AÇÕES DE GRUPOS: APLICAÇÕES DO LEMA DE BURNSIDE EM COLORAÇÃO DE OBJETOS[1]

Leonardo Pereira Temoteo [2], Viviane Maria Beuter[3]

[1] Vinculado ao projeto "Interações entre Álgebra de Operadores, Dinâmica Topológica e Álgebra"
[2] Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática – CCT – Bolsista PROBIC/UDESC
[3] Orientadora, Departamento de Matemática – CCT – viviane.beuter@udesc.br

A pesquisa realizada teve como objetivo ampliar os conhecimentos do bolsista em Álgebra Abstrata, explorando as estruturas de grupos desde os conceitos iniciais até a demonstração do Lema de Burnside e suas aplicações. A metodologia empregada neste estudo baseou-se em revisões bibliográficas. Para garantir um embasamento teórico sólido nos tópicos iniciais da Teoria de Grupos, foram consultados os livros de Domingues e Iezzi (2003) e Garcia e Lequain (2018). Além disso, visando alcançar os propósitos deste estudo, aprofundamos nossa pesquisa no conceito de ações de grupos finitos sobre conjuntos finitos. Para essa investigação, fundamentamo-nos nas obras de Dummit e Foote (2004), Nagpaul e Jain (2005) e Rotman (1995).

Um grupo é um conjunto munido de uma operação que satisfaz algumas propriedades; a saber, a operação deve ser associativa, possuir elemento neutro e cada elemento do conjunto deve possuir um simétrico (inverso). Por exemplo, o conjunto dos números inteiros munido da operação de adição usual é um grupo.

Os grupos mais relevantes para os resultados deste trabalho são os grupos de permutações, que incluem os grupos de rotações e os grupos diedrais. Um grupo de permutação é o conjunto de bijeções de um conjunto não vazio X, na qual a operação é a composição dessas funções.

Ao explorar as ações de grupos, destacamos a conclusão e demonstração do Lema de Burnside, que desempenha um papel fundamental no escopo desta pesquisa. O foco principal do trabalho recai na aplicação desse lema em contextos relacionados à coloração de objetos. Esse resultado possui tanto aplicações dentro da própria Matemática como em outras áreas do conhecimento, incluindo Química, Física e Ciência da Computação.

Definição: *Seja G um grupo e X um conjunto não vazio. Uma ação de grupo de G em X é uma função α que leva cada par ordenado $(g,x) \in G \times X$ em um elemento $\alpha_g(x) \in X$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) Para todo $x \in X$, $\alpha_e(x) = x$, onde e é o elemento neutro de G;

(ii) Para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in X$, $\alpha_g\big(\alpha_h(x)\big) = \alpha_{gh}(x)$.

Para demonstrar o Lema de Burnside, foi necessário compreender a definição e relações entre os seguintes conceitos fundamentais de uma ação de grupo: órbita, estabilizador e conjunto dos pontos fixos de um elemento do grupo.

Seja α uma ação de um grupo G sobre um conjunto X. Para cada $x \in X$, definimos:

- a *órbita do elemento x* como sendo o subconjunto $O_x = \{\alpha_g\,(x) \mid g \in G\}$ de X.
- o *estabilizador de x* como o subconjunto $S_x = \{g \in G \mid \alpha_g\,(x) = x\}$ de G.

E para cada $g \in G$, o *conjunto dos pontos fixos* g é o subconjunto $Fix_g = \{x \in X \mid \alpha_g(x) = x\}$ de X.

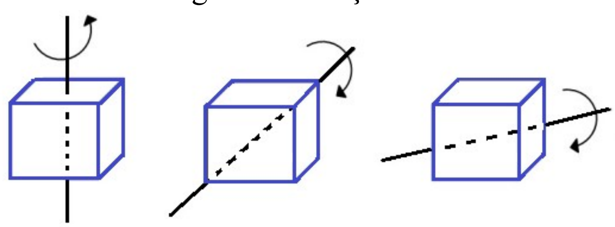
Tendo feito os devidos estudos e analisado os resultados importantes a respeito dos tópicos citados, foi possível demonstrar o Lema de Burnside.

Lema de Burnside: *Seja G um grupo agindo em um conjunto X, ambos finitos. Então o número de órbitas distintas, denotado por* $\left|\frac{X}{G}\right|$, *é dado por*

$$\left|\frac{X}{G}\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} Fix_g.$$

Após entendermos um pouco mais sobre esse resultado, pudemos estudar algumas aplicações sobre coloração de objetos, tais como na coloração das faces de um cubo com n cores em que cada face do cubo pode receber uma única cor. Nesse caso, interpretamos as colorações possíveis das faces de um cubo como um conjunto e o grupo de rotações agindo sobre este conjunto. As colorações que podem ser obtidas através de uma simetria de rotação do cubo devem ser consideradas iguais. No cubo existem três tipos diferentes de eixos de rotação (veja Figura 1) e o número das simetrias obtidas por essas rotações é dado pela contagem das rotações que existem em cada um desses tipos (total de 24 simetrias).

Figura 1: Rotações do cubo



Os estabilizadores representam as colorações que permanecem iguais após a aplicação de uma rotação. Portanto, as órbitas são consideradas como as colorações distintas, e o número de órbitas distintas, determinado pelo Lema de Burnside, reflete as diferentes maneiras de colorir o cubo (total de $\frac{1}{24}(n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2)$ maneiras).

REFERÊNCIAS

DOMINGUES, H. H.; LEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual. 2003.

DUMMIT, D. S.; FOOTE, R. M. Abstract Algebra. 3. ed. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc., 2004.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra.** 6. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2018.

NAGPAUL, S. R; JAIN, S. K. **Topics in Applied Abstract Algebra.** Brooks/Cole Series in Advanced Mathematics. Thomson Brooks/Cole, Belmont: 2005.

ROTMAN, J. J. **An Introduction to the Theory of Groups.** 4. ed. New York: SpringerVerlag, 1995.

Palavras-chave: Ações de grupos. Lema de Burnside. Coloração de Objetos.