DINÂMICA NÃO LINEAR DE NANOTUBOS DE CARBONO CURVADOS COM AMORTECIMENTO CÚBICO E EXCITAÇÃO PERIÓDICA

Fábio Scortegagna Ramos, Dr. César Manchein

INTRODUÇÃO

Nanotubos de carbono são folhas de grafeno enroladas em tubos de 1 a 3 nm de diâmetro, podendo apresentar múltiplas camadas com diâmetros de até centenas de nanômetros (Atkins; Jones, 2010). Suas propriedades, como alta resistência à deformação, flexibilidade, grande área superficial, piezoresistividade e sensibilidade da condutância a perturbações químicas, viabilizam aplicações em sensores de massa e de vibração estrutural (Shoukat; Khan, 2021). Neste contexto, a dinâmica individual do nanotubo é especialmente relevante em nanoressonadores de massa, capazes de resolução da ordem de dezenas de prótons (Shi; Lei; Natsuki, 2021). Regimes de oscilação caóticos, no entanto, comprometem a precisão das frequências de ressonância, tornando tais instabilidades indesejáveis (Askari; Esmailzadeh, 2014). Como o regime dinâmico é fortemente determinado pelo mecanismo de dissipação, usualmente tratado como linear, sabendo que modelos não lineares têm se mostrado mais aderentes aos dados experimentais, é relevante compreender os efeitos desta não linearidade nas respostas dinâmicas dos nanotubos (Wang et al., 2025; Eichler et al., 2011). Em vista disso, este trabalho tem como objetivo determinar qualitativamente a influência de uma dissipação cúbica na estabilização das vibrações de um nanotubo de carbono operando como nanoressonador.

DESENVOLVIMENTO

Os nanotubos foram modelados como vigas viscoelásticas nanométricas de seção transversal anular, sujeitas a forçamento transversal harmônico sobre fundação dissipativa não linear. Para incorporar efeitos de nanoescala, empregou-se a teoria de vigas de Euler-Bernoulli associada à não localidade de Eringen (Wang; Li, 2014). A equação de movimento foi obtida pelo princípio de Hamilton e, a partir das condições de contorno de extremidades simplesmente apoiadas, reduzida a uma equação diferencial ordinária via método de Galerkin, restrito ao primeiro modo normal de oscilação, o mais relevante em uma aproximação de um grau de liberdade. A análise numérica compreendeu o cálculo do espectro de Lyapunov (Wolf et al., 1985) e das curvas de ressonância primária do sistema, que dominam o comportamento qualitativo (Nayfeh; Mook, 2024).

RESULTADOS

Obtivemos a seguinte equação diferencial ordinária não linear e não autônoma, na forma adimensionalizada:

$$\ddot{x}+\left(a+b\,\dot{x}^{2}\right)\dot{x}+x+\gamma\,x^{3}=A\cos\omega\,t.$$

Nela, x é a deflexão do nanotubo; a e b são, respectivamente, os coeficientes de dissipação linear e cúbica; γ é a não linearidade geométrica; A é a amplitude e ω é a frequência angular do forçamento externo. Destes parâmetros, mantivemos fixos: $(\gamma,\omega)=(6{,}0\,;2{,}0)$. O cálculo do espectro de Lyapunov

revelou uma presença negligível de quasiperiodicidade (quando, junto do primeiro, o segundo maior expoente é nulo), logo, podemos considerar apenas o maior expoente $\lambda_1(A, a)$ (Figura 1), que quando positivo, caracteriza um regime caótico e, quando nulo, neste caso, caracteriza um regime periódico (subentendendo-se um segundo maior expoente negativo) (Strogatz, 2024). O cálculo foi realizado seguindo o atrator da esquerda para a direita, partindo de $(x(0); \dot{x}(0)) = (-0{,}1; 0{,}5)$, ao longo de 10^7 passos de integração com tamanho 0,01, após o descarte de um transiente de 10^6 passos. De (a)-(f), cada plano de parâmetros (A, a) de resolução 1000×500, corresponde a um valor distinto de b, respectivamente: 0,0; $1{,}0 \times 10^{-5}$; $5{,}0 \times 10^{-4}$; $2{,}0 \times 10^{-3}$; $5{,}0 \times 10^{-3}$; $1{,}0 \times 10^{-2}$. A transição (a)-(b) não revela mudanças substanciais, mas em (c), as regiões caóticas são levemente distorcidas e deslocadas para baixo, mais evidente na transição (d)-(f), cujo estágio final é um plano majoritariamente periódico. Uma análise mais cuidadosa da transição (c)-(d) revela que as regiões caóticas para menor A são mais resistentes à variação de b, evidenciando que a dinâmica do nanotubo estabiliza-se mais rapidamente para excitações de maior amplitude quando a dissipação cúbica aumenta.

A partir da aproximação de ressonância primária, derivamos a seguinte superfície de nível no espaço (A, x_{max}, ω), em que x_{max} é a deflexão máxima do primeiro harmônico:

$$x_{max}^2 \left[\left(1 - \omega^2 + \frac{3}{4} \gamma x_{max}^2 \right)^2 + \left(a\,\omega + \frac{3}{4} b\,\omega^3 x_{max}^2 \right)^2 \right] - A^2 = 0.$$

Usando o método de Newton (Ruggiero, 1998), calculamos as curvas de resposta (Figura 2) fixando em (a)-(c), $a = 0{,}1$; em (a), $A = 1{,}0$; em (b), $A = 10{,}0$ e em (c), $A = 100{,}0$. As curvas obtidas apresentam o fenômeno de histerese entre os pontos de tangência vertical, denotando uma região de instabilidade, ou seja, seções transversais das regiões de dobra na superfície de nível. De (a)-(c), o incremento de b causa o achatamento da curva e a supressão da região de instabilidade, maior em (a) do que em (b) e (c). Apesar da variação de b ser a mesma, apenas em (c) a região de instabilidade é removida por completo. Disso, conclui-se que as regiões de instabilidade da superfície de nível são mais resistentes à variação de b para menores amplitudes do forçamento externo, resultado que estende para a dimensão ω os obtidos por meio dos diagramas de Lyapunov: *a dissipação cúbica tem maior influência na estabilização do sistema quando as amplitudes do forçamento externo são mais altas*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A consideração de uma dissipação não linear revelou aspectos do mecanismo de dissipação que seriam desprezados na aproximação linear, apesar de serem importantes para a estabilização das oscilações. Com métodos distintos, obtivemos os diagramas de Lyapunov e as curvas de ressonância primária e reunimos duas análises complementares que determinaram o papel da dissipação cúbica na dinâmica do sistema. Tendo em vista as aplicações mencionadas, os resultados da análise qualitativa são relevantes para a literatura de nanoressonadores de nanotubos de carbono e contribuem para a produção de dispositivos mais precisos e eficientes.

Palavras-chave: nanotubos de carbono; nanoressonadores; caos; dissipação cúbica.

ANEXOS

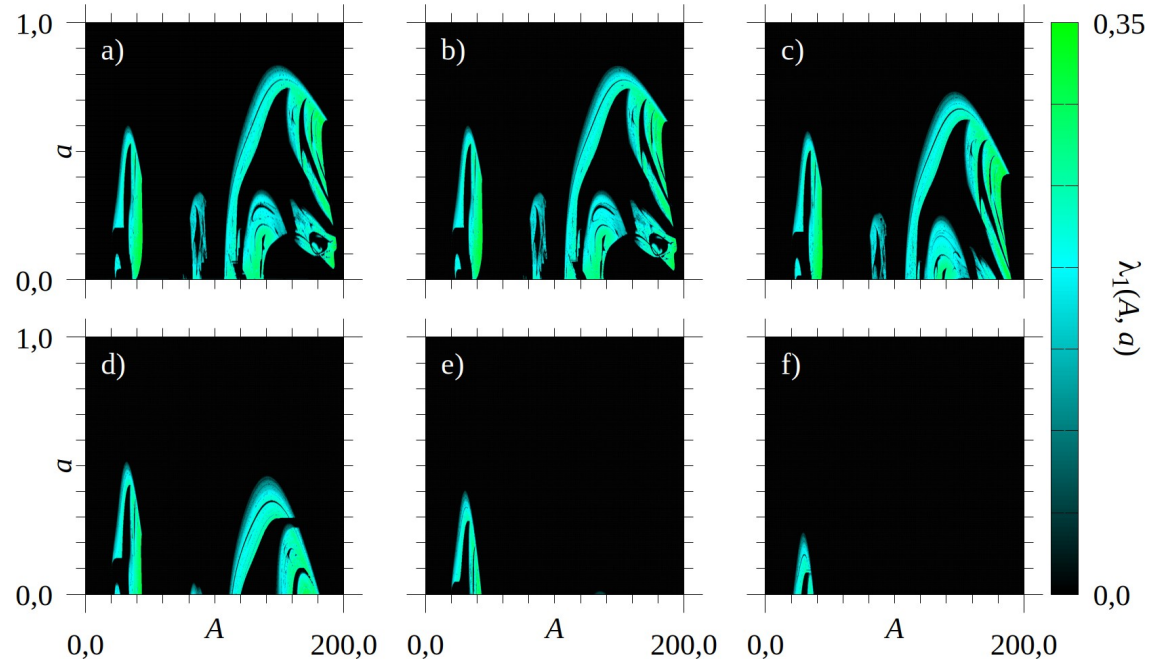


Figura 1. *Estabilização no plano de parâmetros do maior expoente de Lyapunov devido ao aumento da dissipação cúbica.*

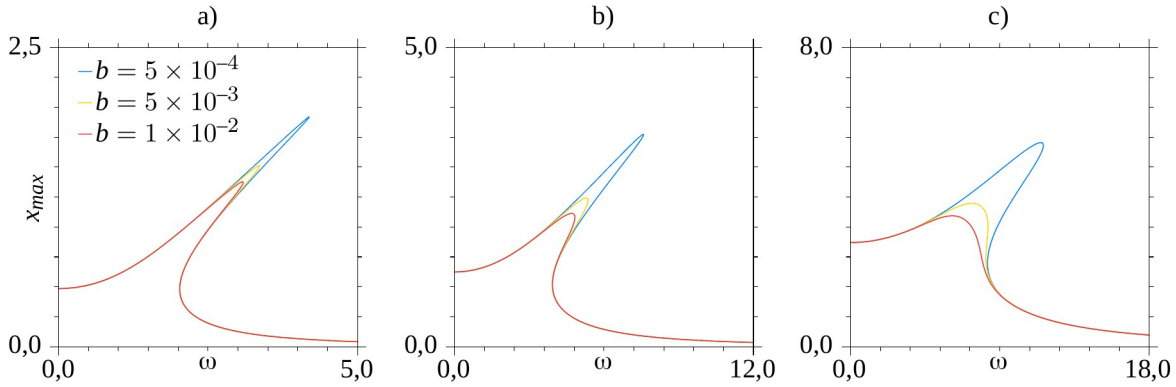


Figura 2. *Redução da região de histerese nas curvas de ressonância primária em decorrência do incremento da dissipação cúbica para amplitudes distintas.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASKARI, H.; ESMAILZADEH, E. Chaotic and periodic vibration of a carbon nanotube supported by nonlinear foundation. New York: **IEEE**, 2014. p. 632–635.

ATKINS, P. W.; JONES, L. **Chemical principles**: the quest for insight. 5. ed. New York: W. H. Freeman, 2010.

EICHLER, Alexander et al. Nonlinear damping in mechanical resonators made from carbon nanotubes and graphene. **Nature nanotechnology**, v. 6, n. 6, p. 339-342, 2011.

NAYFEH, Ali H.; MOOK, Dean T. **Nonlinear oscillations**. John Wiley & Sons, 2024.

RUGGIERO, Márcia Aparecida Gomes; DA ROCHA LOPES, Vera Lúcia. **Cálculo numérico:** aspectos teóricos e computacionais. Pearson/Makron, 1998.

SHI, J. X.; LEI, X. W.; NATSUKI, T. Review on Carbon Nanomaterials-Based Nano-Mass and Nano-Force Sensors by Theoretical Analysis of Vibration Behavior. **Sensors**, v. 21, n. 5, p. 1907, 9 mar. 2021.

STROGATZ, Steven H. **Nonlinear dynamics and chaos:** with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. 3. ed. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2024.

SHOUKAT, R.; KHAN, M. I. Carbon nanotubes: a review on properties, synthesis methods and applications in micro and nanotechnology. **Microsystem Technologies**, [S.l.], v. 27, p. 4183-4192, 2021.

WANG, Y.-Z.; LI, F.-M. Nonlinear primary resonance of nano beam with axial initial load by nonlocal continuum theory. I**nternational Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 61, p. 74-79, 2014.

WANG, Zhen et al. Chaotic dynamics of a carbon nanotube oscillator with symmetry-breaking. **Physica Scripta**, v. 100, n. 1, p. 015225, 2025.

WOLF, Alan; SWIFT, Jack B.; SWINNEY, Harry L.; VASTANO, John A. Determining Lyapunov exponents from a time series. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, [S. l.], v. 16, n. 3, p. 285-317, 1985.