MODELANDO LÓGICA DE PROVABILIDADE EM COQ[1]

Miguel Alfredo Nunes[2], Karina Girardi Roggia[3], Ariel Agne da Silveira[4], Paulo Henrique Torrens[5]

[1] Vinculado ao projeto "Lógicas Não Clássicas em COQ"
[2] Acadêmico do Curso de Ciência da Computação – CCT – Bolsista PROIP
[3] Orientadora, Departamento de Ciência da Computação – CCT – karina.roggia@udesc.br
[4] Aluno de Mestrado na UFOP - ariel.silveira@aluno.ufop.edu.br
[5] Professor Colaborador, Departamento de Ciência da Computação – CCT – paulotorrens@gnu.org

O objetivo desse trabalho é estender a biblioteca de lógica modal desenvolvida em da Silveira, Roggia, Torrens (2020), incluindo a lógica de provabilidade **GL**. Lógica modal é, segundo Garson (2018), uma extensão da lógica proposicional clássica, com a adição dos operadores unários modais de necessidade, representado por □, e possibilidade, representado por ◆, e da regra de necessitação. Um modelo semântico para a lógica modal é a semântica de Kripke que define validade de fórmulas com o conceito de mundos possíveis e com a relação de acessibilidade entre mundos. Em um dado mundo, há um conjunto de proposições consideradas verdadeiras naquele mundo. Os conectivos modais de necessidade e possibilidade permitem expressar se fórmulas são necessariamente verdadeiras ou possivelmente verdadeiras em um mundo, através da relação de acessibilidade.

Lógica de provabilidade é uma lógica modal onde o significado atribuído ao operador de necessidade é alterado. A expressão □p passa a significar "p é uma fórmula dedutível em Aritmética de Peano". De acordo com Verbrugge (2017), o estudo em lógica de provabilidade surgiu a partir de duas linhas distintas de pesquisa, uma iniciada pelo matemático Kurt Gödel e outra iniciada por pesquisas na área de meta-matemática, que culminou num problema proposto por Leon Henkin que foi respondido por Martin Hugo Löb. O nome GL é uma homenagem a Gödel e Löb, devido a contribuição de ambos no desenvolvimento da área.

De acordo com Verbrugge (2017), Henkin propôs em 1952 a seguinte pergunta: "O que teorias matemáticas podem falar sobre elas mesmas por meio de codificações de propriedades interessantes?", a pergunta foi respondida por Löb em 1955. Na sua resposta, Löb prova o teorema que é atualmente chamado de Teorema de Löb, ou também de Axioma de Gödel-Löb, representado por $\Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$, além disso, apresenta três condições para provabilidade de fórmulas na Aritmética de Peano.

Segundo de Wind (2001), são chamados de *Frames* os pares ordenados contendo um conjunto de mundos e uma relação de acessibilidade entre estes; e são chamados de Modelos os pares ordenados de *Frames* e funções de valoração, definidas como uma função total binária que relaciona pares de proposições e mundos a um valor verdade. Podem ser impostas regras sobre a relação de acessibilidade de um *Frame* que restringem como esta deve se comportar, por exemplo, tornando necessário que todo mundo esteja relacionado com si próprio. Estas restrições geram diferentes sistemas da lógica modal, cada um possuindo um conjunto de axiomas que são satisfeitos pela relação de acessibilidade do *Frame*. Todo sistema é construído sobre o sistema básico K.

Garson (2018) define que uma fórmula é válida em um modelo se essa fórmula é valorada como verdadeira em todos os mundos do *Frame* que define esse modelo. Garson (2018) também define como correspondência entre frames e axiomas a característica de certos axiomas serem válidos em modelos construídos com *Frames* cuja relação de acessibilidade satisfaz certa condição. De acordo com Maggesi e Brogi (2021), a lógica de provabilidade corresponde à frames transitivos e conversamente bem fundados, estes que são chamados de frames noetherianos. As condições impostas sobre relação de acessibilidade destes frames se encontram na Tabela 1.

De acordo com Team (2019), *Coq* é um assistente de provas que foi desenvolvido no final da década de 1980, baseado na linguagem *OCaml*. Segundo Silva (2019), assistentes de provas são programas que auxiliam o desenvolvimento de provas formais, mas não as fazem diretamente, devido a isso, podem provar *a priori* qualquer resultado que pode ser provado por uma pessoa sem auxílio de computador. Segundo Paulin-Mohring (2011), *Coq* é um ambiente para desenvolvimento de fatos e provas matemáticas, que possibilita definições de objetos, declarações de predicados, conectivos lógicos, entre outros.

Neste trabalho foi modelada em Coq a prova do Teorema de Löb, assim como a prova de correspondência de *frames* noetherianos com o axioma de Gödel-Löb na biblioteca desenvolvida em da Silveira, Roggia, Torrens (2020). A prova de correspondência de *frames* foi feita no mesmo modelo das provas de correspondência desenvolvidas na IC anterior. Os trabalhos desenvolvidos nesse período da IC, juntamente com o que foi desenvolvido no período anterior foram compilados num artigo que foi submetido e aceito para o SBLP 2022 - Simpósio Brasileiro de Linguagens de Programação, cujo título é "A Sound Deep Embedding of Arbitrary Normal Modal Logics in Coq" da Silveira et al (2022).

Tabela 1. *Tipos de relações e respectivas condições. É escrito "aRb" para representar "o mundo a está relacionado com o mundo b"*

Tipo de Relação	Condição
Transitiva	$\forall a, b, c, \ (aRb \wedge bRc) \rightarrow (aRc)$
Conversamente Bem Fundada	$\forall X \subseteq W, X \neq \varnothing \rightarrow \exists w_1 \in X, \forall w_2 \in X \rightarrow \neg w_1 R w_2$

Referências:

GARSON, J. Modal Logic. In: ZALTA, E. N. (Ed.). The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Fall 2018. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018

PAULIN-MOHRING, C. Introduction to the coq proof-assistant for practical software verification. In: SPRINGER. LASER Summer School on Software Engineering. [S.l.], 2011. p. 45–95.

TEAM, T. C. development. The Coq proof assistant reference manual. [S.l.], 2019. Version 8.9.0. Disponível em: <http://coq.inria.fr>.

de WIND, P.. Modal logic in coq. Dissertação (Mestrado) - Vrije Universiteit, 2001.

SILVA, Rafael Castro Goncalves. Uma certificação em COQ do algoritmo W monádico. 2019. 78 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada, Joinville, 2019.

da SILVEIRA, Ariel Agne; ROGGIA, Karina Girardi; TORRENS, Paulo Henrique. Implementação de uma biblioteca de lógica modal em Coq. 2020. 65 f. Trabalhos de Conclusão de Curso (Graduação)- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Curso de Ciência da Computação, Joinville, 2020. Disponível em: http://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000082/0000820a.pdf. Acesso em: 17 ago. 2021.

CHELLAS, B. F. Modal Logic: An Introduction. [S.l.]: Cambridge University Press, 1980.

VERBRUGGE, R. L. Provability Logic. In: ZALTA, E. N. (Ed.). The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Fall 2017. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2017.

SILVA, G. B. Implementação de um provador de teoremas por resolução para lógicas modais normais. Monografia (Bacharelado) — Universidade de Brasília, Brasília, 2013.

MAGGESI, M.; BROGI, C. P. A Formal Proof of Modal Completeness for Provability Logic. In: COHEN, L.; KALISZYK, C. (Ed.). 12th International Conference on Interactive Theorem Proving (ITP 2021). Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2021. (Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), v. 193), p. 26:1–26:18. ISBN 978-3-95977-188-7. ISSN 1868-8969. Disponível em: 〈https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2021/13921〉

BENTZEN, B. A henkin-style completeness proof for the modal logic S5. CoRR, abs/1910.01697, 2019. Disponíıvel em: http: /arxiv.org/abs/1910.01697.

da SILVEIRA, A. A. da et al. A sound deep embedding of arbitrary normal modal logics in coq. Em fase de pré-publicação. 2022.

Palavras-chave: Lógica Modal. Coq. Lógica de Provabilidade