cujo grupo fundamental possui mais de um elemento.

Uma propriedade interessante do grupo fundamental é que, se duas superfícies possuem grupos fundamentais diferentes, estas superfícies obrigatoriamente não poderão ser homeomorfas, isto é, será impossível deformar continuamente uma superfície na outra. Temos então que uma esfera não será homeomorfa ao toro, isto é, não podemos abrir um buraco na esfera através de transformações contínuas. Por outro lado, superfícies com o mesmo grupo fundamental podem não ser homeomorfas. Um exemplo é a esfera e um disco. Ambos têm grupo fundamental com apenas um elemento (grupo trivial), porém, não são homeomorfas. Neste caso, a não existência de um homeomorfismo entre a esfera e o plano, segue do fato de todo homeomorfismo preserva compacidade, e destes dois espaços, apenas a esfera é compacta. Um dos resultados mais interessantes e importantes apresentados no trabalho é o fato de que o grupo fundamental do círculo é o conjunto dos números inteiros com a operação usual de adição. A partir deste resultado, conseguimos provar alguns teoremas importantíssimos como o Teorema Fundamental da Álgebra, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (para dimensão 2) e o Teorema de Borsuk-Ulam (para dimensão 2).

Após isso, estudamos os chamados *espaços de recobrimento*. Dizemos que um objeto X recobre um objeto Y se existe uma função contínua p de X para Y de modo que, para cada ponto de Y, existe uma quantidade enumerável de pontos de X que são levados até este ponto em Y através da função p. Podemos, por exemplo, recobrir um círculo enrolando a reta real sobre este círculo. Deste modo, a reta é um recobrimento do círculo. Os recobrimentos revelam interessantes relações entre os grupos fundamentais dos espaços de recobrimento e os espaços recobertos. Com isso, temos mais uma ferramenta que nos permite, por exemplo, calcular alguns grupos fundamentais de maneira mais fácil.

Por fim, estudamos o teorema de Seifert-Van Kampen, que é uma poderosa ferramenta que nos permite calcular grupos fundamentais de objetos consideravelmente complicados. Utilizando este teorema, podemos decompor uma superfície complexa em superfícies mais simples as quais conhecemos os grupos fundamentais. Deste modo, o grupo fundamental será dado pelo produto livre amalgamado dos grupos fundamentais de cada um destes pedaços. O produto livre de grupos é o grupo formado pela concatenação de elementos destes dois grupos. Nestes casos, é comum obtermos grupos bastante complicados e, muitas vezes, de difícil manipulação. O grupo fundamental é uma poderosa ferramenta, que nos permite demonstrar vários resultados interessantes, porém, com algumas limitações. Por exemplo, só conseguimos provar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema de Borsuk-Ulam para dimensão 2 utilizando o grupo fundamental. Para demonstrar estes teoremas em dimensões mais altas, é necessário o uso de uma ferramenta chamada *homologia*, que é uma estrutura algébrica mais refinada do que o grupo fundamental.

Palavras-chave: Superfícies. Grupo fundamental. Homeomorfismos.