

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE TRELIÇAS 3D CONSIDERANDO RESTRIÇÕES DE TENSÃO, DESLOCAMENTO E FLAMBAGEM¹

Verônica Caroline Herbst Pazda², Eduardo Lenz Cardoso³

¹ Vinculado ao projeto “Otimização Topológica de meios contínuos”

² Acadêmico (a) do Curso de Engenharia Mecânica – CCT – Bolsista PIBIC/CNPq

³ Orientador, Departamento de Engenharia Mecânica – CCT – Eduardo.cardoso@udesc.br

1. RESUMO

Este trabalho aborda o desenvolvimento de treliças ótimas 3D usando o método de otimização topológica. O objetivo é minimizar o volume total com restrições de tensão local, deslocamento e flambagem. O método do Lagrangiano Aumentado também é implementado para resolver o problema de otimização. A formulação e implementação são avaliadas por meio de dois problemas de referência encontrados na literatura. Os resultados também demonstram a importância de selecionar corretamente a parametrização do material.

2. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A otimização topológica permite a determinação simultânea da topologia e da forma de uma estrutura contida em uma determinada região do espaço. O problema de otimização geralmente é composto por três elementos: função objetivo, variáveis de projeto e restrições funcionais. O módulo de *Young* efetivo em cada elemento é assumido como $E_j = x_j^p E_j^0$, onde x_j é a variável de projeto associada ao elemento j e E_j^0 é o valor de base para o elemento. O problema é definido como

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \\ \mathbf{x} \\ \\ \text{T. q} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} V(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{ne} x_j A_j L_j H_j(\mathbf{x}) \\ \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \\ g_j^\sigma(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_{eqj}(\mathbf{x})}{s^\sigma \bar{\sigma}} - 1 \leq 0 \quad j = 1..ne \\ g_j^b(\mathbf{x}) = -\frac{A_j \sigma_j(\mathbf{x}) s^b}{P_j(\mathbf{x})} - 1 \leq 0 \quad j = 1..ne \\ g_j^u(\mathbf{x}) = \left(\frac{u_j(\mathbf{x})}{\bar{u}_j} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad j = 1..nrd \\ \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad j = 1..ne \end{array} \right. , \quad (1)$$

onde ne é o número de elementos, nrd é o número de restrições de deslocamento, g_j^σ são as restrições de tensão, g_j^b são as restrições de flambagem, g_j^u as restrições de deslocamento e \underline{x} e \bar{x} são as restrições laterais. A_j é a área do elemento j . A equação de equilíbrio $\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}$ é resolvida utilizando o método de Elementos Finitos, onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez, \mathbf{U} é o vetor de deslocamento e \mathbf{F} é o vetor de forças. Além disso, σ_{eqj} é a tensão equivalente, s^σ é o coeficiente de segurança da tensão, $\bar{\sigma}$ é a tensão de escoamento, σ_j é a tensão normal, s^b é o coeficiente de segurança da flambagem, P_j é a carga crítica de Euler e \bar{u}_j é o limite superior das restrições de deslocamento.

A função $H_j(\mathbf{x}) = 1 - e^{-bx_j} + x_j e^{-b}$ é uma função do tipo *Heaviside* utilizada para evitar resultados intermediários (barras com valores intermediários de x) no projeto final.

2.1. Relaxação da Tensão

A tensão normal no elemento j é $\sigma_j(\mathbf{x}) = \Psi_j(\mathbf{x})\sigma_j^0$ onde Ψ_j é a relaxação proposta por Bruggi, onde

$$\sigma_j^0 = E_j^0 \mathbf{B}_j \mathbf{R}_j \mathbf{H}_j \mathbf{U} \quad (2)$$

é a tensão nominal, \mathbf{B}_j é a matriz deformação deslocamento, \mathbf{R}_j é a matriz de rotação e \mathbf{H}_j é a matriz de localização local-global do elemento j . A tensão equivalente é dada por

$$\sigma_{eqj}(\mathbf{x}) = \sqrt{\sigma_j^2(\mathbf{x}) + \epsilon^2}, \quad (3)$$

onde o termo ϵ é utilizado para evitar valores singulares nas análises de sensibilidade ($\epsilon = 1 \times 10^{-6}$ é utilizado nesse trabalho).

2.2. Relaxação Carga Crítica

As restrições de flambagem locais dependem das tensões locais e da carga crítica de cada elemento. De forma que a tensão é relaxada conforme discutido na subseção anterior. No entanto, também é importante atualizar a carga, pois a mesma também é uma função do módulo de *Young* efetivo (variáveis de projeto). A carga crítica P_j é definida como

$$P_j(\mathbf{x}) = \Phi_j(\mathbf{x})P_j^0, \quad (4)$$

onde $\Phi_j = x_j^r$ é a função de relaxação proposta para a carga crítica e

$$P_j^0 = \frac{E_j^0 I_{zj} \pi^2}{L_j^2}, \quad (5)$$

Onde I_{zj} é o momento de inércia do elemento j .

2.3. Método Lagrangiano Aumentado

A função Lagrangiano aumentado consiste em transformar o problema restrito em um problema não restrito equivalente P^k , onde k é uma iteração externa. Assim, a nova função objetivo é dada por um funcional que contém o objetivo original, as restrições, os multiplicadores de Lagrange μ^σ , μ^b , μ^u e um parâmetro de penalização c .

$$P^k \begin{cases} \text{Min} \\ \mathbf{x} \\ \text{T. q} \end{cases} \mathcal{L}_A^k = V(\mathbf{x}) + \frac{c^k}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{ne} \left\langle \frac{\mu_j^{\sigma k}}{c^k} + g_j^\sigma \right\rangle^2 + \sum_{j=1}^{ne} \left\langle \frac{\mu_j^{b k}}{c^k} + g_j^b \right\rangle^2 + \sum_{j=1}^{nrd} \left\langle \frac{\mu_j^{u k}}{c^k} + g_j^u \right\rangle^2 \right\}, \quad (6)$$

$$\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}$$

onde $\langle a \rangle = \max(0.0, a)$. A iteração externa inicial $k = 0$ começa com um parâmetro de penalização $c^0 > 0$, multiplicadores de Lagrange nulos e um ponto inicial fornecido pelo usuário \mathbf{x}^0 . Cada subproblema Eq. (6) é então resolvido, retornando \mathbf{x}^k . Os multiplicadores são atualizados de acordo com

$$\begin{aligned} \mu_j^{\sigma k+1} &= \langle \mu_j^{\sigma k} + c^k g_j^\sigma(\mathbf{x}^k) \rangle, \quad j = 1..ne \\ \mu_j^{b k+1} &= \langle \mu_j^{b k} + c^k g_j^b(\mathbf{x}^k) \rangle, \quad j = 1..ne \\ \mu_j^{u k+1} &= \langle \mu_j^{u k} + c^k g_j^u(\mathbf{x}^k) \rangle, \quad j = 1..nrd \end{aligned} \quad (7)$$

e o parâmetro de penalização é atualizado como $c^{k+1} = \gamma c^k$, onde $\gamma = 1.1$ é utilizado neste trabalho. As sensibilidades do \mathcal{L}_A em relação a \mathbf{x} foram obtidas analiticamente (método adjunto) e um simples *Steepest descent* com restrições laterais é utilizado para resolver o problema interno.

O parâmetro b na função objetivo é atualizado a cada iteração externa (k) conforme

$$b = \begin{cases} 7.0, & \text{se } k \leq 12 \\ 12.0, & \text{se } 12 < k \leq 15, \\ b = b + 5.0, & \text{se } k > 15 \end{cases} \quad (8)$$

Para os problemas aqui estudados.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Dois problemas de referência encontrados na literatura foram adaptados e usados para avaliar a formulação proposta. Ambos os exemplos utilizam os mesmos dados: $E^0 = 210 \times 10^9 \text{Pa}$, $A = 7.8 \times 10^{-2} \text{m}^2$, $\bar{\sigma} = 100 \times 10^6 \text{Pa}$ e $s^\sigma = s^b = 1.0$. O mesmo ponto inicial $\mathbf{x}^0 = 1$ é usado nos dois exemplos. As variáveis de projeto \mathbf{x} estão restringidas dentro do intervalo $[1 \times 10^{-3}, 1]$, onde o valor inferior corresponde ao "espaço vazio" e o superior valor ao material base.

Exemplo 1: Um "suporte" com dimensões $2 \times 3 \times 6 \text{ m}$, conforme mostrado na Fig. 1a, com volume inicial de 1.657m^3 . Uma carga pontual com magnitude 100kN é aplicada em $(1,3,3) \text{m}$. Uma restrição de deslocamento é aplicada no nó localizado em $(1,3,3) \text{m}$, com valor limite $\bar{u} =$

1×10^{-3} m na direção z , juntamente com tensões locais e restrições de flambagem. $r = 0.25$ foi utilizado para relaxação de carga crítica, $p = 3.0$ para rigidez e $q = 1.5$ para relaxação da tensão.

Exemplo 2: Uma “torre” com dimensões $2 \times 2 \times 4$ m, conforme mostrado na Fig. 1b, com volume inicial de 0.780m^3 . Uma carga pontual com magnitude 1000kN é aplicada em $(1,1,4)$ m. A restrição de deslocamento é aplicada no nó localizado em $(1,1,0)$ m na direção z , com valor limite $\bar{u} = 1 \times 10^{-2}$ m, juntamente com tensões locais e restrições de flambagem. $r = 0.25$ foi utilizado para relaxação de carga crítica, $p = 3.0$ para rigidez e $q = 2.5$ para relaxação da tensão.

A Figura 1c e a Fig. 1d mostram as estruturas otimizadas. Barras com $x = 1$ são mostradas como elementos sólidos e barras com $x = 1 \times 10^{-3}$ não são relevantes para o projeto final. A Fig. 2a e a Fig. 2b, mostram os esforços normais das soluções otimizadas.

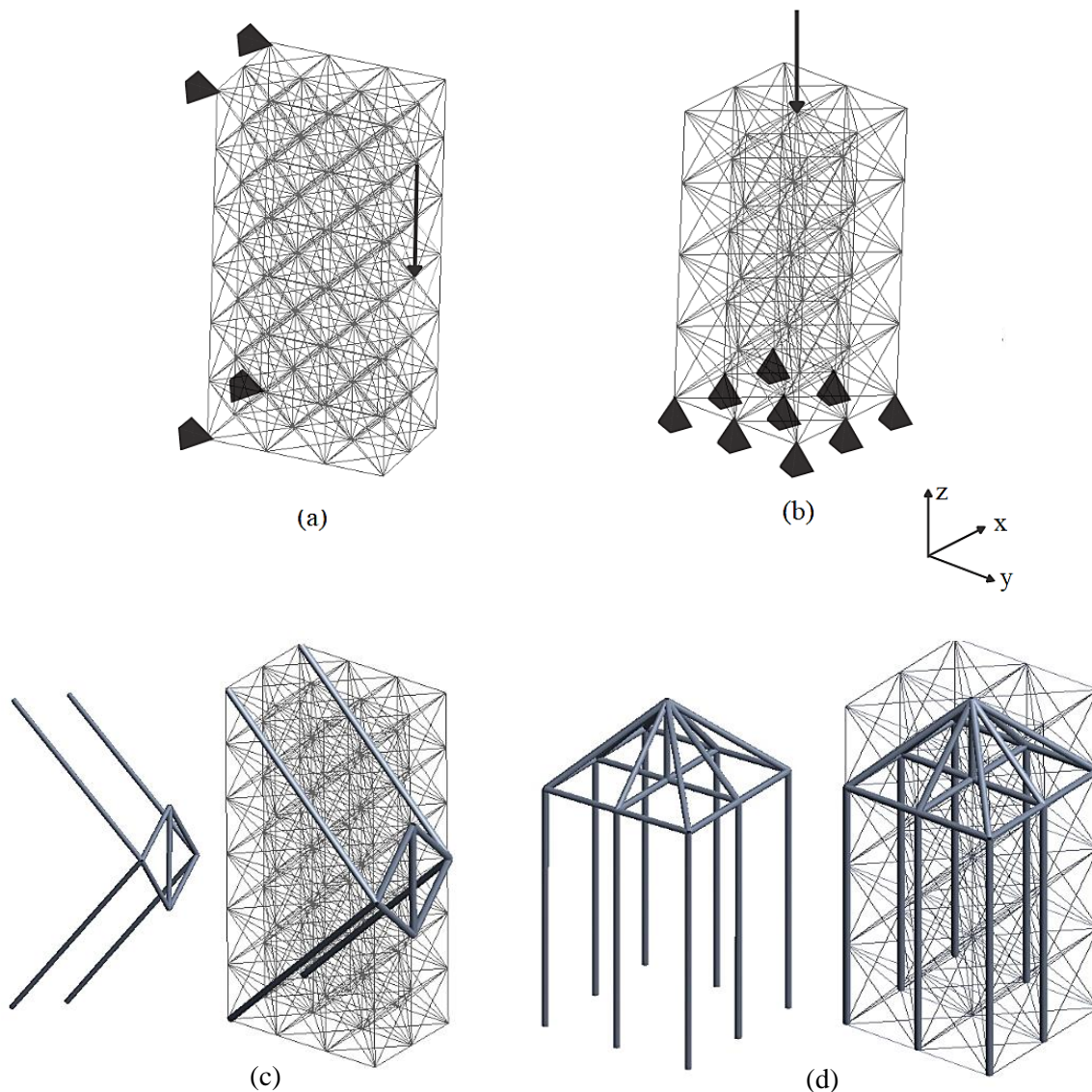


Figura 1. (a) Suporte (exemplo 1); (b) Torre (exemplo 2); (c) Otimização suporte; (d) Otimização torre.

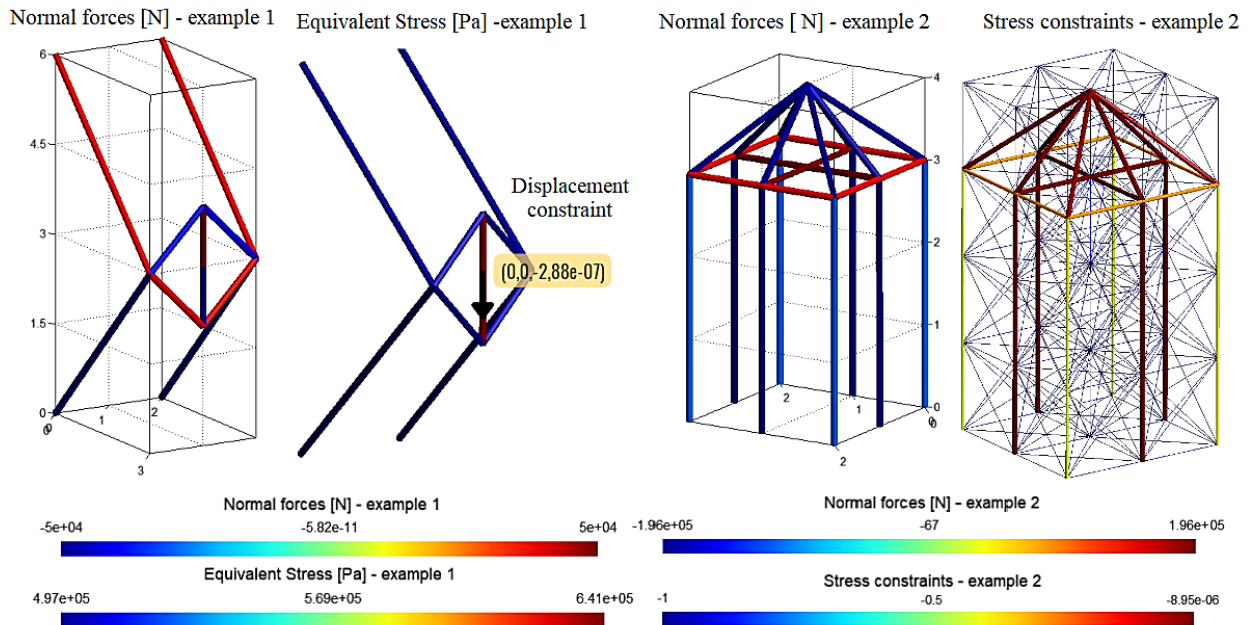


Figura 2. Resultados.

Ambos os resultados são viáveis. O "suporte" tem um volume otimizado de 0.040m^3 e a restrição de deslocamento está ativo na solução otimizada (conforme fig. 2a). A "torre" resultou em um volume de 0.167m^3 . As restrições de tensão estão ativas na solução otimizada, de acordo com a Fig. 3b. As restrições de flambagem em algumas das barras superiores também estão ativas. Foi constatado que para $r \in [0.1 - 0.4]$ o resultado da otimização tem o comportamento denotado na Fig. 1d. Para valores maiores que este intervalo, a estrutura otimizada tende a incorporar barras intermediárias em sua posição central e na porção superior da estrutura.

Palavras-chave: Tensão. Treliças 3D. Restrição.