

APLICAÇÃO DE WENO AO MÉTODO LEVEL-SET PARA RESOLVER EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES¹

Giuliana Cristofolini dos Santos ², Leonardo Romero Monteiro ³.

¹ Vinculado ao projeto “Estudo da Concepção e Dinâmica de Enxurradas”

² Acadêmica do Curso de Engenharia Civil – CCT – Bolsista PROBIC/UDESC

³ Orientador, Departamento de Curso de Engenharia Civil – CCT – leonardo.monteiro@udesc.br

Desenvolver códigos computacionais permite explorar temas relevantes para a ciência e a sociedade, como simulações de eventos extremos, tais quais as enxurradas. No entanto, é essencial criar códigos a fim de tornar essa aplicação possível. Ultimamente, os modelos baseados em *Weighted Essentially Non-Oscillatory* (WENO) ganharam atenção significativa por sua capacidade de fornecer precisão de alta ordem na resolução de equações de dinâmica de fluidos. Por exemplo, Wang, Wang e Don (2019) introduziram melhorias nos esquemas WENO existentes de 5ª ordem com pesos não lineares, visando a melhoria da precisão sobre os parâmetros de sensibilidade na formulação de esquemas utilizando pesos do tipo Z (WENO-Z).

Apesar do notável progresso no desenvolvimento dos métodos WENO, permanece uma lacuna na sua implementação prática para resolver equações do Método *Level-Set* (LS) às equações de Navier-Stokes (NSE). Ao analisar o potencial dos novos modelos WENO, podem ser obtidos aperfeiçoamentos valiosos, levando a uma melhor utilização destas técnicas em dinâmica de fluidos computacional. O presente trabalho visa destacar os potenciais benefícios e limitações associados aos métodos novos métodos WENO em simulações baseadas em LS associadas à NSE para escoamentos multifásicos.

Neste estudo, analisou-se o uso dos WENO no *Level-Set* atrelado às NSE com auxílio do código SuLi (Monteiro et al., 2020). Para isso, foram analisados: WENO de 3ª ordem, WENO-JS, WENO-HJ, WENO-Z, WENO-D, WENO-A e WENO nos termos advectivos do LS à NSE. De forma complementar à análise, optou-se por incluir o esquema WENO na implementação das próprias NSE, as quais utilizavam esquemas *Upwind* de segunda ordem. Aplicaram-se variações do WENO em três aplicações distintas: uma simulação de onda, outra de rompimento de barragem e uma última de escoamento em canais. Com relação às análises, o método WENO de 3ª ordem opta exclusivamente pelo estêncil mais suave, em vez de combinar todos os estênceis disponíveis para aumentar a precisão, levando a resultados com baixa precisão em comparação com os outros testes.

Para o caso de teste de ondas, a condição inicial imposta da onda mantém um formato senoidal de baixa amplitude e alto comprimento, resultante de variações espaciais na condição inicial da interface com velocidades e pressões dinâmicas nulas no tempo inicial. À condição de ondas pode ser calculada também por equações teóricas, sendo possível realizar a verificação do código. Neste caso, a maioria dos WENOs apresentou resultados semelhantes aos dados analíticos.

Para o caso de ruptura de barragem foram simulados e comparados com dados experimentais descritos por Martin e Moyce (1952). Para o WENO-JS e WENO-HJ, os resultados são apresentados com mais precisão. No entanto, investigando esquemas incluindo WENO-Z, WENO-A e WENO-D, descobriu-se que o seu desempenho não era satisfatório. Pequenas irregularidades começam a aparecer na superfície livre da água, distanciando a solução dos dados

experimentais. Com o tempo, esses esquemas demonstraram difusão excessiva quando comparados aos resultados experimentais. Ao se utilizar alterações de WENO no processamento dos termos advectivos de NSE, o erro se aproximou aos erros experimentais. Já o WENO de 3ª ordem, apresentou um comportamento singular em relação aos demais devido à sua lenta variação de posição ao longo do tempo, o que não é adequado para a simulação.

Por último, baseando-se no estudo experimental de Zampiron et al. (2023), avaliou-se o comportamento do escoamento através de um canal aberto com fundo rugoso utilizando-se sondas virtuais até o atingir a condição de fluxo permanente. A condição de contorno prescrita é aplicada, com a velocidade inicial fixada e uma taxa de turbulência considerada através da introdução de variações pseudo-aleatórias, obtendo perfis de velocidade em diferentes pontos do escoamento. Para comparar com os resultados das simulações, consideramos apenas três sondas nas posições adimensionalizadas: $x/H=20$, $x/H=31$ e $x/H=51$, quando a camada limite estava totalmente desenvolvida no canal. Os resultados de todos os casos estão resumidos na Tabela 1.

Em resumo, com a aplicação de vários modelos WENO com o método Level-Set há uma melhora na precisão, conservação de massa e da representação de dinâmicas de fluxo complexas como as encurradas, porém, de modo geral os resultados foram homogêneos para WENO-JS e WENO-HJ, sendo apresentados como os métodos mais adequados para as simulações consideradas.

Tabela 1. Resultados comparativos das três simulações para cada tipo de método de WENO aplicado.

Tipo de WENO	Resultados numéricos (erro)			Tempo de simulação (min)		
	Onda	Quebra de barragem	Sonda	Onda (t= 0.01)	Quebra de barragem (t= 0.001)	Sonda (t= 0.02)
WENO 3ª ordem	1,21E-07	5,78E-06	0,1359	14,8839	10,5500	165,2539
WENO-JS	1,53E-07	7,01E-06	0,1173	13,2898	15,4139	165,8516
WENO-HJ	1,53E-07	7,16E-06	0,1328	13,1627	15,5649	167,1327
WENO-Z	1,56E-07	6,21E-06	0,1081	13,7686	16,8410	170,6794
WENO-D	1,79E-07	4,51E-06	0,1245	14,1080	15,8959	169,0564
WENO-A	1,82E-07	5,78E-06	0,1563	13,6949	16,3364	172,0262
WENO/NSE/LS	2,15E-07	6,07E-06	0,1296	16,2404	20,6184	146,6009

Palavras-chave: Método do WENO. Método do Level-Set. Equações de Navier-Stokes Navier Stokes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- MARTIN, J. C. et al. Part V. An experimental study of the collapse of fluid columns on a rigid horizontal plane, in a medium of lower, but comparable, density. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, v. 244, n. 882, p. 325-334, 1952.
- MONTEIRO, Leonardo R.; LUCCHESI, Luísa V.; C. SCHETTINI, Edith B. Comparison between hydrostatic and total pressure simulations of dam-break flows. **Journal of Hydraulic Research**, v. 58, n. 5, p. 725-737, 2020.
- WANG, Yinghua; WANG, Bao-Shan; DON, Wai Sun. Generalized sensitivity parameter free fifth order WENO finite difference scheme with Z-type weights. **Journal of Scientific Computing**, v. 81, p. 1329-1358, 2019.
- ZAMPIRON, Andrea et al. Flow development in rough-bed open channels: mean velocities, turbulence statistics, velocity spectra, and secondary currents. **Journal of Hydraulic Research**, v. 61, n. 1, p. 133-144, 2023.