LADRILHAMENTO, ISOMETRIA E GRUPOS

Maria Eduarda Jung, Viviane Maria Beuter, Francielle Kuerten Boeing, Elisandra Bar de Figueiredo

INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca que a geometria "envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento" (Brasil, 2018, p. 271). Além disso, propõe que os alunos não devem apenas identificar as figuras e suas propriedades, mas compreender o aspecto funcional da Geometria, levando ao estudo das transformações geométricas, que podem ser observadas e analisadas dentro dos ladrilhamentos no plano.

Este estudo investigou os ladrilhamentos produzidos por M.C. Escher, e verificou que eles são construídos a partir do uso das isometrias (translação, rotação e reflexão). Além disso, foram estabelecidas as relações entre as isometrias e sua estrutura algébrica, relacionando-as com a teoria de grupos. Ainda, foi pesquisado como esse tema é abordado dentro das habilidades propostas pela BNCC e a maneira como os livros didáticos apresentam esse conteúdo.

DESENVOLVIMENTO

A pesquisa é de caráter qualitativo que, segundo Bodgan e Biklen (1994), caracteriza-se pela produção de dados descritivos, obtidos através do contato direto com a situação investigada, buscando compreender os fenômenos em seu contexto.

O estudo iniciou com análise de BNCC, investigando como o conteúdo das transformações geométricas é abordado dentro do ensino básico. Em seguida, passou para a análise de livros didáticos do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, averiguando como os autores interpretam e desenvolvem as habilidades propostas na BNCC. Para isso foram observados a forma como o conteúdo é apresentado, as atividades propostas e se haviam conexões entre as transformações geométricas e os ladrilhamentos. Após essa análise, foi desenvolvida uma proposta didática, para o Ensino Médio, trazendo as transformações geométricas dentro do conteúdo de matrizes. A proposta foi aplicada na disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática IV (LEM IV).

A próxima etapa foi o estudo da teoria de grupos, para estabelecer uma relação com as isometrias. Por fim, foram feitas análises dos ladrilhamentos de Escher, identificando as isometrias presentes dentro de cada obra e compreendendo como foram utilizadas para a construção das figuras a partir de polígonos. A partir disso, foram realizadas, no software Inskape, a modelagem dessas obras, explorando as isometrias dentro da técnica da dentada.

RESULTADOS

Ao analisar o que a BNCC propõe é possível perceber que os conceitos de ladrilhamento, transformações geométricas e isometrias estão presentes em diversas etapas da Educação Básica. As habilidades propostas na BNCC foram analisadas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, mas aqui destacaremos apenas os resultados do Ensino Médio, fazendo conexão com a atividade proposta para a disciplina de LEM IV. O conteúdo de ladrilhamento no plano aparece na habilidade EM13MAT505 e as transformações geométricas aparecem na habilidade EM13MAT105, fazendo uma retomada e aprofundamento do conteúdo visto no 7º e 8º ano do Ensino Fundamental.

A investigação, de nove coleções de livros didáticos do Ensino Médio, indicou que apenas algumas coleções abordam simultaneamente os dois temas. Dentre elas, destacam-se as obras "SuperAÇÃO" (Editora Moderna) e "IDENTIDADE" (Editora Saraiva). A primeira apresenta o

conteúdo no segundo volume, direcionado ao 2º ano, enquanto a segunda o insere no terceiro volume, voltado ao 3º ano.

O livro "SuperAÇÃO" (Steigenberger, 2024), tem como foco o desenvolvimento das habilidades EM13MAT505 e EM13MAT105. O material parte da definição de polígonos, avança para os ladrilhamentos e, a partir da análise dos ângulos internos, generaliza quais polígonos pavimentam o plano. Em outro capítulo, a obra estabelece conexões entre as transformações geométricas e elementos da natureza, como os fractais, manifestações culturais, a exemplo da cerâmica marajoara, e o mundo do trabalho, incluindo as profissões de artista plástico e topógrafo.

O livro "IDENTIDADE" (Iezzi *et al.*, 2024), aborda as duas habilidades propostas. A progressão de conteúdos adotada parte da Geometria Analítica, avança para o estudo das Transformações Geométricas e leva à aplicação desses conceitos ao ladrilhamento do plano. A obra analisa a presença das transformações em obras de Escher, na arquitetura, nos fractais e em patrimônios imateriais. Com relação aos ladrilhamentos, a obra parte da demonstração matemática que generaliza os regulares para, em seguida, permitir a investigação prática dos semirregulares por meio de atividades de recorte e colagem.

A partir da análise dos livros, foi elaborada uma sequência didática para o Ensino Médio, cujo foco é apresentar as isometrias e mostrar a sua aplicação com matrizes, fazendo a conexão entre os conteúdos. Para isso, na atividade os alunos investigavam como as transformações geométricas podem ser representadas através de matrizes, utilizando o software GeoGebra para comparar os resultados obtidos. Por fim, eles realizavam uma atividade no GeoGebra, na qual poderiam observar através de controles deslizantes como as transformações geométricas ocorrem. A atividade foi aplicada em uma aula da disciplina de LEM IV do curso de Licenciatura em Matemática da Udesc.

Sabemos que uma isometria do plano é uma transformação que preserva distâncias. Verificou-se que toda isometria é bijetora e, portanto, admite uma inversa, que também é uma isometria. Além disso, a composição de duas isometrias é novamente uma isometria. Essa operação é associativa, possui elemento neutro e, existem os elementos inversos. Portanto, o conjunto das isometrias do plano, munido da composição, constitui um grupo. Verificou-se ainda que as rotações em torno da origem e as translações formam subgrupos do grupo das isometrias. Na nova etapa da IC, pretende-se aprofundar o estudo da estrutura desse grupo e relacioná-lo com as Transformações Lineares.

A partir da análise das obras de Escher, pode-se concluir que as isometrias vistas nos ladrilhamentos finais são frutos da aplicação das isometrias dentro da técnica da dentada. Por fim, foram modelados no software Inskape alguns ladrilhamentos de Escher (Figura 1), com o objetivo de compreender como as diferentes isometrias aplicadas em suas obram refletem na figura final.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa permitiu investigar as relações entre ladrilhamentos, isometrias e grupos. Além disso, a análise da BNCC e dos livros didáticos permitiu compreender que esses conceitos são apresentados em diferentes etapas da educação básica de forma progressiva, sendo a cada etapa o conhecimento novo abordado e o conceito dos ladrilhamentos e isometrias aprofundado. Com isso, foi possível elaborar uma sequência didática para o Ensino Médio, focada no ensino das transformações geométricas aliadas as matrizes. Além disso, foi possível compreender que as isometrias são utilizadas dentro das obras de Escher, e como a forma como a composição de isometrias é realizada interfere na produção final do ladrilhamento.

Palavras-chave: livro didático; transformações geométricas; BNCC.

ANEXOS

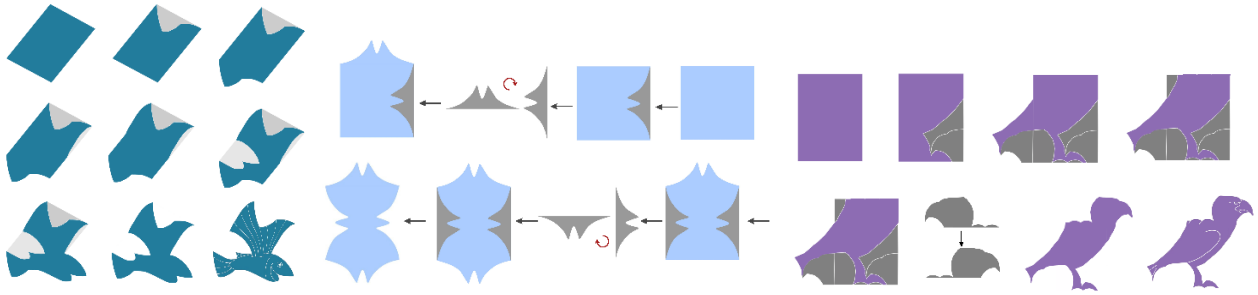


Figura 1. *Isometrias na técnica da dentada.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em https://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em 04 de set de 2026.

IEZZI, Gelson; DEGENSZAJN, David; TAMARI, Marcio; PASMANIK, Guilherme. **Identidade Saraiva:** Matemática, 3º ano: volume 3: manual do professor. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2024.

STEIGENBERGER, André Luiz (ed.). **Moderna superação!:** matemática: volume II: ensino médio, 2º ano: manual do professor. Organizadora: Editora Moderna. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2024.