A ÁLGEBRA NO JOGO DOS 15

Thierry Henry Neumann Claudino, Viviane Maria Beuter, Francielle Kuerten Boeing, Elisandra Bar de Figueiredo

INTRODUÇÃO

O Jogo dos 15 consiste em movimentar blocos numerados de 1 a 15, dispostos sobre uma grade 4×4, com o objetivo de alcançar uma configuração ordenada, como mostra a Figura 1(a). Segundo Adorno e Dias (2016), o desafio inicial, proposto por Sam Loyd, era trocar os blocos 14 e 15 de lugar, como na Figura 1(b), recolocando todos os demais blocos em suas posições originais, por meio de movimentos das peças adjacentes ao espaço vazio.

Dependendo da posição dos blocos numerados que se deseja obter, nem sempre é possível alcançá-la a partir da configuração ordenada. Os critérios de (in)solucionabilidade das configurações constituíram a principal linha de investigação do projeto de iniciação científica.

Conforme a abordagem apresentada por Archer (1999), as movimentações do jogo podem ser modeladas por permutações das casas da grade. Para isso, atribui-se uma numeração fixa às 16 casas, e cada movimento é representado pela permutação que troca a casa ocupada pelo espaço vazio com uma casa adjacente, mantendo as demais inalteradas. Dessa forma, a configuração do tabuleiro pode ser descrita por meio da posição do espaço vazio e da disposição dos blocos nas casas numeradas.

Essa interpretação conecta o problema diretamente à teoria os grupos, em particular ao estudo dos grupos simétricos, fornecendo uma estrutura algébrica para analisar os critérios de (in)solucionabilidade das configurações.

DESENVOLVIMENTO

Foram estudados conceitos fundamentais da teoria dos grupos, incluindo grupos e subgrupos, homomorfismos e isomorfismos, classes laterais e grupos quociente, grupos de permutações, com ênfase grupos simétricos e seus subgrupos alternados (Rotman, 1994). Também foram aprofundados os conceitos de fatoração de permutações em ciclos disjuntos e de paridade de permutações, que constituíram a base algébrica para a análise do Jogo dos 15. Os resultados estudados foram apresentados em forma de seminários pelo bolsista para as coordenadoras do projeto.

A partir dessa fundamentação, investigou-se a impossibilidade do desafio de Sam Loyd, utilizando a estrutura do grupo simétrico associada a uma numeração fixa das casas da grade. Observou-se que, quando o espaço vazio parte e retorna à casa 16, o número de trocas realizadas entre o espaço vazio e os blocos adjacentes é necessariamente par.

Durante a pesquisa, o Laboratório Fábrica Matemática - Fab3D providenciou impressões 3D de Jogos dos 15, o que foi de grande ajuda na identificação de quais posições eram possíveis e impossíveis e permitiu uma representação mais visual dos resultados da teoria dos grupos de permutações no Jogo dos 15 (Figuras 1c e 1d).

RESULTADOS

A partir da análise de posições específicas, foi observado que as configurações alcançáveis poderiam ser caracterizadas pela paridade das permutações associadas às quinze peças. Archer (1999) apresenta uma demonstração desse resultado no contexto do Jogo dos 15.

Considerando uma configuração de referência e a numeração das quinze peças, cada configuração pode ser associada a uma permutação de S_{15}. Nessa representação, a permutação não descreve uma ação sobre os números exibidos nas peças, mas o rearranjo das peças em relação à

configuração de referência. Entretanto, a possibilidade de realizar uma determinada permutação por movimentos legais depende também da posição do espaço vazio.

Quando o espaço vazio retorna à sua posição inicial, as movimentações realizadas correspondem a uma permutação par. Assim, nesse caso, as configurações alcançáveis a partir da configuração de referência são precisamente aquelas associadas às permutações pares.

Com isso, dizemos que uma configuração f é solucionável em uma configuração g, quando é possível alcançar g a partir de f por meio de uma sequência de movimentos legais. Quando o espaço vazio ocupa a mesma posição nas duas configurações e uma é solucionável na outra, necessariamente a paridade das duas configurações é igual.

Como consequência, o desafio de Sam Loyd é impossível. Basta notar que a configuração padrão (representada por Id) e a configuração $14-15$ (representada por $(14\ 15)$) fixam o espaço vazio no mesmo lugar, mas possuem paridades distintas.

Além disso, demonstra-se que todas as configurações insolucionáveis, em relação à configuração padrão, são solucionáveis em $14-15$. Assim, as configurações do Jogo dos 15 podem ser classificadas em duas classes de solucionabilidade, representadas pela configuração padrão e pela configuração com as peças 14 e 15 trocadas.

Por fim, foi estabelecido um critério geral de solucionabilidade que considera simultaneamente a paridade da permutação associada às quinze peças e a posição do espaço vazio. Considerando como casas pares as posições 1, 3, 6, 8, 9, 11, 14, 16 (ver Figura 2), se diz que o espaço vazio está em uma casa par quando ele se encontra em uma dessas casas, caso contrário é dito que ele está em uma casa ímpar. Segundo o critério encontrado, para uma configuração ser possível, a paridade da permutação associada a aquela posição tem que coincidir com a paridade da casa em que o espaço vazio se encontra.

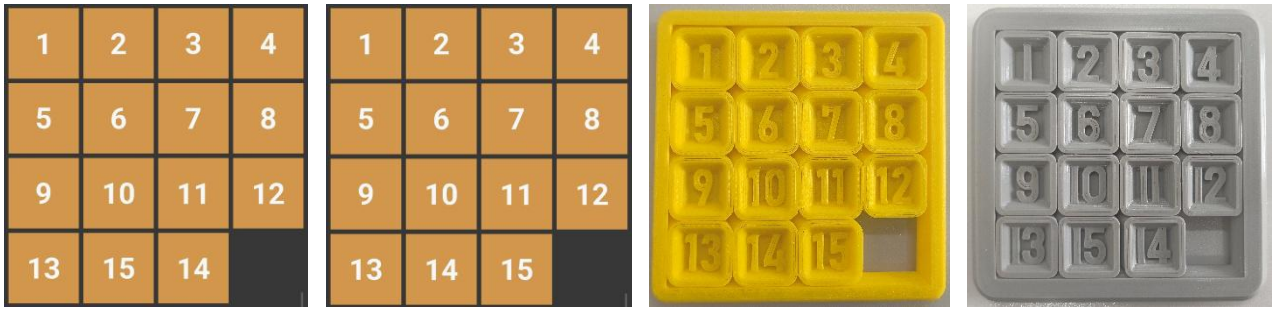
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho demonstrou a importância da teoria dos grupos, especificamente do grupo simétrico, na análise da solucionabilidade do Jogo dos 15. Ao representar cada configuração como uma permutação em S_{15}, foi possível aplicar conceitos como paridade e fatoração em transposições para determinar quais posições admitem solução. A impossibilidade da troca entre os blocos 14 e 15, decorre do fato de que qualquer sequência de movimentos que devolve o espaço vazio à posição inicial corresponde a uma permutação par, enquanto a transposição $(14\ 15)$ é ímpar. Os resultados obtidos reforçam a relevância da álgebra abstrata na formalização de problemas e abrem caminho para futuras investigações, como a extensão dos critérios de solucionabilidade para tabuleiros de dimensões variadas e o desenvolvimento de abordagens didáticas que integrem teoria dos grupos e jogos matemáticos no ensino.

Atualmente, os principais resultados da pesquisa encontram-se em processo de sistematização para a elaboração de um artigo no qual iremos abordar brevemente a história do tema, apresentar resultados básicos dos grupos simétricos e demonstrar os principais resultados alcançados.

Palavras-chave: 15-puzzle; teoria dos grupos; grupo simétrico; paridade das permutações.

ANEXOS:



a) Posição padrão *b) Posição 14-15* *c) Material concreto posição padrão* *d) Material concreto posição 14-15*

Figura 1. *Jogos dos 15*

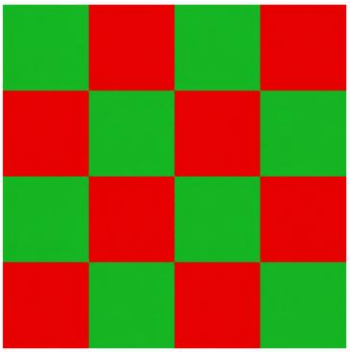


Figura 2. *casas pares (em verde) e casas ímpares (em vermelho)*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADORNO, T.P.B e DIAS, I. R. M. Puzzle-15: uma aplicação da teoria de grupo. **Revista da Olimpíada - IME** - UFG, n. 11, 42 - 60, out de 2016.

ARCHER, A. F. A Modern Treatment of the 15 Puzzle. **Mathematics Magazine**, v. 72, n. 5, p. 793–798, nov. 1999.

ROTMAN, J. J. **An Introduction to the Theory of Groups**. 4. ed. New York: Springer-Verlag, 1994.