MAXIMIZAÇÃO DA ENTROPIA EM CAMINHADAS QUÂNTICAS[1]

Andrey Kohls[2], Caio C. Daumann[2], Edgard P. M. Amorim[3].

[1] Vinculado ao projeto "Informação e Computação Quântica: aplicações da caminhada aleatória quântica."
[2] Acadêmico do Curso de Licenciatura em Física – CCT – Bolsista PROBIC
[3] Orientador, Departamento de Física – CCT – edgard.amorim@udesc.br

Uma caminhada aleatória é um modelo matemático que busca determinar a probabilidade de se encontrar uma partícula, em uma posição no espaço, superfície ou reta após uma sequência de passos dados aleatoriamente. Para uma caminhada aleatória clássica em uma dimensão, cada passo é discreto e de comprimento fixo e determinado pelo lançamento de uma moeda não viciada. Se o resultado for "cara" a partícula move-se para a esquerda, se for "coroa" ela move-se para a direita. Assim, para uma quantidade muito grande de passos a distribuição final de probabilidades é determinada por uma Gaussiana cuja dispersão é proporcional à raiz do número de passos $\sigma(t) \sim \sqrt{t}$ (comportamento difusivo).

Para uma caminhada quântica em uma dimensão, a partícula possui um grau de liberdade interno extra (spin-1/2), além do grau de liberdade externo (posição). O estado do caminhante quântico é representado por uma função $|\Psi\rangle$ que pertence ao espaço de Hilbert $H = H_C \otimes H_P$ em que H_C é o espaço da moeda quântica descrito pelos estados de spin *up* ($|\uparrow\rangle$) e *down* ($|\downarrow\rangle$) *e* H_P é o espaço de posições descrito pelos estados $|j\rangle$ tal que j é inteiro. A caminhada inicia-se com um estado inicial dado por um *qubit* usualmente na origem do sistema de coordenadas ($j=0$),

$$|\Psi(0)\rangle = \left[cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)|\uparrow\rangle + e^{i\beta} sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)|\downarrow\rangle\right] \otimes |0\rangle \,,$$

onde α e β representam os ângulos polar e azimutal de um *qubit* na representação de Bloch. Para evoluir o estado de uma caminhada quântica no tempo, é aplicado sucessivas vezes o operador de evolução temporal ao estado inicial $|\Psi(\mathrm{t})\rangle = U^t|\Psi(0)\rangle$. O operador de evolução temporal U=$S(C \otimes \mathbb{1}_P)$, é composto pela identidade $\mathbb{1}_P$ no espaço de posições, C é a moeda quântica que atua no estado interno do caminhantes gerando uma nova superposição de estados de spin (*qubit*) e S é o operador de translação condicional que translada as amplitudes de probabilidades de spin *up* para a direita e de spin *down* para a esquerda.

Essa dinâmica particular das caminhadas quânticas permite que fenômenos de superposição ocorram e, a probabilidade de a partícula ser encontrada numa dada posição não será mais dada por probabilidades clássicas, mas sim por amplitudes de probabilidades que podem se interferir de maneira construtiva ou destrutiva, resultando numa distribuição de probabilidade drasticamente diferente da distribuição gaussiana. Após muitos passos, essa distribuição apresenta dois picos afastados simétricos ou assimétricos dependendo do *qubit* inicial, cuja dispersão é diretamente proporcional ao número de passos $\sigma(t) \sim t$ (comportamento balístico).

Ao longo da caminhada podem ser aplicadas diferentes moedas, alternando-as de maneira aleatória ou não. No nosso trabalho utilizamos a seguinte moeda quântica dependente do tempo,

$$C(t) = \begin{bmatrix} cos(\theta(t)) & sen(\theta(t)) \\ sen(\theta(t)) & -cos(\theta(t)) \end{bmatrix},$$

na qual podemos notar que se $\theta = \pi/4$ obtemos a moeda Hadamard, largamente utilizada na literatura, e se $\theta = 0$, temos a moeda σ_z (Pauli-Z),

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A distribuição de probabilidades para a posição de uma partícula ao longo de uma caminhada quântica pode ser relacionada a entropia de Shannon. Quanto menor o valor desta entropia, mais certeza se tem sobre a posição da partícula, menor é a dispersão do estado, e quanto maior o valor da entropia, menor é a certeza sobre a posição da partícula e maior a dispersão do estado, dado que todas as posições terão probabilidades muito próximas ou iguais. No contexto das caminhadas quânticas, o valor da entropia de Shannon ao longo do tempo pode ser expresso por:

$$S(t) = -\sum_{j=-t}^{t} p_j \, log_2(p_j),$$

e assumindo que o valor da entropia máxima, pode ser calculado por $S_{máx}(t) = log_2(t+1)$, observamos que quando o parâmetro $\theta(t)$ varia no tempo segundo,

$$\theta(t) = \frac{\pi}{4} \delta\big(sen(\pi \, log_2 t)\big),$$

tal que $\delta(x) = 1$ para $x = 0$ e $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$, portanto, alternando entre as moedas Hadamard para passos de tempo tais que $t = 2^n$ $(n \in \mathbb{N}*)$ e Pauli-Z para os demais passos de tempo. Observamos que a entropia de Shannon da caminhada quântica é máxima periodicamente para $t = 2^n - 1$, nos fornecendo uma distribuição uniforme, como pode ser visto na Figura 1.

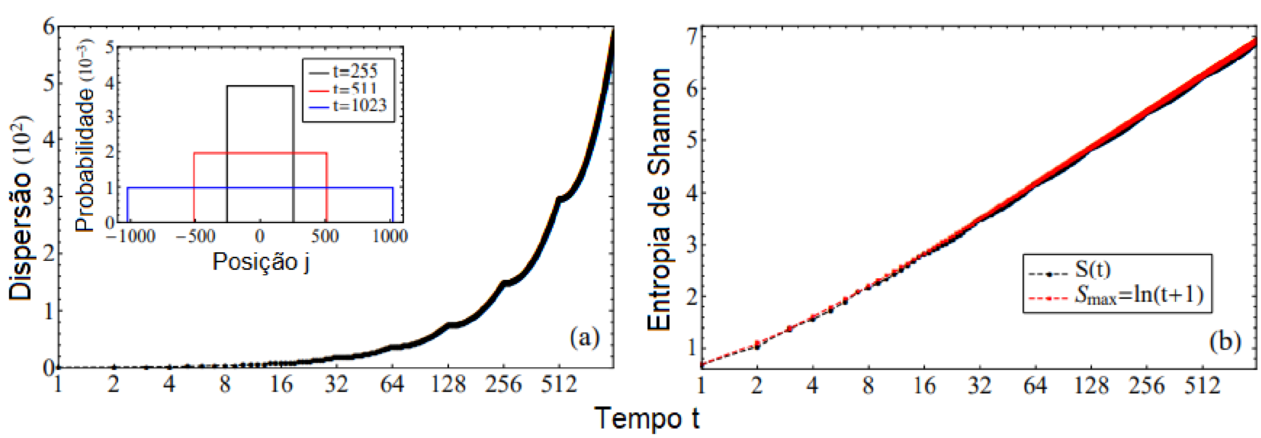

Figura 1. *Maximização da entropia de Shannon em uma Caminhada Quântica:* (a) Dispersão ao longo do tempo e no detalhe: distribuição de probabilidade mostrando alguns passos de tempo no qual observamos distribuição uniforme. (b) Entropia de Shannon dessa caminhada comparada a entropia máxima.

Palavras-chave: Caminhada Quântica. Dispersão. Entropia de Shannon.