

## ESTUDO DAS CURVAS DE BIFURCAÇÃO NO ESPAÇO DE PARÂMETROS DE SISTEMAS DINÂMICOS

Gabriel Bertram Corrêa, Holokx Abreu Albuquerque

### INTRODUÇÃO

O presente trabalho envolveu a construção de um código que permite o cálculo do período de atratores em sistemas dinâmicos não-lineares e a construção dos chamados diagramas isoperiódicos, que delimitam as regiões onde esse período se altera (bifurca). Tal desenvolvimento é especialmente útil quando aliado a diagramas dos expoentes de Lyapunov, que é uma metodologia bastante usual na área para a categorização dos possíveis comportamentos de um sistema (equilíbrio, periódico, quase-periódico, caótico). Com o uso conjunto dessas duas ferramentas, torna-se possível atingir o objetivo de analisar comportamentos que não seriam adequadamente descritos pelas mesmas isoladamente.

### DESENVOLVIMENTO

Esse programa foi desenvolvido na linguagem de programação Fortran, seguindo precedentes deixados pelo grupo de dinâmica não-linear da universidade e da comunidade científica como um todo. Assim, a primeira etapa do processo de desenvolvimento foi a busca de informações adicionais sobre a linguagem de programação e suas particularidades. Essa busca envolveu a análise de manuais, fóruns, e partes de código de exemplo, e incluiu também fases de teste para as funcionalidades mais complexas. Posteriormente, esse procedimento foi revisitado conforme necessário.

Depois disso, o foco foi direcionado para a tradução para Fortran de um rascunho de código de diagramas isoperiódicos em linguagem C, pertencente ao acervo pessoal do orientador. Tal código se encontrava incompleto, então também foi necessário o preenchimento de certas lacunas, de forma complementar à tradução. Com uma versão funcional completa, iniciou-se um extenso processo de testes onde os resultados gerados pelo programa foram comparados com resultados da literatura, visando identificar os valores ideais para os parâmetros utilizados, acelerar o tempo de execução, e identificar possíveis erros. Esse último ponto foi especialmente importante, devido à grande variedade de casos extremos que esse código pode encontrar em sua execução.

Por último, o programa criado foi utilizado para aprofundar pesquisas sobre sistemas já em estudo no grupo de dinâmica não-linear da universidade. Alguns dos resultados mais interessantes se encontram a seguir.

### RESULTADOS

Como exemplo da utilidade dos diagramas isoperiódicos gerados, é possível comparar as figuras (1) e (2). Ambas representam determinado espaço de parâmetros (conjunto de condições) do mesmo sistema, que foi estudado em um artigo em processo de publicação<sup>[1]</sup>.

A figura (1) é um diagrama dos expoentes de Lyapunov, onde azul é equilíbrio, preto é periodicidade, amarelo é caos, e verde é divergência (ou seja, regiões onde os métodos numéricos não chegam a nenhum atrator). Já a figura (2) é um diagrama isoperiódico gerado por esse código, onde roxo-claro é equilíbrio, preto é caos, marrom é divergência, e cada uma das outras cores representa um atrator periódico de período diferente, como descrito na legenda na parte superior da figura.

Ao compará-las, é possível perceber que as regiões de caos, equilíbrio e divergência

possuem formatos bastante similares nas duas figuras, corroborando a eficácia do método. É importante destacar que os formatos não são exatamente iguais devido a questões de precisão, e o cálculo dos expoentes de Lyapunov continua sendo indispensável para essa delimitação.

Também vemos que o período dos atratores aumenta de acordo com sua proximidade com a região caótica. Por último, na figura (2), vemos um ponto onde cinco regiões de períodos diferentes se encontram, demarcada por um círculo branco. Tal ponto é chamado de *quint point*, que é um fenômeno observado pela primeira vez há pouco tempo<sup>[2][3]</sup>, e sua presença apenas pode ser estudada com o uso de diagramas isoperiódicos.

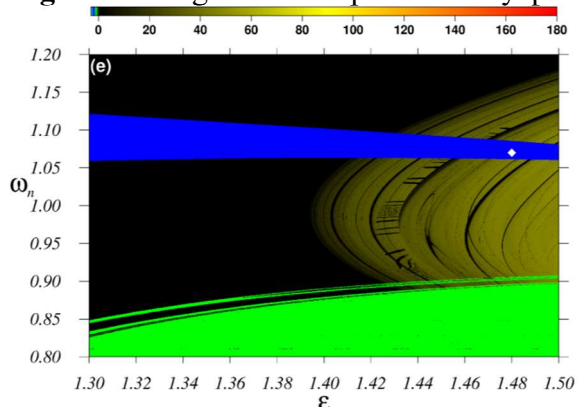
## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em conclusão, o programa desenvolvido atingiu o objetivo de ser uma ferramenta útil ao estudo de sistemas dinâmicos não-lineares, complementando outros métodos e revelando informações que não seriam facilmente obtidas de outras formas, como a presença de *quint points*. Assim, tal programa já foi e continuará sendo importante para a identificação de características interessantes nesses sistemas.

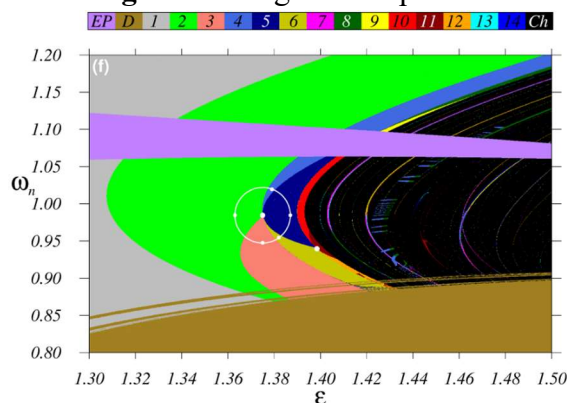
**Palavras-chave:** dinâmica não-linear; diagramas isoperiódicos; *quint points*.

## ILUSTRAÇÕES

**Figura 1:** Diagrama do expoente de Lyapunov



**Figura 2:** Diagrama isoperiódico



Fonte: Oliveira et al, 2025

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

OLIVEIRA, André de et al. Multistability and quint points in an intensity-modulated magneto-optical trap model. **Physics Letters A**, 2025, *no prelo*.

FIELD, Richard J.; FREIRE, Joana G.; GALLAS, Jason AC. Quint points lattice in a driven Belousov–Zhabotinsky reaction model. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 31, n. 5, 2021.

MANCHEIN, Cesar et al. Quint points lattice and multistability in a damped-driven curved carbon nanotube oscillator model. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 33, n. 6, 2023

---

**DADOS CADASTRAIS**

---

**BOLSISTA:** Gabriel Bertram Corrêa

**MODALIDADE DE BOLSA:** PROBIC/UDESC (IC)

**VIGÊNCIA:** 09/2024 a 08/2025 – Total: 12 meses

**ORIENTADOR(A):** Holokx Abreu Albuquerque

**CENTRO DE ENSINO:** CCT

**DEPARTAMENTO:** Departamento de física

**ÁREAS DE CONHECIMENTO:** Ciências exatas e da Terra / Física

**TÍTULO DO PROJETO DE PESQUISA:** Fenômenos complexos em sistemas dinâmicos não lineares

**Nº PROTOCOLO DO PROJETO DE PESQUISA:** NPP3238-2024