APLICAÇÕES DE DERIVADA FRANCIONÁRIA EM PROBLEMAS DE ENGENHARIA

André Felipe da Silva [1], Pablo Andres Munõz Rojas[2]

[1] Acadêmico do Curso de Engenharia Mecânica – CCT – bolsista PROBIC/UDESC
[2] Orientador, Departamento de Engenharia Mecânica –CCT– pablo.munoz@udesc.br.

Palavras-chave: Derivadas fracionárias; Viscoelasticidade; Cálculo Numérico.

Devido a não linearidade material inerente à viscoelasticidade, descrever uma relação constitutiva de tensão-deformação pode ser difícil, para tentar modelar matematicamente tal relação foram criados diversos modelos com ligações em série e em paralelo de diversos elementos que se comportam de forma elástica, representado por uma mola, e elementos de comportamento viscoso, representado por um amortecedor. Para cada elemento é necessário encontrar um parâmetro de propriedade do material que descreve aquele comportamento, no caso da mola é preciso um modulo de elasticidade que relaciona a tensão e a deformação para cada mola utilizada no modelo e uma viscosidade que relaciona a tensão com a taxa de variação da deformação para cada amortecedor incorporado, a necessidade da obtenção de várias propriedades do material torna mais trabalhoso o modelamento dos materiais. As derivadas fracionárias se aplicam neste contexto de tentar modelar o comportamento dos materiais da melhor forma possível com a menor quantidade de parâmetros utilizando um terceiro tipo de elemento que não se comporta de forma elástica e nem viscosa completamente, chamado de amortecedor-mola, que possui um parâmetro sem significado físico direto que relaciona a tensão com a derivada de ordem não natural, geralmente entre 0 e 1, da deformação.

As derivadas fracionárias são definidas como derivadas de ordem não natural, apesar de a definição ter sido feita pela primeira vez no século XVII apenas duzentos anos depois começou a ser aplicado a problemas de engenharia. Neste estudo foi focado na definição de Grunwald-Letnikov, foram estudadas e analisadas as diferenças entre os códigos que calculam numericamente e procuram diminuir o gasto computacional associado ao cálculo das derivadas.

A derivada de Grunwald-Letnikov vem da definição das derivadas de ordem natural e utilizando a função gama a fim de possibilitar o cálculo para valores de ordem não natural chegando à equação (1).

$$ {}_{t_1}D_{t_2}^{\alpha} f(t) = \lim_{N\to\infty} (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(m+1)} f(t - m\Delta t) \qquad (1) $$

Devido ao fato de ser necessário computar toda a história da variável para cada passo de tempo o gasto em tempo e em armazenamento computacional aumenta muito com o decorrer do tempo e levando em consideração que os fatores de Grunwald-Letnikov tenderem a zero com o passar do tempo foram criados códigos que calculam as derivadas de forma aproximada em favor de economizar tempo de processamento. O primeiro código sai direto da definição da derivada tomando um valor limitado para N e utilizando $\Delta t = t/N$, o segundo código de economia estudado neste trabalho foi o descrito por Pandovan (1987) onde apenas a história mais recente da variável é considerada no cálculo truncando o somatório em um tempo predeterminado, o segundo código é descrito por Schimdt e Gaul (2002) onde a história mais antiga da variável é considerada nos cálculos como apenas uma contribuição aproximada através de uma função de transferência que pode ser calculada através de uma interpolação.

Na figura 1 é demonstrado as derivadas fracionárias calculada com o tempo de 0 à 10 com o passo de tempo de 0.1 para a função f(t) = $x^{1.5}$ para diversos valores de *alpha* diferentes, assim como o valor analítico da função e da sua derivada de ordem um, é possível verificar a proximidade entre a derivada fracionária e a derivada de ordem natural quando a ordem das duas são próximas, sendo que no gráfico não é possível verificar a diferença da derivada calculada com $\alpha = 0.001$ e a função em si (ou a derivada de ordem 0 da função) nem da derivada fracionária com $\alpha = 0.999$ da de ordem natural igual à um.

A figura 2 mostra um comparativo da mesma função, com derivadas fracionárias calculadas com t entre 0 e 20, e *alpha = 0.7 e* Δt=0.1, é possível notar que com o aumento do número de Nmax utilizado e uma valor maior para i e k os códigos se assemelham mais com o de referência que computa toda a história da variável. É possível notar que aumentar de 40 para 80 o parâmetro Nmax aproxima bastante da referência mesmo a primeira calculando com todos os passos em cada ponto.

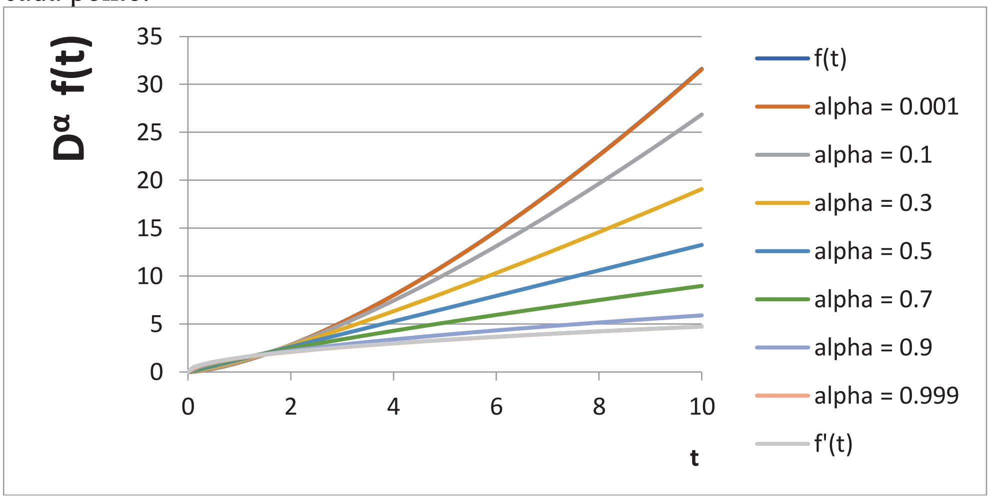

Fig 1. Gráfico comparativo de diversos valores de alpha.

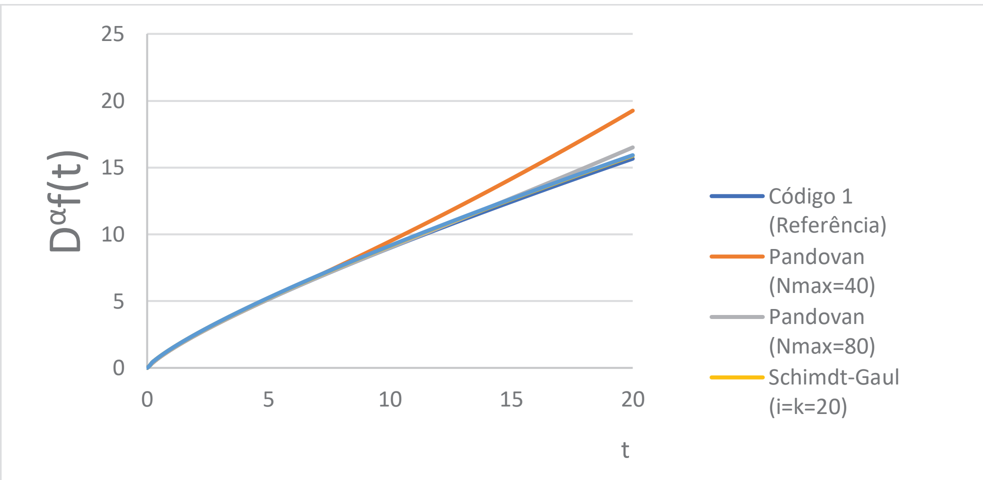

Fig 2. Comparação entre os códigos com diferentes parametros.