Controle $\mathcal{H}_2$

Prof. Tiago Dezuo

Em muitas aplicações é importante se ter garantias que possíveis perturbações ocorrendo em um sistema de controle não afetam de maneira proibitiva as variáveis de interesse sob controle. A capacidade de um sistema de controle de limitar os efeitos indesejáveis dessas perturbações é denominada de rejeição de perturbações e pode ser quantificada de várias formas. Nesta seção aborda-se o uso de normas de sistemas (com relação ao ganho do operador entrada de perturbação-saída de interesse) como forma de medir o grau de influência das perturbações externas sobre as saídas de interesse.

Historicamente, as normas de sistemas são definidas a partir da resposta em frequência do sistema[1]. Por esse motivo estaremos supondo nesta seção que o sistema a ser analisado é exponencialmente estável. Caso isso não ocorra podemos primeiro projetar um controlador estabilizante e proceder a análise em questão para o sistema em malha fechada.

1 Norma $\mathcal{H}_2$ de sistemas

Norma de sistemas é uma extensão da ideia de norma de sinais que é uma medida de energia. A norma 2 de um sinal $z(t)$ é definida como sendo

$$\|z(t)\|_2^2 = \int_0^\infty z(t)^2 \; dt = \mathcal{E}. \tag{1}$$

A expressão anterior é uma generalização da noção de energia dissipada, pois se $z(t)$ fosse um sinal de tensão a expressão acima nos daria a energia dissipada em um resistor unitário. O conjunto de todos os sinais que possuem energia finita, i.e. são quadraticamente integráveis, formam um espaço denominado $\mathcal{L}_2$.

A norma 2 de um sinal vetorial $z(t) = \left[\begin{array}{ccc} z_1(t) & \dots & z_n(t) \end{array}\right]'$, é definida como sendo a soma das energias de todas as componentes do vetor[2]:

$$\|z(t)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty z_i(t)^2 \; dt = \int_0^\infty z(t)'z(t) \; dt = \mathcal{E}. \tag{2}$$

O teorema de Parseval (a seguir) é um resultado importante pois permite relacionar energia de um sinal, definida no domínio do tempo, com a transformada de Fourier do sinal.

[1] A resposta em frequência de um sistema linear invariante estável caracteriza a resposta e regime permanente para excitações senoidais de diversas frequências. Em resumo, para uma excitação $w(t) = A\,\mathrm{sen}(w_0 t)$ a resposta em regime permanente do sistema $Z(s) = H(s)W(s)$ é $z(t) = B\,\mathrm{sen}(w_0 t + \phi)$ onde $B = A\,|H(j\omega_0)|$ e $\phi = \angle H(j\omega_0)$.

[2] Note que $z(t)'z(t) = \sum_{i=1}^{n} z_i(t)^2$.

Teorema 1 (Teorema de Parseval). *Seja $f(t)$ um sinal real causal com energia limitada e $F(j\omega)$ a sua transformada de Fourier. Então, a seguinte relação envolvendo a energia $\mathcal{E}$ do sinal $f(t)$ é verdadeira:*

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty f(t)' f(t)\ dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)^* F(j\omega)\ d\omega. \tag{3}$$

■

A seguir, apresenta-se a definição da norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas nominais além dos métodos utilizados na sua determinação numérica. Considere o seguinte sistema nominal

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) \end{aligned} \tag{4}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ a entrada de pertubações, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ as saídas de interesse, e A, B_w, C_z são matrizes constantes com dimensões apropriadas. Suponha $x(0) = 0$. Este sistema pode ser representado no domínio da frequência pela seguinte matriz de transferência da perturbação para a saída de performance:

$$H(s) = C_z \left(sI - A\right)^{-1} B_w. \tag{5}$$

No caso SISO ($n_w = n_z = 1$) norma $\mathcal{H}_2$ pode ser definida como a energia da saída quando o sistema é excitado por um impulso. Assim, considerando que no sistema (4) $n_w = 1$ e $n_z = 1$, a relação entrada-saída pode ser representada pela função de transferência $H(s) = H_{wz}(s)$, conforme o diagrama de blocos visto na Figura 1.

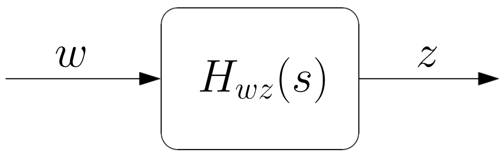

Figura 1: Relação entrada-saída.

A energia da resposta ao impulso é então dada por (1), $z(t)$ é o sinal de saída. Da Figura 1 verifica-se que

$$Z(s) = H(s)W(s). \tag{6}$$

Como o sinal de entrada $w(t)$ é um impulso na origem[3] tem-se que $W(s) = 1$ e portanto $z(t) = h(t)$. Como $h(t)$ representa o operador entrada-saída do sistema, define-se como norma $\mathcal{H}_2$ do sistema a energia da resposta ao impulso

$$\|h(t)\|_2^2 = \int_0^\infty h(t)^2\ dt \quad , \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\right\}, \tag{7}$$

[3]Baseado na relação frequencial $Z(j\omega) = H(j\omega)W(j\omega)$ podemos interpretar o sinal de entrada como uma ponderação que, ao ser aplicada no sistema, produz a saída. Como a transformada do impulso é uma constante dizemos que um impulso pondera igualmente todas as componentes de frequência do sistema. Nenhum outro sinal de entrada tem essa propriedade.

ou, de forma alternativa, no domínio da frequência (vide Teorema de Parseval)

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)^* H(j\omega)\ d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} H(j\omega)^* H(j\omega)\ d\omega \tag{8}$$

Argumentos similares a esses podem ser usados para a definição da norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas MIMO. Considere o caso de um sistema sujeito a duas entradas e duas saídas.

Perceba que agora o operador entrada-saída é representado pela matriz de transferência $H(s)$, implicando que

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Neste caso a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema é definida como sendo a soma das energias de todas as funções $h_{ij}(t)$. Esta definição pode ser interpretada em termos da resposta ao impulso como segue.

Como o sistema é linear pode-se usar a ideia da superposição e analisar de forma separada o efeito dos sinais de entrada w_1 e w_2. Considerando primeiro que o sistema é afetado pelo sinal $w(t) = w_a(t)$ correspondente a um impulso no canal w_1 com $w_2 = 0$, o sinal de saída será dado por

$$z(t) = z_a(t) = \begin{bmatrix} h_{11}(t) \\ h_{21}(t) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Considerando agora o sinal $w(t) = w_b(t)$ correspondente a um impulso no canal w_2 com $w_1 = 0$, o sinal de saída será dado por

$$z(t) = z_b(t) = \begin{bmatrix} h_{12}(t) \\ h_{22}(t) \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Desta forma a energia total do sistema é expressa por

$$\mathcal{E}_{total} = \int_0^{\infty} z_a(t)' z_a(t)\ dt + \int_0^{\infty} z_b(t)' z_b(t)\ dt, \tag{12}$$

que pode ser reescrita como[4]:

$$\mathcal{E}_{total} = \sum_{i,j}\int_0^{\infty} h_{ij}(t)^2\ dt = \int_0^{\infty} \texttt{traço}\,\{h(t)'h(t)\}\ dt. \tag{13}$$

Da mesma forma como a norma 2 de um sinal $x(t)$ é obtida através da energia das componentes do vetor, i.e. $\|x(t)\|_2^2 = \sum_i \int_0^{\infty} x_i(t)^2\ dt$, a norma 2 da matriz $h(t)$ é obtida através da energia das componentes da matriz, i.e. $\|h(t)\|_2^2 = \sum_{i,j}\int_0^{\infty} h_{ij}(t)^2\ dt$. Lembrando que a soma do quadrado dos elementos da matriz $h(t)$ pode ser expressa como $\texttt{traço}\,\{h(t)'h(t)\}$ tem-se que a norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas MIMO é dada por

$$\|h(t)\|_2^2 = \sum_{i,j}\int_0^{\infty} h_{ij}(t)^2\ dt = \int_0^{\infty} \texttt{traço}\,\{h(t)'h(t)\}\ dt \quad , \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}. \tag{14}$$

[4]O traço de uma matriz quadrada M, que será denotado aqui por $\texttt{traço}\,\{M\}$, é por definição a soma dos elementos da diagonal principal de M e corresponde à soma dos autovalores de M. Além disso $\texttt{traço}\,\{MM'\} = \texttt{traço}\,\{M'M\}$ e corresponde à soma do quadrado de todos os elementos de M.

Usando o teorema de Parseval a expressão anterior pode ser reescrita na forma

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{i,k}\int_{-\infty}^{\infty} H_{ik}(j\omega)^2\ d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \texttt{traço}\left\{H(j\omega)^* H(j\omega)\right\}\ d\omega, \tag{15}$$

onde $H_{ik}(j\omega)$ são os elementos de $H(j\omega)$.

Pela definição da norma $\mathcal{H}_2$ em (15), observa-se que a norma será finita somente para sistemas estáveis e estritamente próprios, isto é, $\lim_{\omega\to\infty} H(j\omega) = 0$.

Baseado no fato que a norma 2 de um sistema representa a energia da resposta ao impulso, podemos também usar a norma 2 para obter a energia da resposta para um sinal qualquer conhecido de energia limitada. Seja $W(s)$ a transformada do sinal de entrada para o qual queremos calcular a energia da resposta. O sinal de resposta é então $Z(s) = H(s)W(s)$ que pode ser visto como a resposta ao impulso de um sistema auxiliar cuja função de transferência é $\tilde{H}(s) = H(s)W(s)$. Assim basta incorporar a transformada do sinal de entrada na função de transferência e usar os mesmos resultados anteriores desenvolvidos para resposta ao impulso.

2 Determinação da Norma $\mathcal{H}_2$ via gramianos

A norma $\mathcal{H}_2$ de um sistema genérico estritamente próprio e estável é obtida a partir da transformada inversa da função de transferência

$$h(t) = C_z e^{At} B_w = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\right\}. \tag{16}$$

Substituindo a expressão anterior em (14) obtém-se:

$$\begin{aligned}\|H(s)\|_2^2 &= \int_0^{\infty} \texttt{traço}\left\{B_w' e^{A't} C_z' C_z e^{At} B_w\right\}\ dt \qquad (17)\\ &= \texttt{traço}\left\{B_w'\left(\int_0^{\infty} e^{A't} C_z' C_z e^{At}\ dt\right) B_w\right\} \qquad (18)\\ &= \texttt{traço}\left\{B_w' P_o B_w\right\} \qquad (19)\end{aligned}$$

onde a matriz simétrica positiva definida

$$P_o = \int_0^{\infty} e^{A't} C_z' C_z e^{At}\ dt \tag{20}$$

e conhecida como gramiano de observabilidade, a qual pode ser obtida pela solução da seguinte equação de Lyapunov:

$$A' P_o + P_o A + C_z' C_z = 0. \tag{21}$$

Devido à comutatividade do operador $\texttt{traço}\{\cdot\}$ é possível inverter os termos na expressão (14) levando à seguinte expressão dual da norma $\mathcal{H}_2$:

$$\begin{aligned}\|H(s)\|_2^2 &= \texttt{traço}\left\{C_z\left(\int_0^{\infty} e^{At} B_w B_w' e^{A't}\ dt\right) C_z'\right\} \qquad (22)\\ &= \texttt{traço}\left\{C_z P_c C_z'\right\} \qquad (23)\end{aligned}$$

onde P_c é uma matriz simétrica definida positiva, conhecida como gramiano de controlabilidade, dada por:

$$P_c = \int_0^\infty e^{At} B_w B_w' e^{A't} \, dt \tag{24}$$

De maneira similar ao gramiano de observabilidade, a matriz P_c pode ser obtida através da resolução da seguinte equação de Lyapunov:

$$AP_c + P_c A' + B_w B_w' = 0. \tag{25}$$

Os gramianos de controlabilidade e observabilidade P_c, P_o podem ser facilmente calculados por métodos numéricos eficientes. No entanto, para sistemas incertos os gramianos acima são de pouca utilidade pois não podem ser obtidos numericamente. Para contornar essa dificuldade podemos utilizar LMIs para obter um limitante superior para a norma.

3 Determinação da Norma $\mathcal{H}_2$ via LMIs

Sabe-se que toda solução P da desigualdade

$$A'P + PA + C_z' C_z < 0 \tag{26}$$

satisfaz a relação $P > P_o$ e que podemos obter a igualdade $P = P_o$ com a precisão desejada. Assim temos a seguinte relação

$$\texttt{traço}\{B_w' P B_w\} > \texttt{traço}\{B_w' P_o B_w\} = \|H(s)\|_2^2 \tag{27}$$

e podemos resolver o problema de cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ através de um problema de otimização convexa

$$\|H(s)\|_2^2 = \left\{ \min_P \ \texttt{traço}\{B_w' P B_w\} \ : \ P > 0, \ A'P + PA + C_z' C_z < 0 \right\}. \tag{28}$$

com a segurança de que a igualdade anterior ocorre com a precisão desejada. Do ponto de vista prático, a diferença entre o valor obtido por meio da LMI e a solução exata dada pelo gramiano pode ser controlada ajustando-se a precisão do algoritmo utilizado.

Exemplo 1. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned} \tag{29}$$

onde $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}'$*. O valor exato da norma* $\mathcal{H}_2$ *pode ser obtido através da expressão* $\|H(s)\|_2 = \sqrt{\texttt{traço}\{B_w' P_o B_w\}}$*, onde* P_o *satisfaz a Equação* (21)*. Alternativamente, resolvendo o problema de otimização* (28)*, obtém-se* $\|H(s)\|_2 = 0,5$*.* ■

4 Controle $\mathcal{H}_2$

Considere o sistema linear a seguir.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + B_w w \\ z &= C_z x + D_z u \\ u &= Kx\end{aligned} \tag{30}$$

onde $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ corresponde aos sinais de perturbação e B_w é uma matriz constante com dimensões apropriadas.

O problema a ser resolvido consiste em projetar um controlador que minimize a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema em malha fechada. Como visto anteriormente, minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ corresponde a minimizar a energia da resposta ao impulso do sistema de malha fechada cuja função de transferência é:

$$H(s) = (C_z + D_z K)\left(sI - (A + BK)\right)^{-1} B_w. \tag{31}$$

De forma similar às seções anteriores, pode-se obter uma formulação convexa para o problema de controle $\mathcal{H}_2$ através do gramiano de controlabilidade. Logo, a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema (30) em malha fechada pode ser determinada através do seguinte problema de otimização:

$$\min_{Q,K} \texttt{traço}\left\{(C_z + D_z K)Q(C_z' + K'D_z')\right\} : \begin{cases} Q > 0 \\ (A + BK)Q + Q(A' + K'B') + B_w B_w' < 0 \end{cases} \tag{32}$$

Note que a parametrização $Y = KQ$ utilizada em deduções anteriores para tornar as condições de estabilização convexas não pode ser aplicada diretamente na função objetivo. Para contornar este problema, considere a desigualdade matricial

$$N - (C_z + D_z K)QQ^{-1}Q(C_z' + K'D_z') > 0. \tag{33}$$

Aplicando o complemento de Schur na desigualdade anterior, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} N & (C_z + D_z K)Q \\ Q(C_z + D_z K)' & Q \end{bmatrix} > 0. \tag{34}$$

Agora, um limitante superior da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema em malha fechada pode ser determinado através do seguinte problema de otimização[5]

$$\min_{Q,K} \texttt{traço}\{N\} \text{ sujeito a: } \begin{cases} \begin{bmatrix} N & (C_z + D_z K)Q \\ Q(C_z + D_z K)' & Q \end{bmatrix} > 0 \\ (A + BK)Q + Q(A' + K'B') + B_w B_w' < 0 \end{cases} \tag{35}$$

Portanto, uma solução convexa para o problema de controle $\mathcal{H}_2$ pode ser expressa através do seguinte teorema.

[5] Observe que nesse caso $\texttt{traço}\{N\}$ tende a $\texttt{traço}\{(C_z + D_z K)Q(C_z' + K'D_z')\}$.

Teorema 2. *Considere o sistema linear em (30). Suponha que as matrizes $Q = Q'$, $N = N'$ e Y de dimensões apropriadas sejam a solução do seguinte problema de otimização:*

$$\min_{Q,K} \ \texttt{traço}\{N\} \ \text{sujeito a:} \begin{cases} \begin{bmatrix} N & C_zQ + D_zY \\ QC_z' + Y'D_z' & Q \end{bmatrix} > 0 \\ QA' + AQ + Y'B' + BY + B_wB_w' < 0 \end{cases} \tag{36}$$

Então o sistema (30) com $K = YQ^{-1}$ é assintoticamente estável e a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema em malha fechada satisfaz $\|H_{wz}\|_2^2 \leq \texttt{traço}\{N\}$. ■

Exercício 1. *Considere o seguinte sistema linear sujeito a perturbações impulsivas:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u \end{aligned} \tag{37}$$

O objetivo neste exercício é determinar uma lei de controle $u = Kx$ tal que o sistema seja assintoticamente estável em malha fechada e a sua norma $\mathcal{H}_2$ seja minimizada. Simular as trajetórias $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do sistema em malha fechada considerando um sinal de perturbação na forma:

$$w(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t-1), \tag{38}$$

onde $\delta(t-1)$ representa um impulso unitário em $t = 1s$. ■