

PROVANDO META PROPRIEDADES DA LÓGICA MODAL EM COQ¹

Miguel Alfredo Nunes², Karina Girardi Roggia³, Ariel Agne da Silveira⁴

¹ Vinculado ao projeto “Lógicas não Clássicas em COQ”

²Acadêmico do Curso de Ciência da Computação – CCT – Bolsista PROIP

³ Orientadora, Departamento de Ciência da Computação – CCT – karina.roggia@udesc.br

⁴ Aluno de Mestrado na UFOP

O objetivo desse trabalho é completar as provas de correspondência de *Frames* e de completude da lógica modal que foram parcialmente desenvolvidas em Silveira, Roggia, Torrens (2020). Lógica modal é, segundo Garson (2018), uma extensão da lógica proposicional clássica, com a adição dos conectivos modais de necessidade e possibilidade e da regra de necessitação. Um modelo semântico para a lógica modal é a semântica de Kripke que define validade de fórmulas com o conceito de mundos possíveis e com a relação de acessibilidade entre mundos. Em um dado mundo, há um conjunto de proposições consideradas verdadeiras naquele mundo. Os conectivos modais de necessidade e possibilidade permitem expressar se fórmulas são necessariamente verdadeiras ou possivelmente verdadeiras em um mundo, através da relação de acessibilidade de mundos.

Segundo Wind (2001), são chamados de *Frames* os pares ordenados contendo um conjunto de mundos e uma relação de acessibilidade entre estes; e são chamados de Modelos os pares ordenados de *Frames* e funções de valoração, definidas como uma função total binária que relaciona pares de proposições e mundos a um valor verdade. Podem ser impostas regras sobre a relação de acessibilidade de um *Frame* que restringem como esta deve se comportar, por exemplo, tornando necessário que todo mundo esteja relacionado com si próprio. Estas restrições geram diferentes sistemas da lógica modal, cada um possuindo um conjunto de axiomas que são satisfeitos pela relação de acessibilidade do *Frame*. Todo sistema é construído sobre o sistema básico K.

Garson (2018) define que uma fórmula é válida em um modelo se essa fórmula é valorada como verdadeira em todos os mundos do *Frame* que define esse modelo. Garson (2018) também define como correspondência entre frames e axiomas a característica de certos axiomas serem válidos em modelos construídos com *Frames* cuja relação de acessibilidade satisfaz certa condição, alguns exemplos de correspondências notáveis se encontram na Tabela 1.

Chellas (1980) define que um sistema da lógica modal é dito completo se, e somente se, qualquer consequência lógica que pode ser validada semanticamente nesse sistema também pode ser derivada sintaticamente.

De acordo com Team (2019), *Coq* é um assistente de provas que foi desenvolvido no final da década de 1980, baseado na linguagem *OCaml*, por pesquisadores do Instituto Nacional de Pesquisa em Informação e Automação (INRIA). Segundo Silva (2019), assistentes de provas são programas que auxiliam o desenvolvimento de provas formais, mas não as fazem diretamente, devido a isso, podem provar *a priori* qualquer resultado que pode ser provado por uma pessoa sem auxílio de computador. Segundo Paulin-Mohring (2011), *Coq* é um ambiente para desenvolvimento de fatos e provas matemáticas, que possibilita definições de objetos, declarações de predicados, conectivos lógicos, entre outros.

A partir do modelo estabelecido em Silveira, Roggia, Torrens (2020) foram completadas as provas de correspondência dos *Frames* que respeitam as propriedades reflexiva, transitiva, simétrica, euclidiana, serial, funcional e densa, e foi parcialmente completa a prova de correspondência dos *Frames* que respeitam a propriedade convergente. Mais ainda, foi identificado um problema no sistema desenvolvido que faz com que o desenvolvimento da prova de completude da lógica modal tenha uma complexidade muito elevada caso não sejam realizadas grandes mudanças no sistema inicialmente proposto.

Devido a definição de correspondência entre *Frames* e axiomas, as provas foram desenvolvidas em duas partes, a primeira parte da prova é demonstrado que, se a relação de acessibilidade de um *Frame* respeita uma das propriedades citadas acima, então o axioma correspondente será válido em qualquer modelo construído com este *Frame*. Na segunda parte da prova, é demonstrado que, se o axioma de um *Frame* é válido em um modelo então a relação de acessibilidade do *Frame* respeita a propriedade correspondente desse axioma.

As provas de correspondência dos *Frames* que respeitam as propriedades reflexiva, transitiva, simétrica, euclidiana, serial, funcional foram baseadas naqueles presentes em Platzer (2010) e Silva (2013), já as provas dos *Frames* que respeitam as propriedades funcional, densa e convergente foram desenvolvimentos próprios baseados nas provas feitas anteriormente, visto que não foram encontradas na literatura provas de correspondência destes *Frames* que pudessem servir de base para as provas desenvolvidas neste trabalho.

A partir do estudo do trabalho de Bentzen (2019) foi possível identificar os problemas no sistema desenvolvido em Silveira, Roggia, Torrens (2020) referentes a prova da completude da lógica modal, assim como uma possível solução. O principal problema está na definição do conceito de derivação sintática, uma vez que o sistema trabalhado utiliza o tipo de dados lista para representar as premissas de uma derivação sintática. *Coq* impõe a restrição que toda lista é necessariamente finita, o que causa problemas para a representação do conjunto de fórmulas de uma lógica, que é intrinsecamente infinito. Ademais, o conceito de consistência de um conjunto de fórmulas é definido com base na derivação sintática - um conjunto de fórmulas é consistente se deriva sintaticamente ou uma fórmula ou a negação dessa fórmula, mas não ambas. Para a prova da completude, é necessário demonstrar que um conjunto de fórmulas infinito é consistente, mas isso é impossível, visto que não podem existir listas infinitas no *Coq*.

Em Bentzen (2019) foi desenvolvido um sistema semelhante ao trabalhado utilizando o assistente de provas *Lean*, nesse sistema há uma prova da completude da lógica modal. A principal diferença está na definição do conceito de derivação sintática, no sistema de Bentzen (2019) este conceito é definido com base em conjuntos, que podem ser infinitos e, portanto, é possível demonstrar a consistência de um conjunto infinito de fórmulas.

A solução proposta para os problemas encontrados no sistema trabalhado é adaptar a implementação de Bentzen (2019), para tal, seria necessário refazer toda seção de derivação sintática do sistema e toda a seção de completude.

O sistema de Silveira, Roggia, Torrens (2020) encontra-se em <https://github.com/arielsilveira/ModalLibrary>, o sistema desenvolvido nesse trabalho encontra-se em <https://github.com/MiguelANunes/ModalLibrary>.

Tabela 1. Exemplos de Correspondência entre *Frames* e Axiomas. É escrito “*aRb*” para representar “o mundo *a* está relacionado com o mundo *b*”

Axioma	Tipo de Relação	Condição sobre Relação
$\Box p \rightarrow p$	Reflexiva	$\forall a, aRa$
$\Box p \rightarrow \Box \Box p$	Transitiva	$\forall a, b, c, (aRb \wedge bRc) \rightarrow (aRc)$
$p \rightarrow \Box \Diamond p$	Simétrica	$\forall a, b, aRb \rightarrow bRa$
$\Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$	Convergente	$\forall a, b, c, \exists d, (aRb \wedge aRc) \rightarrow (bRd \wedge cRd)$
$\Box \Box p \rightarrow \Box p$	Densa	$\forall a, b, \exists c, aRb \rightarrow (aRc \wedge cRb)$

Referências:

GARSON, J. Modal Logic. In: ZALTA, E. N. (Ed.). The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Fall 2018. [S.I.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018

PAULIN-MOHRING, C. Introduction to the coq proof-assistant for practical software verification. In: SPRINGER. LASER Summer School on Software Engineering. [S.I.], 2011. p. 45–95.

TEAM, T. C. development. The Coq proof assistant reference manual. [S.I.], 2019. Version 8.9.0. Disponível em: <<http://coq.inria.fr>>.

WIND, P. de. Modal logic in coq. Dissertação (Mestrado) - Vrije Universiteit, 2001.

SILVA, Rafael Castro Goncalves. Uma certificação em COQ do algoritmo W monádico. 2019. 78 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada, Joinville, 2019.

SILVEIRA, Ariel Agne da; ROGGIA, Karina Girardi; TORRENS, Paulo Henrique. Implementação de uma biblioteca de lógica modal em Coq. 2020. 65 f. Trabalhos de Conclusão de Curso (Graduação)-Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Curso de Ciência da Computação, Joinville, 2020. Disponível em:
<http://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000082/0000820a.pdf>. Acesso em: 17 ago. 2021.

PLATZER, A. Lecture Notes on Soundness and Correspondence. 2010. Notas de Aula

SILVA, G. B. Implementação de um provador de teoremas por resolução para lógicas modais normais. Monografia (Bacharelado) — Universidade de Brasília, Brasília, 2013.

BENTZEN, B. A henkin-style completeness proof for the modal logic S5. CoRR, abs/1910.01697, 2019. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1910.01697>.

Palavras-chave: Lógica Modal. Coq. Correspondência de Frames.