# SISTEMAS DINÂMICOS COM VARIÁVEIS COMPLEXAS

Daniel Felipe Meurer [1], Holokx Abreu Albuquerque[2], Paulo Cesar Rech[3].

[1] Acadêmico do Curso de Licenciatura em Física - CCT - bolsista PIBIC/CNPq
[2] Professor, Departamento de Física - CCT
[3] Orientador, Departamento de Física - CCT – paulo.rech@udesc.br.

Palavras-chave: Oscilações. Sistemas Dinâmicos Não Lineares. Variáveis Complexas.

Se permitirmos que as variáveis de um sistema sejam números complexos, isto é, com parte real e imaginária, e, ainda, possíveis dois parâmetros ajustáveis, como amplitude de oscilação (A) e uma frequência (Ω), podemos descrever um sistema caótico da seguinte forma [1]:

$$\dot{z} + f(z,\bar{z}) = Ae^{i\Omega t} \tag{1}$$

Em que $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$ seu complexo conjugado, e pode ser reescrito como um sistema de equações do tipo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\cos\omega - \mathcal{R}f(z,\bar{z}) \\ \dot{y} &= A\,\mathrm{sen}\,\omega - \mathfrak{I}f(z,\bar{z}) \\ \dot{\omega} &= \Omega \end{aligned} \tag{2}$$

Com $\omega = \Omega t$, $\mathcal{R}$ e $\mathfrak{I}$ sendo respectivamente as parte real e parte imaginária da função f.

Feita essas considerações, façamos a análise de um desses sistemas. Para começar, foi construído o diagrama de Lyapunov (Fig.1), usando os dois maiores expoentes, para sistemas descritos pelo sistema de equações acima com a seguinte função f:

$$f(z,\bar{z}) = (z^2 - \bar{z}^2)z + \bar{z} \tag{3}$$

Que podemos reescrever como o sistema de equações (2):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4xy^2 - x + A\cos\omega \\ \dot{y} &= -4x^2y + y + A\,\mathrm{sen}\,\omega \\ \dot{\omega} &= \Omega \end{aligned} \tag{4}$$

Varrendo os parâmetros A e Ω em uma malha de 500×500 valores, usando um integrado Runge-Kutta de 4ª ordem cujo o passo de integração seja $1.0\times10^{-3}$ e as condições iniciais são (0, -0.7, 0) [2]. Assim conseguimos obter o diagrama de Lyapunov (Fig.1).

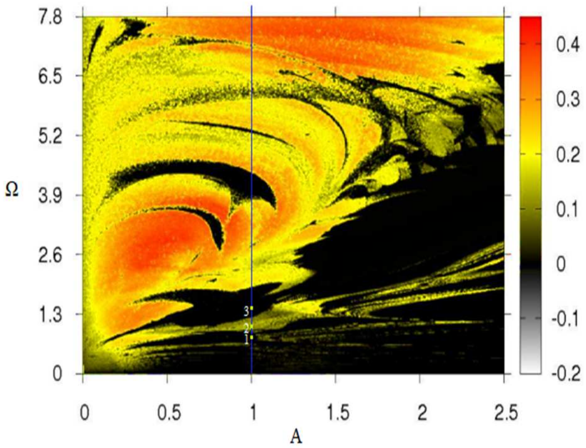


**Fig. 1** *Diagrama de Lyapunov para o sistema (3)*

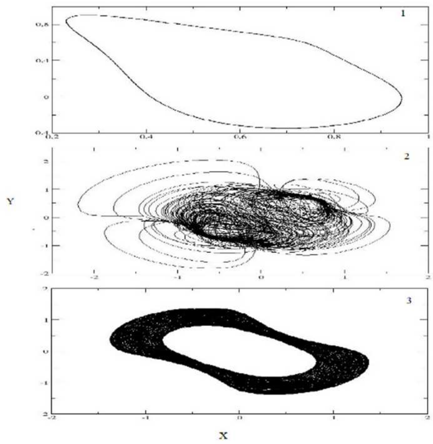

**Fig. 2** Atratores *obtidos seguindo a linha pontilhada no diagrama de Lyapunov em A =1.*

A partir do diagrama de Lyapunov, conseguimos verificar que este sistema apresenta caos (região vermelha e amarela) e comportamento periódico (região preta). Assim, foi traçado uma reta em A = 1, isto é, fixamos um valor para a amplitude, e vamos verificar o comportamento do outro parâmetro, **Ω**.

Para o valor de **Ω** = 0.8 (Fig. 2–1) encontramos um atrator periódico, cujo período é 1, para o valor de **Ω** = 1.0 (Fig.2–2) encontramos um atrator caótico e por fim para o valor de **Ω** = 1.5 (Fig.2–3) , encontramos um atrator quasi-periódico, isto é, apresenta uma periodicidade não regular.

Osciladores são sistemas com dois parâmetros (neste caso, amplitude A e frequência de oscilação **Ω**), através desta investigação, foi possível estudar seu comportamento dinâmico, concluindo que oscilações complexas podem sim apresentar caoticidade, mais que isso, que sistemas de oscilações complexas podem apresentar comportamento periódicos.

Através dos dois maiores expoentes de Lyapunov conseguimos construir um espectro de Lyapunov (Fig.1) e fixando um valor para a amplitude e variando a frequência de oscilação, conseguimos obter alguns atratores para corroborar o que está descrito pela escala de cores no espectro de Lyapunov.

**Referencias:**

[1] SPROTT, Julien C.Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows. World Scientific, 2010.

[2] ALBUQUERQUE, A. Holokx; CARDOSO, Julio C. D. Dynamics of driven oscillators with complex variables on lyapunov diagrams.Proceeding Series Of The Brazilian Society Of Applied And Computational Mathematics, [s.l.], p.010112-1, 17 out. 2013. SBMAC. http://dx.doi.org/10.5540/03.2013.001.01.0112.